№ 41.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕМЪ УЧЕН. КОМИТ. МИН. НАРОДН. ПРОСВ.

рекомендованъ

для пріобрѣтенія: а) въ фундаментальныя и ученическія библіотеки мужскихъ гимназій, прогимназій и реальныхъ училищъ; б) въ библіотеки учительскихъ институтовъ, семинарій, женскихъ гимназій и городскихъ училищъ.

IV Семестра № 5-й.

КІЕВЪ.
Типографія И. Н. Кушнерева и К°, Елисаветинская улица, домъ Михельсона.
1888.

СОДЕРЖАНІЕ № 41.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 41.

IV Сем. **25 Февраля 1888 г.** **№ 5.**

По поводу доказательства XI-ой Эвклидовой аксіомы.

(Письмо въ редакцію).

Недавно мнѣ пришлось ознакомиться по Вашему журналу съ интереснымъ доказательствомъ теоремы: *сумма угловъ треугольника не можетъ быть меньше* $2d$ *). Желая придать большую строгость этому доказательству я долженъ былъ убѣдиться въ его несостоятельности.

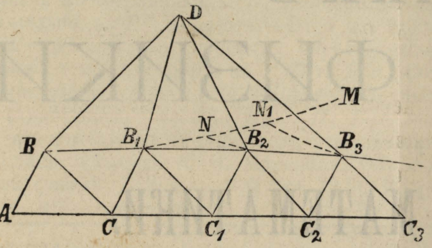
Положимъ, въ треугольникѣ ABC (фиг. 14) сумма угловъ равна $2d-\alpha$. Выбираемъ, какъ сказано въ доказательствѣ Картона, n такъ великимъ, чтобы $n\alpha > 6d$.

На продолженіи основанія AC отложимъ $n-1$ разъ это основаніе и построимъ треугольники CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, ... , равные данному; вершины B, B_1, B_2, ... соединимъ прямыми линіями. Все доказательство Картона основано на томъ предположеніи, что возможно найти такую точку D, чтобы она и прямая ACC_1 . . . находились на разныхъ сторонахъ ломанной линіи BB_1B_2 . . . и кромѣ того, чтобы треугольники BDB_1, B_1DB_2 . . . *прикладывались* одинъ къ другому, но не *накладывались* одинъ на другой. Но это послѣднее обстоятельство не удовлетворяется въ доказательствѣ Картона при существованіи тѣхъ предположеній, которыя допущены вначалѣ. Покажемъ это.

Прежде всего нужно показать, что линія $BB_1B_2B_3$ . . . есть ломанная. Въ самомъ дѣлѣ, сумма угловъ треугольника CB_1C_1 равна $2d-\alpha$, а

*) См. „Вѣстникъ" № 31 стр. 145 сем. III.

Фиг. 14.



такъ какъ сумма угловъ всякаго другого треугольника меньше $2d$ *), то сумма угловъ въ четыреугольникѣ BB_1C_1C меньше $4d-\alpha$. Но въ этомъ четыреугольникѣ сумма двухъ угловъ при вершинахъ C и C_1 равна $2d$, что слѣдуетъ изъ того, что $\angle B_1C_1C = \angle ACB$, а этотъ послѣдній уголъ смеженъ съ угломъ BCC_1. Отсюда слѣдуетъ, что въ четыреугольникѣ BB_1C_1C сумма угловъ при вершинахъ B и B_1 менѣе $2d-\alpha$; но уголъ B_1BC равенъ углу $B_2B_1C_1$, слѣдовательно сумма угловъ BB_1C_1 и $B_2B_1C_1$ меньше $2d-\alpha$. Поэтому продолженіе отрѣзка BB_1 не совпадетъ съ B_1B_2, но пойдетъ по нѣкоторому направленію B_1M, при чемъ уголъ MB_1B_2 будетъ больше α.

Если сумма внутреннихъ угловъ треугольника меньше $2d$, то легко показать, что внѣшній уголъ треугольника болѣе двухъ внутреннихъ съ нимъ несмежныхъ угловъ. Сдѣлавъ это замѣчаніе, продолжимъ наши разсужденія далѣе.

Продолженіе отрѣзка B_2B_3 въ лѣвую сторону пересѣчетъ прямую BM въ нѣкоторой точкѣ N. Такъ какъ въ треугольникѣ B_1NB_2 каждый изъ угловъ при вершинахъ B_1 и B_2 превосходитъ α, то внѣшній уголъ MNB_2 превзойдетъ 2α. Итакъ отрѣзки BB_1 и B_2B_3 пересѣкаются подъ угломъ, превосходящимъ 2α. Далѣе легко показать, что отрѣзки BB_1 и B_3B_4, будучи продолжены, встрѣчаются (въ точкѣ N_1) подъ угломъ, превосходящимъ 3α; это слѣдуетъ изъ того, что въ треугольникѣ NN_1B_3 внѣшній уголъ MN_1B_3 болѣе суммы внутреннихъ угловъ при вершинахъ N и B_3, т. е. болѣе 3α, и т. д. Итакъ уголъ между двумя отрѣзками ломанной $BB_1B_2 \ldots$ съ удаленіемъ отрѣзковъ увеличивается. Этотъ уголъ можетъ быть болѣе $2d$. Въ самомъ дѣлѣ, число отрѣзковъ n выбрано такъ, что $n\alpha > 6d$; но въ такомъ случаѣ можно отыскать такое число k меньшее n, чтобы $k\alpha \geq d$. Отсюда слѣдуетъ, что отрѣзки BB_1 и $B_k B_{k+1}$, будучи продолжены, или вовсе не пересѣкутся, или пересѣкутся ниже прямой $ACC_1 \ldots$; но это обстоятельство препятствуетъ выбору точки D такъ, чтобы треугольники DBB_1, $DB_1B_2 \ldots DB_k B_{k+1}$, прикладывались одинъ къ другому. Итакъ мы должны допустить, что вышеупомянутые треугольники, сначала прикладываются одинъ къ другому, а начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ уже *накладываться* одинъ на другой. При такомъ допущеніи все доказательство Картона теряетъ значеніе, такъ какъ чертежъ, на которомъ

---

*) Если сумма угловъ въ какомъ нибудь одномъ треугольникѣ равна $2d$, то можно доказать, что и во всякомъ другомъ треугольникѣ сумма угловъ также равна $2d$.

основано это доказательство, на самомъ дѣлѣ не можетъ существовать при тѣхъ допущеніяхъ, которыя приняты вначалѣ.

Наставникъ Гатчинской Учительской Семинаріи *В. Соллертинскій.*

Примѣчаніе редакціи. Показывая несостоятельность доказательства Картона, авторъ вмѣстѣ съ тѣмъ доказываетъ одно свойство псевдосферы; это свойство относится къ кривой линіи, точки которой находятся въ постоянномъ разстояніи отъ прямой линіи (кратчайшей линіи): касательныя къ этой кривой линіи могутъ пересѣкаться подъ какимъ угодно угломъ.

О правильныхъ многогранникахъ.

Условимся предварительно въ слѣдующихъ обозначеніяхъ элементовъ многогранника:

F число граней (faces) многогранника,
S „ вершинъ (sommets) „ ,
A „ реберъ (arêtes) „ ,
P „ плоскостей (planes), образующихъ многогранный уголъ.
n „ сторонъ (nombre des lignes) грани многогранника.

Чтобы установить зависимость между A, F и S многогранника, возьмемъ сначала выпуклую многогранную поверхность, но незамкнутую, т. е. ограниченную плоскою или косою ломанною линіей; сохраняя для этой поверхности тѣ же обозначенія, мы получимъ соотношеніе:

$$A+1=F+S\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Для поверхности, состоящей изъ одного многоугольника, имѣемъ:

$$A=n,\ F=1,\ S=n.$$

Слѣдовательно

$$A+1=n+1,\ F+S=n+1,$$

откуда убѣждаемся въ справедливости равенства (1).

Чтобы доказать зависимость (1) для какой угодно поверхности, докажемъ, что если равенство (1) имѣетъ мѣсто для поверхности объ F граняхъ, то оно будетъ имѣть мѣсто и для поверхности объ $F_1=F+1$ граняхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть новый многоугольникъ имѣетъ всего m сторонъ; изъ нихъ q совпадающихъ съ ломанною линіею, ограничивающею первоначальную поверхность, и $m-q$ остальныхъ, не совпадающихъ съ этою линіей; тогда число различныхъ реберъ новой поверхности будетъ:

$$A_1=A+(m-q).$$

Далѣе, такъ какъ при такомъ условіи $q+1$ вершинъ новаго многоугольника совпадаютъ съ вершинами первоначальной поверхности, то число различныхъ вершинъ новой поверхности будетъ:

$$S_1=S+\Big[\,m-(q+1)\,\Big].$$

Число же граней новой поверхности, очевидно, есть

$$F_1=F+1.$$

Заноси значенія A, F и S изъ послѣднихъ трехъ равенствъ въ выраженіе (1), получимъ:

$$A_1+1=F_1+S_1,$$

равенство, доказывающее высказанную нами теорему.

