№№ 83—84.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ:

Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій; Гл. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-учебныхъ заведеній.

№№ 1–48 ОДОБРЕНЫ

Уч. Ком. при Св. Синодѣ для духовныхъ семинарій и училищъ.

VII Семестра №№ 11-й и 12-й.

ЭКШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Бибиковскій бульваръ, домъ № 8-6.
1889.

Содержаніе № 83.

Содержаніе № 84.

Адресъ: Кіевъ, Редакція „Вѣстника Оп. Физ. и Эл. Математики“, Паньковская № 23.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 83.

VII Сем. 1 Декабря 1889 г. № 11.

Именованныя величины въ школьномъ преподаваніи и значеніе ихъ символовъ.

(Продолженіе) *).

90. **Wallis Mathesis universalis.**

Cap. XVIII.

Объ умноженіи чиселъ.

„Изложивъ въ предыдущемъ сложеніе и вычитаніе чиселъ, приступаю къ изложенію умноженія чиселъ.

Что такое умноженіе?

„Умножить значитъ: *найти число, которое содержало бы данное столько разъ, сколько требуется.* Или же *найти число, которое было бы въ данномъ отношеніи съ даннымъ числомъ.* Такъ что, если требуется найти число, которое было бы двойное, тройное, четверное и т. д. даннаго, или которое превосходило бы данное въ какомъ нибудь другомъ опредѣленномъ отношеніи, или которое содержало бы данное два, три, четыре и т. д. раза,—то умноженіе учитъ какимъ образомъ найти это требуемое число. А если далѣе угодно расширить это опредѣленіе умноженія, относящееся только къ числамъ, то можно сказать, что *умножить значитъ увеличить данное количество въ данномъ отношеніи,* или же *найти количество, содержащее данное количество столько разъ, сколько требуется,* или далѣе еще общнѣе: *къ данному количеству подъискать другое въ требуемомъ отношеніи* [см. Примѣчаніе ст. 91 п. а).

Множимое.

„Данное число, къ которому надо подъискать другое въ требуемомъ отношеніи (т. е. двойная, тройная и т. д. величина котораго требуется) называется *множимое* (multiplicandus, πολλαπλασιαζόμενος).

Множитель.

„То число, которое выражаетъ данное отношеніе, (т. е. которое говоритъ какимъ кратнымъ даннаго числа должно быть искомое, или

*) См. „Вѣстникъ" №№ 55, 56. 63, 75, 77 и 82.

сколько разъ оно должно его содержать) называется πολλαπλαζιάζον, т. е. умножающее или *множитель*.

Произведеніе.

„Наконецъ искомое число называется γινομενος, т. е. число *произведенное* или *произведеніе умноженія*.

Знакъ умноженія.

„А знакъ умноженія слѣдующій $\times$. {Слѣдуетъ объясненіе употребленія этого знака и его сравненіе съ $+$ и —, которое опускаю}.

„Когда предыдущія названія поняты, не трудно понять опредѣленія умноженія которыя даются иными; а именно слѣдующія:

„*Умножить значитъ найти число, которое содержало бы множимое столько разъ, сколько разъ множитель содержитъ единицу.*

„И также: *умножить значитъ найти число, которое было бы въ томъ же отношеніи къ множимому, въ какомъ множитель къ единицѣ.*

„Дозволительно не отвергать эти опредѣленія и другія того же рода какъ ложныя, ибо они дѣйствительно выражаютъ дѣло какъ оно есть; но едвали однако ихъ можно считать особо пригодными. Ибо, чтобы опредѣленіе было объясненіемъ опредѣляемаго, оно должно основываться на болѣе извѣстномъ. Между тѣмъ что такое множимое, множитель и произведеніе на столько же неизвѣстно, какъ и само умноженіе. И по той же причинѣ считаю недозволительнымъ (въ нашемъ болѣе раннемъ опредѣленіи) говорить про *отношеніе*, развѣ только если оно одновременно объясняется, а этого нигдѣ въ предыдущихъ опредѣленіяхъ не сдѣлано.

„Считаю необходимымъ оговориться, что самъ Эвклидъ (15.d.7) опредѣляетъ умноженіе слѣдующимъ образомъ: говорятъ, что *число умножаетъ число, если это сочетается столько разъ, сколько въ томъ единицъ, и такимъ образомъ получается нѣкоторое произведеніе.* Однако такимъ образомъ (если правильно оцѣнивать смыслъ Эвклидова выраженія) не столько опредѣляется умноженіе, или объясняется, что значитъ умножить, сколько поясняется смыслъ предложенія: *число умножаетъ число* (при чемъ еще предполагается, чтобы смыслъ каждаго изъ этихъ словъ въ отдѣльности былъ заранѣе извѣстенъ); и все таки смыслъ того, что значитъ πολλαπλασιαζειν (умножать), только тогда сталъ бы яснымъ, если бы онъ предварительно выяснилъ, что значитъ отношеніе (ratio) и въ особенности что значитъ кратное (πολλαπλασιον).

„Однако моя цѣль не столько критиковать чужія опредѣленія, какъ излагать суть дѣла; и для меня достаточно, если изъ моихъ ли, изъ чужихъ ли словъ станетъ ясна истина, которую и я, и всѣ желаемъ; и мнѣ вовсе не желательно вести споръ о словахъ, гдѣ надо говорить о дѣлѣ, а также необходимо, чтобы я не отрицалъ необходимости придерживаться принятыхъ словъ. [См. Примѣчаніе, ст. 91, п. b. и с.].

Какъ надо понимать умноженіе въ тѣсномъ смыслѣ.

„Надо однако замѣтить, что когда въ нашемъ объясненіи опредѣленія умноженія говорится, что число требуемое умноженіемъ или найденное посредствомъ него, именно *произведеніе*) содержитъ данное (называемое *множимымъ*) два, три и т. д. раза, или превосходитъ его въ данномъ отношенiи,—то это утверждается не зря, ибо это достаточно понятно изъ начальнаго словеснаго выраженiя. И это совершенно достаточно обрисовывается словами, ибо умножать (multiplicare) значитъ найти кратное (multiplum) даннаго числа.

О части и о кратномъ.

„А что такое кратное, или что такое часть, это Эвклидъ опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ: *часть есть величина величины, меньшее большаго, когда меньшее мѣряетъ большее; а кратное есть большее меньшаго, когда меньшее мѣряетъ большее* (Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris quando minor metitur majorem: Multiplex autem est major minoris, quando minor metitur majorem). Такимъ образомъ выражаются и Comandinus и Clavius. Или (нѣсколько, быть можетъ, выразительнѣе) говорятъ: меньшая величина есть (нѣкоторая) часть большей, если она мѣритъ большую (лучше впрочемъ сказать измѣряетъ, т. е. если она, повторенная нѣкоторое число разъ, равна большей). *Большая же величина кратная меньшей,* если она измѣряется меньшею. (Однако сказанное здѣсь про величины буквально относится и къ числамъ. И должно быть относимо ко всякого рода величинамъ). Слово же часть не означаетъ какую нибудь произвольную частицу цѣлаго (въ родѣ того, какъ въ 9-й аксiомѣ говорится: цѣлое больше части) но ограничивается точнымъ или опредѣленнымъ значенiемъ *кратной части* (напр. третья, четвертая, сотая и т. д. часть), а именно такой, которая, будучи повторенной нѣкоторое цѣлое число разъ, даетъ всю величину. Если же она не можетъ дать подобнымъ повторенiемъ цѣлаго (а всегда или большее, или меньшее), то она не можетъ называться его (кратною) частiю (μερος), (въ упомянутомъ смыслѣ), а скорѣе *частями* (partes, μερη) т. е. совокупностiю частей, какъ это говорится у Эквильда 4*d*7.

„(Однако это опредѣленiе въ книгѣ 5 не устанавливается по отношенiю къ величинамъ, ибо можетъ случиться, что меньшая величина не есть ни часть, ни совокупность частей большей, будучи несоизмѣримой съ нею; этого однако не можетъ случиться съ числами, по крайней мѣрѣ съ цѣлыми, о которыхъ только и говоритъ здѣсь Эвклидъ, ибо всѣ они соизмѣримы, будучи всѣ измѣряемы единицею, и слѣдовательно меньшее число необходимо или часть большаго или совокупность его частей).

