Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 67.

VI Сем. 15 Марта 1889 г. № 7.

О ГАЗООБРАЗНОМЪ И ЖИДКОМЪ состояніи тѣлъ.

(Продолженіе) *)

II.

Уравненія состоянія.

Механическая теорія теплоты принимаетъ, что состояніе какого нибудь однороднаго тѣла опредѣляется вообще двумя произвольными, независимыми другъ отъ друга параметрами; заданными напередъ величинами этихъ параметровъ и характеризуется слѣдовательно вполнѣ состояніе тѣла. Обыкновенно, когда поверхность тѣла подвержена нѣкоторому постоянному нормальному давленію, за одинъ изъ параметровъ и принимаютъ именно это давленіе; за другую-же перемѣнную можно, напримѣръ, принять температуру. Давленіемъ и температурой вполнѣ опредѣляется объемъ, занимаемый тѣломъ, такъ что мы можемъ вообще разсматривать объемъ, какъ функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ: давленія и температуры.

Въ переводѣ на математическій языкъ это значитъ, что, обозначая объемъ тѣла чрезъ v, давленіе чрезъ p, а температуру чрезъ t, между этими тремя величинами должно всегда имѣть мѣсто слѣдующее основное уравненіе:

$$F(p,\ v,\ t)=0,\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

гдѣ F представляетъ нѣкоторую для даннаго тѣла вполнѣ опредѣленную функцію, при посредствѣ которой по заданнымъ величинамъ p и t можно всегда опредѣлить соотвѣтствующее значеніе v.

Уравненіе (1) и носитъ названіе уравненія состоянія.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что законы Бойля-Маріотта и Гей-Люсака выражаются совмѣстно слѣдующимъ уравненіемъ:

$$pv=p_0v_0(1+\alpha t).$$

*) См. „Вѣстникъ" № 65.

p_0v_0 есть постоянная величина; обозначивъ ее чрезъ R, можемъ представить предыдущее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$pv - R(1+\alpha t)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Это и есть ничто иное, какъ уравненіе состоянія газообразныхъ тѣлъ.

Спрашивается теперь, дѣйствительно ли всѣ газы удовлетворяютъ во всей строгости этому уравненію?

Послѣдующія наблюденія, особенно же знаменитыя изслѣдованія Regnault показали, что законы Бойля-Маріотта и Гей-Люссака суть только законы приближенные, и что не существуетъ въ дѣйствительности ни одного газа, который-бы имъ вполнѣ удовлетворялъ. Такъ напримѣръ, при той же температурѣ произведеніе pv не остается для того-же газа величиной постоянной, а съ увеличеніемъ давленія для всѣхъ газовъ вообще нѣсколько уменьшается*), для водорода же, наоборотъ, увеличивается, что съ перваго взгляда кажется уже совсѣмъ парадоксальнымъ.

Изслѣдуя затѣмъ для различныхъ газовъ, какъ коэффиціентъ расширенія при постоянномъ давленіи, такъ и коэффиціентъ расширенія при постоянномъ объемѣ, который часто въ отличіе отъ предыдущаго называютъ коэффиціентомъ упругости, Regnault нашелъ, что оба эти коэффиціента не имѣютъ во всѣхъ газахъ строго того-же самаго численнаго значенія, и что даже въ томъ-же самомъ газѣ коэффиціентъ упругости, вообще говоря, меньше коэффиціента расширенія, для водорода-же—опять наоборотъ. Кромѣ того оба эти коэффиціента съ увеличеніемъ давленія увеличиваются, съ увеличеніемъ температуры, наоборотъ, уменьшаются.

Неточность этихъ строгихъ законовъ становится особенно ощутительною, если разсматривать не газы, а ненасыщенные пары жидкостей, которые, вообще говоря, обладаютъ свойствами газовъ и которые, подобно газамъ, можно на основаніи принциповъ кинетической теоріи также разсматривать, какъ состоящіе изъ огромнаго множества раздѣльныхъ частицъ, движущихся по всѣмъ возможнымъ направленіямъ со всѣми возможными скоростями.

Такъ какъ законы Бойля-Маріотта и Гей-Люссака являются, такъ сказать, необходимымъ требованіемъ кинетической теоріи газовъ въ томъ видѣ, въ какомъ эта теорія въ предыдущемъ § была изложена, и, такъ какъ съ другой стороны оба эти закона не соотвѣтствуютъ во всей строгости дѣйствительности, то изъ этого слѣдуетъ заключить, что въ предыдущихъ вычисленіяхъ и выводахъ какія-нибудь обстоятельства были упущены изъ виду, что и привело насъ къ несовсѣмъ согласнымъ съ дѣйствительностью результатамъ.

Посмотримъ же теперь, гдѣ на самомъ дѣлѣ надо искать ближайшей причины замѣченныхъ отклоненій. До сихъ поръ мы предполагали, что частицы газа, находящіяся въ движеніи, совершаютъ свое движеніе между двумя ударами какъ совершенно свободныя тѣла, не подвергаясь дѣйствію никакихъ силъ; иначе говоря, мы допустили, что въ газообраз-

*) По крайней мѣрѣ при обыкновенныхъ условіяхъ давленія и температуры. Болѣе подробный разборъ этого вопроса слѣдуетъ дальше.

номъ состоянiи молекулы тѣла не оказываютъ никакого чувствительнаго дѣйствiя одна на другую, т. е. что газы не обладаютъ никакимъ внутреннимъ сцѣпленiемъ. Что такое внутреннее сцѣпленiе должно однако существовать, хотя можетъ быть и въ очень слабой степени, легко допустить и à priori, но существуютъ кромѣ того наблюденiя, которыя несомнѣннымъ образомъ указываютъ на то, что газы дѣйствительно обладаютъ внутреннимъ сцѣпленiемъ. Такъ напримѣръ классическiя наблюденiя W. Thomson'a и Joule'a*) надъ охлажденiемъ газовъ при расширенiи показали, что въ газахъ необходимо должны дѣйствовать внутреннiя силы сцѣпленiя. Тѣ-же наблюденiя были повторены недавно для углекислоты и нашимъ соотечественникомъ Э. Натансономъ**) и привели къ тому же самому результату. Новѣйшiя любопытныя наблюденiя de Heen'a***) надъ тренiемъ газовъ при различныхъ давленiяхъ и температурахъ также яснымъ образомъ показываютъ, что сцѣпленiе газовъ есть явленiе, съ которымъ вообще надо считаться и которымъ отнюдь пренебрагать нельзя при выводѣ разныхъ теоретическихъ законовъ, если только предъявлять желанiе, чтобы эти законы дѣйствительно согласовались съ фактами, почерпнутыми изъ непосредственныхъ наблюденiй.

Но кромѣ внутренняго сцѣпленiя есть еще и другое обстоятельство, которое при предыдущихъ выводахъ не было принято во вниманiе.

Мы видѣли въ предыдущемъ §, что среднiй путь l, проходимый молекулой между двумя смежными ударами, можетъ быть представленъ слѣдующей формулой: ****)

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\lambda^3}{\pi\sigma^2}.$$

l представило-бы собою среднiй путь, проходимый молекулой между двумя смежными ударами, въ томъ лишь идеальномъ случаѣ, если-бы молекулы не имѣли никакихъ размѣровъ (въ направленiи движенiя). Дѣйствительный же среднiй путь молекулы, который мы въ отличiе отъ предыдущаго, идеальнаго, обозначимъ чрезъ l', будетъ очевидно нѣсколько меньше. На необходимость вводить эту поправку было впервые указано Van der Waals'омъ*****).