Мы видѣли уже раньше, что равенство (1) имѣетъ мѣсто для поверхности, состоящей изъ одной грани; слѣд. въ силу только что доказанной теоремы, оно существуетъ и для поверхности, состоящей изъ двухъ граней; если же оно справедливо для поверхности о двухъ граняхъ, то должно имѣть мѣсто и для поверхности о трехъ граняхъ и т. д.

Взявъ теперь какой нибудь многогранникъ и удаливъ изъ него одну грань, мы получимъ поверхность, для которой равенство (1) удовлетворяется, т. е.

$$A+1=S+(F-1),$$

отсюда находимъ слѣдующую зависимость между элементами A, F и S всякаго, а слѣдовательно и *правильнаго многогранника*:

$$A+2=F+S\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Зависимость эта извѣстна подъ названіемъ *теоремы Эйлера*. Вышеизложенное доказательство ея было дано Коши.

Укажемъ теперь зависимость между другими элементами *правильнаго многогранника*. Величина одного плоскаго угла многогранника, выразится формулою

$$2d\frac{n-2}{n},$$

а сумма всѣхъ плоскихъ угловъ многограннаго угла, равная

$$2d\frac{n-2}{n}P,$$

должна, какъ извѣстно, удовелтворять условію:

$$2d\frac{n-2}{n}P < 4d \text{ или } P\frac{n-2}{n} < 2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Возьмемъ одну грань многогранника и сосчитаемъ ея стороны, получимъ n реберъ; всявъ другую грань, получимъ еще n реберъ; перебравъ всѣ F граней, получимъ всего $n.$F граней; но каждое ребро берется при этомъ счетѣ два раза, ибо оно принадлежитъ двумъ гранямъ, пересѣкающимся по этому ребру; слѣдовательно число nF вдвое болѣе числа A, различныхъ реберъ, т. е.

$$A=\frac{nF}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Пересчитаемъ ребра еще въ другомъ порядкѣ: число реберъ, сходящихся въ вершинѣ одного многограннаго угла будетъ P, по стольку же реберъ сходится въ остальныхъ вершинахъ многогранника; слѣд. число сосчитанныхъ реберъ будетъ PS, но это число опять вдвое болѣе A, различныхъ реберъ, ибо каждое ребро было взято при счетѣ два раза, какъ линія, соединяющая двѣ вершины многогранника; поэтому мы имѣемъ:

$$2A=P.S., \qquad S=\frac{2A}{P},$$

или:

$$S=\frac{2A}{P}=\frac{2\ nF}{P.2}=\frac{nF}{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Изъ выраженій (2), (4) и (5), имѣемъ:

$$F=\frac{4P}{2(P+n)-nP} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно, чтобы дать отвѣты на слѣдующіе вопросы: 1. Изъ какихъ правильныхъ многоугольниковъ можно образовать правильные многогранники?

Вставивъ въ неравенство (3) наименьшее значеніе P, именно 3, получимъ $n<6$; слѣд. правильные многогранники можно образовать только изъ правильныхъ треугольниковъ, четыреугольникъ и пятиугольниковъ.

2. По скольку каждаго рода граней можетъ сходиться въ вершинѣ многограннаго угла?

Подставляя въ тоже неравенство (3) вм. n поочередно 3, 4 и 5, получимъ для первой подстановки $P<6$, но съ другой стороны очевидно, что $P\geqq 3$, слѣд. для P можно брать значенія 3, 4 и 5. Вторая подстановка даетъ $P<4$; слѣд. $P=3$. Наконецъ для третьей подстановки имѣетъ $P<3^1/_3$, слѣд. $P=3$.

Итакъ изъ правильныхъ треугольниковъ можно образовать многогранные углы о трехъ, четырехъ и пяти граняхъ; изъ квадратовъ же и пятиугольниковъ—только о трехъ граняхъ.

3. Какіе многогранники можно образовать изъ треугольниковъ, четыреугольниковъ и пятиугольниковъ (правильныхъ)?

Взявъ въ равенствѣ (6) для n значеніе 3, а для P поочередно 3, 4 и 5, увидимъ что изъ треугольниковъ можно образовать правильный четырегранникъ или тетраэдръ ($F=4$), осьмигранникъ или октаэдръ ($F=8$) и двадцатигранникъ или икосаэдръ ($F=20$). Полагая же $n=4$ и $P=3$, найдемъ, что изъ квадратовъ можно образовать правильный шестигранникъ (кубъ) или гексаэдръ ($F=6$). Если же возьмемъ $n=5$ и $P=3$, то то же равенство (6) дастъ для F значеніе 12, т. е. изъ пятиугольниковъ можно образовать правильный двѣнадцатигранникъ или додекаэдръ ($F=12$).

4. Сколько реберъ и вершинъ имѣетъ каждый изъ правильныхъ могогранниковъ?

Отвѣтъ, помѣщенный въ прилагаемой здѣсь таблицѣ, полученъ путемъ приличныхъ подстановокъ вм. n, F и P въ равенство (4).

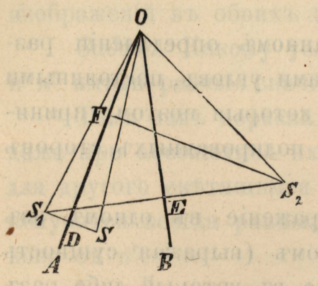
n	3	3	3	4	5
P	3	4	5	3	3
F	4	8	20	6	12
A	6	12	30	12	30
S	4	6	12	8	20

П. Гайдуковъ (Новочеркасскъ).

О зеркалахъ наклонныхъ и, въ частномъ случаѣ, параллельныхъ.

Пусть $\angle AOB=L$ есть линейный уголъ двуграннаго угла, образованнаго плоскостями зеркалъ A и B; S—свѣтящаяся точка, разстояніе которой отъ

Фиг. 15.



вершины угла принимаемъ за единицу, причемъ пусть (фиг. 15) $\angle AOS = \alpha$, SD перпендикулярно къ OA, такъ что

$$SD = \operatorname{Sin} \alpha.$$

S_1 есть изображенiе свѣтящейся точки S въ зеркалѣ A. Такъ какъ

$$S_1D = SD,$$

то

$$OS_1 = OS \text{ и } \angle S_1OD = \alpha.$$

Поэтому

$$\angle S_1OB = L + \alpha$$

и слѣд.

$$S_1E = \operatorname{Sin}(L + \alpha).$$

Подобнымъ же образомъ разсуждаемъ далѣе. Изъ равенствъ S_2E и S_1E слѣдуетъ, что

$$OS_2 = OS_1 = OS \text{ и } \angle S_2OB = \angle S_1OB = L + \alpha.$$

Слѣд.

$$\angle S_2OA = 2L + \alpha$$

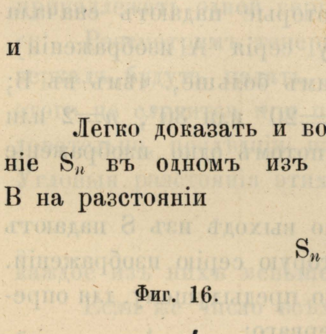
и

$$S_2F = \operatorname{Sin}(2L + \alpha).$$

Легко доказать и вообще, что если какое нибудь мнимое изображенiе S_n въ одномъ изъ зеркалъ, напр. въ B, будетъ находиться отъ B на разстоянiи

$$S_n M = \operatorname{Sin}\{(n-1)L + \alpha\},$$

Фиг. 16.



то это же изображенiе будетъ находиться отъ A на разстоянiи

$$S_n N = \operatorname{Sin}(nL + \alpha).$$

Дѣйствительно, по положенiю

$$\angle S_n OB = (n-1)L + \alpha;$$

прибавляя сюда AOB, получимъ:

$$\angle AOS_n = nL + \alpha$$

и потому

$$S_n N = \operatorname{Sin}(nL + \alpha).$$

Очевидно, что при n четномъ синусъ этотъ покажетъ разстояніе изображенія отъ A, а при нечетномъ—отъ B.