{Слѣдуетъ примѣръ, что 2 есть кратная (третья) часть 6, но не есть краткая часть числа 5, а совокупность двухъ кратныхъ (пятыхъ) его частей}.

„Такимъ же образомъ надо судить и о кратномъ (multiplum). И такъ какъ часть и кратное взаимно связаны, то они должны быть изучаемы въ общей связи: ибо часть есть часть кратнаго, а кратное есть кратное части, которое вдобавокъ должно въ точности содержать часть, повторенную нѣсколько разъ, напр. два, три и т. д. раза. [См. Примѣчанiе, ст. 91, n. d.]

Умноженiе въ болѣе широкомъ смыслѣ.

„Но такъ какъ бываютъ случаи умноженiя на единицу, или на дроби, или даже на ирраціональныя числа напр. $1, \frac{1}{33}, \frac{2}{53}, \sqrt{3}$, то необходимо понимать умноженiе въ болѣе широкомъ значенiи, (καταχρηστικως); а это возможно только въ томъ смыслѣ, если считать 1, или даже $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{3}$ и т. д. числами, или количествами.

„Если кто умножаетъ какое нибудь количество на единицу, т. е. беретъ его (точно) одинъ разъ, то нельзя собственно сказать, чтобы онъ дѣлалъ умноженіе, т. е. бралъ бы нѣсколько разъ; онъ только удерживаетъ эту величину; и что получается отъ такого умноженія не есть собственно кратное взятой величины, но скорѣе она сама (развѣ что согласились бы считать равное въ томъ же смыслѣ кратнымъ, въ какомъ, какъ выше упомянули, считаемъ единицу числомъ; и я не сталъ бы возражать противъ такого выраженія). И поэтому надо утверждать, что *единица не умножаетъ и не дѣлитъ*, ибо если мы умножаемъ или дѣлимъ на единицу, то взятое количество отъ такого умноженія или дѣленія не измѣняется, но остается то же, что и раньше; совершенно такимъ же образомъ, какъ при сложеніи или при вычитаніи *цифра*, или нуль, ничего не измѣняетъ. Такъ что въ родѣ того, какъ $2+0=2$, $2-0=2$, такъ же и $2\times1=2$ и $\frac{1}{2}=2$. Это скорѣе отрицаніе умноженія или дѣленія, чѣмъ его совершеніе.

„Если же кто умножаетъ на $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т. д., то онъ въ дѣйствительности не столько умножаетъ, какъ дѣлитъ (какъ въ послѣдствіи станетъ яснѣе, когда будемъ говорить про дѣленіе). Ибо такимъ же образомъ, какъ умножающій на 2, 3, 4 и т. д. ищетъ удвоенное, утроенное и т. д. число, т. е. беретъ данное количество два, три и т. д. раза;— такъ и умножающій на $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т. д. ищетъ только половину, треть, четверть даннаго числа, т. е. не самое количество и не его кратное, а конечно только его половину, треть и т. д.; а это въ дѣйствительности значитъ дѣлить на 2, 3, 4 и т. д. Такъ что въ родѣ того какъ прибавляющій отрицательную величину (напр. складывающій 4 и -2) въ дѣйствительности отнимаетъ, (ибо онъ уменьшаетъ, а не увеличиваетъ, такъ какъ $4-2$ меньше чѣмъ 4); такимъ же образомъ тотъ, кто думаетъ умножать на $\frac{1}{2}$ (или на какую нибудь иную кратную часть) въ дѣйствительности совершаетъ дѣленіе; ибо смыслъ тотъ же, что раздѣлить на 2. Такъ что насколько вычитаніе противоположно сложенію, на столько же дѣленіе противоположно умноженію.

„Кто однако умножаетъ на $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и т. д., тотъ отчасти умножаетъ, отчасти дѣлитъ; а именно умножаетъ на числителя, а дѣлитъ на знаменателя; въ родѣ того, какъ прибавляющій $4-2$ отчасти прибавляетъ, отчасти уменьшаетъ, а именно прибавляетъ 4 и отнимаетъ 2. Такимъ образомъ умножающій на $\sqrt{3}$ дѣлаетъ двоякое, именно умножаетъ на 3 и извлекаетъ корень квадратный. Однако все это лучше уразумѣется, когда будетъ рѣчь о дробяхъ и объ ирраціональныхъ; теперь же надо было упомянуть объ этомъ, дабы было ясно что понимать подъ умноженіемъ въ самомъ строгомъ смыслѣ и что въ болѣе широкомъ; и что бы названіе умноженіе и всѣ наши опредѣленія могли принаравливаться, смотря по надобности.

„И вдобавокъ умноженіемъ, понимаемымъ въ обширномъ смыслѣ, число не всегда увеличивается и не всегда получается кратное (хотя казалось бы слова по своему смыслу не допускаютъ подобнаго, потому что названіе выбрано въ смыслѣ увеличенія). Но такъ какъ по смыслу умноженія полагается, что умножаемое число берется столько разъ, сколько требуетъ множитель, или (что то же) что число, произведенное умноженіемъ содержитъ множимое столько разъ, сколько множитель содержитъ единицъ; и такъ какъ множитель можетъ или быть больше, или меньше или равнымъ единицѣ;—то такимъ же образомъ и произведеніе можетъ быть или больше или меньше множимаго, или равняться ему. Ибо если кто беретъ количество одинъ разъ (т. е. умножаетъ на единицу), онъ его не уменьшаетъ и не увеличиваетъ; если же кто беретъ его больше разу (т. е. если множитель больше единицы), то онъ его увеличиваетъ; кто же беретъ его меньше разу (т. е. если множитель меньше единицы), то онъ его такимъ умноженіемъ уменьшаетъ. [См. Примѣчаніе ст. 91, n. e.)

Умноженіе есть повторенное сложеніе.

„Однако изъ уже изложеннаго явствуетъ, что умноженіе (конечно въ точномъ смыслѣ) едвали что нибудь иное, чѣмъ многократное сложеніе, или сокращеніе сложенія. Ибо утроить или умножить на 3 то же самое, что сложить количество 3 раза; и притомъ произведеніе этого умноженія то же самое что и сумма этого сложенія. Такъ же и въ остальныхъ случаяхъ. Напримѣръ $2\times2=2+2$, $2\times3=2+2+2$, $2\times4=2+2+2+2$; это очевидно. Здѣсь же вскользь замѣтимъ, что число 2 одинаково измѣняется, какъ своимъ сложеніемъ съ самимъ собою, такъ и своимъ умноженіемъ на себя, а именно $2+2=2\times2$; и это справедливо только для двойки. [См. Примѣчаніе ст. 91, n. f.]

Каждый производитель можетъ называться множимымъ или множителемъ.

„Далѣе изъ изложеннаго видно, что при умноженіи чиселъ имѣется два данныхъ числа, именно множимое и множитель, и третье искомое, т. е. произведеніе. И слѣдуетъ знать, что рѣшительно все равно которое изъ данныхъ чиселъ назвать множимымъ, и которое множителемъ. Получается одно и то же произведеніе, какое бы изъ данныхъ чиселъ не принято за множимое. Все равно беремъ ли мы четыре три раза, или три четыре раза; оба раза получается двѣнадцать. Т. е. $4\times3=3\times4$. И такъ же въ другихъ случаяхъ. Это хорошо поясняется точками, расположенными горизонтальными и вертикальными столбцами.

. . . .

. . . .

. . . .

„Считая по горизонтальнымъ сторонамъ, получаемъ трижды четыре, считая по вертикальнымъ столбцамъ, получаемъ четыре раза три; и оба раза число точекъ, очевидно, одно и то же. Это указываетъ уже Эвклидъ 16е7: *если два взаимно перемножающихся числа, переставляются, то получаемыя числа равны между собою.* Это значитъ, что если число A умножаетъ число B, такъ что получается B×A, или наоборотъ, если B умножаетъ A, такъ что получается A×B, то оба произведенія равны, т. е. A×B=B×A.