Въ случаѣ центральнаго удара двухъ молекулъ очевидно

$$l'=l-\sigma,$$

---

*) Phil. Trans. 143, 1853; 144, 1854; 152—1862. См. также Clausius. Die mechanische Wärmetheorie. Bd. I. p. 228. 1887.

Интересный разборъ этихъ наблюденiй сдѣланъ недавно Bouty въ Journal de Physique. VIII. Janvier. 1889.

**) Ueber die Abkühlung der Kohlensaüre bei ihrer Ausdehnung. Innaugural Dissertation. 1887.

***) Bulletin de l'Ac. Royale de Belgique. (3). T. XVI. p. 195. 1888. Также: Naturwissenschaftliche Rundschau. № 52. p. 664. 1888.

****) Значенiе буквъ см. въ предыдущемъ §.

*****) Ueber die Continuität des gerförmigen und flüssigen Zustandes. Переводъ съ голландскаго F. Roth'a. Leipzig. 1881.

такъ какъ σ представляетъ собою діаметръ молекулы. Но такъ какъ центральный ударъ является сравнительно рѣдкою случайностью, то, вычитая σ, мы получимъ слишкомъ малую величину для истиннаго средняго пути молекулы.

Во всякомъ случаѣ этотъ дѣйствительный средній путь можетъ всегда быть представленъ такъ:

$$l' - \beta\sigma$$

гдѣ β есть нѣкоторая правильная дробь $(0 < \beta < 1)$.

O. E. Meyer *) находитъ, что $\beta = {}^2/_3$, Van der Waals-же — что $\beta = \frac{1}{2}$. Эту послѣднюю величину мы и возьмемъ. Итакъ

$$l' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lambda^3}{\pi\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma$$

или

$$l' = \frac{\lambda^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\sigma^3}{\sqrt{2} \cdot \pi\sigma^2}$$

$\sqrt{2}$ почти равно ${}^4/_3$, а такъ какъ ${}^4/_3\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ представляетъ собою ничто иное, какъ объемъ молекулы u, то исправленная формула для средняго пути представится окончательно въ слѣдующемъ видѣ:

$$l' = \frac{\lambda^3 - 4u}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2}.$$

Какое-же это можетъ имѣть вліяніе на давленіе газа?

Мы раньше видѣли, что давленіе газа прямо пропорціонально числу ударовъ, сообщаемыхъ стѣнкѣ сосуда въ одну секунду; число-же ударовъ очевидно обратно пропорціонально среднему пути молекулъ. Такимъ образомъ, обозначая новое, дѣйствительное давленіе чрезъ p', мы должны имѣть:

$$\frac{p}{p'} = \frac{l'}{l} = \frac{\lambda^3 - 4u}{\lambda^3} = \frac{N\lambda^3 - 4Nu}{N\lambda^3}.$$

$N\lambda^3$ было равно 1, когда мы взяли для сравненія единицу объема, вообще-же $N\lambda^3$ равно взятому объему v.

Nu представляетъ собою объемъ, занимаемый самимъ веществомъ молекулъ въ видимомъ объемѣ v, занимаемомъ всѣмъ газамъ. Обозначая $4Nu$ согласно съ Van der Waals'омъ чрезъ b, гдѣ b представляетъ та-

*) Die kinetische theorie der Gaze. Breslau. 1877. p. 298.

кимъ образомъ учетверенный молекулярный объемъ, мы окончательно получимъ:

$$pv = p'(v-b) = \text{Const}.$$

p' есть въ данномъ случаѣ дѣйствительно наблюдаемое давленіе, которое мы опять обозначимъ чрезъ p (безъ значка); тогда исправленный законъ Бойля-Маріотта представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$p(v-b) = \text{Const} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Мы видимъ такимъ образомъ, какъ, принимая во вниманіе размѣры молекулъ, можно улучшить теоретическую формулу, выведенную при нѣкоторыхъ допущеніяхъ, не вполнѣ соотвѣтствующихъ дѣйствительности.

Вопросъ объ усовершенствованіи и обобщеніи основныхъ заковъ газовъ давно уже занималъ ученыхъ. Не перечисляя всѣхъ сдѣланныхъ попытокъ, упомянемъ здѣсь только о нѣкоторыхъ изъ нихъ. Уже Hirn *) въ 1865 году указалъ на то, что необходимо въ уравненіи газовъ вводить, вмѣсто видимаго объема v, этотъ-же объемъ, уменьшенный на сумму объемовъ атомовъ φ **). $v-\varphi$ представляетъ такимъ образомъ междуатомный объемъ (volume interatomique) ***).

По Hirn'у такимъ образомъ

$$p_1(v_1-\varphi) = p_2(v_2-\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Это уравненіе по виду своему тождественно съ уравненіемъ (3), выведеннымъ Van der Waals'омъ на основаніи чисто теоретическихъ соображеній; b только имѣемъ нѣсколько иное значеніе чѣмъ φ, а именно

$$b = 4\varphi.$$

Къ схожему съ этимъ результату пришли также Будде и Дюпре ****). Послѣдній изъ нихъ называетъ при этомъ „конволюмомъ" тотъ постоянный прибавочный объемъ, который надо присоединять къ наблюдаемому объему газа v, чтобы объяснить замѣченныя въ газахъ отклоненія отъ точнаго закона Бойля-Маріотта.

Очевидно однако, что формулы типа

$$p(v-b) = \text{Const}.$$

не могутъ представлять собою истиннаго уравненія состоянія газовъ, такъ какъ въ нихъ не принятъ во вниманіе другой важный факторъ, а именно внтуреннее сцѣпленіе частицъ, съ которымъ, какъ мы видѣли, необходимо считаться.

*) Théorie mécanique de la chaleur II ed. T. I. p. 193. См. Также Clausius. Mech. W. Theorie. I. Bd. 1887. p. 392.

**) Лучше было-бы сказать „молекулъ".

***) Hirn также сдѣлалъ попытку принять во вниманіе и внутреннее сцѣпленіе частицъ.

****) Объ упругости газовъ. Менделѣева. 1875. С.-Петрб. стр. 243 и 244.

Уклоненія отъ закона Бойля-Маріотта, обусловливаемыя преимущественно вліяніемъ сцѣпленія, должны очевидно скорѣе всего встрѣтиться въ тѣхъ газахъ, которые при данныхъ условіяхъ легче всего сжижаются, что при обыкновенныхъ температурахъ *) для углекислоты (CO_2) напримѣръ именно и имѣемъ мѣсто.

Изслѣдуя сжимаемость углекислоты при различныхъ давленіяхъ, Andrews нашелъ **), что изотерма углекислоты, т. е. уравненіе, связывающее при постоянной температурѣ давленіе съ соотвѣтствующимъ объемомъ, занимаемымъ газомъ, имѣетъ слѣдующій простой видъ:

$$v(1-pv)=\text{Const}.$$

Къ совершенно подобному-же виду уравненія пришелъ и Recknagel ***), разсматривая, какое вліяніе можетъ имѣть внутреннее сцѣпленіе частицъ на давленіе, производимое газомъ.