Обратимъ вниманіе на то, что, при указанномъ опредѣленіи разстояній мнимыхъ изображеній отъ A и B синусами угловъ, постоянными сторонами послѣднихъ будутъ линіи OA и OB, которыя поэтому принимаемъ за начальная и счетъ угловъ ведемъ отъ полированныхъ сторонъ этихъ линій.

Для того, чтобы какое либо мнимое изображеніе въ одномъ изъ зеркалъ могло дать новое изображеніе въ другомъ (выражая сущность явленія, слѣдовало бы сказать такъ: отраженные въ который либо разъ лучи однимъ зеркаломъ могли встрѣтить другое), необходимо только, чтобы разсматриваемое изображеніе лежало съ той стороны плоскости другого зеркала, на которой находится его полированная поверхность. Это условіе будетъ удовлетворено, если

$$nL+\alpha \leqq 180^\circ,$$

откуда

$$n \leqq \frac{180^\circ-\alpha}{L}.$$

Наибольшее цѣлое число для n покажетъ, сколько изображеній, кромѣ перваго ($n=0$), получается въ обоихъ зеркалахъ отъ послѣдовательныхъ отраженій тѣхъ свѣтовыхъ лучей, которые падаютъ сначала на A (конусъ лучей A и соотвѣтствующая ему серія A изображеній). При n четномъ, въ A будетъ изображеній однимъ больше, чѣмъ въ B; а при n нечетномъ—поровну. Напр. $L=80^\circ$, $\alpha=20^\circ$ или 30°, $n=2$ или 1 и въ A будетъ отъ серіи A сначала 2, а потомъ одно изображеніе при неизмѣнномъ одномъ въ B.

Обращая вниманіе на тѣ лучи, которые по выходѣ изъ S падаютъ сначала на B (конусъ лучей B), получимъ вторую серію изображеній. Называя уголъ BOS чрезъ β, получимъ, подобно предыдущему, для опредѣленія числа изображеній этой серіи, кромѣ перваго:

$$n'=\frac{180^\circ-\beta}{L}=\text{цѣл. ч.}$$

при чемъ можетъ быть, или:

$$n'=n,$$

или:

$$n'=n-1,$$

если всегда будемъ брать $\beta>\alpha$. Напр. при $L=80^\circ$, $\alpha=20^\circ$, слѣд. $\beta=60^\circ$, $n=2$ и $n'=2$; значитъ въ обоихъ зеркалахъ будетъ пять изображеній:

3 въ A и 2 въ B. При $L=55°$, $\alpha=10°$, $\beta=45°$, $n=3$ и $n'=2$. Всѣхъ изображеній въ обоихъ зеркалахъ будетъ семь: 3 въ A и 4 въ B.

Задача. Какому условію долженъ удовлетворять уголъ α, чтобы n и n' имѣли разныя значенія, и при какомъ углѣ L этого не можетъ быть?

Такъ какъ зеркала необходимо берутся конечныхъ размѣровъ, то даже при абсолютной ихъ зеркальности границы одного будутъ служить для другого свѣтящимся предметомъ. Число изображеній наприм. B въ A получится всегда равнымъ наименьшему значенію для n и будетъ одинаково съ n'.

Въ каждомъ зеркалѣ рядъ изображеній начинается первымъ, соотвѣтствующей ему серіи ($n=0$ и $n'=0$), потому что наприм. для A

$$arc.\mathrm{Sin}\alpha < arc\mathrm{Sin}(L+\beta),$$

и затѣмъ онѣ чередуются; это видно изъ того, что

$$arc.\mathrm{Sin}(nL+\alpha) < arc.\mathrm{Sin}\left\{(n+1)L+\beta\right\} < arc.\mathrm{Sin}\left\{(n+2)L+\alpha\right\}$$

при α и β меньшихъ L.

Послѣдними же изображеніями въ каждомъ зеркалѣ могутъ быть принадлежащія или той, или другой серіи. Если n и n' четныя числа, то послѣднія изображенія будутъ принадлежать къ разноименнымъ съ зеркалами серіямъ; при n и n' нечетныхъ—къ соотвѣтственнымъ, а при различныхъ значеніяхъ для n и n', оба послѣднія изображенія будутъ принадлежать одной серіи.

Разсмотримъ теперь вопросъ, когда послѣднія изображенія обоихъ зеркалъ будутъ падать въ одну точку окружности. Легко видѣть, что этого не случится при нечетномъ числѣ всѣхъ изображеній, когда, слѣдовательно, послѣднія изображенія принадлежатъ одной серіи напр. A. Угловыя разстоянія этихъ изображеній отъ OA и OB будутъ:

$$nL+\alpha \text{ и } (n-1)L+\alpha,$$

каждое изъ нихъ меньше 180°.

Если же число всѣхъ изображеній будетъ четное, при чемъ должно быть $n=n'$, то, по условію, получимъ:

$$(nL+\alpha)+(nL+\beta)=360°-L,$$

откуда, замѣняя β чрезъ $L-\alpha$, имѣемъ:

$$L=\frac{180°}{\alpha+1},$$

т. е. L должно быть аликвотною частью полуокружности.

Вопросы: *a*) можно ли въ калейдоскопѣ брать уголъ между зеркалами произвольно; *b*) какая будетъ особенность въ фигурѣ, если взять этотъ уголъ равнымъ $\frac{360°}{2a+1}$?

(*Примѣчаніе*. Было бы желательно, чтобы наши оптико-механики приготовляли для физическихъ кабинетовъ калейдоскопы съ перемѣннымъ угломъ для зеркалъ. Это весьма не трудно.)

Если вершину угла O будемъ удалять, перемѣщая по SO, то $\angle$L будетъ уменьшаться. а числа n и n' увеличиваться. При $SO=\infty$ зеркала будутъ параллельны, окружность съ изображеніями обратится въ прямую l, проходящую чрезъ S и перпендикулярную къ SO или, что все равно, къ направленію зеркалъ. Число изображеній въ каждомъ зеркалѣ будетъ безконечно велико; разстоянія изображеній отъ зеркалъ вмѣсто синусовъ, стремящихся, при увеличеніи окружности, къ совпаденію съ соотвѣтственными дугами, будутъ измѣряться отрѣзками прямой l.

В. Морозовъ (Пинскъ).

Одно изъ доказательствъ теоремы Безу.

Теорема. Остатокъ отъ дѣленія цѣлаго полинома

$$Ax^m + A_1x^{m-1} \cdot \cdot \cdot \cdot + A_m$$

на двучленъ

$$x-a$$

равенъ результату подстановки въ полиномъ вмѣсто x буквы a:

$$Aa^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + A^m.$$

Доказ. Легко видѣть, что теорема имѣетъ мѣсто для всѣхъ двучленовъ 1-ой степени (по отношенію къ x). Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$Ax + A_1 = A(x-a) + Aa + A_1$$

и слѣдов., остатокъ отъ дѣленія

$$Ax + A_1$$

на

$$x-a$$

равенъ

$$Aa + A_1.$$

Остается доказать теперь, что если теорема имѣетъ мѣсто для всякаго полинома степени m, то она будетъ имѣть мѣсто и для всякаго полинома степени

$$m+1,$$

чтобы считать теорему вполнѣ доказанной. Обозначимъ полиномы

$$Bx^{m+1}+B_1x^m+\cdot\cdot\cdot\cdot+B_mx+B_{m+1}$$

и

$$Bx^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot+B_m$$

соотвѣтственно черезъ $f(x)$ и $f_1(x)$.

Имѣемъ:

$$f(x)=xf_1(x)+B_{m+1}.$$

Далѣе, очевидно, что

$$x=(x-a)+a$$

и по предположенію

$$f_1(x)=N(x-a)+f_1(a),$$

гдѣ N цѣлый полинамъ степени $m-1$, слѣдовательно,

$$f(x)=\Big[(x-a)+a\Big]\Big[N(x-a)+f_1(a)\Big]+B_{m+1}.$$

или

$$f(x)=N(x-a)^2+\Big[Na+f_1(a)\Big](x-a)+af_1(a)+B_{m+1}.$$

Отсюда заключаемъ, что остатокъ отъ дѣленія $f(x)$

на

$$x-a$$

равенъ

$$af_1(a)+B_{m+1}=Ba^{m+1}+B_1a^m+\cdot\cdot\cdot\cdot+B_{m+1},$$

а это и требовалось доказать.

И. Ивановъ (Спб.)

Къ вопросу о выдѣленіи простыхъ чиселъ.