„И кому наше доказательство не убѣдительно, пусть посмотритъ другое въ приведенномъ мѣстѣ Эвклида.

„Учителя ариѳметики однако часто учатъ, что множимымъ называется большее число и что оно должно предшествовать, меньшее же число называется множителемъ и должно слѣдовать за нимъ. Это не слѣдуетъ считать необходимо обязательнымъ; этимъ путемъ вычисляющій только желаетъ создать удобство вычисленія; и мы иногда такъ поступаемъ; но необходимости въ этомъ нѣтъ.

„Наконецъ слѣдуетъ еще сказать, что ариѳметики нерѣдко называютъ общимъ именемъ *производителей* оба данныя числа, множимое и множитель, въ родѣ того, какъ число, получаемое отъ умноженія, называется *произведеніемъ.* И говорятъ, что оба производителя взаимно другъ друга *ведутъ* или *умножаютъ.* (Factores illi *invicem duci* sive *multiplicari* dicuntur). Однако рѣшительно все равно numerum in numerum ducere или numerum per numerum multiplicare. Точно также число, получаемое отъ умноженія, или произведеніе, нерѣдко называется прямоугольникомъ или площадью;—это метафора, взятая изъ геометріи, гдѣ помощію веденія (ductus) длины по ширинѣ получается плоскость или площадь прямоугольника или параллелограмма. [См. Примѣчаніе ст. 91, n. g.]

„Теперь я достаточно изложилъ суть умноженія, т. е. что такое умноженіе, и остается показать его исполненіе, т. е. какимъ образомъ совершается умноженіе.

[Слѣдуетъ изложеніе правилъ умноженія цѣлыхъ ариѳметическихъ чиселъ и умноженія десятичныхъ дробей,—которое опускаемъ].

91. *Примѣчаніе* къ Wallis. Cap. XVIII.

a) Wallis начинаетъ изложеніе теоріи умноженія тѣмъ, что даетъ два опредѣленія этого дѣйствія, которыя сейчасъ же обобщаетъ и выражаетъ въ такомъ видѣ: *умножить значитъ найти количество, содержащее данное количество столько разъ, сколько требуется,* или же *умножить значитъ подыскать къ данному количеству другое, находящееся съ нимъ въ требуемомъ отношеніи.*

Эти два опредѣленія заслуживаютъ полнѣйшаго вниманія по своей простотѣ, точности и общности. Первое обнимаетъ всѣ случаи умноженія на раціональныя числа; второе же очевидно обнимаетъ всѣ случаи умноженія какъ отвлеченныхъ чиселъ, такъ и именованныхъ количествъ. Это второе опредѣленіе по нашему мнѣнію безупречно. Wallis, къ сожалѣнію, не говоритъ, самъ ли онъ его формулировалъ, или же онъ представляетъ общеизвѣстное опредѣленіе. Второе предположеніе гораздо вѣроятнѣе; онъ относится къ нему отрицательно и стремится въ дальнѣйшемъ къ тому, чтобы выдвинуть на первый планъ ученіе объ умноженіи, какъ о сокращенномъ сложеніи. Стремясь къ заранѣе намѣченной цѣли, онъ сейчасъ же, поясняя, что слѣдуетъ понимать подъ множимымъ и множителемъ, оговаривается, что найти число въ требуемомъ отношеніи къ данному значитъ найти его двойную, тройную и т. д. величину. Какъ бы произвольно такое ограниченіе ни было, оно тѣмъ не менѣе на лицѣ.

b) Указывая опредѣленія, даваемыя другими авторами, пользующимися при этомъ словами множимое, множитель, Wallis отвергаетъ ихъ именно вслѣдствіе введенія въ нихъ этихъ терминовъ, требующихъ въ свою очередь новыхъ опредѣленій, и затѣмъ дѣлаетъ такой же упрекъ вышеупомянутому второму опредѣленію, высказывая, что онъ считаетъ недозволительнымъ упоминать про отношеніе, такъ какъ это требуетъ предварительнаго знакомства съ этимъ понятіемъ. Этотъ упрекъ Wallis повидимому считаетъ весьма серьезнымъ, потому что это единственный, который онъ дѣлаетъ; а между тѣмъ онъ въ дальнѣйшемъ никогда болѣе не возвращается къ этому опредѣленію и слѣдовательно считаетъ его или достаточно опровергнутымъ, или вообще не имѣющимъ значенія. Онъ нѣсколько дальше говоритъ, что его цѣль не вести споръ о словахъ, гдѣ надо говорить о дѣлѣ, но такое увѣреніе не вполнѣ мирится съ придирчивостью, которую онъ обнаруживаетъ по отношенію къ опредѣленію Эвклида. А между тѣмъ это опредѣленіе Эвклида, относящееся только къ числамъ, прекрасно по своей простотѣ и ясности.

Конечно не можетъ быть рѣчи, что общее опредѣленіе, приводимое Валлисомъ: *умножить значитъ найти величину подъ условіемъ даннаго отношенія къ данной величинѣ*,—не годится какъ первоначальное опредѣленіе, покуда преподаватель ведетъ рѣчь только о первыхъ случаяхъ умноженія цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Но къ тому времени, когда преподаватель, въ концѣ курса, можетъ поставить вопросъ объ объединеніи всѣхъ случаевъ умноженія, объ ихъ подведеніи подъ одну общую точку зрѣнія, понятіе объ отношеніи двухъ величинъ уже всесторонне изучено; и по этому не можетъ представлять ни самомалѣйшаго практическаго неудобства ввести въ окончательное опредѣленіе дѣйствія умноженія понятіе объ отношеніи, а слѣдовательно пользоваться въ преподаваніи приведеннымъ опредѣленіемъ.

c) Намъ уже сдѣлано было на страницахъ этого журнала возраженіе, что совершенно необходимо дополнить нашу критику господствующаго нынѣ ученія объ умноженіи, новымъ общимъ опредѣленіемъ этого дѣйствія, которое въ школьномъ преподаваніи могло бы замѣнить прежнее. Оказывается, что совершенно незачѣмъ выдумывать новое опредѣленіе, но что въ XVII вѣкѣ такое опредѣленіе существовало.

Чтобы вполнѣ подтвердить его, считаемъ необходимымъ сдѣлать небольшое отступленіе и коснуться въ общей формѣ вопроса объ опредѣленіяхъ вообще.

Извѣстно, что чѣмъ проще какой нибудь предметъ или понятіе, тѣмъ обыкновенно труднѣе опредѣлить его словами; такъ напр. элементарные факты нашего сознанія, въ родѣ пространства и времени, не поддаются точному словесному опредѣленію.

Предметы или понятія дѣлятся на нѣкоторые классы или подраздѣленія, въ зависимости отъ присущихъ имъ свойствъ. Всякое опредѣленіе должно заключать въ себѣ выраженіе какого нибудь существеннаго признака опредѣляемаго предмета или понятія; при чемъ подъ существеннымъ признакомъ понимается такой, который позволяетъ дѣлать дальнѣйшія заключенія, какъ слѣдствія изъ опредѣленія; такой же признакъ, который не позволяетъ дѣлать никакихъ заключеній, считается несущественнымъ; такъ напр. цвѣтъ переплета книги совершенно несущественное свойство книги. Опредѣленіе не можетъ и не должно исчерпывать опредѣляемаго понятія; и можно даже сказать, что чѣмъ болѣе существенный признакъ положенъ въ основаніе опредѣленія, тѣмъ менѣе это опредѣленіе исчерпываетъ понятіе объ опредѣлнемомъ предметѣ, потому что тѣмъ больше слѣдствій будетъ вытекать изъ него. Опредѣленіе вмѣстѣ съ тѣмъ должно быть достаточное, т. е. должно давать возможность отличать опредѣляемый предметъ или понятіе отъ предметовъ другого класса.