Въ § I, исходя изъ того положенія, что число ударовъ, испытываемыхъ единицею поверхности стѣнки сосуда въ единицу времени характеризуетъ собою давленіе, производимое газомъ, мы получили для этого давленія слѣдующее простое выраженіе:

$$p=\frac{1}{3}\text{N}m\text{G}^2.$$

Въ этомъ выраженіи не принято во вниманіе вліянія сцѣпленія частицъ. Чтобы ввести въ уравненіе и этотъ новый элементъ, Recknagel принимаетъ, что спѣпленіе частицъ характеризуется тѣмъ, что столкнувшіяся молекулы, вслѣдствіе проявляющагося между ними въ этотъ моментъ притягательнаго дѣйствія, не сразу отскакиваетъ другъ отъ друга, а удерживаются нѣкоторое малое время въ сосѣдствѣ одна у другой. Вслѣдствіе этой потери времени, число ударовъ молекулы о стѣнки сосуда въ одну секунду должно нѣсколько уменьшится, и это уменьшеніе должно быть тѣмъ значительнѣе, чѣмъ чаще молекулы сталкиваются, т. е. чѣмъ плотнѣе газъ. Recknagel принимаетъ это уменьшеніе прямо пропорціональнымъ плотности, слѣдовательно обратно пропорціональнымъ объему v.

Подставляя въ предыдущей формулѣ вмѣсто Nm равную величину $\frac{1}{v}$, мы получимъ по Recknagel'ю:

$$pv=\frac{1}{3}\,\text{G}^2\left(1-\frac{\text{B}}{v}\right)=\text{A}\left(1-\frac{\text{B}}{v}\right)\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

*) Во всякомъ случаѣ ниже 30°Ц.

**) Phil. Mag. (5) I. p. 78; Proc. Roy. Soc. XXIV. p. 455; Beibl. I. p 21.

***) Pogg. Ann. 1871. E. 5. p. 563.

O. E. Meyer. Die Kin. Th. p. 66.

или

$$\left(p+\frac{BA}{v^2}\right)v=A,$$

гдѣ A и B для той-же температуры суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Мы уже раньше упомянули о томъ, что классическія наблюденія W. Thomson'a и Joule'a надъ охлажденіемъ газовъ при расширеніи наляднымъ образомъ показали, что газы въ дѣйствительности обладаютъ внутреннимъ сцѣпленіемъ. Изслѣдуя величину этого охлажденія при различныхъ начальныхъ температурахъ, этимъ ученымъ удалось, опираясь на данныя своихъ наблюденій, получить, исходя изъ принциповъ механической теоріи теплоты, слѣдующее основное выраженіе для уравненія состоянія газообразныхъ тѣлъ:

$$pv=RT-\frac{a}{Tv}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \; . \; (6)$$

гдѣ R и a суть нѣкоторыя постоянныя величины, а T представляетъ собою абсолютную температуру, считаемую, какъ извѣстно, отъ $-273°$ по Цельзію. RT очевидно всегда можетъ быть представлено въ видѣ $273.R\,(1+\alpha t)$.

Къ тождественному-же уравненію пришелъ раньше и Rankine *), изслѣдуя (пользуясь наблюденіями Regnault) уклоненія углекислоты отъ законовъ Бойля-Маріотта и Гей-Люссака.

Gouilly **), исходя изъ термодинамическихъ соображеній, находитъ для газовъ вообще слѣдующее основное уравненіе состоянія:

$$(p+m')(v+m'')+mT=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

гдѣ m, m' и m'' суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Позднѣе Bertrand ***), изслѣдуя общія свойствѣ тѣлъ, у которыхъ теплоемкости какѣ при постоянномъ объемѣ, такъ и при постоянномъ давленіи, суть только функціи температуры, пришелъ къ слѣдующимъ двумъ возможнымъ уравненіямъ состоянія:

$$\left.\begin{aligned}(p+\lambda)(v+\lambda')&=\lambda''T\\ pv&=R(T+\mu)\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

гдѣ λ, λ', λ'', μ, R суть нѣкоторыя постоянныя величины.

Второе изъ этихъ уравненій имѣетъ нѣсколько странный видъ; мы къ нему еще вернемся, когда будемъ говорить о насыщенныхъ парахъ. Первое же уравненіе Bertrand'a очевидно тождественно съ уравненіемъ Gouilly.

Оставляя въ сторонѣ уравненія Amagat, Wienstein'a, Thiesen'a, Kelling'a и другихъ, перейдемъ прямо къ знаменитому уравненію Van

*) Phil. Trans 1854. p. 336.

См. также Clausius. Mech W. Th. Bd. I. p. 236. 1887.

**) C. R. 93. p. 1134. 1881.

***) C. R. 105. p. 389. 1887.

der Waals'a, которое дало такой сильный толчекъ изслѣдованіямъ подобнаго рода и которое, такъ сказать, положило основаніе раціональной теоріи жидкостей.

Van der Waals въ своей диссертаціи *), исходитъ изъ того, что онъ разсматриваетъ условія равновѣсія тѣла, состоящаго изъ подвижныхъ частицъ, оказывающихъ вмѣстѣ съ тѣмъ притягательне дѣйствіе другъ на друга. Это тѣло можетъ очевидно быть безразлично или жидкостью, или газомъ, потому что и въ жидкости мы знаемъ, что частицы обладаютъ большою подвижностью, хотя эта подвижность очевидно не будетъ такъ велика, какъ въ тѣлахъ газообразныхъ. Если мы представимъ себѣ какую нибудь частицу въ срединѣ взятой жидкой или газообразной массы, то эта частица будетъ вообще притягиваться одинаковымъ образомъ по всѣмъ возможнымъ направленіямъ, и никакое направленіе не будетъ имѣть преимущества передъ остальными. Не то однако будетъ, если частица находится у поверхности даннаго тѣла. Надъ нею уже въ этомъ случаѣ нѣтъ болѣе частицъ, отъ которыхъ она могла-бы испытать притяженіе, а потому въ результатѣ получится притяженіе направленное внутрь всей массы. Эта сила направлена вездѣ нормально къ поверхности и можетъ быть разсматриваема, какъ нѣкоторое прибавочное давленіе p_1, испытываемое единицею поверхности даннаго тѣла. Прежнее давленіе было p, совокупное-же давленіе будетъ $p+p_1$. Эта сила и удерживаетъ такъ сказать движущіяся со среднею скоростью G молекулы внутри даннаго объема. Не будь этого давленія, тѣло стало-бы расширяться, потому что молекулы, двигаясь со скоростью G, стремились-бы занять все большее и большее пространство. Это давленіе слѣдовательно уравновѣшиваетъ нѣкоторымъ образомъ находящуюся въ тѣлѣ теплоту, въ силу которой молекулы и обладаютъ именно этими поступательными скоростями движенія, обусловливающими то, что все тѣло получаетъ стремленіе безпредѣльно расширяться.

Обратимся теперь къ уравненію (3), въ которомъ уже принято во вниманіе вліяніе размѣровъ молекулъ. Величина постоянной, входящей въ эту формулу, опредѣляется очень просто.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что

$$pv=\frac{G_0^2}{3}(1+\alpha t),$$

слѣдовательно формула (3) можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$p(v-b)=R(1+\alpha t),$$

гдѣ R для того-же газа есть нѣкоторая постоянная величина. Эта формула была-бы справедлива лишь въ томъ идеальномъ случаѣ, если-бы совершенно подвижныя частицы тѣла не оказывали никакого притягательнаго дѣйствія другъ на друга.

Дѣйствительные же газы, равно какъ и жидкости, обладаютъ на

*) Over de Continuitet van den Gas—en Vloeistoffstand. Leiden. 1873. Переводъ съ голландскаго F. Roth'a. Leipzig. 1881.

самомъ дѣлѣ внутреннимъ сцѣпленіемъ, а потому и слѣдуетъ, согласно съ Van der Waals'омъ, къ дѣйствительному давленію p, которому тѣло подвержено, присовокупить еще молекулярное давленіе на поверхности p_1.