Механическій способъ нахожденія простыхъ чиселъ, извѣстный подъ названіемъ „Эратосѳенова рѣшета“ (съ III ст. до Р. Х.), хотя и крайне простъ, но неудобенъ уже потому, что требуетъ много мѣста, ибо, если не выписывать всѣхъ нечетныхъ чиселъ по порядку, начиная всякій разъ съ самаго начала, т. е. съ 3-хъ, то примѣненіе способа затруднительно и онъ теряетъ свой механическій характеръ. Такъ напр. предположимъ, что намъ извѣстны всѣ простыя числа меньше N (хотя бы изъ таблицы) и мы задались цѣлью найти простыя числа большія N; тогда, какъ бы велико N ни было, мы бы должны были выписать по порядку всѣ нечетныя числа, начиная съ 3-хъ, до N и дальше N до желаемаго предѣла M, и начинать выключеніе чиселъ кратныхъ 3, 5, 7, 11, 13, и т. д. до ближайшаго меньшаго къ $\sqrt{M}$ простого числа съ самаго начала. Такимъ образомъ часть труда нашего пошла бы на выдѣленіе и тѣхъ простыхъ чиселъ, меньшихъ N, которыя намъ уже были извѣстны.

Пользуясь нѣкоторыми весьма простыми соображеніями, можно однакожъ видоизмѣнить способъ Эратосѳена такимъ образомъ, что онъ и не вполнѣ потеряетъ свой механическій характеръ, и можетъ быть съ меньшимъ неудобствомъ приложенъ къ выдѣленію простыхъ чиселъ, большихъ нѣкотораго даннаго простого числа N.

Такъ какъ простыя числа всѣ нечетны, то каждое изъ нихъ, есть сумма двухъ послѣдовательныхъ чиселъ, т. е.

$$N=a+(a+1) \qquad (1)$$

гдѣ a можетъ быть четнымъ или нечетнымъ. Не трудно видѣть, что для того чтобы N было числомъ простымъ, необходимо чтобы a при дѣленіи на 3, на 5, на 7, на 11,.... не давало послѣдовательно остатковъ: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14,..... Иными словами: a не можетъ удовлетворять ни одному изъ сравненій: $x\equiv 1$ (мод. 3); $x\equiv 2$ (мод. 5); $x\equiv 3$ (мод. 7); $x\equiv 5$ (мод. 11) и т. д., т. е. вообще $x\equiv\frac{m-1}{2}$ (мод. m). (2)

Число такихъ сравненій будетъ единицею меньше числа простыхъ чиселъ меньшихъ $\sqrt{N}$. Такъ напр. если, начиная съ N=199, мы бы желали подвергать испытанію числа больше 199 и меньше 300, то наибольшимъ модулемъ будетъ 17, и критеріальныхъ сравненій (2) надо брать не больше шести.

Послѣ этого замѣчанія легко уже понять сущность пріема выдѣленія простыхъ чиселъ большихъ N.

Всякое простое число больше N можно представить такъ:

$$N_1=a+x+(a+x+1)$$

гдѣ $a+x$ не удовлетворяетъ ни одному изъ критеріальныхъ сравненій (2). Слѣдовательно вопросъ сводится къ опредѣленію такой прибавки x, которая, будучи сложена съ a, не удовлетворяющимъ ни одному изъ сравненій (2), дастъ въ суммѣ нѣкоторое число a_1, которое тоже не удовлетворяетъ тѣмъ-же сравненіямъ.

Найти всѣ нужныя намъ значенія x можно, между прочимъ, и по способу Эратосѳена, а именно слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ нужно найти всѣ простыя числа отъ даннаго простого числа N до нѣкотораго предѣльнаго числа M. Съ этою цѣлью пишемъ рядъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до числа $\frac{M-N}{2}$ (или—если M четное—до $\frac{M-N-1}{2}$) и, для удобства, выписываемъ всѣ критеріальныя сравненія до модуля, равнаго ближайшему меньшему $\sqrt{M}$ простому числу. Предположимъ, что получилось *n* такихъ сравненій. Затѣмъ, исходя отъ даннаго

$$N=a+(a+1),$$

находимъ *n* остатковъ при дѣленіи *a* на всѣ наши модули. Сравнивая наконецъ каждый изъ полученныхъ остатковъ съ соотвѣтственнымъ ему критеріальнымъ сравненіемъ, легко заключаемъ какія величны невозможны для искомой прибавки *x* и вычеркиваемъ эти послѣднія по механическому уже пріему изъ таблички натуральныхъ чиселъ. Остающіяся въ табличкѣ числа послѣ *n* системъ вычеркиваній, даютъ всѣ значенія слагаемаго *x*, при которыхъ сумма $(a+x)+(a+x+1)$ представляетъ простое число.

Для поясненія этого пріема на примѣрѣ, найдемъ всѣ простыя числа третьей сотни.

Послѣднее простое число второй сотни есть

$$N=199=99+100.$$

Критеріальныя сравненія будутъ:

$$x\equiv 1(3);\ x\equiv 2(5);\ x\equiv 3(7);\ x\equiv 5(11);\ x\equiv 6(13);\ x\equiv 8(17).$$

Остатки отъ дѣленія 99 на тѣ-же модули суть:

$$0;\quad 4;\quad 1;\quad 0;\quad 8;\quad 14.$$

Слѣдовательно:

1) x не можетъ $=1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots 46, 49$.

(ибо въ противномъ случаѣ $99+x$ при дѣленіи на 3 давно бы въ остаткѣ единицу)

2) x не можетъ $=3, 8, 13, 18, \ldots 43, 48$.
3) x „ „ $=2, 9, 16, 23, 30, 37, 44$.
4) x „ „ $=5, 16, 27, 38, 49$,
5) x „ „ $=11, 24, 37, 40$.
6) x „ „ $=11, 28, 45$.

Вычеркнувъ всѣ эти числа изъ таблички натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 50, получаемъ для *x* всѣ возможныя значенія:

$x=6, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 26, 29, 32, 35, 36, 39, 41, 42, 47$.

Внося эти значенія въ нашу формулу

$$N_1=(99+x)+(100+x)=199+2x$$

получаемъ всѣ простыя числа третьей сотни:

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

Само собою понятно, что это видоизмѣненіе Эратосѳенова рѣшета можно примѣнять и въ обратномъ порядкѣ, т. е. можно, исходя изъ какого нибудь извѣстнаго намъ простого числа $N = a + (a+1)$, искать такихъ значеній x, для которыхъ

$$N' = a - x + (a - x + 1)$$

было бы простымъ числомъ. Этимъ способомъ мы бы нашли, слѣдовательно, всѣ простыя числа непосредственно меньшія N. Такъ напр. если бы исходя изъ

$$N = 211 = 105 + 106$$

мы захотѣли найти всѣ простыя числа второй сотни, то ограничиваясь теперь только пятью крит. сравненіями:

$$x \equiv 1(3);\ x \equiv 2(5);\ x \equiv 3(7);\ x \equiv 5(11);\ x \equiv 6(13)$$

(ибо $\sqrt{211} < 17$) и найдя остатки числа $105 (= 3.5.7)$ при дѣленіи на тѣ-же модули:

$$0;\quad 0;\quad 0;\quad 6;\quad 1;$$

мы бы убѣдились, что x (которое теперь принимаемъ отрицательнымъ) не можетъ равняться:

во 1-хъ—2, 5, 8, 11, 14, 17 . . . . 47, 50, 53
во 2 хъ—3, 8, 13, 18, ... 43, 48
въ 3-хъ—4, 11, 18, 25, 32, 39, 46
въ 4 хъ—1, 12, 23, 34, 45
и въ 5-хъ—8, 21, 34, 47.

Слѣдовательно, за исключеніемъ этихъ чиселъ, вычитаемое x въ формулѣ.

$$N' = (105 - x) + (106 - x) = 211 - 2x$$

можетъ только имѣть значенія:

6, 7, 9, 10, 15, 16, 19, 22, 24, 27, 30, 31, 36, 37, 40, 42, 49, 51, 52, 54, 55.

А потому простыя числа между предѣлами 211 и 100 будутъ:

199, 197, 193, 191, 181, 179, 173, 167, 163, 157, 151, 149, 139, 137, 131, 127, 113, 109, 107, 103, 101 *). *III.*

---

*) См. также: „Отысканіе простыхъ чиселъ, заключающихся въ данныхъ предѣлахъ“ въ № 10 „Вѣстника“, стр. 219 сем. I.

Научная хроника.

Астрономія.

Венера и Уранъ. Лампъ. (*Lamp.* Astr. Nach. № 2817—18. p. 146. 1887).

Авторъ напоминаетъ о томъ, что теперь опять можно наблюдать замѣчательное явленіе, состоящее въ томъ, что и темныя части Венеры, не освѣщенныя солнцемъ, находятся въ матовомъ мерцательномъ свѣтѣ. Онъ критикуетъ существующія на этотъ счетъ гипотезы, между прочимъ, что причиной этому служитъ спутникъ Венеры; послѣ того, какъ Брюссельскій астрономъ *Stroobant* доказалъ несуществованіе такого спутника, объ этомъ не можетъ быть и рѣчи.

Авторъ склоненъ полагать, что это явленіе зависитъ отъ фосфоресценціи поверхности Венеры или же отъ электрическихъ явленій, вызываемыхъ теплыми потоками.

Уранъ показываетъ, какъ и прежде, зеленоватый свѣтъ, переходящій въ срединѣ въ бѣлый. Кромѣ того, онъ показывалъ лѣтомъ довольно значительную приплюснутость. Авторъ въ виду того, что теперь Уранъ лежитъ глубоко подъ горизонтомъ, совѣтуетъ заняться его изученіемъ въ слѣдующее его появленіе. *Бхм.*

♦ Открытіе новыхъ малыхъ планетъ въ 1887 году.

Въ теченіе 1887 года были открыты между Марсомъ и Юпитеромъ слѣдующія планеты:

№	Назв. планеты.	Время открытія		Открывшій	Мѣсто откр.
(265)	Анна	25	Февр.	Palisa.	Вѣна.
(266)	Алина	17	Мая	„	„
(267)	Тирца	27	„	Charlois.	Ницца.
(268)	Адорея	8	Іюня	Borelly.	Марсель.
(269)	———	21	Сент.	Palisa.	Вѣна.
(270)	Анагита	8	Окт.	Peters.	Клинтонъ.
(271)	Пентезилея	13	„	Knorre.	Берлинъ.

Величина (свѣтовая) этихъ планетоидъ лежитъ между 12 и 14, за исключеніемъ (270) 10-й величины *). *Бхм.*

Физика.

Сохраненіе газовъ надъ ртутью. Диксенъ. (*Dixon.* Chem. News. 54. p. 227. 1887).

Авторъ подтвердилъ опытами еще недостаточно изслѣдованный фактъ, что газы могутъ сохраняться надъ вполнѣ чистой ртутью, не диффундируя съ внѣнаходящимся воздухомъ. Но если берется для этого нечистая

---

*) Планета № 272 найдена уже въ концѣ января 1888 г. въ Ниццѣ Charlois.
Прим. ред.

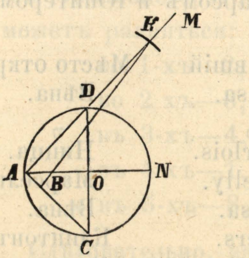
ртуть, или же если на стеклѣ находится роса, что можетъ произойти, если трубку передъ наполненіемъ не нагрѣть, то наступаетъ диффузія. Этотъ фактъ потому замѣчателенъ, что чистая ртуть, какъ кажется на видъ, пристаетъ къ стеклу хуже, чѣмъ смѣшанная съ какимъ нибудь металломъ. *Бхм.*

♦ **Примѣненіе телефона.** Съ помощію обыкновеннаго магнитнаго телефона, какъ сообщаютъ въ Lumière électrique, англійскому капитану *Bayer*'у удалось передавать и воспринимать *подводные сигналы.* Устройство этого прибора состоитъ главнымъ образомъ изъ колокола, въ срединѣ котораго находится телефонъ, который и погружается въ море. Этотъ телефонъ воспринимаетъ сигналы сосѣднихъ кораблей или побережныхъ станцій. Обратно сигналы посылаются такимъ образомъ, что съ палубы при помощи молотка стучатъ по колоколу, причемъ пользуются азбукой Морзе. Аппаратъ назначенъ для разстояній въ 2 километра.—Извѣстно, что *Эдисонъ* тоже давно работаетъ надъ такимъ изобрѣтеніемъ. *Бхм.*

Корреспонденціи.

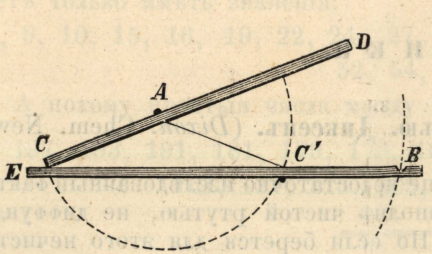
С. Вощининъ (изъ Орла) сообщаетъ намъ слѣдующій пріемъ приближеннаго построенія отношенія окружности къ діаметру. Въ кругѣ радіуса единицы проводимъ два взаимно перпендикулярные діаметра AN и DC. Соединимъ D и C съ A прямыми; на AC отъ A отложимъ $AB = \frac{3}{10}$ радіуса. Изъ точки B, радіусомъ $=3$, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ продолженную прямую AD въ точкѣ K. Тогда $DK = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707488$ съ точностью до 0,0001.

Фиг. 17.

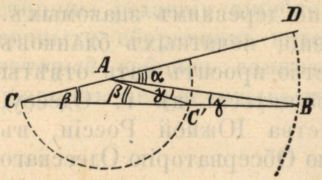


♦ **А. И. Веприцкій** (изъ Карса) прислалъ замѣтку о механическомъ дѣленіи угловъ на три равныя части. Приборъ, проэктируемый г. Веприцкимъ для этой цѣли, очень не сложенъ. Это двѣ линейки CD и BE, связанныя нитью (фиг. 18) AC′. Въ углубленіи B находится карандашъ, который, надавливая на линейку, приводитъ всю систему въ движеніе; линейка BE, удерживаемая нитью, скользитъ о ребро C линейки CD, и карандашъ вычерчивартъ нѣкоторую кривую. Для точности прибора необходимо лишь, чтобы AC, AC′ и C′B были равны между собою, а EC′ была немного больше 2AC.

Фиг. 18



Фиг. 19.



Пусть требуется раздѣлить уголъ DAB$=\alpha$ на три равныя части. Для этого прикладываемъ линейку CD къ одной сторонѣ угла такъ, чтобы точка A находилась въ вершинѣ угла. На продолженіи стороны AD отмѣтимъ точку C и, начертивъ непрерывную кривую, соединяемъ точку C и пересѣченіе кривой съ другой стороной угла прямою BC; тогда уголъ ABC$=\gamma={}^1/_3\alpha$. Въ самомъ дѣлѣ изъ смежныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ ACC' и AC'B имѣемъ $\beta=2\gamma$. Изъ треугольника ABC получимъ: $\alpha=\beta+\gamma=3\gamma$. Откуда: $\gamma={}^1/_3\alpha$.

♦ **П. Бахметьевъ** (изъ Цюриха). „Прошлаго года 19 декабря въ сѣверовосточной части Швейцаріи была страшная мятель; въ нѣсколько минутъ образовывались цѣлые сугробы снѣга. Въ кантанѣ Тургау разразилась среди этой мятели настоящая гроза съ молніей и громомъ. Въ Зулгенѣ молнія ударила въ колокольню, при чемъ произошелъ пожаръ, который съ трудомъ удалось локализировать и спасти такимъ образомъ колокола. Явленіе очень рѣдкое въ это время года.

Разныя извѣстія.

„Императорское Общество Сельскаго Хозяйства южной Россіи предполагаетъ организовать рядъ систематическихъ наблюденій надъ періодическими явленіями въ жизни животныхъ и растеній, въ связи съ общими климатическими условіями. Наблюденія эти не требуютъ никакихъ приборовъ, а потому доступны обширному кругу лицъ; вмѣстѣ съ тѣмъ наблюденія будутъ служить дополненіемъ къ тѣмъ инструментальнымъ записямъ, которыя ведутся на метеорологическихъ станціяхъ юго-запада Россіи. Сельской хозяинъ не можетъ не обращать вниманія на многія явленія природы, такъ какъ отъ нихъ зависитъ его хозяйство; результаты опытности сельскихъ хозяевъ могутъ быть очень полезны для науки, но для этого необходимо, чтобы наблюденія были своевременно и точно записаны. Сравненіе между собою записей многихъ хозяевъ несомнѣнно поведетъ къ любопытнымъ результатамъ. Общество Сельскаго Хозяйства позволяетъ себѣ остановить вниманіе гг. сельскихъ хозяевъ на слѣдующихъ вопросахъ: 1) ходъ погоды, въ связи съ хозяйственными условіями, 2) время нѣкоторыхъ важнѣйшихъ хозяйственныхъ работъ, 3) періодическія явленія въ жизни животныхъ и растеній. Наблюденія тогда только будутъ имѣть научное значеніе, когда они ведутся по одному, строго выработанному плану.“ Въ виду этого Совѣтъ Общества разослалъ недавно программу съ соотвѣтствующими вопросами и выше перепечатаннымъ предисловіемъ.