Принимая все это во вниманіе, можно сказать, что вышеприведенное опредѣленіе умноженія вполнѣ хорошее. Оно требуетъ оговорки только въ одномъ пунктѣ; обнимая всѣ случаи умноженія, оно очевидно включаетъ требованіе, чтобы понятіе объ отношеніи было распространено и на разнородныя именованныя величины. Этого вопроса коснемся ниже, когда разберемъ главу XXV трактата Валлиса; а теперь посмотримъ, какъ онъ развиваетъ свое дальнѣйшее ученіе.

d) Wallis разсматриваетъ сначала умноженіе въ тѣсномъ смыслѣ слова. Объ общемъ опредѣленіи уже нѣтъ рѣчи; онъ говоритъ, что найти произведеніе тождественно съ нахожденіемъ кратнаго даннаго числа; и это подтверждается филологическимъ соображеніемъ о внутренней связи словъ multiplicare (умножить) и multiplum (краткое=произведеніе). Такая аргументація не представляла бы интереса съ математической стороны, если бы за нею не слѣдовало развитіе понятія о кратномъ и о части. Здѣсь выступаетъ смутность воззрѣній, мало пригодная въ то время, когда человѣкъ берется критически развивать необходимость той или другой формы научныхъ воззрѣній. Валлисъ оговариватся, что нельзя всякую величину, меньшую данной, называть ея частью, какъ это дѣлается въ геометріи, когда напр. говорятъ совершенно неопредѣленно, что цѣлое больше части; въ этомъ смыслѣ Валлисъ не считаетъ возможнымъ называть число 2 частію числа 5, а точно оговаривается, что это уже совокупность частей; понятіе же о части исчерпывается дробью съ числителемъ единица. Такой взглядъ, какъ ниже увидимъ приводитъ Валлиса къ серьезной путаницѣ въ пониманіи умноженія дробей.

e) Валлисъ обобщаетъ понятіе объ умноженіи на случаи, когда множитель *единица*, дробь или ирраціональное число. Это приводитъ его къ любопытному замѣчанію о томъ, что наличность такихъ случаевъ умноженія заставляетъ смотрѣть на 1 или даже на $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\sqrt{3}$ и т. д. какъ на числа или количества. При всемъ уваженіи къ научнымъ заслугамъ Валлиса, вполнѣ признавая его эрудицію въ дѣлѣ примѣненія математическихъ правилъ, слѣдуетъ однако признать, что онъ мало подготовленъ для критической оцѣнки основныхъ положеній науки по существу.

Все, что Валлисъ далѣе говоритъ объ умноженіи на единицу, было бы довольно невинно, если бы не заключало существеннаго опущенія,—

а именно случая именованной единицы, умноженіе на которую даетъ произведеніе, вовсе не равное множимому, а имѣющее другое наименованіе. Спрашивается однако, есть ли въ предъидущихъ разсмотрѣніяхъ Валлиса что нибудь, оправдывающее такое опущеніе. Онъ *желаетъ* не имѣть дѣла съ умноженіемъ именованныхъ количествъ и по этому просто опускаетъ относящееся къ нимъ; а между тѣмъ онъ повидимому знаетъ, что другіе производятъ умноженія на именованныя количества; но этотъ фактъ его ни къ чему не обязываетъ въ то самое время, когда существованіе случаевъ умноженія на дробь заставляетъ его „смотрѣть даже на дробь, какъ на число".

Относительно умноженія на дробь Валлисъ оговаривается, что это въ сущности вовсе не умноженіе, но дѣленіе; къ этому еще вернемся, когда укажемъ, что онъ дѣленіе въ свою очередь считаетъ по существу не дѣленіемъ, а умноженіемъ на дробь; скажемъ только, что понятіе объ умноженіи на дробь, какъ объ отъисканіи по данной величинѣ нѣкоторой ея части, ему чуждо.

Касаясь умноженія на $\sqrt{3}$, Валлисъ только вкратцѣ говоритъ, что при этомъ совершается какъ умноженіе на 3, такъ и извлеченіе квадратнаго корня. Оставляя въ сторонѣ смутность этого выраженія, замѣтимъ только, что на этомъ случаѣ онъ и могъ бы провѣрить неминуемо ли надо прійти къ понятію объ умноженіи, какъ о сокращенномъ сложеніи; но онъ этого не дѣлаетъ.

f) Выше разобранныя соображенія Валлиса приводятъ его къ заключенію, что правильно понимаемое умноженіе едва ли что нибудь иное, какъ сокращенное сложеніе—Patet autem, ex jam traditis, multiplicationem (saltem stricte sumptam) vix aliud esse quam multiplicem additionem, sive additionis compendium; а въ подтвержденіе приводится только примѣръ цѣлыхъ чиселъ.

Самъ Wallis еще допускаетъ оговорку „едвали", но его положеніе вслѣдъ за тѣмъ стало совершенной аксіомой. Wallis такимъ образомъ является творцомъ нынѣ господствующаго ученія объ умноженіи; повидимому эта честь принадлежитъ ему. Мы старались показать, какимъ образомъ онъ пришелъ къ своему заключенію. Но научная критика до сихъ поръ еще не касалась этого вопроса, а ученіе Валлиса считается на столько непреложнымъ, что вопросъ о его возникновеніи не представлялъ интереса; и даже имя Валлиса не упоминается, какъ это обыкновенно бываетъ, когда какая нибудь истина считается до того очевидною, что даже странно спрашивать кто ея авторъ.

g) Въ заключеніе Wallis еще разъ подтверждаетъ, что рѣшительно все равно numerum in numerum ducere или numerum in numerum multiplicare, а во вторыхъ говоритъ, что перемноженіе сторонъ прямоугольника не что иное какъ *метафора*. Wallis не могъ бы, не впадая въ недобросовѣстность, утверждать это, если бы онъ читалъ алгебру Vieta. А такъ какъ не приходится заподозривать его добросовѣстности, то надо констатировать фактъ, что Wallis въ то время, когда онъ съ одной стороны вырабатывалъ новый и очень цѣнный принципъ, а именно, что вполнѣ возможно вести геометрическія изслѣдованія, вводя въ уравненія данныя въ видѣ отвлеченныхъ чиселъ, съ другой стороны не сумѣлъ сдѣлать это, примыкая къ предшествовавшему историческому развитію.

Въ силу этого онъ безъ всякой нужды объявилъ безсмысленнымъ то, что до него очень цѣнилось и было добыто вѣковымъ трудомъ.

92. Въ главѣ XIX Mathes. univers. Wallis разсматриваетъ дѣленіе чиселъ. Его разсмотрѣнія аналогичны сдѣланнымъ въ предъидущей главѣ относительно умноженія; поэтому ограничимся краткимъ замѣчаніемъ.

Wallis начинаетъ вопросомъ: что такое дѣленіе? и даетъ слѣдующій отвѣтъ:

„Дѣлить значитъ разложить нѣкоторое данное число на нѣсколько равныхъ частей; или найти число, показывающее сколько разъ одно данное число содержится въ другомъ. Или же (если угодно говорить не только о дѣленіи чиселъ, но и о другихъ случаяхъ дѣленія) дѣлить значитъ уменьшить данное количество въ данномъ отношеніи; или, еще лучше, дѣлить значитъ найти взаимное отношеніе двухъ однородныхъ величинъ".

Если бы Wallis сказалъ: дѣлить значитъ найти отношеніе двухъ величинъ,—не упоминая при этомъ объ ихъ однородности, то онъ этимъ устанавливалъ бы совершенно общее опредѣленіе этого дѣйствія. Но о дѣленіи разнородныхъ величинъ Wallis упоминаетъ только въ послѣдствіи, говоря объ отношеніяхъ; и тогда и мы подробнѣе остановимся на этомъ.

Въ остальномъ глава XIX содержитъ только правила дѣленія цѣлыхъ чиселъ.

93. Въ главѣ XX Wallis разсматриваетъ умноженіе и дѣленіе алгебрическое или специозное, а также величинъ, составленныхъ изъ разныхъ наименованій, и ихъ приведеніе къ одному наименованію.