Общее уравненіе состояніе газа (пара) или жидкости, безразлично, представится такимъ образомъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$(p+p_1)(v-b)=R(1+\alpha t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Вся разница между газомъ (паромъ) и жидкостью заключается только въ томъ, что въ газахъ p_1 сравнительно съ p очень мало, въ жидкостяхъ-же наоборотъ: p_1 въ жидкостяхъ значительно больше p. Van der Waals этимъ однако не ограничился, а точнѣе опредѣлилъ величину p_1, что мы теперь и постараемся сдѣлать. p_1 зависитъ отъ того притяженія, которое частицы, находящіяся у самой поверхности, испытываютъ отъ другихъ частицъ, лежащихъ также вблизи поверхности *), но внутри данной массы. Вмѣсто того чтобы разсматривать притяженіе отдѣльныхъ частицъ, будемъ для простоты разсматривать притяженіе, испытываемое элементарнымъ объемомъ, лежащимъ у самой поверхности тѣла, отъ другого такого-же элементарнаго объема, лежащаго вблизи перваго, но внутри даннаго тѣла. Такъ какъ притяженіе можно принять пропорціональнымъ произведенію массъ притягивающихся тѣлъ, то въ данномъ случаѣ это притяженіе будетъ пропорціонально произведенію массъ этихъ элементарныхъ объемовъ или, что то-же самое, пропорціонально квадрату плотности тѣла. Но какъ плотность тѣла всегда обратно пропорціональна занимаемому имъ объему, то мы можемъ вообще представить искомое молекулярное давленіе p_1 слѣдующимъ простымъ выраженіемъ:

$$p_1=\frac{a}{v^2},$$

гдѣ a есть нѣкоторая постоянная величина, зависящая отъ сцѣпленія частицъ и названная Van der Waals'омъ *удѣльнымъ притяженіемъ* даннаго тѣла (specifische Attraction).

Подставляя это выраженіе для p_1 въ формулу (9), мы получимъ слѣдующее окончательное уравненіе состоянія:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=R(1+\alpha t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Это и есть извѣстное уравненіе Van der Waals'a. Уравненіе (10) есть уравненіе состоянія, годное для тѣлъ, какъ въ жидкомъ, такъ и въ газообразномъ состояніи, и въ этомъ то и заключается его неоспоримое преимущество. Каждая жидкость характеризуется при этомъ только двумя постоянными величинами, физическое значеніе которыхъ въ высшей степени наглядно. Мы видимъ такимъ образомъ, какъ наука, создавъ сначала кинетическую теорію газовъ, убѣдившись затѣмъ въ неполномъ

*) Притягательное дѣйствіе частицъ распространяется только на небольшія разстоянія.

согласіи этой теоріи съ наблюденіеми, начала усовершенствовать свои теоретическіе выводы, и какъ въ концѣ концовъ, идя этимъ путемъ, дошла до основаній раціональной теоріи жидкостей. Формула Van der Waals'a, какъ первая попытка создать такую теорію, очевидно не безупречна; трудно было-бы и ожидать, чтобы она содержала полное и общее рѣшеніе вопроса объ уравненіи состоянія жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ, но тѣмъ не менѣе, какъ первая попытка создать теорію жидкостей, она имѣла и имѣетъ до сихъ поръ чрезвычайно важное значеніе. Провѣркой уравненія Van der Waals'a и разными интересными слѣдствіями, изъ нея вытекающими, мы займемся позднѣе, теперь же для послѣдовательности изложенія надо вкратцѣ разсмотрѣть и другія общія уравненія состоянія, годныя также и для жидкостей, которыя вслѣдъ за формулой Van der Waals'a другими учеными и были предложены.

Уже самъ Van der Waals указываетъ на то обстоятельство, что его формула примѣнима вообще и къ жидкостямъ въ частности только въ извѣстныхъ предѣлахъ, а именно только для объемовъ v большихъ $2b$, потому что при меньшихъ объемахъ величину b нельзя уже болѣе считать постоянной. Впослѣдствіи А. И. Надеждинъ *), разбирая формулу Van der Vaals'a и исходя изъ данныхъ, полученныхъ имъ самимъ изъ непосредственныхъ наблюденій надъ критическимъ объемомъ жидкостей, приходитъ къ тому заключенію, что формула Van der Waals'a не можетъ быть примѣнена къ изслѣдованію расширенія жидкостей, такъ какъ въ жидкостяхъ объемы v будутъ вообще меньше $2b$. Grimaldi **) также подвергалъ формулу Van der Waals'a обстоятельному разбору и пришелъ къ тому заключенію, что эта теоретическая формула не вполнѣ соотвѣтствуетъ дѣйствительности.

Въ видахъ обобщенія теоріи Van der Waals'a и съ цѣлью получить уравненіе состоянія, пригодное для всякихъ объемовъ жидкости или газа, Kamerlingh Onnes ***) измѣняетъ уравненіе Van der Waals'a слѣдующимъ образомъ.

Онъ полагаетъ:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)v\phi(b_1, v)=\frac{RT}{273} \quad \ldots\ldots (11)$$

гдѣ b_1 представляетъ собою объемъ ****), занимаемый самыми молекулами разсматриваемаго вещества, а ϕ есть нѣкоторая функція, разложимая въ рядъ по степенямъ $\frac{b_1}{v}$

$$\phi(b_1, v)=1-k\frac{b_1}{v}+k'\left(\frac{b_1}{v}\right)^2+\ldots$$

Если мы ограничимся первыми двумя членами этого разложенія, то

*) Физическія изслѣдованія. Кіевъ. 1887. Стр. 116. Также Exner's Rep. Bd. 23. p. 712.

**) Garr. Chim. Ital. 16. p. 63. 1886. Также Beibl. X. p. 562.

***) Beibl. V. p. 718.

****) Мы уже видѣли раньше, что $b=4b_1$.

получимъ опять формулу Van der Waals'a. Къ подобному виду изотермы пришелъ также и Lorentz *).

Главныя, болѣе существенныя измѣненія въ уравненіи Van der Waals'a были сдѣланы Clausius'омъ. Clausius **) далъ сначала уравненію состоянія жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ слѣдующій болѣе сложный видъ:

$$\left\{p+\frac{a}{T(v+\beta)^2}\right\}(v-\gamma)=RT \quad . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Это уравненіе содержитъ уже три произвольныя постоянныя величины a, β и γ *** .

Впослѣдствіи, для приданія этому уравненію еще большей общности, Clausius ****) его еще болѣе усложнилъ.

Второе уравненіе Clausius'a, а именно

$$\left\{p+\frac{(AT^{1-n}+BT)R}{(v+\beta)^2}\right\}(v-\gamma)=RT \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

имѣетъ уже чрезвычайно сложный видъ, содержа при этомъ 5 постоянныхъ величинъ (A, B, β, γ, n), подлежащихъ опредѣленію изъ наблюденій.

Изслѣдованія Guldberg'a, Plank'a, Зилова, Столѣтова, Thiesen'a †) показываютъ, что уравненія Clausius'a для жидкостей гораздо лучше согласуются съ наблюденіями, чѣмъ уравненіе Van der Waals'a, что совершенно и понятно, потому что вообще, чѣмъ больше мы введемъ въ формулу постоянныхъ величинъ, подлежащихъ опредѣленію изъ наблюденій, тѣмъ лучше построенная формула будетъ согласоваться съ опытными данными. Неудивительно поэтому, что формула (13), содержащая 5 постоянныхъ величинъ, представляетъ въ примѣненіи къ жидкостямъ гораздо болѣе общности, чѣмъ формула Van der Waals'a.