Сообщаемъ объ этомъ отрадномъ фактѣ нашимъ читателямъ въ предположеніи, что тѣ изъ нихъ, которые живутъ въ районѣ южныхъ губернiй, не откажутся, быть можетъ, способствовать къ привлеченiю къ этимъ наблюденiямъ сельскихъ хозяевъ и живущихъ по деревнямъ знакомыхъ. За всякими справками, свѣдѣнiями и для полученiя печатныхъ бланковъ съ программою и вопросами (на которые Общество проситъ дать отвѣты не позже 1-го Декабря 1888 г.) совѣтуемъ обращаться: въ г. Одессу, въ Императорское Общество Сельскаго Хозяйства Южной Россiи, въ зданiе Общества, или же—въ Метеорологическую Обсерваторiю Одесскаго Университета.

⧫ 24-го минувшаго Февраля скончался въ Москвѣ **Александръ Ѳедоровичъ Малининъ,** директоръ Московскаго Учительскаго Института, одинъ изъ наиболѣе выдающихся русскихъ дѣятелей на педагогическо-математическомъ попрощѣ. Болѣе подробный некрологъ будетъ помѣщенъ въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Вѣстника."

⧫ Съ Апрѣля мѣсяца текущаго года будетъ издаваться въ С.-Петербургѣ *А. А. Ильинымъ* и подъ его редакцiею новый ежемѣсячный журналъ подъ заглавiемъ: **Справочная книжка по общей физикѣ.** Цѣль, которою задалась редакцiя, заключается въ собранiи всего матерiала по физикѣ въ видѣ научныхъ выводовъ и въ составленiи такимъ образомъ энциклопедическаго сборника. Въ дополненiе къ этому будетъ издаваться **Ежегодникъ,** въ который войдутъ: списокъ профессоровъ физики въ университетахъ и высшихъ учебныхъ заведенiй Европы, хроника изобрѣтенiй и изслѣдованiй, библiографiя статей, помѣщенныхъ въ русскихъ и иностранныхъ журналахъ, списокъ привиллегiй и адресъ-календарь наиболѣе извѣстныхъ въ Россiи и заграницею физико-математическихъ мастерскихъ. Годовая цѣна за журналъ (съ 1-го Апрѣля) съ Ежегодникомъ — 6 рублей съ пересылкою. Адресъ редакцiи: С.-Петербургъ, Англiйскiй просп. № 29.

Разсылая свои объявленiя объ изданiи „Справочной книжки по общей физикѣ" и „Ежегодника", редакцiя обращается еще съ просьбою сообщить ей къ Iюню мѣсяцу текущаго года отвѣты на слѣдующiе пункты:

1) Имя, отчество, фамилiя, чинъ, ученая степень и занимаемое мѣсто (профессоромъ, приватъ-доцентомъ, лаборантомъ и наблюдателемъ нашихъ университетовъ и высшихъ учебныхъ заведенiй);

2) Какой отдѣлъ физики преподаетъ, сколько имѣетъ недѣльныхъ уроковъ и какого рода производитъ наблюденiя?

3) Какiя практическiя работы были произведены и предприняты въ истекшемъ году и кѣмъ именно, въ физической лабораторiи учрежденiя?

4) Съ какого года существуетъ каѳедра физики или обсерваторiя?

5) Возможно полный списокъ всѣхъ печатныхъ работъ по физикѣ профессоровъ и приватъ-доцентовъ, а также списокъ всѣхъ диссертацiй за все время существованiя учрежденiя.

Сочувствуя задачамъ новой редакцiи, хотя таковыя и кажутся намъ слишкомъ многосторонними, совѣтуемъ не полагаться на полноту и точность тѣхъ отвѣтовъ, которые редакцiя ожидаетъ получить на вышепоставленные вопросы. Мы думаемъ, что такихъ отвѣтовъ получится крайне мало или даже вовсе не получится, и что ставить изданiе „Ежегодника" въ зависимость отъ доброй воли лицъ постороннихъ и пока еще вовсе незаинтересованныхъ успѣхомъ новаго изданія, было бы со стороны редакціи ошибкою. При составленіи какихъ бы то ни было справочныхъ сборниковъ надежныхъ матеріаломъ можетъ быть только тотъ, который собранъ самимъ составителемъ, въ особенности, если такой сборникъ не расчитываетъ сдѣлаться ежегодникомъ рекламъ.

Задачи.

№ 284. Показать, что избытокъ куба какого нибудь цѣлаго числа надъ самымъ числомъ всегда дѣлится на 3. *Э. К. Ш.*

№ 285. Не употребляя циркуля, найти при помощи линейки и треугольника $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . и вообще $\frac{1}{n}$ данной по длинѣ прямой.

Э. К. Ш.

№ 286. Найти предѣлъ суммы

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\;.\;\;.\;\;.\;+\frac{1}{n^2-1}$$

при возрастаніи n до безконечности. *Э. К. Ш.*

№ 287. Построить четыреугольникъ по даннымъ сторонамъ a, b, c, d, и по углу α, образованному продолженіемъ сторонъ a и c.

Филаретовъ (Спб.)

№ 288. Доказать, что площадь любого четыреугольника равна площади такого треугольника, котораго двѣ стороны соотвѣтственно равны діагоналямъ четыреугольника, а уголъ между ними равенъ взаимному наклоненію тѣхъ-же діагоналей.

NB. Можно дать какъ геометрическое, такъ и тригонометрическое доказательство.

Р. Фогель (Кіевъ).

№ 289. Принимая температуру и влажность воздуха постоянной и не обращая вниманія на незначительное измѣненіе напряженія силы тяжести съ высотою, показать, что по мѣрѣ возрастанія высоты надъ даннымъ мѣстомъ въ ариѳметической прогрессіи, показанія барометра будутъ уменьшаться въ геометрической прогрессіи. Опредѣлить на основаніи этого факта общій видъ формулы, выражающій законъ измѣненія атмосфернаго давленія съ высотою. *Г. Флоринскій.*

№ 290. Три силы представлены по величинѣ и направленію отрѣзками MA, MB, MC; доказать, что:

1) равнодѣйствующая ихъ пройдетъ черезъ центръ тяжести G треугольника ABC, образованнаго соединеніемъ концовъ данныхъ силъ и

2) будетъ равна 3MG;

3) въ случаѣ-же, если конецъ равнодѣйствующей R лежитъ на описанной около треугольника ABC окружности, точка M должна находиться на окружности *девяти точекъ*.

Ип. Пламеневскій (Т. Х. Шура).

Вопросы для учениковъ.

1) Производимъ ли мы работу, когда держимъ въ рукѣ тяжесть неподвижно?

2) Отъ чего самоваръ „поетъ"?

3) Отчего при таяніи снѣга образуются ледяныя сосульки?

4) Отчего солнце передъ дождемъ паритъ?

5) Почему во время морозовъ надъ водою, не покрытою льдомъ, подымается туманъ?

6) Почему вода въ видѣ пѣны и снѣга кажется бѣлой и непрозрачной?

7) Почему въ одной и той-же комнатѣ окна замерзаютъ зимою неодинаково?

8) Отчего матовый стекляный ламповый шаръ просвѣчиваетъ, когда его смочить?

9) Почему при утомленіи зрѣнія, огни кажутся намъ окруженными радужными кругами? *Г. Флоринскій*.

Почему для очистки улицъ (тротуаровъ, рельсовъ конно-желѣзныхъ дорогъ) отъ снѣга ихъ посыпаютъ солью, когда извѣстно, что смѣсь соли со снѣгомъ значительно понижаетъ температуру?

Р. Гойхъ (Харьковъ).

1) Можно ли и на какомъ основаніи измѣнить ходъ стѣнныхъ часовъ съ маятникомъ, измѣняя вѣсъ его чечевицы?

2) Извѣстно, что старинные, такъ называемые *обыгранные* струнные инструменты цѣнятся дороже новыхъ; какая ихъ часть улучшается по мѣрѣ употребленія? Есть-ли такая часть въ обыкновенныхъ рояляхъ?

3) Почему въ однѣхъ лампахъ фитили обгорятъ больше, а въ другихъ меньше (напр. въ спиртовой лампѣ фитиль почти совсѣмъ не обгоряетъ.)

4) На какихъ физическихъ свойствахъ основано употребленіе карандашей, перьевъ, кисточекъ, чернилъ, туши, красокъ и пр. Почему карандашъ изъ свинца или серебра оставляетъ на бумагѣ черный слѣдъ? Почему

грифель на грифельной доскѣ оставляетъ бѣлый слѣдъ? Почему резинка вытираетъ карандашъ? Почему на деревѣ или полотнѣ нельзя писать обыкновенными чернилами (ибо они разливаютъ), а тушью или масляными красками можно?

5) Почему на кускѣ смоченной грифельной доски можно наточить ножикъ, когда сталь несравненно тверже грифеля? На чемъ вообще основанъ принципъ шлифовки? Какъ объяснить шлифовку алмаза алмазомъ, если они оба одинаковой твердости?

6) Если бы зарядить ружье разнокалиберною дробью и выстрѣлить, то какъ, вообще говоря, распредѣлились-бы дробинки во время полета? Если выстрѣлить пулею вертикально вверхъ, то могла ли бы пуля, падая обратно на землю, убить стрѣлявшаго? *Э. К. Ш.*

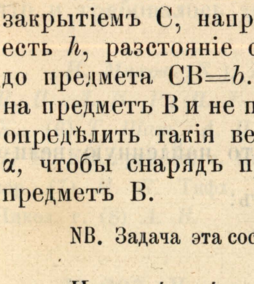
Рѣшенія задачъ.

№ 89. Съ позиціи A обстрѣливается предметъ B, помѣщенный за закрытіемъ C, напр. за крѣпостнымъ валомъ. Пусть высота закрытія есть h, разстояніе отъ A до закрытія $AC=a$ и разстояніе отъ закрытія до предмета $CB=b$. Предполагая, что плоскость стрѣльбы направлена на предметъ B и не принимая во вниманіе сопротивленія воздуха, требуется опредѣлить такія величины для начальной скорости v и угла возвышенія α, чтобы снарядъ пролетѣлъ какъ разъ надъ закрытіемъ C и попалъ въ предметъ B.

NB. Задача эта составляетъ суть такъ называемой въ артиллеріи *перекидной* стрѣльбы.

Пусть t и t_1 времена, по истеченіи которыхъ снарядъ придетъ къ закрытію и къ цѣли. Если бы на снарядъ не дѣйствовала тяжесть, то онъ двигался бы по инерціи по прямой линіи (по направленію начальной скорости v) и равномѣрно, а потому черезъ время t отъ начала движенія прошелъ бы путь $AC'=vt$, (фиг. 20) а чрезъ время t_1—путь $AB'=vt_1$.

Фиг. 20.



Если бы снарядъ не имѣлъ начальной скорости, а подвергался бы только дѣйствію вѣса, то онъ падалъ бы по вертикали внизъ отъ A и во время t трошелъ бы, двигаясь равноускоренно съ ускореніемъ g, путь $AD=\frac{gt^2}{2}$, а во время t_1 путь $\frac{gt_1{}^2}{2}$.

При совокупности этихъ условій, т. е. при начальной скорости и при дѣйствіи вѣса, положеніе снаряда найдемъ, на основаніи правила о параллелограмѣ перемѣщеній, какъ четвертую вершину параллелограма, три вершины котораго суть A, D и C'. Поэтому

$$C'C'=AD=\frac{gt^2}{2}.$$

Точно также найдемъ, что

$$BB'=\frac{gt_1^2}{2}.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника ACC' найдемъ

$$AC=AC'\mathrm{Cos}\alpha=(C'D'+D'C)\mathrm{Cotg}\alpha$$

или,

$$a=vt\mathrm{Cos}\alpha=\left(\frac{gt^2}{2}+h\right)\mathrm{Cotg}\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Изъ треугольника ABB' такъ же найдемъ

$$a+b=vt_1\mathrm{Cos}\alpha=\frac{gt_1^2}{2}\ \mathrm{Cotg}\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (2)$$

Раздѣливъ (1) на (2), имѣемъ:

$$\frac{a-h\mathrm{Cot}\alpha}{a+b}=\frac{t^2}{t_1^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

и

$$\frac{a}{a+b}=\frac{t}{t_1},$$

тогда, замѣняя въ (3) отношеніе $\frac{t}{t_1}$ чрезъ только что найденную величину, мы опредѣлимъ уголъ α. Именно, мы получимъ:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{h(a+b)}{ab}.$$

Уравненіе (2) даетъ намъ

$$v=\frac{a+b}{t_1\mathrm{Cos}\alpha}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

гдѣ

$$t_1=\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}\mathrm{tg}\alpha}.$$

Помня, что

$$\mathrm{Cos}^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

мы замѣнимъ въ выраженіи (4) t_1 и $\mathrm{Cos}\alpha$ чрезъ величину $\mathrm{tg}\alpha$. Тогда, послѣ всѣхъ сокращеній, находимъ:

$$v=\sqrt{\frac{g[a^2b^2+h^2(a+b)^2]}{2hab}}.$$

Вѣрныя, но основанныя на свойствахъ параболы, а не элементарныя рѣшенія прислали: кадетъ 7 кл. Симб. кад. корп. *В. Б—ій* и уч. 7 кл. Тул. г. *Н. И.*

№ 199. Доказать, что если сумма двухъ дробей равна единицѣ, то квадратъ первой, сложенный со второю, равенъ квадрату второй, сложенному съ первою.

Пусть данныя дроби будутъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$; по условію имѣемъ

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1.$$

Умножимъ обѣ части равенства на разность этихъ дробей, тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

отсюда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{c}{d}=\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{a}{b}$$

что и требовалось доказать.

И. Маховъ (Х.), *Веприцкій* (Карсъ). Ученики: Кіево-Печер г. (4) *М. Ф.*, Черн. г. *В. П*, *Л. И. Р.*, *П. Л.*, (6) *В. М* (5) *М. М.* Варш. р уч. (3) *Э. М.* Курск. г. (5) *В. Х.*, (6) *Т. Шат.*, *А. П.* Нов. Сѣв. г. (?) *П. П.*, (7) *С. В*, (8) *А. Ч.* Мог.-Под. г. (6) *Я. И.* Екатериносл. г. (5) *М. Д.* Кіев. I г. (7) *В. Б.* Варш. р. уч. (3) *Я. Ф.* Вор. кад. кор. (7) *И. К.* Тифл. р. уч. (7) *М. К.* Астр. г. (8) *И. К.* Кіев. р. у. (5) *А. К.* Никол. г. (8) *А. В.*

№ 207. Учитель физики подарилъ всему классу, въ которомъ было 21 учениковъ, 8 метровъ магніевой ленты для освѣщенія, съ тѣмъ условіемъ, чтобы ученики раздѣлили ее между собою поровну при помощи простого аршиннаго маштаба, съ отмѣченными на немъ цѣлыми вершками и дюймами. Какой кусокъ ленты долженъ получить каждый ученикъ?

1 метръ$=22\frac{1}{2}$ вершкамъ; 8 м. составятъ 180 вершковъ. Слѣдовательно каждый ученикъ долженъ получить $\frac{180}{21}=\frac{60}{7}$ в. ленты, т. е. $8\frac{4}{7}$ вершк.; но каждые 4 вершка$=7$ дюймамъ, а потому $\frac{4}{7}$ вершка$=1$ дюйму. Значитъ каждому ученику надо отрѣзать 8 верш.$+1$ дюймъ (или 15 дюймовъ) ленты.

А. Колтановскій (Немировъ), *Веприцкій* (Карсъ). Вят. р. уч. (6) *И. П.*

Отвѣты редакціи.

Сотрудникамъ, приславшимъ замѣтки о несостоятельности доказательства Картона, изложеннаго въ статьѣ: „О суммѣ угловъ треугольника" въ № 31 „Вѣстника". Пусть коротенькая, но весьма цѣнная замѣтка Г. Соллертинскаго о томъ-же вопросѣ, помѣщенная въ настоящемъ №, послужитъ оправданіемъ нашего нежеланія печатать ранѣе полученныя разсужденія о доказательствѣ Картона. Читатели сами теперь могутъ убѣдиться, что рѣшеніе этого вопроса далеко не такъ просто, какъ многіе изъ нихъ полагали.

Студенту (Моск. ун.), автору замѣтки, относящейся къ такъ называемому *послѣднему предложенію Фермата.* Ваше доказательство невозможности рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^{4p}+y^{4p}=z^{4p}$ основано на невѣрномъ положеніи: изъ того факта, что уравненіе

$$x^2+y^2=z^2$$

удовлетворяется значеніями: $x=2mn$; $y=m^2-n^2$; $z=m^2+n^2$, еще нельзя дѣлать обратнаго заключенія, т. е. при $y=m^2-n^2$ не всегда $x=2mn$. Напр. при $y=12=4^2-2^2$ имѣемъ:

$$5^2+12^2=13^2; \qquad 16^2+12^2=20^2$$
$$9^2+12^2=15^2; \qquad 35^2+12^2=37^2$$

и изъ этихъ 4-хъ рѣшеній только одно третье: ($x=16=2.4.2$) удовлетворяетъ Вашему положенію. Вообще число возможныхъ при данномъ $y=m^2-n^2$ рѣшеній зависитъ отъ того, сколькими способами можно удовлетворить равенству

$$y^2=(z+x)(z-x),$$

что въ свою очередь зависитъ отъ дѣлителей числа y^2.

Положеніе Фермата о невозможности рѣшенія въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія

$$x^m+y^m=z^m$$

при $m>2$, до настоящаго времени еще вообще не доказано; вопросъ этотъ относится къ наиболѣе труднымъ въ теоріи чиселъ. Кажется, Куммеру удалось отчасти доказать справедливость этого положенія когда m есть число простое, но и то за исключеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ; (именно, исключая $m=37$, $m=59$, $m=67$)

Студенту (Варш. ун.), автору статьи: „Безконечный рядъ опредѣляющій π." Способъ, при помощи котораго Вы даете рядъ для вычисленія π, лежитъ въ основаніи интегральнаго вычисленія, а потому не представляетъ собою ничего новаго и оригинальнаго. Въ нѣкоторыхъ учебникахъ по высшей математикѣ можно встрѣтить аналогичные пріемы для вычисленія π.

Студенту (Кіевск. ун.), автору письма за подписью *Учащійся.* Вы имѣли храбрость сознаться въ непониманіи того, чего не понимаютъ очень многіе. Это весьма утѣшительный признакъ, и мы бы съ удовольствіемъ разъяснили затрудняющіе Васъ вопросы, если бы...... для этого не потребовалось написать цѣлой книги. Тутъ-же можемъ только посовѣтовать пройти съизнова курсъ элементарной механики, а для рѣшенія сомнѣній относительно *наименованій* обратиться къ такимъ сочиненіямъ какъ напр. „Объ абсолютныхъ единицахъ" пр. О. Хвольсона, или „Единицы и физическія постоянныя" Эверетта (пер. Вербицкаго и Жеребятьева).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 18 Марта 1888 года.
Типографія И. Н. Кушнерева и К°, Елисаветинская улица, домъ Михельсона.

ИЗДАНІЯ БЫВШЕЙ РЕДАКЦІИ
„ЖУРНАЛА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“,
основаннаго въ 1884 г. Проф. **В. ЕРМАКОВЫМЪ**:

		ЦѢНА СЪ ПЕР.
1)	Комплектъ 18-и №№ „Журн. Эл. Мат.“ за $188^4/_5$ уч. г.	4 р. 40 коп.
2)	Комплектъ 18-и №№ „Журн. Эл. Мат.“ за $188^5/_6$ уч. г.	4 „ 40 „
3)	Основы ариѳм. Е. Коссака. Пер. *И. Красовскаго.* 1885 г.	— 55 „
4)	Рѣчь Клаузіуса „Связь между великими дѣятелями природы“ Пер. *И. Красовскаго.* 1885 г.	— 25 „
5)	Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ, рѣшаемые посредствомъ уравненій 2-ой ст. Бріо. Пер. *И. Красовскаго.* 1886 г.	— 45 „
6)	Электрическіе аккумуляторы. *Э. Шпачинскаго.* 1886 г.	— 55 „

ИЗДАНІЯ РЕДАКЦІИ
„ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ и ЭЛЕМ. МАТЕМАТИКИ“
въ хронологическомъ порядкѣ:

1)	Ортоцентрическій треугольникъ. *Н. Шимковича.* 1886 г.	— 15 „
2)	Ученіе о логариѳмахъ въ нов. излож. *В. Морозова.* 1886 г.	— 15 „
3)	Выводъ формулы для разложенія въ рядъ логариѳмовъ. *Г. Флоринскаго.* 1886 г.	— 15 „
4)	Комплектъ 12-и №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^6/_7$ уч. г. (I-й семестръ).	2 „ 50 „
5)	Одинадцатая аксіома Эвклида. Пр. *В. Ермакова.* 1887 г.	РАСПРОДАНО.
6)	Солнце. Составилъ по Секки и др. источникамъ. *Н. Конопацкій.* 1887 г.	РАСПРОДАНО.
7)	Методы рѣшеній ариѳмет. задачъ съ приложеніемъ 50 тип. задачъ. *И. Александрова.* 1887 г.	РАСПРОДАНО.
8)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 2-ое полугодіе $188^6/_7$ уч. г. (II-й семестръ).	2 „ 50 „
9)	О землетрясеніяхъ. *Э. Шпачинскаго.* (въ пользу жителей города Вѣрнаго) 1887 г.	— 50 „
10)	Опредѣленіе теплоемкости тѣла по способу смѣшенія при постоянной температурѣ. Пр. *Н. Гезехуса.* 1887 г. .	— 5 „
11)	Простой способъ опредѣленія высоты плотныхъ кучевыхъ облаковъ. *Г. Вульфа.* 1887 г.	— 5 „
12)	Формула простого маятника. Элем. геометрическій и точный выводъ ея. Пр. *Н. Слугинова.* 1887 г.	— 5 „
13)	Методы рѣшеній ариѳм. задачъ съ приложеніемъ 65 тип. задачъ. *И. Александрова.* Изданіе 2-ое пересм. и дополенное. 1887 г.	— 35 „
14)	Изъ исторіи ариѳметики. Умноженіе и дѣленіе. *І. Клейбера.* 1888 г.	— 20 „
15)	Комплектъ 12 №№ „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ (сброшюр. въ книгу) за 1-ое полугодіе $188^7/_8$ уч. г. (III-й семестръ)	2 „ 50 „
16)	О формулѣ P=MG, съ приложеніемъ 26 задачъ. Пр. *О. Хвольсона.* 1888 г.	— 20 „
17)	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза. *О. Страуса.* 1888 г.	— 5 „

Адресъ редакціи: Кіевъ, Нижне-Владимірская № 19.

СОДЕРЖАНІЕ № 42.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ“

(съ 20-го августа 1886 года)

выходитъ книжками настоящаго формата, не менѣе 24 стр. каждая, съ рисунками и чертежами въ текстѣ, **три раза въ мѣсяцъ,** исключая каникулярнаго времени, по 12 №№ въ полугодіе, считая таковыя съ 15-го января по 15-ое мая и съ 20-го августа по 20-ое декабря.

Подписная цѣна съ пересылкою:

на годъ—всего 24 №№ . . . . . **6 рублей** | **на одно полугодіе**—всего 12 №№—**3 рубля**

Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Журналъ издается по полугодіямъ (семестрамъ), и на болѣе короткій срокъ подписка не принимается.

Текущіе №№ журнала отдѣльно не продаются. Нѣкоторые изъ разрозненныхъ №№ за истекшія полугодія, оставшіеся въ складѣ редакціи, продаются отдѣльно по 30 коп. съ пересылкою.

Комплекты №№ за истекшія полугодія, сброшюрованные въ отдѣльные тома, по 12-ти №№ въ каждомъ, продаются по 2 р. 50 к. за каждый томъ (съ пересылкою).

Книжнымъ магазинамъ 20% уступки.

За перемѣну адреса приплачивается всякій разъ 10 коп. марками.

Въ книжномъ складѣ редакціи, кромѣ собственныхъ изданій (всегда помѣченныхъ монограмой издателя) и изданій бывшей редакціи „Журнала Элементарной Математики“ (Проф. В. П Ермакова), имѣются для продажи сочиненія многихъ русскихъ авторовъ, относящіяся къ области математическихъ и физическихъ наукъ. Каталоги печатаются на оберткѣ журнала.

На собственныхъ изданіяхъ книгъ и брошюръ редакція дѣлаетъ 30% уступки книжнымъ магазинамъ и лицамъ, покупающимъ не менѣе 10-ти экземпляровъ.

На оберткѣ журнала печатаются

ЧАСТНЫЯ ОБЪЯВЛЕНІЯ

о книгахъ, физическихъ, химическихъ и др. приборахъ, инструментахъ, учебныхъ пособіяхъ и пр.

на слѣдующихъ условіяхъ:

За всю страницу . . . . 6 руб.	За $1/3$ страницы . . . . 2 руб
„ $1/2$ страницы . . . . 3 руб.	„ $1/4$ страницы . . . . 1 р. 50 к.

При повтореніи объявленій взымается всякій разъ половина этой платы. Семестровыя объявленія—печатаются съ уступкою по особому соглашенію.

Объявленія о новыхъ сочиненіяхъ или изданіяхъ, присылаемыхъ въ редакцію для рецензіи или библіографическихъ отчетовъ, печатаются одинъ разъ безплатно.