Подъ величинами, составленными изъ разныхъ наименованій, Wallis понимаетъ составныя именованныя числа. Онъ излагаетъ въ этой главѣ умноженіе и дѣленіе алгебрическихъ количествъ, при чемъ буквы имѣютъ значеніе отвлеченныхъ чиселъ. Объ именованныхъ величинахъ говорится только въ видѣ рѣшенія нѣсколькихъ обыкновенныхъ ариѳметическихъ задачъ на тройное правило. Случай перемноженія нѣсколькихъ именованныхъ величинъ вовсе не затрогивается; и Wallis опять употребляетъ терминъ ducere, относя его къ числамъ.

94. Остановимся нѣсколько на главѣ XXII, посвященной примѣненію умноженія и дѣленія къ измѣренію параллелограмовъ и прямоугольниковъ и къ ихъ взаимному сравненію.

Mattes. univers. глава XXII:

„Прежде чѣмъ оставлю умноженіе и дѣленіе (правила дѣйствій которыхъ выше изложены), будетъ быть можетъ не безполезно и не скучно присовокупить къ нимъ кое что для обнаруженія ихъ пользы и для указанія, между прочимъ, тѣсной связи между ариѳметикою и геометріею. Ибо хотя ариѳметика, трактующая о числахъ, сама по себѣ не касается геометрическихъ мѣръ и основана на общихъ принципахъ, и излагаетъ, не нуждаясь въ поддержкѣ геометріи, общія правила, одинаково примѣнимыя ко всему, поддающемуся счету (ибо она вышла изъ болѣе общихъ и болѣе простыхъ разсмотрѣній, чѣмъ геометрія);—но такъ какъ предметъ геометріи, а именно измѣреніе, подходитъ подъ предметъ ариѳметическихъ терминовъ (потому что ея части подлежатъ счету), то не пойдемъ въ разрѣзъ съ сущностію дѣла, если нѣсколько займемся изложеніемъ примѣненія ариѳметики къ геометріи".

Сказавъ нѣсколько словъ о сложеніи и вычитаніи и давъ нѣсколько геометрическихъ опредѣленій для параллелограма и прямоугольника, Wallis продолжаетъ:

„Для опредѣленія площади или величины прямоугольника требуется не что иное, какъ только вести или умножить (ducere sive multiplicare) одну изъ тѣхъ двухъ прямыхъ, между которыми онъ заключенъ, на другую".

За тѣмъ слѣдуетъ общеизвѣстное поясненіе правила на чертежѣ, разбивая прямоугольникъ со сторонами 4 и 3 на квадраты. Объяснивъ затѣмъ, что квадратный футъ содержитъ 144 квадр. дюйма, Wallis продолжаетъ однако слѣдующимъ образомъ:

„Если угодно, можно все это выразить символами. Пусть A ширина или высота, B длина или основаніе; тогда величина или площадь будетъ $A \times B$; такъ что если $A=3$, $B=4$, то $AB=12$. Для квадрата, гдѣ ширина и длина равны, будетъ $AB=AA=A^2$. И такъ какъ длина фута (Pes) ровно 12 дюймовъ (Uncia), то поэтому высота и основаніе квадратнаго фута равны 12 unc.; и слѣдовательно получаемъ

$$A=P = 12\ U$$

$$\underline{B=P = 12\ U}$$

$$AB=PP=P^2=144\ U\,U=144.\ U^2$$

т. е.

$$P^2=144\ U^2$$

или одинъ квадратный футъ равенъ 144 квадратнымъ дюймамъ".

Далѣе слѣдуетъ подобное же разсмотрѣніе для прямоугольника и параллеллограма и указывается геометрически и алгебрически, что изъ прямоугольниковъ одинаковаго периметра квадратъ имѣетъ наибольшую площадь.

95. *Примѣчаніе* къ главѣ XXII. Изложеніе Валлиса теоріи опредѣленія площади прямоугольника довольно замѣчательно. Онъ словно извиняется, что намѣренъ говорить о геометрическомъ вопросѣ, и оправдывается тѣмъ, что это не очень скучно и не безполезно. О важномъ же историческомъ значеніи этой задачи Wallis повидимому ничего не знаетъ. Словами ducere и multiplicare онъ опять пользуется вполнѣ тождественно; и читатель, изучающій алгебру по его руководству, конечно желаетъ поскорѣе избавиться отъ докучливой обузы употреблять два названія одного дѣйствія.

Затѣмъ однако слѣдуетъ вполнѣ раціональное изображеніе теоремы символами, гдѣ символы наименованій играютъ, какъ слѣдуетъ, роль множителей. Оно не придумано Валлисомъ, но онъ его еще знаетъ и пользуется имъ; его послѣдователи однако сумѣли избавиться и отъ такой обузы.

96. Обращаемся къ главѣ XXV, гдѣ Wallis разсматриваетъ вопросъ объ отношеніяхъ и высказываетъ нѣкоторые принципіальные взгляды.

Mathesis Univers. глава XXV.

„Въ предъидущемъ мы изложили сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе,—эти знаменитыя подраздѣленія ариѳметики. Въ дальнѣйшемъ воспользуемся ими, какъ орудіемъ.

„*Взаимное сравненіе чиселъ.* Здѣсь рождается вопросъ о двоякомъ взаимномъ сравненіи чиселъ (или другихъ какихъ нибудь однородныхъ количествъ): одного по разности, другого по отношенію. Первое сопричастно по существу сложенію и вычитанію, а второе умноженію и дѣленію".

„*Сравненіе другихъ величинъ.* Чтобы однако лучше установить это взаимное сравненіе чиселъ, слѣдуетъ во первыхъ знать, что не только къ числамъ или количествамъ, но и къ какимъ нибудь произвольнымъ величинамъ относится все то, что мы желаемъ сказать про взаимное сравненіе чиселъ, и все что Эвклидъ въ 5 книгѣ говоритъ объ отношеніи величинъ. Все что, по существу ли, случайно ли, подвержено счисленію, можетъ въ силу этого быть сравниваемо и по разности и по отношенію съ однородными себѣ; оно можетъ равняться, или не равняться ему".

„*Сравниваемыя необходимо однородны.* Во вторыхъ надо знать, что предметы могутъ сравниваться только въ зависимости отъ чего нибудь общаго, что присуще обоимъ сравниваемымъ, или предполагается имъ присущимъ; а не въ зависимости отъ чего нибудь, что или одному или обоимъ чуждо. И поэтому величины могутъ быть сравниваемы только, если онѣ однородныя, или если онѣ ради этого сдѣланы однородными. Такъ напр. мы сравниваемъ линіи съ линіями, поверхности съ поверхностями, числа съ числами, вѣсъ съ вѣсомъ, и вообще всякія величины не иначе какъ съ себѣ однородными. Если же кто поступитъ иначе, напр. станетъ искать отношеніе данной линіи къ данной поверхности, или времени къ линіи и т. д., или избытокъ одного надъ другимъ, то это будетъ все равно, что спросить сколько линій составляютъ поверхность, или сколько времени составляетъ линію, или сколько длины составляетъ ширину; а все это не менѣе безсмысленно, чѣмъ вопросъ о томъ, какіе цвѣта составляютъ звукъ, или какіе звуки составляютъ силу тяжести. Повидимому однако иные, не одаренные достаточнымъ умомъ, занимаются подобными изслѣдованіями и философствуютъ надъ подобнаго рода вопросами; такъ напр. инымъ грезится, что линіи составлены изъ точекъ или поверхности изъ линій. Они не понимаютъ, что это равносильно утвержденію, будто всѣ числа составлены изъ нулей, ибо точка не имѣетъ длины, а линія не имѣетъ ширины".

[См. Примѣчаніе къ главѣ XXV, ст. 97. п. а.]

„*Разность и отношеніе.* Далѣе надо знать, что однородныя величины, пригодныя къ взаимному сравненію, могутъ сравниваться двояко (относительно того конечно, въ чемъ онѣ однородны)"...... [Далѣе разсматривается сравненіе величинъ по разности и по отношенію; обращается вниманіе на то, что величина разности вообще не равна величинѣ отношенія и что величина отношенія опредѣляется частнымъ отъ дѣленія величинъ.]