Но и эта сложная, вторая, формула Clausius'a тѣмъ не менѣе все таки далеко не представляетъ истиннаго уравненія состоянія жидкихъ и газообразныхъ тѣлъ, и Theisen ††), подвергая эту формулу обстоятельной критикѣ, приходитъ къ тому заключенію, что и уравненіе Clausius'a нельзя признаять удовлетворительнымъ.

Впослѣдствіи Sarrau †††), основываясь на наблюденіяхъ Amagat надъ сжимаемостью углекислоты, нашелъ возможность нѣсколько упростить второе уравненіе Clausius'a, ограничиваясь въ немъ четырьмя лишь произвольными постоянными величинами.

Совсѣмъ еще недавно итальянскій физикъ A. Violi ††††) опубликовалъ

*) Wied. Ann. XII. p. 660.

**) Wied. Ann. IX. p. 337.

***) R есть также постоянная величина, но она всегда можетъ быть вычислена.

****) Wied. Ann. XIV. p.p. 276 и 692.

†) См. Надеждинъ. Физическія изслѣдованія. стр. 109.

††) Wied. Ann. XXIV. p. 467.

†††) C. R. 101; p.p. 941 и 1145.

††††) Rend. della R. acc. dei Lincei. (4) 1888. pp. 285, 316, 462, 513. Также Beibl. XIII. p. 66; Rivista Scient. XX. № 10. p. 167.

подъ заглавіемъ „изотерма газовъ“ новое уравненіе состоянія. Это уравненіе содержитъ, какъ и формула Van der Waals'а только двѣ произвольныя постоянныя величины и имѣетъ слѣдующій сравнительно простой видъ:

$$\left[p+\frac{a}{2\{v(1-b)(1+\alpha t)\}^2}\right]v(1-b)=R \quad . \ . \ . \ (14)$$

Разбирая эту формулу, я не могъ признать за ней особенныхъ существенныхъ преимуществъ, какъ общаго уравненія состоянія, такъ какъ наврядъ-ли она можетъ быть когда-либо примѣнена къ изслѣдованію свойствъ жидкостей *).

Въ заключеніе этого перечисленія различныхъ уравненій слѣдовало бы упомянуть о любопытной формулѣ Weilenmann'а **), опубликованной только въ прошломъ году. Ходъ разсужденій, которыми Weilenmann пришелъ къ своему уравненію, довольно оригинальный, но такъ какъ эта формула была главнымъ образомъ построена съ цѣлью примѣнить ее къ изслѣдованію расширенія жидкостей, то и будетъ цѣлесообразнѣе вернуться къ ней потомъ въ томъ отдѣлѣ, гдѣ мы будемъ разсматривать вообще вопросъ о расширеніи жидкостей. Здѣсь можно только замѣтить, что изъ уравненія Weilenmann'а вытекаютъ, при нѣкоторыхъ допущеніяхъ, какъ необходимыя слѣдствія основные законы Бойля-Маріотта и Гей-Люссака. *Б. Голицынъ* (Страсбургъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Замѣтка о движеніи Броуна. Гуи. (*Gouy*. Jour. de Phys. 7. (2) p. 561. 1888).

Находящіяся въ какой нибудь жидкости мельчайшія частички обладаютъ особеннымъ характернымъ движеніемъ, называемымъ въ честь открывателя „движеніемъ *Броуна*“. Оно происходитъ всегда, если твердыя частички какого нибудь вещества попадаютъ въ жидкость и не прикасаются къ стѣнкамъ сосуда, равно какъ и не сцѣпляются между собою. Гуммигутъ или китайскія чернила въ водѣ показываютъ особенно хорошо это явленіе. Это движеніе легко наблюдать при увеличеніи въ 500 разъ.

Если частичекъ много, то все поле зрѣнія кажется въ движеніи, какъ муравьиное гнѣздо, и каждая частичка обладаетъ своимъ собственнымъ, независимымъ движеніемъ, которое нельзя точно прослѣдить. Если

*) Да и самъ авторъ видимо обходитъ этотъ вопросъ молчаніемъ. Судя по заглавію, это уравненіе должно представлять собою только уравненіе состоянія газообразныхъ тѣлъ, хотя съ перваго взгляда и кажется, что это выраженіе есть обобщеніе формулы Van der Waals'а.

**) Vierteljahrschr. d. Züricher naturf. Ges. 33. p. 37. 1888. Sep.; Exners Rep. Bd. 24. p. 660. 1888.

же частичекъ мало, то можно убѣдиться, что каждая частичка обладаетъ въ высшей степени неравномѣрнымъ движеніемъ: передвиженіями по всѣмъ возможнымъ направленіямъ, неправильными вращеніями, сотрясеніями, при чемъ частичка то проходитъ значительное пространство, то едва двигается съ мѣста.

Эти движенія тѣмъ быстрѣе, чѣмъ частички меньше; особенной быстроты онѣ достигаютъ при величинѣ 0,001 мм. Движенія эти усиливаются съ увеличеніемъ температуры и измѣняются, смотря по жидкости; какъ кажется, въ водѣ онѣ наибольшія. Очень маленькіе газовые пузырки обладаютъ въ жидкости подобнымъ же движеніемъ.

Тщательныя наблюденія этихъ движеній не оставляютъ никакого сомнѣнія въ томъ, что здѣсь рѣчь идетъ не о случайныхъ дѣйствіяхъ потоковъ, колебаній или различій въ температурахъ, а о явленіи совершенно нормальномъ, наступающемъ при постоянной температурѣ и зависящемъ отъ состава жидкости. Явленіе это продолжается неопредѣленно долго, пока частички не осядутъ на стѣнки сосуда. Такъ какъ движеніе это наблюдается какъ на твердыхъ, такъ и на жидкихъ и газообразныхъ частичкахъ, то отсюда заключаемъ, что вещество здѣсь не играетъ существенной роли, а что оно только дѣлаютъ видимымъ внутреннее движеніе жидкости. Хотя движеніе Броуна и не показываетъ намъ движенія молекулъ, но все таки очень близко къ нему. Авторъ предполагаетъ, что собственныя молекулярныя двуженія въ жидкостяхъ отчасти слагаются на пространствѣ, равномъ μ (тысячная доля 1 мм.) и поэтому замѣтны на мелкихъ частичкахъ, такъ какъ простыя движенія молекулъ для этого были бы недостаточны. Въ этомъ движеніи авторъ усматриваетъ такимъ образомъ непосредственное и наглядное доказательство справедливости господствующей теперь гипотезы о природѣ теплоты. Изученіе этого движенія имѣетъ поэтому выдающуюся важность для молекулярной физики.

Упомянутое здѣсь явленіе важно еще и съ другой точки зрѣнія. Какъ бы мы его не разсматривали, всегда мы должны допустить, что при этомъ затрачивается извѣстная работа, и можно представить себѣ механизмъ, при помощи котораго можно воспользоваться частью этой работы. Производимая же при этомъ работа должна обусловливаться теплотой окружающей среды, что противорѣчитъ принципу *Карно*. Здѣсь, какъ кажется, можно примѣнить мнѣніе *Гельмгольца*, которое онъ высказалъ относительно этого принципа по отношенію къ живымъ тканямъ, а именно, что этотъ принципъ примѣнимъ только къ грубымъ механизмамъ, которые мы можемъ сдѣлать, и не можетъ быть примѣняемъ къ органамъ, у котораго размѣры μ-го порядка. *Бсм.*

♦ Давленіе нѣкоторыхъ сѣмянъ при ихъ намачиваніи. Греганъ. (*Gréhant*. C. R. Soc. de Biol. 5. p. 850. 1888).

Извѣстно, что анатомы раздвигаювъ кости черепа при помощи наполненія его горохомъ, который затѣмъ намачивается. По прошествіи нѣкотораго времени горохъ до того разбухаетъ, что отдѣльныя кости черепа отдѣляются другъ отъ друга или же лопаются, если онѣ соединены слишкомъ крѣпко. Авторъ измѣрилъ это давленіе.

Горохъ помѣщался въ бутылку, въ срединѣ которой находился каучуковый шаръ, наполненный ртутью и снабженный 2-хъ метровой трубкой; бутылка крѣпко закупоривалась и наливалась водой. По прошествіи 24 часовъ она оказалась разбитой и ртуть была выдвинута изъ длинной трубки. Такимъ образомъ давленіе гороха при набуханіи было больше, чѣмъ 2 мет. ртути.

Толстая 3 литровая бутылка наполнялась горохомъ; въ срединѣ ея находился каучуковый шаръ, наполненный водой, который въ свою очередь сообщался при помощи мѣдной трубки съ манометромъ *Бурдона*. По прошествіи 24 и 48 часовъ давленіе разбухшихъ горошинъ достигло въ одномъ опытѣ 4 атм., въ двугомъ же 5 атм. Это давленіе было замѣтно и на слѣдующіе дни, хотя уже начало медленно уменьшаться.

Опытъ съ пшеницей, рожью и т. д. показалъ давленіе, не превосходящее нѣсколькихъ десятыхъ одной атмосферы. *Бхм.*

Аналогія между свойствами газовъ и веществъ въ растворахъ.

Въ увлекательно написанной брошюрѣ В. Оствальда „О растворахъ" (пер. Н. Дрентельна) проведена замѣчательная и, надо сознаться, неожиданно полная аналогія между свойствами веществъ въ разведенныхъ растворахъ и въ газообразномъ состояніи. Качественная аналогія, пожалуй, указывалась Грегамомъ и Менделѣевымъ, но количественныя соотношенія, вытекающія изъ этой аналогіи, замѣчены только недавно нѣкоторыми учеными и во главѣ ихъ голландцемъ Ван-т-Гоффомъ (I. H. van'tHoff).

Позволю себѣ привести главнѣйшіе результаты. При осмосѣ, какъ извѣстно, по одну сторону пористой перепонки давленіе возрастаетъ. Назовемъ *осмотическимъ давленіемъ*, то увеличеніе давленія, которое получается тогда, если только одна жидкость двигается черезъ перепонку (такія перепонки существуютъ, какъ показали Пфеферъ и де-Фризъ)

1. Между осмотическимъ давленіемъ P, объемомъ единицы вѣса нейтральнаго растворенная вещества V и абсолютною температурою T, считаемою отъ -273^{0}C, существуетъ такая же зависимость, какъ и для газовъ, по законамъ Маріотта и Гей-Люсака, т. е. $PV=RT$, гдѣ R постоянная.

2. По *закону Авогардо* R есть величина одна и та же для *всѣхъ* газовъ, если взять количества различныхъ газовъ, пропорціональныя ихъ молекулярнымъ вѣсамъ. То-же соотношеніе имѣетъ мѣсто и для нейтральныхъ растворовъ.

3. Для *всякихъ* (кислыхъ, щелочныхъ) растворовъ существуетъ зависимость

$$PV=iRT,$$

гдѣ i цѣлое число (1, 2, 3 и даже 4).

4. По изслѣдованіямъ Аррениуса оказалось, что *i отлично отъ 1 только для тѣхъ жидкостей, которыя проводятъ токъ электролитически*. Это положеніе дало возможность связать излагаемую гипотезу растворовъ съ гипотезою о соотношеніи между химическими и электрическими явленіями и вмѣстѣ съ тѣмъ объяснить кажущееся отступленіе отъ положенія 2-го.

5. Замѣтивъ полную пропорціональность между коэффиціентомъ химическаго сродства кислотъ и ихъ электропроводностью, а также тотъ фактъ, что разбавленныя энергичныя и слабыя кислоты сближаются въ своихъ свойствахъ по мѣрѣ разба-

вленія, Аррениусъ пришелъ къ слѣдующимъ результатамъ. *Въ хорошо проводящихъ или же сильно разбавленныхъ жидкостяхъ* (электролитахъ) *молекулы разложены на іоны*, которые обладаютъ сильными электрическими зарядами и могутъ свободно перемѣщаться въ электролитахъ, перенося съ собою свой зарядъ.

Въ тѣхъ жидкостяхъ, гдѣ i отлично отъ единицы, одновременно существуютъ и электролиты, и іоны. Если принять во вниманіе не число молекулъ, какъ полагалось въ 3, а общіе число частицъ, т. е. и молекулъ, и іоновъ, то тогда *отступленіе отъ закона*, *выражаемаго формулою* $PV=RT$, *будетъ только кажущимся.* Вмѣстѣ съ тѣмъ является возможность изъ наблюденій надъ измѣненіемъ электропроводности жидкостей, по мѣрѣ ихъ разбавленія водою, вычислить отношеніе числа іоновъ къ числу молекулъ.

Изъ оправдавшихся численныхъ выводовъ теоріи можно также указать на слѣдующее:

6. *Пониженіе давленія паровъ раствора* такъ относится къ давленію паровъ растворителя, какъ число молекулъ раствореннаго вещества—къ общему числу молекулъ.

7. *Пониженіе температуры замерзанія растворовъ* пропорціонально содержанію вещества въ растворѣ; оно одинаково для всѣхъ растворовъ, содержащихъ по ровному числу молекулъ. Теорія даетъ возможность найти самое пониженіе температуры.

Положеніе 6 и 7 имѣютъ важное значеніе для химіи, такъ какъ даютъ возможность правильно устанавливать химическія формулы.

8. На основаніи аналогіи между диссоціаціей газовъ при измѣненіи ихъ объема и *диссоціаціей вещества въ растворахъ,* при разбавленіи ихъ, Оствальду удалось получить числа, вполнѣ оправданныя опытами.

9. Нернстъ на основаніи теоріи растворовъ вычислилъ *скорость диффузіи* согласно съ опытными данными.

Теорія эта во всякомъ случаѣ такъ интересна и захватываетъ такъ много явленій, что брошюра Оствальда, изданная Педагогическимъ Музеемъ военно-учебныхъ заведеній *), является весьма полезнымъ и цѣннымъ вкладомъ въ нашу литературу. Подробное изложеніе этой теоріи можно найти въ журналѣ „Zeitschrift für physikalische Chemie“ (Leipzig bei W. Engelmann) за 1887 и 1888 года.

А. Корольковъ.

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Мат. Отд. Нов. Общ. Ест. по вопр. эл. мат. и физ. (Одесса 21 апрѣля).

Предсѣдательствовалъ И. М Занчевскій, избранный товарищемъ предсѣдателя въ предыдущемъ засѣданіи.

А В. Клоссовскій сдѣлалъ сообщеніе „изъ повторительнаго курса ариѳметики“. Въ этомъ сообщеніи была изложена въ главныхъ чертахъ одна глава повторительнаго курса математики въ старшемъ классѣ средняго учебнаго заведенія. При постепенномъ расширеніи понятія о числѣ, когда вводились отрицательныя, затѣмъ дробныя числа, референтъ сначала устанавливалъ формальные законы операцій

*) Статья Оствальда „О растворахъ“ въ переводѣ Н. С. Дрентельна помѣщена также въ I-мъ Выпускѣ Журн. Р. Физ.-Хим. Общ. за тек. 1889 г. (Томъ XXI, Отд Хим. II, стр. 1). *Прим. ред.*

надъ символами новаго ряда, затѣмъ указывалъ область реализаціи ихъ. Изъ обсужденія этого сообщенія выяснилось, что обзоръ основныхъ дѣйствій съ такой общей точки зрѣнія, устанавливающей полное единство отдѣльныхъ частей курса, является въ высшей степени желательнымъ въ послѣднемъ классѣ средняго учебнаго заведенія. Такой обзоръ можетъ быть особенно полезенъ, если втеченіе всего курса учебнаго заведенія преподаватель руководился тѣми-же идеями.

Въ отдѣлѣ небольшихъ сообщеній, И. В. Слешинскій сдѣлалъ нѣсколько замѣчаній о рѣшеніи уравненій первой степени съ одной неизвѣстной.

И. Слешинскій (Одесса).

Кіевское Общ. Ест. (22 апрѣля). Были сдѣланы научныя сообщенія:

П. Я. Армашевскій—о кристаллической системѣ и нѣкоторыхъ физическихъ свойствахъ кристалловъ ортоазоксибензойной кислоты.

В. И. Фабриціусъ изложилъ подробно ходъ и результаты наблюденій, предпринятыхъ совмѣстно съ проф. М. Хандриковымъ на средства Кіевскаго Общ. Ест. въ маѣ и іюнѣ 1886 г. для опредѣленія точной разности долготъ Кіевской и Одесской астрономическихъ обсерваторій. Наблюдатели, одинъ въ Кіевѣ, другой въ Одессѣ, пользовались телеграфными сигналами и обмѣнивались мѣстами. Изъ ряда наблюденій, послѣ принятія всѣхъ поправокъ, разность долготъ была опредѣлена въ $1'1'',432$ съ вѣроятною ошибкою въ $0'',018$ (которая въ линейныхъ мѣрахъ соотвѣтствуетъ ошибкѣ въ 2 сажени). До того времени восточная долгота Одессы относительно Кіева принималась въ $1'1'',7$.—Въ заключеніе референтъ обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что гг. С.-Петербургъ, Витебскъ, Могилевъ, Орша, Чирниговъ, Кіевъ и Одесса лежатъ на одномъ почти меридіанѣ, и высказалъ пожеланіе, чтобы по этому главному русскому меридіану прошла когда нибудь въ будущемъ желѣзная дорога.

Э. К. Шпачинскій сдѣлалъ докладъ „о деформаціонныхъ токахъ Брауна". Изложивъ сущность этихъ явленій, съ которыми читатели „Вѣстника" уже знакомы изъ статей кн. Б. Голицына (въ № 58) и П. Бахметьева (въ № 64), референтъ указалъ на то, что возбужденіе токовъ въ никелевой спирали при ея растяженіи и сжиманіи обусловливается тѣмъ магнитизмомъ, который вызывается механическими измѣненіями въ строеніи проволоки. Устанавливать à priori аналогію между магнитнымъ состояніемъ, вызваннымъ въ проволокѣ проходящимъ по ней токомъ, и тѣмъ магнитизмомъ, который появляется при процессѣ волоченія—и вообще при механическихъ деформаціяхъ—мы не въ правѣ, такъ какъ эти послѣднія магнитныя явленія еще почти не изучены. Говорить, поэтому, что либо опредѣленное о такомъ либо другомъ расположеніи молекулярныхъ магнитовъ въ проволокѣ Брауна (какъ это дѣлаетъ г. Бахметьевъ), было бы теперь преждевременнымъ, ибо мы имѣемъ здѣсь дѣло съ весьма сложною совмѣстностью явленій. Не только протягиваніе никеля сквозь волочильню—явленіе само по себѣ механически сложное,—но и само сгибаніе проволоки въ спираль вліяетъ на возбужденіе въ ней магнитнаго состоянія. Разрывъ, если таковой случится при процессѣ волоченія, тоже имѣетъ по всей вѣроятности большое вліяніе на распредѣленіе магнитизма. Для примѣра референтъ демонстрировалъ никелевую спираль съ неправильнымъ расположеніемъ магнитныхъ полюсовъ (южные по концамъ, сѣверный—около средины), приготовленную изъ проволоки, конецъ которой при волоченіи оторвался. Никакихъ деформаціонныхъ токовъ въ этой спирали нельзя было обнаружить, что и понятно.—Итакъ, Браунъ по мнѣнію референта не *новое* свойство никеля открылъ, а къ числу извѣстныхъ фактовъ *магнитизма деформаціи* *) прибавилъ еще одинъ, именно, что никелевая проволока сильно намагничивается при волоченіи. *Ш.*

Письмо въ редакцію.

М. Г., г. Редакторъ.

Не откажите помѣстить въ своемъ журналѣ нижеслѣдующее.

Понадобилось мнѣ познакомиться съ исторіей развитія ариѳметики. По справкамъ въ каталогахъ оказалось, что въ русской литературѣ имѣется единственное въ этомъ родѣ сочиненіе: „Очеркъ развитія ариѳметики, А. Попова. Казань. 1872 г. Ц. 2 руб." Всѣ мои поиски въ книжныхъ магазинахъ, чтобы пріобрѣсти эту книгу, были безуспѣшны: она издана въ количествѣ 300 экз. и въ продажѣ, кажется, не была. Тогда я письменно обратился къ тѣмъ лицамъ, въ статьяхъ которыхъ встрѣчались цитаты изъ этой книги, и просилъ ихъ одолжить ее мнѣ на время съ условіемъ, что я представляю съ своей стороны обезпеченіе за цѣлость ея. Съ сожалѣніемъ долженъ сказать, что тѣ лица, къ которымъ я обращался съ своей просьбой даже отвѣтомъ не удостоили меня. Настоящимъ письмомъ покорнѣйше прошу всѣхъ обладателей вышеозначенной книги, не найдетъ ли кто нибудь для себя возможнымъ или продать мнѣ ее, или одолжить на время.

Желательно, чтобы эта книга была напечатана вторымъ изданіемъ.

Я. И. Теодоровичъ.

АДРЕСЪ: М. Байрамча, Бессарабской губерніи. Наставнику учительской семинаріи.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Журналъ нашъ, рекомендованный въ свое время Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, городскихъ училищъ, учительскихъ институтовъ и учительскихъ семинарій, а также Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній—для всѣхъ военно-учебныхъ заведеній, въ настоящее время еще **одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ** (№№ 1—48) постановленіемъ Учебнаго Комитета при Св. Синодѣ, утвержденнымъ Г. Оберъ-Прокуроромъ Св. Синода.

$^{9}/_{21}$ мая тек. года скончался на 55-мъ году жизни извѣстный французскій физикъ **Гастонъ Плянте**, изобрѣтатель вторичныхъ гальваническихъ батарей (электр. аккумуляторовъ). Кромѣ занятій экспериментальныхъ въ области электричества, главные результаты которыхъ изложены въ его капитальной книгѣ „Recherches sur l'électricité", Плянте въ молодости изучилъ весьма основательно геологію и палеонтологію. Въ 1855 г. онъ открылъ даже особую допотопную породу птицъ, названную въ честь его *Gastornis*. Плянте принадлежалъ вообще къ высоко образованнымъ личностямъ нашего вѣка и собралъ цѣнную библіотеку. Къ сожалѣнію здоровье его всегда было ненадежнымъ.

Скончались еще: 1) **Павелъ дю-Буа-Реймондъ** (на 57-мъ году жизни) проф. математики сначала въ Фрейбургѣ, потомъ въ Тюбингенѣ, наконецъ въ Берлинѣ. Послѣднее его сочиненіе „Die allgemeine Functionstheorie" осталось неоконченнымъ; 2) **Георгій Генрихъ Гальфенъ** на 45-мъ году, французскій геометръ и членъ Парижской Академіи Наукъ.

*) См. объ этомъ замѣтку *М. Лянченко* въ № 66 „Вѣстника" стр. 119.

ЗАДАЧИ.

№ 453 Предполагая a неравнымъ единицѣ, доказать справедливость неравенствъ

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)>(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right),$$

$$a-1>n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)>1-\frac{1}{a},$$

при какомъ угодно n. *Дм. Ефремовъ* (Ив.-Возн.)

№ 454. Въ кругъ радіуса R вписанъ прав. шестиугольникъ и два равност. треугольника, коихъ вершины совпадаютъ съ вершинами 6-угольника. Пересѣченіемъ сторонъ этихъ треугольниковъ образуется новый прав. 6-угольникъ, въ который опять вписываемъ, какъ выше, два равн. треугольника, дающихъ въ пересѣченіи сторонъ третій прав. 6-угольникъ. Въ этотъ послѣдній опять вписываемъ два треугольника и т. д. до ∞. Показать къ какой площади стремится въ предѣлѣ сумма всѣхъ площадей полученныхъ такимъ образомъ шестиугольниковъ.

Н. Карповъ (Лубны).

№ 455. Рѣшить травненія

$$\mathrm{Sin}^2x+\mathrm{Sin}^2y=n+1$$
$$x+y=\varphi.$$

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 456. Вычислить площадь четыреугольника по четыремъ его сторонамъ a, b, c и d, зная, что углы, прилежащіе основанію a, равны.

В. Ходаковъ.

№ 457. Опредѣлить число системъ цѣлыхъ положительныхъ и нулевыхъ рѣшеній совмѣстныхъ уравненій

$$x+y+z+u=n+1$$
$$y+2z+3u=2n+3,$$

въ которыхъ n есть положительное цѣлое число.

С. Шатуновскій (Кам.-Под.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 154. Извѣстно, что можно обложить кругъ шестью равными ему кругами такъ, что эти круги будутъ касаться даннаго круга и будутъ также попарно касаться между собою. Найти, каково должно быть отношеніе радіусовъ круговъ A и B, для того чтобы можно было обложить кругами A кругъ B и кругами B кругъ A.

Задача допускаетъ три возможныя предположенія: 1) круги A укладываются внутри круга B, и круги B—внутри круга A; 2) круги A укладываются внѣ круга B, и круги B—внѣ круга A; 3) круги A укладываются внѣ круга B, а круги B—внутри круга A.

Обозначимъ радіусы круговъ A и B соотвѣтственно чрезъ R и r.

Въ первомъ случаѣ искомое отношеніе R:r, очевидно, равно 1, ибо въ этомъ случаѣ R и r одновременно должны удовлетворять условіямъ

$$R\geqq r \text{ и } r\leqq R,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что $R=r$.

Во второмъ случаѣ предположимъ, что кругъ B можно обложить n кругами A, а кругъ A—m кругами B.

Въ этомъ предположеніи получимъ уравненія:

$$\operatorname{Sin}\frac{360^\circ}{2n}=\frac{R}{R+r} \text{ и } \operatorname{Sin}\frac{360^\circ}{2m}=\frac{r}{R+r}, \tag{1}$$

откуда

$$\operatorname{Sin}\frac{360^\circ}{2n}+\operatorname{Sin}\frac{360}{2m}=1$$

или

$$a_n+a_m=2, \tag{2}$$

гдѣ a_n и a_m означаютъ стороны правильныхъ вписанныхъ многоугольн. при радіусѣ $=1$. Это уравненіе, очевидно, удовлетворяется при $n=m=6$. Кромѣ того ясно, что если $n<6$, то $n>6$, и обратно. Такъ какъ n и m по значенію своему >2, то попробуемъ, не можетъ ли наше уравненіе удовлетворяться при $n=3$, или 4, или 5. Подставляя послѣдовательно эти числа вмѣсто n въ уравненіе (2), получимъ для a_m такія величины a'_m, a''_m, a'''_m, что

$$a_{24}<a'_m<a_{23},\ a_{11}<a''_m<a_{10},\ a_8<a'''_m<_7;$$

это значитъ, что при $n<6$ уравненіе (2) не даетъ цѣлыхъ значеній для m, слѣд. невозможно; замѣняя въ этомъ разсужденіи m чрезъ n, придемъ къ заключенію, что и при $m<6$ уравненіе (2) невозможно. Итакъ, каждое изъ чиселъ m и n можетъ равняться только 6; отсюда на основаніи уравненій (1), заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ $R:r=1$.

Въ послѣднемъ случаѣ, при тѣхъ-же значеніяхъ m и n, имѣютъ мѣсто уравненія:

$$\operatorname{Sin}\frac{360^\circ}{2n}=\frac{R}{R+r} \text{ и } \operatorname{Sin}\frac{360^\circ}{2m}=\frac{r}{R-r}; \tag{3}$$

исключивъ изъ нихъ отношенiе $R:r$, получимъ

$$\left(1-\operatorname{Sin}\frac{360°}{2n}\right)\left(1+\operatorname{Sin}\frac{360°}{2m}\right)=\operatorname{Sin}\frac{360°}{2n}.\operatorname{Sin}\frac{360°}{2m}. \quad (4)$$

Здѣсь m, по своему значенiю, можетъ имѣть всѣ цѣлыя величины, начиная съ 1, а n, какъ и прежде, >2; поэтому, хотя уравненiе (4) и удовлетворятся при $n=2$, $m=1$, однако это рѣшенiе слѣдуетъ отбросить, ибо при конечныхъ R и r оно не имѣетъ смысла. Итакъ, для m возможны величины только >1, а потому $r\leq\frac{1}{2}R$. Замѣняя въ первомъ изъ уравненiй (3) R чрезъ $2r$, получимъ

$$\operatorname{Sin}\frac{360°}{2n}\geq\frac{2}{3} \text{ т. е. } a_n\geq\frac{4}{3},$$

гдѣ a_n имѣетъ то же значенiе, какъ и прежде. Такъ какъ

$$a_5<\frac{4}{3}<a_4<a_3,$$

то для n возможны только двѣ величины: 3 и 4. При $n=3$ уравненiе (4) даетъ

$$2.\operatorname{Sin}\frac{360°}{2m}=a'_m=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1};$$

но эта величина содержится между a_4 и a_5; поэтому при $n=3$ уравненiо (4) не удовлетворяется цѣлымъ значенiемъ m, т. е. невозможно. Единственное возможное значенiе $n=4$, будучи подставлено въ уравненiе (4), даетъ

$$2.\operatorname{Sin}\frac{360°}{2m}=a''_m\sqrt{2}, \text{ т. е. } m=4.$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ $n=m=4$; по этимъ величнамъ изъ уравненiй (3) найдемъ:

$$R=r(1+\sqrt{2}), \text{ т. е.}$$

радiусъ большаго круга равенъ радiусу круга меньшаго, сложенному со стороной квадрата, вписаннаго въ меньшiй кругъ.

Замѣтимъ, что полученныя отношенiя радiусовъ могутъ служить отвѣтомъ на аналогичную задачу относительно шаровъ.

Дм. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскiй.**

Дозволено цензурою. Кiевъ, 13 Iюня 1889 г.
Типо-литографiя Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется