Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 93.

VIII Сем. 15 Апрѣля 1890 г. № 9.

ПРОЕКТИВНЫЕ РЯДЫ СЪ ОБЩИМЪ ОСНОВАНІЕМЪ *).

1. *Особенныя точки проективныхъ рядовъ.* Между точками двухъ проективныхъ рядовъ есть такія, которыя, по своимъ замѣчательнымъ свойствамъ, заслуживаютъ особаго разсмотрѣнія. Пусть L $(a, b, c, d, \ldots)$ и L′ $(a', b', c', d', \ldots)$ суть проективные ряды, соотвѣтственныя точки которыхъ обозначены одними и тѣми-же буквами, такъ что напримѣръ $(abcd)=(a'b'c'd')$. Обозначимъ чрезъ v'_∞ и v безконечно удаленную точку ряда L′ и ей соотвѣтственную ряда L и чрезъ w_∞ и w'—безконечно удаленую точку ряда L и ей соотвѣтственную ряда L′, такъ-что $(abw_\infty v)=$ $=(a'b'w'v'_\infty)$. *Точки v и w', соотвѣтственныя безконечно удаленнымъ точкамъ проективныхъ рядовъ, имѣютъ вполнѣ опредѣленныя положенія* и могутъ быть найдены по общему способу построенія соотвѣтственныхъ точекъ (Зад. 2*a*. „Вѣстникъ“ сем. V, стр. 125).

2. Такъ какъ $\frac{aw_\infty}{bw_\infty}=1$ и $\frac{a'v'_\infty}{b'v'_\infty}=1$, то условіе проективности $(abw_\infty v)=(a'b'w'v'_\infty)$ преобразовывается въ пропорцію $\frac{av}{bv}=\frac{b'w'}{a'w'}$, откуда слѣдуетъ равенство $av.a'w'=bv.b'w'$, т. е. *произведеніе разстояній двухъ соотвѣтственныхъ точекъ проективныхъ рядовъ отъ точекъ v и w' имѣетъ постоянную величину*. Величину эту будемъ называть (по Steiner'у) *степенью проективности*.

3. Прямыя L и L′, на которыхъ расположены ряды, называются *основаніями* рядовъ. Точки v и w' дѣлятъ каждая свое основаніе на двѣ безконечныя части (L_1 и L_2, L'_1 и L'_2). Понятно, что точкамъ, находящимся въ одной части ряда L (напр. въ L_1), соотвѣтствуютъ точки одной части ряда L′ (напр. L'_1) и обратно. Части основаній, содержащія соотвѣтственныя точки (L_1 и L_1', L_2 и L_2') наз. *соотвѣтственными*.

4. Однозначными (т. е. оба положительными или оба отрицательными) направленіями двухъ проективныхъ рядовъ условимся называть направленія соотвѣтственныхъ частей, принимая за начала ихъ точки v и w'. При такомъ условіи 1) разстоянія соотвѣтственныхъ точекъ отъ точекъ v и w' однозначны и слѣд. степень проективности выражается положительнымъ

*) Статья эта служитъ дополненіемъ къ ст. „Проективные пучки и ряды“, помѣщенной въ № 54 „Вѣстника“.

числомъ, которое будемъ обозначать чрезъ p^2; 2) соотвѣтственные отрѣзки (т. е. ограниченные соотвѣтственными точками) имѣютъ направленія однозначныя, когда концы ихъ лежатъ по обѣ стороны отъ точекъ v и w',—и противоположныя, когда концы ихъ лежатъ по одну сторону отъ v и w'.

5. *Въ каждыхъ двухъ соотвѣтственныхъ частяхъ проективныхъ рядовъ имѣется по парѣ такихъ соотвѣтственныхъ точекъ, разстоянія которыхъ отъ точекъ v и w' равны.* Обозначивъ эти точки чрезъ g и g', h h', мы можемъ найти ихъ элементарнымъ построеніемъ на основаніи формулъ

$$vg=w'g'=+\sqrt{p^2},\quad vh=w'h'=-\sqrt{p^2}.$$

Точки g и g', h и h' называются точками степени (Steiner).

6. *Равные соотвѣтственные отрѣзки.* Соотвѣтственныя точки a и a', b и b' проективныхъ рядовъ, какъ мы видѣли (2), удовлетворяютъ равенству: $va.w'a'=vb.w'b'$, или

$$\frac{va}{vb}=\frac{w'b'}{w'a'};$$

отсюда, по свойству пропорцій, получимъ

$$\frac{vb-va}{vb}=\frac{w'a'-w'b'}{w'a'},\ \text{т. е.}\ \frac{ab}{vb}=-\frac{a'b'}{w'a'},$$

или

$$\frac{ab}{a'b'}=-\frac{vb}{w'a'}=-\frac{va}{w'b'}.$$

Слѣдовательно, соотвѣтственные отрѣзки могутъ быть равны по величинѣ, т. е. равенство $ab=\pm a'b'$ возможно, когда $va=\mp w'b'$ или $vb=\mp w'a'$, и обратно. Но точки a и b' или a' и b, какъ не соотвѣтственныя, всегда можно выбрать такъ, чтобы эти условія удовлетворялись, а потому *проективные ряды всегда имѣютъ равные соотвѣтственные отрѣзки.*

7. Объяснивъ себѣ значеніе знаковъ (4) въ выведенныхъ условіяхъ равенства соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, заключаемъ, что *не соотвѣтственные концы равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ равноотстоятъ отъ точекъ v и w' и находятся въ несоотвѣтственныхъ частяхъ рядовъ, когда эти отрѣзки однозначны,—и въ соотвѣтственныхъ, когда они противоположны по знаку.* Отсюда понятно построеніе такихъ отрѣзковъ: на равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ v и w' берутъ произвольно точки a и b' и находятъ имъ соотвѣтственныя a' и b; отрѣзки ab и $a'b'$ будутъ равны и однозначны или противоположны по знакамъ, смотря по тому, взяты-ли точки a и b' въ несоотвѣтственныхъ или въ соотвѣтственныхъ частяхъ рядовъ.

8. Равные соотвѣтственные отрѣзки, противоположные по знакамъ, очевидно, могутъ имѣть всѣ возможныя величины отъ 0 до ∞. Отрѣзки-же однозначные имѣютъ нѣкоторый minimum, отличный отъ нуля. Дѣйствительно, если $ab=a'b'$, то, вслѣдствіе условій $va=-w'b'$ и $vb=-w'a'$, равенство $va.w'a'=p^2$ даетъ $-va.vb=p^2$, или

$$av.vb=p^2;$$

кромѣ того $$av+vb=ab;$$

такъ какъ среднее ариѳметическое $\geqq$ средняго геометрическаго, то отсюда получаемъ, что

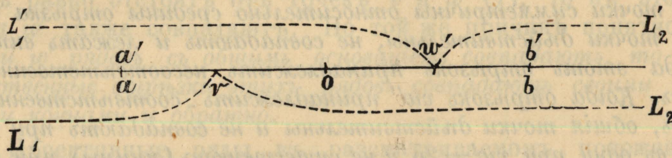
$$ab \geqq 2p,$$

чѣмъ и опредѣляется minimum отрѣзка. Итакъ, *равные соотвѣтственные отрѣзки проективныхъ рядовъ, не содержащіе точекъ v и w', измѣняются отъ 0 до ∞; равные соотвѣтственные отрѣзки, содержащіе точки v и w', измѣняются отъ $2p(=gh=g'h')$ до безконечности.*

9. *Общія точки проективныхъ рядовъ.* Основанія двухъ проективныхъ рядовъ могутъ быть наложены на одну прямую, которая, въ этомъ случаѣ, называется *общимъ основаніемъ рядовъ.* Понятно, что проективные ряды могутъ быть такъ наложены на общее основаніе, что какая нибудь пара ихъ равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ совпадетъ своими соотвѣтственными концами. Каждая точка общаго основанія, въ которой совпадаютъ сотвѣтственныя точки проективныхъ рядовъ, сотвѣтственна сама себѣ и называется *общею или двойною точкою* рядовъ съ общимъ основаніемъ.

10. Ряды съ общимъ основаніемъ могутъ либо совпадать своими направленіями (4), либо не совпадать. Въ 1-мъ случаѣ (фиг. 36) отрѣ-

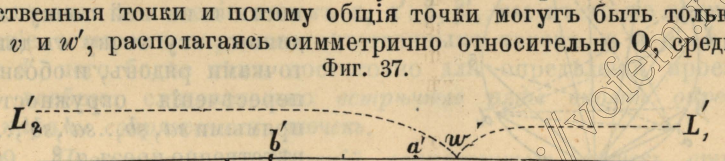
Фиг. 36.



зокъ vw' принадлежитъ не соотвѣтственнымъ частямъ рядовъ и потому соотвѣтственныхъ точекъ не содержитъ, вслѣдствіе чего общія точки могутъ быть только внѣ этого отрѣзка. Соотвѣтственные отрѣзки, не содержащіе точекъ v и w', имѣя въ этомъ случаѣ противоположныя направленія (7), не могутъ совпадать соотвѣтственными концами; отрѣзки-же содержащіе точки v и w', какъ одинаково направленные, могутъ дать общія точки при своемъ совпаденіи, которые должны находиться по обѣ стороны отрѣзка vw' (напр. aa' и bb') и, слѣдовательно, будутъ симметричны относительно средины О этого отрѣзка. Ясно, что въ разсматриваемомъ случаѣ общія точки всегда существуютъ.

11. Во 2-мъ случаѣ (фиг. 37) только отрѣзокъ vw' содержитъ соотвѣтственныя точки и потому общія точки могутъ быть только между точками v и w', располагаясь симметрично относительно О, средины vw'.

Фиг. 37.



(Напр. aa', bb'). Понятно, что въ этомъ случаѣ двѣ общія точки могутъ совпадать въ одну въ точкѣ О.

Если точка aa' есть общая, то условіе соотвѣственности
$$va.w'a'=p^2$$
приводитъ къ равенству
$$va.aw'=p^2;$$
кромѣ того
$$va+aw'=vw';$$
такъ какъ среднее ариѳметическое $\geq$ средняго геометрическаго, то отсюда получаемъ, что $vw'\geq 2p$—условіе, при которомъ ряды въ разсматриваемомъ случаѣ имѣютъ общія точки. Не трудно видѣть, что при $vw'=2p$, общія точки совпадаютъ въ одну.

12. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что средины равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, при совпаденіи ихъ, совпадаютъ съ срединой O отрѣзка vw'; такъ какъ средины различныхъ отрѣзковъ не совпадаютъ, то въ совпаденіи можетъ быть только одна пара сооответственныхъ равныхъ отрѣзковъ, откуда заключаемъ, что общихъ точекъ не можетъ быть болѣе двухъ.

13. Резюмируя предыдущія разсужденія, приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ:

Проективные ряды съ общимъ основаніемъ всегда имѣютъ двѣ общія точки (дѣйствительныя или мнимыя).

Общія точки симметричны относительно средины отрѣзка vw'.

Общія точки дѣйствительны, не совпадаютъ и лежатъ внѣ отрѣзка vw', когда этотъ отрѣзокъ принадлежитъ несоотвѣтственнымъ частямъ рядовъ. Когда отрѣзокъ vw' принадлежитъ соотвѣтственнымъ частямъ рядовъ, общія точки дѣйствительны и не совпадаютъ при $vw'>2p$, совпадаютъ въ одну при $vw'=2p$ и не существуютъ (мнимы) при $vw'<2p$; при томъ онѣ всегда находятся внутри отрѣзка vw'.

14. Въ статьѣ „Проективные пучки и ряды“ былъ указанъ способъ построенія общихъ точекъ (зад. 3a, стр. 129, V сем.); кромѣ того способа существуетъ еще нѣсколько другихъ, изъ которыхъ мы приведемъ здѣсь способъ Steiner'a, какъ наиболѣе общій и простой.

Пусть два проективные ряда заданы тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ a и a', b и b', c и c' (фиг. 38). Въ ряду a, b, c возьмемъ какую нибудь точку d и найдемъ ей соотвѣтственную въ ряду a', b', c'. Для этого беремъ произвольную окружность и на ней точку s; соединивъ эту точку съ данными точками рядовъ, и обозначивъ пересѣченія окружности съ прямыми sa, sb,..sa', sb',.. соотвѣтственно чрезъ $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta' \ldots$, получимъ проективные пучки $(s, \alpha\beta\gamma\delta)$ и $(s, \alpha'\beta'\gamma'\ldots)$; соединивъ точку α съ точками α', β', γ' и точку α' съ точкими α, β, γ, δ, получимъ также

Фиг. 38.

проективные пучки (Проек. пучки и ряды, 7, V сем. стр. 128): $(\alpha, \alpha'\beta'\gamma'\ldots)$ и $(\alpha', \alpha\beta\gamma\delta\ldots)$ съ общимъ лучемъ $\alpha\alpha'$; пересѣченія другихъ соотвѣтственныхъ лучей этихъ пучковъ будутъ на одной прямой l. (ibid. Теор. III, b). Если прямая, соединяющая точку α съ пересѣченіемъ прямыхъ l и $\alpha'\delta$, пересѣчетъ окружность въ точкѣ δ', то прямая $s\delta'$ пересѣчетъ общее основаніе данныхъ рядовъ въ искомой точкѣ d', соотвѣтственной d.

Если бы лучъ sd былъ параллеленъ общему основанію рядовъ, то тѣмъ же построеніемъ была-бы найдена точка w', соотвѣтственная безконечно удаленной точкѣ.

15. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если на прямой l взять какую нибудь точку и, соединивъ ее съ точками α и α', найти пересѣченія λ и λ' этихъ прямыхъ съ окружностью, то прямыя $s\lambda$ и $s\lambda'$ пересѣкутъ общее основаніе рядовъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ. Отсюда понятно, что примѣнивъ это построеніе къ точкамъ пересѣченія прямой l съ окружностью, получимъ общія точки данныхъ рядовъ.

16. *Встрѣчные ряды.* Проективные ряды могутъ быть такъ наложены на общее основаніе, что несоотвѣтственные концы какой-нибудь пары ихъ равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, напр. ab и $a'b'$, попарно совпадутъ, положимъ a и b' въ точкѣ α, a' и b—въ точкѣ α'. Такъ какъ несоотвѣтственные концы двухъ равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ равно отстоятъ отъ точекъ v и w' (7), то въ этомъ случаѣ точки v и w' также совпадаютъ. По той же причинѣ понятно, что *если точки v и w' рядовъ съ общимъ основаніемъ совпадаютъ, то всѣ равные соотвѣтственные отрѣзки этихъ рядовъ совпадаютъ своими несоотвѣтственными концами и обратно.*

17. Проективные ряды въ разсматриваемомъ положеніи будемъ называть *встрѣчными* (en involution), точку O, въ которой совпадаютъ точки v и w',—*центромъ встрѣчи*, а точки, въ которыхъ попарно совпадаютъ несоотвѣтственные концы равныхъ соотвѣственныхъ отрѣзковъ,—*сопряженными*. Изъ сказаннаго раньше (7) о равныхъ соотвѣтственныхъ отрѣзкахъ слѣдуетъ, что *сопряженныя точки встрѣчныхъ рядовъ находятся по одну сторону отъ центра встрѣчи, или по обѣ стороны отъ него, смотря по тому, соотвѣтственными-ли или несоотвѣтственными частями совпадаютъ ряды.*

18. Пусть α и α', β и β' суть двѣ пары сопряженныхъ точекъ, такъ что въ α и β совпадаютъ попарно точки a и b', c и d'; тогда въ точкахъ α' и β' должны совпадать попарно точки a' и b, c' и d. Отсюда ясно, что зная положеніе точекъ α, α', β, β', мы въ то же время знаемъ, положеніе четырехъ паръ соотвѣтственныхъ точекъ a и a', b и b', c и c', d и d', чего болѣе чѣмъ достаточно для опредѣленія проективныхъ рядовъ вообще; слѣдовательно *встрѣчные ряды вполнѣ опредѣляются двумя парами сопряженныхъ точекъ.*

19. *Произведеніе разстояній сопряженныхъ точекъ отъ центра встрѣчи есть величина постоянная.* Дѣйствительно, въ сопряженныхъ точкахъ α и α' лежатъ соотвѣтственныя точки проективныхъ рядовъ a и a', удовлетворяющія равенству (2) $va.w'a'=p^2$, которое, при совпаденіи точекъ v и w' въ точкѣ O, обращается въ равенство $O\alpha.O\alpha'=p^2$. Доказанное свойство вполнѣ опредѣляетъ встрѣчные ряды, такъ какъ даетъ

возможность построить точку сопряженную съ данной, если извѣстны центръ O и степень p^2.

20. Задача *По даннымъ двумъ парамъ сопряженныхъ точекъ* α *и* α', β *и* β' *двухъ встрѣчныхъ рядовъ найти ихъ центръ встрѣчи.*

Положеніе искомаго центра O опредѣляется условіемъ

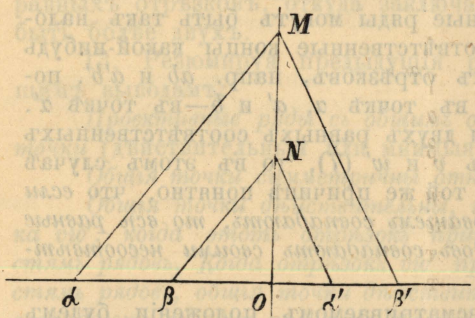
$$O\alpha . O\alpha' = O\beta . O\beta'$$

или

$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{O\beta'}{O\alpha'};$$

отсюда слѣдуетъ такое построеніе (фиг. 39): на отрѣзкахъ $\alpha\beta'$ и $\alpha'\beta$, какъ на основаніяхъ, строятся треугольники $\alpha M\beta'$ и $\alpha' N\beta$, такъ что $\alpha M \parallel \beta N$ и $\beta' M \parallel \alpha' N$; прямая MN въ пересѣченіи съ основаніемъ данныхъ рядовъ опредѣлитъ искомую точку O, ибо

Фиг. 39.



$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{OM}{ON} = \frac{O\beta'}{O\alpha'}.$$

21. *Ангармоническое отношеніе какихъ нибудь четырехъ точекъ изъ трехъ паръ сопряженныхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ сопряженныхъ съ первыми*, т. е. если α и α', β и β', γ и γ' суть три пары сопряженныхъ точекъ, то напр. $(\alpha\alpha'\beta\gamma) = (\alpha'\alpha\beta'\gamma')$, ибо если въ этихъ точкахъ совпадаютъ по порядку точки a и b', a' и b, c' и d, d' и c, e и f', e' и f, двухъ проективныхъ рядовъ $a, b, c, d, \ldots$ и $a', b', c', d', \ldots$ то $(abce) = (a'b'c'e')$, откуда и слѣдуетъ доказываемое равенство. Само собой понятно обратное предложеніе, т. е. что шесть точекъ на прямой, обладающія доказаннымъ свойствомъ, суть три пары сопряженныхъ точекъ встрѣчныхъ рядовъ. Изъ предложенія сейчасъ доказаннаго слѣдуетъ, что *сопряженныя точки встрѣчныхъ рядовъ образуютъ проективные ряды.*

22. Изъ доказаннаго свойства трехъ паръ сопряженныхъ точекъ Desargues вывелъ замѣчательныя соотношенія между отрѣзками, ограниченными этими точками. Соотношенія эти могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ. Раскрывъ обѣ части равенства (21)

$$(\alpha\alpha'\beta\gamma) = (\alpha'\alpha\beta'\gamma'),$$

получимъ

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta} : \frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma} = \frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta'} : \frac{\alpha'\gamma'}{\alpha\gamma'};$$

произведя здѣсь дѣленіе и сдѣлавъ круговое перемѣщеніе буквъ, получимъ первую группу соотношеній, которыя могутъ быть представлены въ слѣдующемъ симметричномъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha\beta.\alpha\beta'}{\alpha'\beta.\alpha'\beta'} &= \frac{\alpha\gamma.\alpha\gamma'}{\alpha'\gamma.\alpha'\gamma'}, \\ \frac{\beta\gamma.\beta\gamma'}{\beta'\gamma.\beta'\gamma'} &= \frac{\beta\alpha.\beta\alpha'}{\beta'\alpha.\beta'\alpha'}, \\ \frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'} &= \frac{\gamma\beta.\gamma\beta'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'}. \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

Далѣе раскрывъ обѣ части равенства

$$(\alpha\beta\alpha'\gamma') = (\alpha'\beta'\alpha\gamma),$$

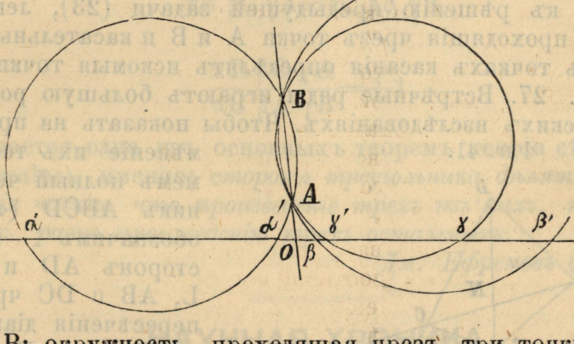
освободивъ его отъ знаменателя и сдѣлавъ сокращеніе, сдѣлаемъ въ результатѣ послѣдовательно перестановку буквъ α и α', β и β', γ и γ', получимъ другую группу равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta'.\beta\gamma'.\gamma\alpha' &= \alpha\gamma'.\beta\alpha'.\gamma\beta', \\ \alpha\beta'.\beta\gamma.\gamma'\alpha' &= \alpha\gamma.\beta\alpha'.\gamma'\beta', \\ \beta\gamma'.\gamma\alpha.\alpha'\beta' &= \beta\alpha.\gamma\beta'.\alpha'\gamma', \\ \gamma\alpha'.\alpha\beta.\beta'\gamma' &= \gamma\beta.\alpha\gamma'.\beta'\alpha'. \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

23. Задача. *Даны двѣ пары сопряженныхъ точекъ* (α *и* α', β *и* β'), *найти точку сопряженную съ данной точкой* γ.

Опишемъ двѣ какія нибудь окружности (фиг. 40), у которыхъ отрѣзки $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$ были-бы хордами; пусть эти окружности пересѣкутся въ

Фиг. 40.



точкахъ A и B; окружность, проходящая чрезъ три точки A, B, γ пересѣчетъ основаніе рядовъ въ искомой точкѣ γ'; пересѣченіе-же прямой AB съ основаніемъ рядовъ будетъ центръ встрѣчи O, потому что $OA.OB = O\alpha.O\alpha' = O\beta.O\beta' = O\gamma.O\gamma'$ *).

---

*) Эта задача можетъ быть рѣшена при помощи одной линейки на основаніи слѣдующей теоремы: три пары прямыхъ, проходящихъ чрезъ четыре точки, произвольною прямою пересѣкаются въ шести точкахъ въ инволюціи, эта теорема доказана авторомъ далѣе въ § 27. *Прим. ред.*

24. *Встрѣчные ряды*, будучи проективными (21) съ общимъ основаніемъ, *имѣютъ двѣ общія сопряженныя точки; точки эти симметричны относительно центра встрѣчи* (O) (13). Такъ какъ общія сопряженныя точки (φ и χ) суть тѣ, въ которыхъ совпадаютъ соотвѣтственные отрѣзки равные нулю, а отрѣзки такіе принадлежатъ къ системѣ соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, не содержащихъ точекъ v и w (8), а слѣдовательно и точки O, то заключаемъ, что, *если встрѣчные ряды получены отъ совмѣщенія проективныхъ рядовъ соотвѣтственными частями (т. е. если сопряженныя точки находятся по одну сторону отъ центра встрѣчи O), то общія сопряженныя точки дѣйствительны и совпадаютъ съ точками совпаденія точекъ степени g и g', h и h'; въ противномъ случаѣ общія сопряженныя точки мнимы. Общія сопряженныя точки совпадаютъ въ одну въ центрѣ встрѣчи O, когда степень проективности $p^2=0$, т. е., когда одна изъ точекъ каждой пары сопряженныхъ совпадаетъ съ центромъ встрѣчи O.*

25. *Общія точки встрѣчныхъ рядовъ суть гармонически сопряженныя съ каждой парой сопряженныхъ точекъ. и наоборотъ.* Ибо, если φ(g и g') и χ(h и h') суть общія точки, α и α' какая нибудь пара сопряженныхъ, то

$$O\varphi^2=O\chi^2=O\alpha . O\alpha',$$

т. е. точки φ и χ удовлетворяютъ условію гармоническаго дѣленія отрѣзка $\alpha\alpha'$. Изъ подобныхъ же равенствъ выводится обратное предположеніе.

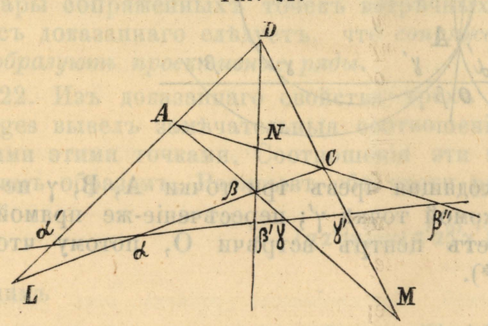
На основаніи доказаннаго заключаемъ, что, *если одна изъ общихъ точекъ встрѣчныхъ рядовъ безконечно удалена, то всѣ отрѣзки, ограниченные сопряженными точками, имѣютъ общую средину, съ которой совпадаетъ другая общая точка.*

26. Задача. *Даны двѣ пары сопряженныхъ точекъ (α и α', β и β'); найти общія точки встрѣчныхъ рядовъ.*

Обращаясь къ рѣшенію предыдущей задачи (23), легко видѣть, что окружности, проходящія чрезъ точки A и B и касательныя къ основанію рядовъ, въ точкахъ касанія опредѣлятъ искомыя точки φ и χ.

Приложеніе. 27. Встрѣчные ряды играютъ большую роль во многихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Чтобы показать на примѣрѣ примѣненіе ихъ теоріи, возьмемъ полный четыреугольникъ ABCD (фиг. 41) и обозначимъ пересѣченіе сторонъ AD и BC чрезъ L, AB и DC чрезъ M,—и пересѣченія діагоналей AC и BD чрезъ N. Положимъ, что нѣкоторая прямая пересѣкаетъ прямыя

Фиг. 41.



BC и DA въ точкахъ α и α',

CA и DB „ „ β и β'.

AB и DC „ „ γ и γ';

тогда (A, αLCB)=(A, $\alpha\alpha'\beta\gamma$) и (D, LαBC)=(D, $\alpha'\alpha\beta'\gamma'$). Но ($\alpha$LCB)=(L$\alpha$BC), потому-что отъ перемѣщенія попарно всѣхъ буквъ въ символѣ ангармоническаго отношенія величина его неизмѣняется; слѣдовательно

$$(\alpha\alpha'\beta\gamma)=(\alpha'\alpha\beta'\gamma').$$

Равенство это показываетъ, что α *и* α', β *и* β', γ *и* γ', *суть три пары сопряженныхъ точекъ встрѣчныхъ рядовъ* (21).

28. Если сѣкущая прямая пройдетъ чрезъ точки L и M, то въ этихъ точкахъ совпадутъ попарно сопряженныя точки α и α', γ и γ'; слѣдовательно точки L и M будутъ общими двухъ встрѣчныхъ рядовъ, а потому гармонически сопряженными съ точками β и β' (25). Такимъ образомъ получилась извѣстная теорема, что *діагональ полнаго четыреугольника дѣлится гармонически двумя другими діагоналями.*

29. Обратимся опять къ произвольному положенію сѣкущей прямой и представимъ себѣ, что вершина D (фиг. 41) четыреугольника ABCD безконечно удалена; тогда прямыя DA, DB, DC сдѣлаются параллельными и нашему разсмотрѣнію будетъ подлежать треугольникъ ABC, стороны котораго BC, CA, AB пересѣчены произвольной прямой въ точкахъ α, β, γ. Такъ какъ эти точки суть сопряженныя точкамъ α', β', γ' при всякомъ положеніи D, то и въ этомъ случаѣ это свойство ихъ не нарушится и мы можемъ написать равенство (22, II):

$$\alpha\beta'.\beta\gamma'.\gamma\alpha'=\alpha\gamma'.\beta\alpha'.\gamma\beta'.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{\alpha\beta'}{\alpha\gamma'}=\frac{\alpha B}{\alpha C},\ \frac{\beta\gamma'}{\beta\alpha'}=\frac{\beta C}{\beta A},\ \frac{\gamma\alpha'}{\gamma\beta'}=\frac{\gamma A}{\gamma B},$$

предыдущее равенство можемъ переписать такъ:

$$\alpha B.\beta C.\gamma A=\alpha C.\beta A.\gamma B,$$

или

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}.\frac{\beta C}{\beta A}.\frac{\gamma A}{\gamma B}=+1,$$

чѣмъ выражается одна изъ основныхъ теоремъ теоріи сѣкущихъ (théorie des transversales), именно: *стороны треугольника дѣлятся сѣкущей прямой на такія части, что произведеніе трехъ изъ нихъ, не имѣющихъ общихъ концовъ, равно произведенію трехъ остальныхъ.*

Дм. Ефремовъ (Ив.-Возн.)

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Гальваническія батареи на Парижской выставкѣ 1889 г.

(Продолженіе) *).

Батарея Де-Мара. Батарея эта съ переливающейся по каплямъ жидкостью, а жидкость—растворъ амміачной триокиси хрома въ соляной кислотѣ. Изобрѣтатель увѣряетъ, что батарея его даетъ въ короткой

*) См. „Вѣстникъ“ №№ 86, 88 и 90.

цѣпи 40 амп. на 1 кв. дец. угля. Элементы бываютъ плоскіе и цилиндрическіе. Послѣдніе устроены такъ: въ рамку-кулису, сдѣланную изъ какого либо изолятора, вмазаны въ щели 3-хъ стѣнокъ 2 пары углей, непроницаемыхъ для жидкостей. Наружные пластинки углей составляютъ боковыя стѣнки наружнаго сосуда элемента, а пространство между внутренними углями составляетъ помѣщеніе для цинка. Между внутренними и наружными пластинками помѣщается толченый коксъ; внутренніе угли довольно пористы и, сверхъ того, снабжены дырочками для протока жидкости отъ цинка къ углю. Угли снаружи покрыты гальванической мѣдью для увеличенія проводимости и прочности. Контактъ внутреннихъ углей съ наружными устанавливается съ помощью угольныхъ пластинокъ въ 4—5 миллим. длины. Цинковая пластинка стоитъ въ чашечкѣ со ртутью. Въ чашечку опущена пластинка, выходящая наружу элемента и составляющая отрицательный полюсъ; положительный полюсъ получается на клеммѣ, прикрѣпленной къ ободку, обхватывающему осадочную мѣдь на наружной сторонѣ элемента. Элементы первоначально назначались для воздухоплаванія, а потому снабжены герметически закрывающимися крышками. Крышки на шарнирахъ, и герметическое закрываніе получается оттого, что на верхнемъ краѣ наружнаго сосуда надѣта резиновая лента, не оставляющая промежутковъ между сосудомъ и крышкой. Крышка закрѣпляется еще скобкой съ нажимнымъ винтомъ. Въ крышкахъ сдѣланы отверстія для трубокъ: для трубки вводящей жидкость и выводящей газы; въ днѣ элемента имѣется отводная трубка. Къ ртути, въ которую опущенъ цинкъ, прибавляются цинковые опилки, такъ какъ ртуть благодаря этому не разъѣдается въ кислыхъ хромовыхъ растворахъ.

Батарея Ренара. Какъ извѣстно, электроды этой батареи состоятъ изъ тоненькихъ серебряныхъ цилиндриковъ, внутри которыхъ висятъ неамальгамированные цинковые карандаши. Электроды опущены въ растворъ хромовой кислоты въ соляной, приготовленный такъ, чтобы на единицу вѣса раствора приходилось поровну эквивалентовъ HCl и CrO^3. Серебряные цилиндрики сдѣланы изъ листового серебра, на которое наплющивается тонкій слой платины $\left(\frac{1}{400}\text{ миллим.}\right)$ при общей небольшой толщинѣ (0,1 милл.) листа. На выставкѣ была лампа накаливанія, горѣвшая отъ 5—8 часовъ съ яркостью 25 свѣчъ отъ 7 элементовъ, помѣщенныхъ въ цоколѣ лампы. Заряженіе на это время стоитъ 2,5 франка. Нормальное $J=4$ амп., а $E=10-11$ вольтъ. Жидкость поднимается въ элементахъ и доходитъ до цинковъ черезъ вдуваніе въ батарею воздуха изъ резиновой груши.

Барарея Жандрона. Эта батарея не описана; сообщено лишь, что прежній типъ ея описанъ въ „La lumière électrique" отъ 6 Іюля прош. года. Г. Дьедоннэ обѣщаетъ въ скоромъ времени описать улучшенный типъ этой батареи и таблицу результатовъ полученныхъ, отъ опытовъ, продолжавшихся очень долго.

Батареи Труве. Были выставлены батареи для накаливанія лампочки, съ которой можно оставаться въ атмосферѣ со взрывчатыми газами или вообще веществами. Интереснѣе было ознакомиться съ миніатюрнымъ элементомъ (перекись марганца и растворъ нашатыря), помѣщаемымъ въ прикладѣ ружья и позволяющимъ произвести до 30,000 выстрѣловъ.

Батарея Шардена. Г. Шарденъ готовитъ главнымъ образомъ медицинскія батареи, заботясь о томъ, чтобы онѣ не портились даже при небрежномъ обращеніи съ ними.

Обработка остатковъ въ батареяхъ съ хромов. солями. Г. Фурнье занялся рѣшеніемъ слѣдующаго вопроса. Возможна-ли обработка отработавшихъ жидкостей изъ батареи съ хромовыми солями и если возможна, то удовлетворяетъ-ли она экономическимъ условіямъ? Г. Фурнье, основываясь на теоретическомъ и практическомъ изученіи вопроса, рѣшаетъ его утвердительно. Для ознакомленія со своими работами, г. Фурнье издалъ брошюру и выставилъ краски, приготовленныя изъ батарейныхъ остатковъ, и окрашенныя этими красками матеріи. Краски приготовлены съ помощью цинковой окиси, осажденной изъ жидкостей, взятыхъ изъ батарей, заряжавшихся растворомъ хромпика въ подкисленной водѣ. Протрава для выставленныхъ окрашенныхъ тканей производилась основнымъ сѣрнокислымъ хромомъ, приготовленнымъ изъ окиси хрома, осажденной изъ того-же заряженія. Главная трудность состояла въ послѣдовательномъ выдѣленіи изъ жидкостей—сначала окиси хрома, а затѣмъ цинковой окиси. Окиси выдѣлены были помѣщеніемъ чистаго цинка въ кипящую соль хрома, отъ чего выдѣлилась окись хрома, мѣсто которой занялъ цинкъ.

Элементы Лекланше. Усовершенствованіе, введенное въ фабрикацію этихъ элементовъ, состоитъ въ удаленіи агломераторныхъ плитокъ, изъ которыхъ 2 прикладывались, обыкновенно, къ сторонамъ угольн. пластинки, а 3-я къ ребру ея. Теперь агломераты дѣлаютъ въ формѣ полыхъ цилиндровъ съ расширеніемъ наверху. На это расширеніе агломератъ (служащій въ то-же время положительнымъ полюсомъ) вѣшается въ отверстіи наружнаго сосуда. На края отверстія кладутъ предварительно резиновое кольцо для уменьшенія испаренія жидкости. Внутрь агломераторнаго цилиндра вставляется цинковый карандашъ на деревянномъ кружкѣ, окруженномъ резиновой подвязочкой. При испытаніи модели, имѣющей большую поверхность угольнаго цилиндра и внутри его цинковый цилиндръ, получились слѣдующіе результаты: токъ былъ замкнутъ на сопротивленіе въ 10Ω и въ теченіе 17 дней давалъ отъ 90—95 милліамперовъ при внутреннемъ R въ $0{,}5\Omega$. Въ настоящее время домъ Лекланше и К°. понизилъ цѣны элементамъ на 25%. Домъ Лекланше изготовляетъ и сухіе элементы, для которыхъ употребляется не растворъ нашатыря, а жидкость которая пока держится въ секретѣ; новая жидкость не даетъ кристалловъ на цинкѣ и правильно расходуетъ его. При растворѣ нашатыря цинкъ переламывается послѣ расходованія 30—35 граммовы, а съ новою жидкостью изъ 80 граммовъ можно истратить до 65 граммовъ.

Элементъ Лякомба. Элементъ Лякомба есть въ сущности элементъ Лекланше съ широкимъ угольнымъ цилиндромъ и помѣщающейся внутри его діафрагмой. Въ діафрагмѣ, имѣющей по боковой поверхности дырочки и не имѣющей дна, помѣщается цинковый карандашъ. На днѣ наружнаго сосуда стоитъ стекляная подставка въ формѣ кружка съ отверстіемъ посрединѣ и съ концентрическими углубленіями для помѣщенія въ нихъ нижнихъ краевъ діафрагмы и угольн. стакана. Въ кольцевидномъ пространствѣ между цилиндрами находится перекись марганца. Наверху цинкъ изолированъ отъ краевъ діафрагмы широкимъ резиновымъ кольцомъ. Электроды погружены въ растворъ нашатыря.

Элементъ Фонтэнъ Атжье. Элементъ Атжье состоитъ изъ картоннаго стакана, внутрь котораго, въ смѣсь толченаго кокса и перекиси марганца, вставляютъ мѣдный электродъ, состоящій изъ мѣдной ленты, изогнутой спирально. Отрицательнымъ электродомъ служитъ цинковый карандашъ. Жидкостью служитъ щелокъ. Картонъ разбухаетъ въ щелокѣ до того, что дѣлается втрое толще прежняго, вслѣдствіе чего сопротивленіе діафрагмы уменьшается. Благодаря тому, что сильно разбухнувшій картонъ вмѣщаетъ въ себѣ много жидкости, г. Атжье дѣлаетъ элементы безъ свободной жидкости, очень практичные и продающіеся по 1,25 франка. E элемента$=$1,49 в., а R$=$0,5Ω.

Элементъ Гэффа. Элементъ—углецинковый съ растворомъ хлористаго цинка вмѣсто раствора нашатыря. Уголь цилиндрической формы съ четырьмя продольными каналами, содержащими въ себѣ перекись марганца. Элементъ—безъ діафрагмы. Наружный сосудъ закрытъ герметически пробкой, вымазанной замазкой на воскѣ; въ крышкѣ продѣланы отверстія для вставки цинковаго карандаша и приливанія раствора E$=$1,3 в.

Элементъ Серрена. Элементъ Серрена по сущности своей есть элементъ Лекланше, но только въ деревянномъ наружномъ сосудѣ изъ цѣльнаго куска дерева, особеннымъ образомъ обработаннаго. Наружный сосудъ, не пропуская жидкостей, можетъ выводить газы. Элементы дѣлаются наглухо закрытые; электроды отдѣляются другъ отъ друга изоляторомъ изъ смолы съ воскомъ. Деревянные наружные сосуды г. Серренъ продаетъ по 0,14 франка за штуку. Такъ какъ сосуды не сохраняютъ капиллярности по своей обработкѣ, то ползучихъ солей нѣтъ; нѣтъ также порчи клеммъ, вслѣдствіе употребленія контактовъ изъ луженнаго цинка, покрытыхъ воскомъ, служащимъ для заливки элемента.

Элементъ Варнона. Представимъ себѣ, что вмѣсто агломератовъ, придерживаемыхъ у угля резиновой подвязкой, къ углю привязанъ мѣшокъ изъ рѣдкой ткани, огибающій уголь внизу и содержащій въ себѣ кусочки кокса и перекиси марганца,—и мы поймемъ устройство элемента Варнона. Для установки контакта между углемъ и деполяризаторомъ, въ угольную пластинку вставленъ въ видѣ крестовины угольный карандашъ съ заостреніями. Выступающія части карандаша входятъ въ правую и лѣвую часть мѣшка.

Элементъ Энгельфреда. Элементъ Энгельфреда представляетъ собою упрощеніе элемента Варнона: уголь съ деполяризаторомъ заключены въ асбестовый мѣшокъ. Простота изготовленія позволяетъ продавать такой элементъ по франку за штуку.

Элементъ Карре́. Пропуская описаніе всѣмъ извѣстнаго элемента Лаланда и Шапрона, перехожу къ описанію видоизмѣненія элемента Карре́. Какъ извѣстно, элементъ Карре́ есть видоизмѣненіе элемента Даніеля, состоящее въ употребленіи діафрагмы изъ пергамента. Склеивать пергаментъ для приготовленія изъ него стаканчиковъ, служащихъ діафрагмами, легко: для этого надо, какъ дѣлаетъ полковникъ Родивановскій, употреблять гигроскопическую вату, растворенную въ хлористомъ цинкѣ. Сборка элемента дѣлается слѣдующимъ образомъ: на дно наружнаго сосуда кладется деревянная крестовица съ 4 прорѣзами для вставки цинковаго цилиндра; внутрь цилиндра вставляется пергаментная трубка, привязанная внизу къ фарфоровому стаканчику, имѣющему внизу тарелочку, составляющую съ нимъ одно цѣлое. Въ тарелочкѣ по радіусамъ щели. Въ фарфоровый стаканчикъ, а слѣдовательно и въ пергаментную діафрагму вставляется мѣдная трубочка, насыпается мѣдный купоросъ и вливается его растворъ, а въ наружный сосудъ растворъ цинковаго купороса въ 20° Боме́. Чтобы трубка изъ пергаментнаго листа не раскрылась отъ наполненія жидкостью, она скрѣпляется веревочками по образующимъ цилиндра, для чего предварительно на верхній край мѣднаго цилиндра надѣвается кольцо изъ рогового каучука съ такими же прорѣзами, какъ внизу на фарфоровой тарелочкѣ. Обмотка веревочкой представляется снаружи рядомъ зубцовъ. Чтобы понять, какъ она производится, предположимъ, что мы начинаемъ обмотку сверху черезъ одинъ изъ прорѣзовъ въ эбонитовомъ кольцѣ; внизу помѣщаемъ веревочку въ прорѣзъ, параллельный верхнему, затѣмъ загибаемъ веревочку вправо или влѣво, вставляемъ въ прорѣзъ внизу, ведемъ веревочку по образующей вверхъ, вводимъ, въ соотвѣтствующую щель, отгибаемъ вправо, если начали работать вправо, и, вставивъ веревочку въ соотвѣтствующую щель, ведемъ по образующей внизъ и т. д., пока не будетъ обмотанъ весь цилиндръ по образующимъ. E элемента въ открытой цѣпи $=1{,}046$ в.

Элементъ Кросса. Если замѣнить въ описанномъ раньше элементѣ Кросса (свинцовый двойной стаканъ съ толченнымъ углемъ между стѣнками и цинкъ въ діафрагмѣ) хромовый растворъ наружнаго сосуда—растворомъ мѣднаго купороса, а толченый уголь—кристаллами мѣднаго купороса, то получимъ элементъ Даніеля съ значительно уменьшеннымъ сопротивленіемъ.

Батарея Пайяра (Paillard). Электродами „вольтажена"—такъ назвалъ изобрѣтатель свою батарею—служатъ—цинкъ (3 милл. $\times$ 20 цм. $\times$ 25 цм.) въ діафрагмѣ изъ особо обработанной бумаги и волнообразно изогнутый тонкій свинцовый листъ съ отверстіями для свободной циркуляціи жидкости. Электроды погружаются въ растворъ мѣднаго купороса. Какъ видно по выбору электродовъ, батарея ничего новаго ни представляетъ; особенности ея заключаются въ добавочныхъ приборахъ: въ аппаратѣ для введенія слабаго раствора цинковаго купороса, въ распредѣлительномъ аппаратѣ и аппаратѣ для вывода густого раствора цинковаго купороса. Отъ батарейнаго тока берется отвѣтвленіе къ соленоиду, помѣщенному на резервуарѣ съ цинковымъ купоросомъ. Желѣзный стержень внутри соленоида упирается концомъ въ трубку, выводящую жидкость и закрываетъ ее при нормальной силѣ тока, Если-же батарея ослабѣетъ, то, прикрѣпленная къ верху желѣзнаго стержня, спиральная пружина подниметъ стержень и жидкость начнетъ вытекать изъ резервуара въ сосудъ устроенный на манеръ Маріоттова, откуда сифономъ жидкость распредѣляется по одному или нѣсколькимъ желобкамъ, имѣющимъ трубки, входящія въ каждый элементъ до половины высоты. Въ описаніи недостаетъ указанія на то, какимъ способомъ вводится въ жидкость новый растворъ мѣднаго купороса и не ясно описано какъ выводится изъ батареи сифономъ густой растворъ цинковаго купороса.

Измѣненный элементъ Марье-Деви. Элементъ этотъ съ сѣрнокислой свинцовой солью, изобрѣтенный Марье-Деви, обладалъ недостаткомъ, заключающемся въ малой проводимости твердаго деполяризатора. Г-нъ Перренъ (Ad. Perrin) отчасти уменьшилъ этотъ недостатокъ, смѣшивая сѣрносвинцовую соль съ концентрированнымъ растворомъ цинковаго купороса и дробью. Сборка элемента весьма проста: на дно наружнаго сосуда кладутъ только что описанное тѣсто; въ это тѣсто упираютъ концомъ угольную призму или пластинку. Элементъ наполняютъ водой и привѣшиваютъ цинкъ, какъ въ элементѣ Калло. $E=1$, в., $R=5\Omega$. Выгоды такого устройства элемента слѣдующія: а) въ разомкнутой цѣпи тока не бываетъ, б) элементъ работаетъ, постоянно увеличивая свое дѣйствіе, по мѣрѣ возстановленія свинца, в) элементъ этотъ безъ діафрагмы, г) стоитъ дешево, потому что употребляемыя соли весьма дешевы, д) остаточный продуктъ (Pb) пригоденъ для новыхъ элементовъ. Г-нъ Перренъ предложилъ также слѣдующія видоизмѣненія элемента Лекланше. На дно наружнаго сосуда помѣщаютъ смѣсь угля и перекиси марганца, въ которую вставлена призма изъ угля и перекиси марганца, съ помѣщенной въ срединѣ угольной пластинкой. Сосудъ наполняютъ смѣсью растворовъ нашатыря и азотно-амміачной соли, а затѣмъ подвѣшивается цинкъ. Азотно-амміачная соль, какъ гигроскопическая, вводится для устраненія ползучихъ солей. $E=1{,}4$ в., $R=2-3\Omega$. Пропускаю описаніе батареи Окинана, такъ какъ она описана въ 26 № „Вѣстника Опытной Физики“ за 1887 годъ.

Батарея Милле. Элементъ Милле есть новое расположеніе элемента Бунзена съ его классическимъ заряженіемъ (подкисленная вода при цинкѣ и азотная кислота при углѣ). Элементъ съ наружнымъ сосудомъ имѣетъ форму цилиндра и можетъ вращаться около горизонтальной оси. Вращеніе элемента введено для того, чтобы удалять жидкости отъ электродовъ, когда батарея не должна работать и наоборотъ. Элементъ состоитъ изъ слѣдующихъ частей: а) бездоной широкой трубки, сдѣланной изъ какого либо изолятора и составляющей наружный сосудъ; б) изъ вставляющейся въ первую второй трубки, у которой верхняя часть (та, которая бываетъ наверху во время бездѣйствія элемента) пористая и составляетъ діафрагму, а нижняя часть не пропускаетъ жидкостей и служитъ вмѣстилищемъ для азотной кислоты. Въ томъ мѣстѣ, гдѣ начинается часть, не пропускающая жидкостей, вокругъ трубки идетъ подъ острымъ угломъ родъ розетки, или полочки, на которую кладутъ цинкъ въ кускахъ; полочка эта съ дырочками; в) третью часть элемента составляютъ дно и крышка его, которыя соединяются тремя болтами, проходящими сквозь выступы и наглухо закрывающими элементъ. Снявъ крышку съ элемента и посмотрѣвъ на него сверху, во время бездѣйствія, мы увидимъ въ средней части элемента діафрагму, а вокругъ нея, въ кольцевомъ пространствѣ куски цинка. Въ діафрагмѣ расположены четыре угля, горизонтальное сѣченіе которыхъ представляетъ фигуру квадрата. Подъ полочкой для цинка, между трубкой, содержащей азотную кислоту, и стѣнками наружнаго сосуда, приходится кольцевое пространство, въ которомъ содержится подкисленная вода. Если перевернуть элементъ, то азотная кислота перельется къ углямъ, а подкисленная вода, черезъ отверстія въ розеткѣ перельется къ цинкамъ, и элементъ начнетъ работать. Въ крышкѣ два отверстія: одно для прибавленія цинка и подкисленной воды въ кольцевое отдѣленіе, а другое для приливанія и отливанія азотной кислоты. Въ каждомъ отдѣленіи (угольномъ и цинковомъ) имѣется по двѣ трубки для вывода газовъ безъ выливанія жидкостей. Трубки цинковаго отдѣленія отдѣлены отъ кусочковъ цинка для прочности двумя стѣнками. Къ наружнымъ частямъ газоотводныхъ трубокъ, имѣющимъ грушевидную форму, прикрѣпляютъ каучуковыя трубки. $E=1,95$ в. $J=7$ амп. Элементъ, по увѣренію изобрѣтателя, работаетъ 40 часовъ, а не 5—6, какъ элементъ Бунзена. Г-нъ Милле, отливаетъ цинки со ртутью (5%), отъ чего цинки очень хрупки и ихъ приходится употреблять въ кускахъ. Такая форма цинковъ имѣетъ и свою выгодную сторону: получается большая дѣйствующая поверхность (у выставленной модели $7\frac{1}{2}$ дециметровъ). Смотря по большему или меньшему наклону элемента получается большее или меньшее покрытіе цинковъ подкисленной водой и, слѣдовательно, большее или меньшее количество тока.

П. П.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевское Физ.-Мат. Общ. 5-ое очер. (спеціальное) засѣданіе 12-го апрѣля. Присутствовало 27 членовъ; предсѣдательствовалъ проф. Н. Н. Шиллеръ. Были сдѣланы спеціальныя сообщенія: 1) *Н. Н. Шиллеръ:* „Современное представленіе объ электричествѣ". Согласно съ идеями Фарадея, облеченными Максуэллемъ въ опредѣленную метематическую форму и развитыми далѣе Пойнтингомъ, Ивингомъ, Лоджемъ, Гертцемъ, Колачекомъ и другими, электричество разсматривается какъ явленіе, происходящее въ непрерывно наполняющемъ міровое пространство эѳирѣ. Эта непрерывная среда, обладающая свойствами несжимаемой жидкости, служитъ, согласно съ гипотезой Томсона, матеріаломъ для образованія того, что мы разумѣемъ подъ матеріей. Упомянутая гипотеза разсматриваетъ матерію, какъ части эѳира, обладающія вихревыми движеніями въ видѣ весьма малыхъ замкнутыхъ отдѣльныхъ или сцѣпленныхъ въ группы вихревыхъ колецъ, не разрушимыхъ, обладающихъ, вслѣдствіе своихъ вращеній, упругими свойствами и воздѣйствующихъ другъ на друга черезъ посредство окружающихъ, не вихревыхъ, частей эѳира. Тотъ же эѳиръ, подъ дѣйствіемъ электровозбудительныхъ силъ, разлагается на двѣ составныя части, скрѣпленныя другъ съ другомъ при другихъ условіяхъ въ каждой отдѣльной частицѣ эѳира, и представляющія опредѣленное сопротивленіе своему раздѣленію. Упомянутое раздѣленіе эѳира обусловливаетъ электрическія явленія и происходитъ аналогично измѣненіямъ, производимымъ въ твердомъ упругомъ тѣлѣ тангенціальными силами. Составныя части эѳира суть положительное и отрицательное электричества. Вращенія эѳира, происходящія въ каждомъ его отдѣльномъ безконечно маломъ объемѣ такъ, что составныя его части имѣютъ противоположныя вращенія, обусловливаютъ явленія магнитныя и электромагнитныя.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи референтъ имѣлъ цѣлью указать на тѣ стороны электрическихъ явленій, которыя дали поводъ къ постановкѣ упомянутыхъ гипотезъ. Было начато съ изложенія представленія о силѣ электрическаго поля, силовыхъ нитяхъ и эквипотенціальныхъ поверхностяхъ, электрической плотности и электрическаго напряженія. Затѣмъ былъ изложенъ взглядъ Фарадея, объясняющій взаимодѣйствіе наэлектризованныхъ тѣлъ на основаніи предположенія о натяженіи среды, окружающей заряженные проводники, по направленію силовыхъ нитей, соединеннымъ со сдавливаніемъ этой среды по направленіямъ перпендикулярнымъ къ силовымъ нитямъ. Было указано доказательство Максуэлля того, что среда, подъ вліяніемъ упомянутыхъ натяженій и давленій останется въ равновѣсіи, и что стремленіе силовыхъ нитей сокращаться и утолщаться имѣетъ своимъ слѣдствіемъ наблюдаемыя электрическія притяженія и отталкиванія.

2) *Г. К. Сусловъ:* „Частный случай опредѣленія движенія по заданнымъ его свойствамъ", 3) *В. И. Фабриціусъ:* „Отношеніе сектора къ треугольнику въ эллиптическомъ движеніи" и 4) *В. П. Ермаковъ:* „Современное состояніе теоріи приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ".

Закрытой баллотировкой были избраны въ дѣйствительные члены Общества гг. 1) Ѳ. В. Кочержинскій, 2) І. Б. Лесманъ и 3) А. Е. Любанскій.

Чтобы облегчить общеніе по вопросамъ научнымъ между членами Общества, учрежденъ и съ настоящаго засѣданія открытъ особый *ящикъ для вопросовъ*, куда всякій можетъ опускать (на отдѣльной запискѣ, хотя бы и безъ подписи) ясно формулированные вопросы, на которые ему желательно было бы получить отвѣты спеціалистовъ. *Ш.*

Матем. Отд. Новор. Общ. Естествоиспыт. по вопр. эл: мат. и физики. Одесса 13 Апрѣля 1890 года.

Х. І. Гохманъ сдѣлалъ сообщеніе о вычерчиваніи эллипса при помощи трехъ круговъ. Два изъ этихъ круговъ суть круги кривизны въ вершинахъ большой и малой оси эллипса. Третій кругъ служитъ кругомъ кривизны въ нѣкоторой средней точкѣ эллипса и касается двухъ первыхъ. Радіусъ его есть средняя геометрическая полуосей эллипса. Части дугъ этихъ круговъ, содержащіяся между послѣдовательными точками касанія ихъ, образуютъ фигуру, близкую къ эллипсу. Вычисленія, дающія уклоненія этой фигуры отъ эллипса, референтъ намѣренъ представить въ одномъ изъ слѣдующихъ засѣданій.—Затѣмъ Г. Г. Де-Метцъ обратилъ вниманіе преподавателей физики на опредѣленія понятій: масса, плотность и удѣльный вѣсъ. По мнѣнію референта должно опредѣлять массу, какъ частное изъ силы на ускореніе. При опредѣленіи же понятій плотность и удѣльный вѣсъ лучше начинать съ газовъ, а затѣмъ уже переходить къ жидкимъ и твердымъ тѣламъ, для которыхъ эти два понятія совпадаютъ. Наконецъ Х. І. Гохманъ сдѣлалъ замѣчаніе о доказательствахъ пропорціональности величинъ, въ случаѣ ихъ несоизмѣримости въ курсѣ геометріи. Для примѣра референтъ разсматривалъ отношеніе площадей прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, и изложилъ способъ, сходный со способомъ, предложеннымъ въ курсѣ геометріи Малинина и Егорова, находя его болѣе яснымъ и удобнымъ въ изложеніи, чѣмъ способъ, который изложенъ въ „геометріи" Давидова. При обсужденіи этого сообщенія былъ указанъ способъ, основанный на теоремѣ: предѣлы равныхъ перемѣнныхъ равны между собою. Собраніе склонилось къ убѣжденію, что послѣдній пріемъ значительно проще другихъ. Въ виду этого нѣкоторые изъ членовъ собранія находили, что должно доказывать теоремы о пропорціональности величинъ сначала лишь для случая соизмѣримости ихъ, а затѣмъ, послѣ того какъ пройдена теорія предѣловъ, дать общее доказательство пропорціональности несоизмѣримыхъ величинъ на основаніи теоріи предѣловъ. При этомъ замѣчено было также, что существеннѣйшимъ пробѣломъ въ гимназическомъ курсѣ является отсутствіе точнаго ученія объ ирраціональныхъ числахъ, вслѣдствіе чего и употребленіе пропорцій въ геометріи въ случаѣ несоизмѣримыхъ величинъ является необоснованнымъ.

И. Слешинскій (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 49. Въ треугольникѣ ABC черезъ вершину A проведена медіана AM и симедіана AM′ (т. е. прямая равнонаклонная съ медіаной); изъ ея основанія M′ возставленъ перпендикуляръ M′N къ сторонѣ BC. Требуется доказать, что на этомъ перпендикулярѣ всегда найдется такая точка A′, разстоянія которой отъ вершинъ B и C соотвѣтственно пропорціональны сторонамъ AB и AC. Найти такую точку построеніемъ.

Ш.

№ 50. Въ окружности проведены діаметръ $AD=2r$ и три хорды $AB=a$, $BC=b$ и $CD=c$. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія ломанной ABCD около AD и примѣнить полученныя формулы къ тому случаю, когда AB и CD представляютъ стороны вписаннаго квадрата и правильнаго шестиугольника.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 51. Если

$$p=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Cos}\alpha},\quad q=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Cos}\beta}$$

доказать, что

$$p+q=\frac{1}{2}\operatorname{Cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Гр. Херсонскій (Москва).

№ 52. Даны двѣ прямыя и на каждой изъ нихъ по точкѣ A и B. Отъ точекъ A и B отложены въ обѣ стороны равные отрѣзки $AC=AD=BE=BF$. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ DE и CF.

А. Бобятинскій (Барнаулъ).

№ 53. Полагая

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=(m)_n$$

и

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=\binom{m}{n},$$

показать, что

$$(m+p)_n=(m)_n+(m)_{n-1}(p)_1+\ldots\ldots+(m)_1(p)_{n-1}+(p)_n$$

и

$$\binom{m+p}{n}=\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}\binom{p}{1}+\ldots\ldots+\binom{m}{1}\binom{p}{n-1}+\binom{p}{n}$$

Разсмотрѣть случаи когда $p=1$. *С. Кричевскій* (Ромны).

№ 54. Данъ уголъ и точка М; требуется пересѣчь уголъ прямою, проходящею черезъ М, такъ, чтобы разность отрѣзковъ, получаемыхъ на сторонахъ угла, имѣла бы данную длину a.

Ф. Коваржикъ (Полтава).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 449. Рѣшить уравненія

$$x^2y+yz=a,$$
$$x^2+yz=b,$$
$$x^2y^2+z=c.$$

Умножимъ третье уравненіе на y и вычтемъ изъ него второе, тогда

$$x^2(y^3-1)=cy-b \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Вычитая же изъ перваго второе, получимъ

$$x^2(y-1)=a-b \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Раздѣливъ теперь (α) на (β), находимъ

$$y^2+y+1=\frac{cy-b}{a-b},$$

и. и

$$(a-b)y^2+(a-b-c)y+a=0.$$

Опредѣляя отсюда y, не трудно будетъ найти значенія для x и z.

Н. Артемьевъ (Спб.), *П. Трипольскій* (Полтава), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *Н. Соболевскій* (Москва). Ученики: Кіев. р. уч. (6) *А. Щ.*, Крем. р. уч. (6) *І. Т.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.* Камыш. р. уч. (7) *А. З.*

№ 455. Рѣшить уравненія

$$\operatorname{Sin}^2x+\operatorname{Sin}^2y=n+1$$
$$x+y=\varphi.$$

Положимъ $y=90^\circ-z$, тогда

$$\operatorname{Sin}^2y=1-\operatorname{Cos}^2y=1-\operatorname{Sin}^2z.$$

и

$$\mathrm{Sin}^2 x - \mathrm{Sin}^2 z = n,$$

или

$$(\mathrm{Sin}x + \mathrm{Sin}z)(\mathrm{Sin}x - \mathrm{Sin}z) = n;$$

теперь

$$2\mathrm{Sin}\frac{x+z}{2}\mathrm{Cos}\frac{x-z}{2}.2\mathrm{Cos}\frac{x+z}{2}\mathrm{Sin}\frac{x-z}{2} = n$$

или

$$\mathrm{Sin}(x+z)\mathrm{Sin}(x-z) = n,$$

откуда

$$\mathrm{Sin}(x+z) = \frac{n}{\mathrm{Sin}(x-z)}.$$

Присоединяя сюда уравненіе

$$x-z = \varphi - 90°,$$

опредѣлимъ x и z

Можно также рѣшить данныя уравненія, полагая

$$x = \frac{\varphi}{2} + z \quad \text{и} \quad y = \frac{\varphi}{2} - z.$$

Н. Артемьевъ (Спб.), *Н. Богоявленскій* (Шуя), *Н. Николаевъ* (Пенза), *С. Кривевскій* (Ромны), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Черниг. г. (8) *Д. З.*, Камыш. р уч. (7) *А. З.*, Полоцк. к. к. (7) *М.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.*

№ 512. Вычислить площадь треугольника, зная что его высота равна основанію, и другія двѣ стороны суть a и b.

Обозначивъ основаніе черезъ c, можемъ выразить площадь s черезъ $\frac{c^2}{2}$. Высота c дѣлаетъ на основаніи c отрѣзки равные $\sqrt{a^2-c^2}$ и $\sqrt{b^2-c^2}$. Поэтому

$$\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2} = c.$$

Освобождая отъ корней, находимъ

$$5c^4 - 2(a^2+b^2)c^2 + (a^2-b^2)^2 = 0,$$

откуда

$$s = \frac{c^2}{2} = \frac{1}{10}(a^2+b^2) \pm \frac{1}{5}\sqrt{a^2b^2-(a^2-b^2)^2}.$$

П. Трипольскій (Полтава), *П. Священниковъ* (Троицкъ). Ученики: 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Курск. г. (8) *А. П.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*, Кіев. р. уч. (7) *А. Щ.*

№ 526. Произвольная точка M окружности соединена съ вершинами вписаннаго квадрата. Найти связь между полученными прямыми.

Данъ квадратъ ABCD и точка M на дугѣ BC. Изъ четыреугольника ABMD имѣемъ:

$$AM.BD = BM.AD + AB.DM. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Изъ четыреугольника же DBMC:

$$BC.DM=BM.DC+DB.CM, \quad \ldots\ldots (2)$$

потомъ изъ DAMC:

$$AC.DM=AM.DC+AD.CM. \quad \ldots\ldots (3)$$

и, наконецъ, четыреугольникъ ABMC дастъ

$$BC.AM=AC.BM+AB.CM. \quad \ldots\ldots (4)$$

Подставляя въ (1), (2), (3) и (4) вмѣсто сторонъ и діагоналей квадрата ихъ выраженіе черезъ радіусъ, и сокращая полученныя равенства, найдемъ:

$$2AM=(BM+DM)\sqrt{2},$$
$$DM\sqrt{2}=BM\sqrt{2}+2CM,$$
$$2DM=(AM+CM)\sqrt{2}$$

и

$$AM\sqrt{2}=2BM+CM\sqrt{2}.$$

Откуда будемъ имѣть

$$2AM=(BM+DM)\sqrt{2},$$
$$2CM=(DM-BM)\sqrt{2},$$
$$2DM=(AM+CM)\sqrt{2},$$
$$2BM=(AM-CM)\sqrt{2}.$$

Складывая эти послѣднія равенства, найдемъ

$$AM+CM+DM+BM=(AM+DM)\sqrt{2},$$

или

$$CM+BM=(\sqrt{2}-1)(AM+DM).$$

П. Трипольскій (Полтава). Ученики: Кіев. 4-й г. (6) *В. Г.*, 1-й Спб. г. (7) *К. К.*, Могил. Под. г. (?) *А. Бурд.*, (6) *С. И.*, 1-й Кіев. г. (8) *А. Шлж.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Курск. г. (6) *Л. Л.* и *А. Ш.*, (8) *Т. Ш.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.* Короч. г. (8) *Г. С.*

Запоздалыя рѣшенія прислали:

И. Пастуховъ (Пермь), № 415. *Мясковъ* (Слонимъ), № 193. *С. Кричевскій* (Ромны), №№ 438 и 488 Ученики: Камыш. р. уч. (7) *А. З.* № 449, Ворон. к. к. (6) *П. Г.*, *Б. С.* и *А. Н.* №№ 418 и 419, (7) *Н. В.* № 432, *Г. У.* №№ 361, 486 и 488, Кам.-Под. г. (8) *А. Р.* № 449, Полоцк. к. к. (7) *Г. Г.* № 447.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 4 Мая 1890 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
пщется