„*Отношеніе опредѣляется только дѣленіемъ однородныхъ величинъ.* Надо замѣтить, что я говорилъ только о такомъ дѣленіи, гдѣ величина дѣлится на другую, однородную съ нею (ибо только однородныя величины имѣютъ взаимное отношеніе). А частное необходимо или число, или однородно числу, соотвѣтственно вопросу *сколько* или *сколько разъ*. Такъ отношеніе 4А къ А равно 4 (будь это двѣ линіи, или двѣ поверхности, или два вѣса, или двѣ какія нибудь лишь бы однородныя величины); ибо $4A : A = 4$, и величина 4А содержитъ величину А именно 4 раза. Точно такъ же отношеніе 3А къ 2А полуторное, ибо $3A : 2A = \frac{3}{2}$, т. е. бо́льшее содержитъ меньшее $\frac{3}{2}$ раза, или одинъ разъ и еще половину, или столько, сколько разъ 3 содержитъ 2. Такъ же отношеніе прямоугольниковъ VB и AB равно $\frac{V}{A}$, ибо $VB : AB = \frac{V}{A}$, т. е. прямоугольникъ VB содержитъ прямоугольникъ AB столько разъ, сколько прямая V содержитъ А; и т. д.

„Замѣтимъ, что не всегда можно получать перемѣнное отношеніе*); это возможно только для четырехъ однородныхъ величинъ. Напр. если вѣсъ А относится къ вѣсу В, какъ линія α къ линіи β, то на основаніи этого еще нельзя сказать, чтобы вѣсъ А относился къ линіи α, какъ вѣсъ В къ линіи β. Причина уже высказана. А потому, если рѣчь идетъ о перестановкахъ или преобразованіи пропорціи (или объ ея слѣдствіяхъ), то всегда подразумѣвается это ограниченіе, хотя бы даже оно не было высказано. Въ послѣдствіи скажемъ подробнѣе объ этомъ, когда будемъ разсматривать соотвѣтственное предложеніе 16 книги Эвклида“. [См. примѣчаніе къ гл. XXV, ст. 97 п. b.]

„*Что слѣдуетъ понимать подъ дѣленіемъ величины на разнородную съ нею* (applicatio). То дѣленіе (divisio sive applicatio), которое напр. гласитъ, что прямоугольникъ AB надо дѣлить на ширину или высоту А, чтобы получить основаніе В, или наоборотъ; или дѣленіе, по которому даже объемъ ABC дѣлится на площадь BC, чтобы получить ребро А, или же на ребро А, чтобы получить площадь BC; или же другія подобнаго же рода дѣленія—могутъ быть названы дѣленіями не иначе, какъ въ иносказательномъ смыслѣ, и для настоящаго нашего изслѣдованія они не пригодны. Ибо получающееся отсюда нельзя назвать въ точности частнымъ; оно не отвѣчаетъ на вопросъ сколько или сколько разъ. А вѣдь въ частномъ ищется число (или нѣчто однородное съ числомъ), а не величина или количество, разнородное съ числомъ. Такія аппликаціи могутъ быть сводимы къ дѣленію только въ томъ смыслѣ, чтобы всѣ отдѣльныя количества разсматривались въ качествѣ чиселъ. Ибо вовсе не требуется узнать сколько разъ линія А содержится въ площади пря-

---

*) Wallis понимаетъ подъ этимъ перестановку членовъ пропорціи.

моугольника AB, или же сколько разъ линія A или площадь BC содержится въ объемѣ ABC,—все это совершенно несообразно. Но требуется узнать сколько разъ *число*, скажемъ, квадратовъ, входящихъ въ площадь параллелограма AB должно содержать *число*, выражающее длину стороны A, чтобы получилось *число*, выражающее длину другой стороны B. Или, точно также, сколько разъ *число* кубовъ объема ABC должно содержать *число* единицъ длины прямой A, чтобы получилось число квадратовъ площади BC; или сколько разъ оно должно содержать число квадратовъ основанія BC, чтобы получилось число длинъ прямой A.

„Даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда какое нибудь количество дѣлится на число, напр. $A:2=\frac{1}{2}A$, имѣемъ не столько дѣленіе (хотя оно конечно пригодно для этого случая), сколько умноженіе (именно количество A собственно не дѣлится на число 2, а скорѣе умножается на $\frac{1}{2}$). Ибо не ищется вѣдь сколько разъ *число* 2 содержится въ количествѣ A (это было бы нелѣпо), но требуется по данному количеству A найти другое, въ данномъ съ нимъ отношеніи; а это скорѣе умноженіе, чѣмъ дѣленіе; ибо величина отношенія бываетъ данною при умноженіи, а при дѣленіи она составляетъ искомую". [См. примѣчаніе къ главѣ XXV, ст. 97, п. с.]

Далѣе Wallis проводитъ еще параллель между разностію и отношеніемъ, чтобы выставить на видъ, что всякаго рода отношенія, какъ отвлеченныя числа, однородны между собою; чего нельзя сказать про разности. Онъ старается указать, что отношеніе есть качественная, а не количественная зависимость, и затѣмъ устанавливаетъ понятія ариѳметической и геометрической прогрессіи. Все это опускаемъ; приведенная же первая часть главы достойна полнаго вниманія.

97) *Примѣчаніе къ Math. univers.* гл. XXV.

а) Первый фактъ въ изложеніи Валлиса, обращающій на себя вниманіе, тотъ, что онъ не разграничиваетъ сравненія двухъ величинъ по разности и по отношенію. Онъ интересуется совершенно не существенными вещами, напр. выставляетъ на видъ, что числовая величина разности не равна величинѣ отношенія, и что числа 4 и 2 представляютъ единственное исключеніе; но по существу онъ разсматриваетъ оба способа сравненія слитно, и бездоказательно переноситъ на сравненіе по отношенію требованіе однородности сравниваемыхъ величинъ, обязательность которой при сравненіи по разности дѣйствительно очевидна съ ясностію аксіомы.

Wallis старается подтвердить нѣкоторыми соображеніями необходимость однородности обѣихъ сравниваемыхъ величинъ. Ради этого онъ высказываетъ общій принципъ, что предметы могутъ сравниваться только въ зависимости отъ чего нибудь общаго обоимъ, а не въ зависимости отъ такого, что одному изъ нихъ или обоимъ чуждо,—а поэтому они должны быть однородны. Такое разсужденіе однако можно назвать чѣмъ угодно, только не принципомъ изслѣдованія вообще, и математическаго въ особенности. Вѣдь приходится же сравнивать по отношенію электровозбудительную силу и гальваническое сопротивленіе для опредѣленія силы тока. Эти три величины довольно таки разнородны, и возможность ихъ точнаго сравненія основана не на ихъ несуществующей однородности, а на ихъ взаимной пропорціональности.

Wallis называетъ несогласныхъ съ нимъ неодаренными достаточнымъ умомъ,—но аргументъ, приводимый Валлисомъ въ подтвержденіе слабоумія своихъ противниковъ, заключается въ ссылкѣ на нелѣпую, будто, грезу о составленіи линій изъ точекъ и поверхностей изъ линій. Эти строки, написанныя наканунѣ открытія дифференціальнаго исчисленія, довольно любопытны. Валлисъ не желаетъ признавать ничего кромѣ повторнаго суммированія и поэтому отрицаетъ даже образованіе однихъ геометрическихъ фигуръ движеніемъ другихъ.

b) Самое вѣское подтвержденіе необходимости однородности обѣихъ сравниваемыхъ величинъ Валлисъ видитъ въ томъ, что отношеніе, какъ частное, необходимо должно отвѣчать на вопросъ сколько или сколько разъ. Мы уже раньше видѣли, что Wallis началъ съ элиминированія изъ своихъ разсмотрѣній случая именованнаго множителя; поэтому такое утвержденіе съ его стороны довольно естественное; къ сожалѣнію однако нельзя сказать, чтобы онъ его хоть чѣмъ нибудь подтверждалъ.

Валлисъ вообще довольно слабъ въ своихъ разсужденіяхъ, какъ только уклоняется отъ непосредственнаго производства дѣйствій по даннымъ правиламъ. Такъ напр. онъ утверждаетъ, что изъ правильной пропорціи

$$\text{Вѣсъ } A : \text{Вѣсъ } B = \text{линіи } \alpha : \text{линія } \beta$$

нельзя заключить о правильности такой пропорціи

$$\text{Вѣсъ } A : \text{линія } \alpha = \text{Вѣсъ } B : \text{линія } \beta.$$

Спрашивается почему же? Если бы даже перестановка среднихъ членовъ привела къ неразумнымъ отношеніямъ, то во всякомъ случаѣ оба отношенія одинаково неразумны, и поэтому ихъ тождество нисколько не нарушилось, какъ не нарушилось отъ перестановки и равенство произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ.

c) Wallis далѣе непосредственно обращается противъ нелѣпости дѣленія площади на линію, объема на площадь и линію и т. д. Здѣсь прежде всего интересно, что Wallis признаетъ существованіе такихъ случаевъ дѣленія; онъ говоритъ, что такъ поступаютъ. Это важно; ученіе Vieta слѣдовательно пустило въ свое время корни, если Wallis считаетъ необходимымъ бороться противъ него. Онъ считаетъ эти случаи иносказательными случаями дѣленія, и во всей ясности высказываетъ свое ученіе о томъ, что слѣдуетъ ограничиться разсмотрѣніемъ числовыхъ значеній, и что тогда эти иносказательные случаи обращаются въ случаи дѣйствительнаго дѣленія,

На сколько относящіяся сюда разсужденія Валлиса слабы, хотя вмѣстѣ съ тѣмъ все таки послѣдовательны, видно изъ дальнѣйшаго. Онъ обращается къ случаю дѣленія именованнаго количества на отвлеченное число и со строго логическою послѣдовательностію затрудняется признать его разумнымъ, въ силу того, что обѣ величины разнородны. Далеко не лишне обратить вниманіе на такое его затрудненіе. Дѣйствительно, разъ дѣленіе двухъ разнородныхъ величинъ признано въ принципѣ абсурдомъ, то надо быть послѣдовательнымъ и нужно бы и теперь оговариваться, что, производя такое дѣленіе 2 фута: 2=футъ, мы на самомъ дѣлѣ не совершаемъ нелѣпой операціи дѣленія двухъ разнородныхъ величинъ, а только пользуемся механизмомъ дѣйствія дѣленія, т. е. пользуемся ариѳметическою метафорою, что ли; совершенно въ родѣ того, какъ при вычисленіи площади прямоугольника не совершаемъ умноженія линій, а только ихъ числовыхъ значеній, пользуясь, согласно Валлису, геометрическою метафорою. Въ смыслъ этого крайняго вывода не мѣшаетъ вдуматься.

Если же мы въ этомъ случаѣ не считаемъ дѣленіе двухъ разнородныхъ величинъ нелѣпостію, потому что рѣшаемъ этимъ дѣйствіемъ совершенно опредѣленную задачу о раздробленіи нѣкоторой величины на равныя части, то, очевидно, является вопросъ, почему же другіе случаи дѣленія разнородныхъ должны быть отвергаемы, хотя бы они служили выраженіемъ совершенно опредѣленныхъ геометрическихъ или физическихъ вопросовъ.

Самъ Валлисъ находитъ довольно любопытный выходъ изъ этого затрудненія. Не рѣшаясь конечно отвергнуть дѣленіе $A: 2 = \frac{1}{2} A$, онъ поясняетъ, что это по смыслу не дѣленіе, а умноженіе. Но раньше мы видѣли, что умноженіе на $\frac{1}{2}$ онъ считаетъ не умноженіемъ, а дѣленіемъ; и вопросъ о разъясненіи такого противорѣчія остается у него открытымъ.

98. Разобравъ въ предыдущемъ, что соображенія Валлиса, съ одной стороны обусловливаются незнаніемъ историческаго развитія науки, а съ другой стороны служатъ выраженіемъ предвзятаго мнѣнія, считаемъ однако необходимымъ указать еще на одно обстоятельство, которое вѣроятно служило Валлису однимъ изъ исходныхъ пунктовъ его соображеній. Валлисъ почерпнулъ опредѣленіе отношенія изъ элементовъ Эвклида; тамъ дѣйствительно говорится только про отношеніе однородныхъ величинъ. И вѣроятно Валлисъ, касаясь случаевъ аппликацій, производившихся въ его время, понималъ, что они требуютъ опредѣлить дѣйствіе дѣленія въ такой общей формѣ: дѣлить двѣ величины значитъ найти ихъ взаимное отношеніе. Но вмѣстѣ съ тѣмъ онъ видѣлъ, что этимъ создается нарушеніе опредѣленія Эвклида, по которому только однородныя величины имѣютъ отношеніе; и это обстоятельство заставило его говорить въ главѣ XIX, что дѣлить значитъ найти взаимное отношеніе двухъ однородныхъ величинъ.

Мы думаемъ, что опредѣленіе Эвклида и работы Валлиса по опредѣленію площадей кривыхъ помощію рядовъ были тѣ побудительныя причины, которыя заставили его отвергнуть создавшееся до него ученіе, историческое значеніе и развитіе котораго вдобавокъ ему были чужды.

99. Намъ остается поэтому еще коснуться Эвклидова опредѣленія отношенія, даннаго въ 5 книгѣ. Эвклидъ говоритъ: Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, т. е. *отношеніе есть нѣкоторая зависимость двухъ однородныхъ величинъ другъ отъ друга по количественности*.

Wallis разбираетъ это опредѣленіе въ главѣ XXIX съ цѣлію доказать, что слово πηλικοτητα должно быть замѣно чрезъ ποιοτητα, т. е. что рѣчь идетъ не о количественной, а о качественной зависимости. Эту критику, оставимъ въ сторонѣ, какъ не имѣющую значенія.

Въ настоящее время въ учебникахъ опредѣленіе почти никогда не дается въ формѣ Эвклида. Обычныя опредѣленія учебниковъ двухъ видовъ. Или же говорится, что отношеніе двухъ однородныхъ величинъ есть то число, которое служило бы мѣрою одной изъ нихъ, если бы другая была принята за единицу измѣренія; или же просто отождествляютъ отношеніе съ частнымъ двухъ чиселъ. Второе выраженіе дѣлаетъ непонятнымъ ирраціональныя значенія отношеній. Первое же не допускаетъ дальнѣйшаго развитія понятія объ отношеніи и его распространеніе на случай разнородныхъ величинъ.

Центръ тяжести Эвклидова опредѣленія заключается въ томъ, что онъ понимаетъ отношеніе какъ взаимную зависимость двухъ величинъ, т. е. понимаетъ его функціональный характеръ. Это въ строжайшемъ соотвѣтствіи съ общимъ духомъ древней науки, которая нисколько не интересовалась опредѣленными числовыми значеніями, никогда не прибѣгаетъ къ единицамъ измѣренія, но которая изучаетъ зависимости, т. е. функціи. Съ этой точки зрѣнія новѣйшія опредѣленія, называющія отношеніе числомъ, совершенно искажаютъ смыслъ Эвклидова опредѣленія въ угоду предполагаемой удобопонятности.

Суть понятія объ отношеніи заключается въ томъ, что оно является выразителемъ закона взаимной пропорціональности двухъ величинъ, связанныхъ какою нибудь зависимостію. Самъ Эвклидъ не говоритъ какую зависимость онъ подразумѣваетъ; коментаторы пришли къ правильному заключенію, что онъ имѣетъ къ виду простѣйшую, т. е. простую пропорціональность, и это подтверждается всѣми разсматриваемыми имъ случаями.

Однако спрашивается, почему Эвклидъ въ своемъ опредѣленіи ограничивается отношеніемъ однородныхъ величинъ? Этотъ вопросъ интересенъ и требуетъ отвѣта въ виду теоріи дѣленія разнородныхъ величинъ. Причина, очевидно можетъ быть двоякая: или Эвклидъ вводитъ оговорку объ однородности величинъ, считая этотъ случай единственнымъ возможнымъ, или же единственнымъ необходимымъ. Думаемъ, что Эвклидъ стоитъ на второй точкѣ зрѣнія. Это ясно въ виду того, что Эвклидъ никогда не разсматриваетъ отдѣльныхъ отношеній, а только пропорціи. Два прямоугольника находятся въ составномъ отношеніи сторонъ, два круга находятся въ удвоенномъ отношеніи радіусовъ и т. д., говоритъ древняя наука. Практическій результатъ этого былъ, что, составляя пропорціи, приходилось брать только отношеніе однородныхъ величинъ; разсматривать же отношенія разнородныхъ величинъ не было никакой надобности. Только когда были введены единицы сравненія и числовая мѣра, явилась возможность писать отдѣльныя отношенія, опредѣляя величину знаменателя отношенія. Нѣчто совершенно подобное мы указали, говоря о Галилеѣ; онъ тоже пишетъ $v\colon v_1 = t\colon t_1$, а не $v\colon t = g$, потому что величина отношенія g была ему неизвѣстна въ точности.

Такимъ образомъ можно сказать, что опредѣленіе отношенія, даваемое Эвклидомъ, было въ свое время совершенно достаточное и полное. Но къ тому времени, когда Vièta, Huyghens и другіе дѣлали дѣленія разнородныхъ величинъ (applicatio) долженъ былъ выступить вопросъ подвергнуть Эвклидово опредѣленіе критикѣ и *обобщить* его, пояснивъ, что въ случаяхъ дѣленія разнородныхъ величинъ, именованное частное слѣдуетъ понимать вовсе не какъ отвѣтъ на вопросъ сколько или сколько разъ, а какъ выраженіе знаменателя отношенія обоихъ величинъ; такъ что напр. сторона прямоугольника выражаетъ отношеніе его площади къ другой сторонѣ и т. д. Wallis однако не видѣлъ и не понималъ этого. Онъ дополняетъ Эвклидово опредѣленіе тонкимъ соображеніемъ о томъ, что величины не могутъ быть сравниваемы въ зависимости отъ того, что имъ не присуще, и вооружившись подобнаго рода положеніемъ, отвергаетъ возможность дѣленія разнородныхъ величинъ, даже не упоминая о томъ, что такія дѣленія производились не „философами съ недостаточнымъ умомъ“, а великими математиками Віетомъ и Гюйгенсомъ.

100. Мы видѣли, что Wallis не боится даже крайнихъ выводовъ и отвергаетъ дѣйствіе дѣленія именованной на отвлеченную, истолковывая этотъ случай въ смыслѣ умноженія; въ этомъ отношеніи онъ однако не нашелъ послѣдователей; но въ остальномъ его ученіе пустило глубокіе корни. Слѣдуетъ однако отдать себѣ ясный отчетъ въ томъ, что ученіе Валлиса, ставшее общепринятою нынѣ школьною доктриною, создалось на почвѣ отрѣшенія отъ непреложныхъ историческихъ фактовъ съ одной стороны, въ связи съ туманными общими соображеніями съ другой стороны. Дѣйствительная заслуга Валлиса, повторяемъ, заключается въ томъ, что онъ понялъ, что наименованія *могутъ быть* удаляемы изъ уравненій, замѣняя величины ихъ отношеніями къ однородной съ ними единицѣ, но этимъ не доказывается, что онѣ *должны быть* удаляемы, и что ихъ нельзя удерживать.

Начальникъ Кіевскаго техническаго ж. д. училища *Ѳ. Ю. Мацонъ.*

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЗАДАЧИ.

№ 551. Нѣкоторое число лицъ взаимно обмѣнялись визитными карточками. Сколько было лицъ, если для этого понадобилось 50 дюжинъ карточекъ? *А. Шифринъ* (Кіевъ).

№ 552. Какой изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный полукругъ такъ чтобы одна изъ равныхъ сторонъ лежала на діаметрѣ, имѣетъ наибольшое основаніе?

Ив. Пастуховъ (Пермь).

№ 553. Прямая OA, длина которой $=2d$, раздѣлена на $2n$ равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія приложены параллельныя силы, пропорціональныя разстояніямъ точекъ приложенія ихъ отъ точки O и направленныя поперемѣнно въ разныя стороны. Требуется опредѣлить величину равнодѣйствующей и разстояніе ея точки приложенія отъ точки O. (Заимств.) *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 554. Рѣшить уравненіе:

$$x^4-2ax^3+x^2(a^2-A)+Aax+B=0.$$

Н. Черняковъ (Иркутскъ).

№ 555. Найти суммы:

$$S_1=\sin(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)+\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\alpha)\cos(\beta-\delta)$$

$$S_2=\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)+\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\beta-\delta).$$

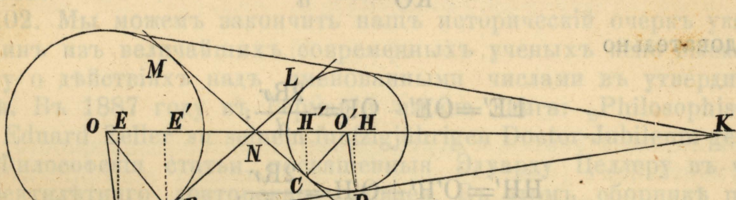
Я. Тепляковъ (Кіевъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 448. Если къ двумъ окружностямъ произвольныхъ радіусовъ, одна внѣ другой находящимся, провести двѣ общія внутреннія и двѣ общія внѣшнія касательныя, то на каждой окружности, по одну сторону прямой, соединяющей центры ихъ, получатся по двѣ точки прикосновенія: требуется доказать, что дуги каждой окружности, между означенными точками прикосновенія, имѣютъ равныя проекціи на прямую, соединяющую центры.

Пусть данныя окружности имѣютъ радіусы R и r $(R>r)$, а центры ихъ соотвѣтственно въ O и O′ (фиг. 28), разстояніе между которыми равно d; одна изъ общихъ внѣшнихъ касательныхъ касается ихъ соотвѣтственно въ точкахъ A и D, одна изъ внутреннихъ—въ B и L, а другая изъ внутреннихъ въ M и C. Обѣ внутреннія касательныя прохо

Фиг. 28.



дятъ, какъ извѣстно, черезъ нѣкоторую точку N, находящуюся на прямой, соединяющей центры, равно какъ обѣ внѣшнія чрезъ точку K, находящуюся на той же прямой. Проекціи дугъ AB и CD на прямую OO′ будутъ соотвѣтственно EE′ и H′H.

Опредѣлимъ сперва отрѣзки NO и NO′. Изъ подобія $\triangle$-ковъ OBN и O′CN имѣемъ:

$$NO:NO'=OB:O'C=R:r;$$

зная, кромѣ того, что

$$NO+NO'=d,$$

найдемъ

$$NO=\frac{Rd}{R+r},\ NO'=\frac{rd}{R+r}.$$

Далѣе найдемъ отрѣзки KO и KO′. Изъ подобныхъ $\triangle$-ковъ OAK и O′DK имѣемъ

$$KO:KO'=OA:O'D=R:r$$

и такъ какъ, кромѣ того

$$KO-KO'=d,$$

то

$$KO=\frac{Rd}{R-r},\ KO'=\frac{rd}{R-r}.$$

Пользуясь величинами четырехъ найденныхъ отрѣзковъ, изъ прямоугольныхъ $\triangle$-ковъ OBN, OAK, O′CN и O′DK найдемъ соотвѣтственно:

$$OE'=\frac{OB^2}{NO}=\frac{R(R+r)}{d},$$

$$OE=\frac{OA^2}{KO}=\frac{R(R-r)}{d},$$

$$O'H'=\frac{O'C^2}{NO'}=\frac{r(R+r)}{d},$$

$$O'H=\frac{O'D^2}{KO'}=\frac{r(R-r)}{d}.$$

Слѣдовательно

$$EE'=OE'-OE=\frac{2Rr}{d},$$

$$HH'=O'H'+O'H=\frac{2Rr}{d},$$

т. е. $EE'=HH'$, что и требовалось доказать.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ). Ученикъ Могилев. г. (8) *Я. Э.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 30 Января 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнерев и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется