№ 23.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

Опредѣленіемъ Учен. Ком. Мин. Нар. Просв.

РЕКОМЕНДОВАНЪ

для пріобрѣтенія: а) въ фундаментальныя и ученическія библіотеки мужскихъ гимназій, прогимназій и реальныхъ училищъ; б) въ библіотеки учительскихъ институтовъ, семинарій, женскихъ гимназій и городскихъ училищъ.

2-го семестра № 11-й.

Подписная цѣна съ пересылкой: 6 руб. въ годъ, 3 руб. въ семестръ.

Адресъ Редакціи: Кіевъ, Нижне-Владимірская, д. № 19.

КІЕВЪ.
Типографія Е. Т. Керер, аренд. Н. Пилющенко и С. Бродовскимъ.
1887.

СОДЕРЖАНІЕ

№ 23.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 23.

II Сем. 5 Мая 1887 г. № 11.

О замерзаніи растворовъ.

Профессора П. Алексѣева.

Уже давно было замѣчено, что если въ какой либо жидкости растворить какое нибудь вещество, то температура замерзанія жидкости понижается. Въ 1788 году Блэгденъ нашелъ, что пониженіе температуры замерзанія пропорціонально количеству вещества, раствореннаго въ жидкости. Затѣмъ изслѣдованія Блэгдена были позабыты, и въ 1861 году Рюдорфъ вторично открылъ этотъ законъ, принимаемый и нынѣ съ нѣкоторыми ограниченіями. Съ 1878 года изслѣдованіемъ замерзанія растворовъ занялся Рауль и пришелъ къ весьма важнымъ результатамъ, показавъ, какъ на основаніи опытныхъ данныхъ можно опредѣлить частичный вѣсъ различныхъ соединеній. Это имѣетъ весьма большое значеніе, такъ какъ весьма не рѣдки случаи, гдѣ обыкновенный способъ опредѣленія вѣса частицъ (по плотности пара) не примѣнимъ, вслѣдствіе разложенія соединеній при нагрѣваніи.

Сначала скажемъ нѣсколько словъ о замерзаніи растворовъ вообще. Замерзаніе чистыхъ жидкостей существенно отличается отъ замерзанія растворовъ, т. е. жидкостей, содержащихъ растворенныя вещества.

Если жидкость не содержитъ въ растворѣ постороннихъ веществъ, то при постепенномъ пониженіи температуры ея наступаетъ время, когда жидкость начинаетъ замерзать. Съ этого времени температура жидкости не измѣняется до тѣхъ поръ, пока она вся не обратится въ твердое состояніе. Здѣсь температура замерзанія постоянна. Не то замѣчается въ слабыхъ растворахъ; сперва начинаетъ затвердѣвать чистая жидкость, концентрація раствора увеличивается, температура замерзанія понижается; такой процессъ продолжается до тѣхъ поръ, пока не затвердѣетъ весь растворъ. Здѣсь температура замерзанія раствора непостоянна и все время понижается. Температурой замерзанія раствора называется температура, при которой это замерзаніе начинается. Пониженіемъ температуры замерзанія раствора называется разность температуръ замерзанія раствора и чистаго растворителя.

Наблюденія температуры замерзанія раствора производятся очень точнымъ термометромъ, шкала котораго раздѣлена на 50-ыя доли градуса; растворъ все время перемѣшивается и охлажденіе производится достаточно медленно (приблизительно на 1^0 въ 10 минутъ). Когда температура испытуемаго раствора опустится на 2 или 4 десятыя градуса ниже точки замерзанія, въ растворъ бросаютъ крупинку уже отвердѣвшаго раствора. Сейчасъ же растворъ начинаетъ замерзать. Въ то же время температура, указываемая термометромъ, нѣсколько повышается и держится неизмѣнной довольно продолжительное время, послѣ чего опять начинаетъ опускаться. Вотъ эта то температура, остающаяся довольно долго неизмѣнной, т. е. температура, при которой замерзаніе раствора начинается, и будетъ температурой замерзанія раствора. Она можетъ быть опредѣлена съ большою точностью. Также точно нужно опредѣлить температуру замерзанія чистаго растворителя. Разность этихъ двухъ температуръ даетъ намъ c—пониженіе температуры замерзанія раствора; k—отношеніе пониженія температуры замерзанія c къ p, количеству вещества (безводнаго) во 100 граммахъ раствора—называется коэффиціентомъ пониженія, соотвѣтствующимъ данному веществу. Умножая k на m т. е. на частичный вѣсъ растворeннаго вещества, получаемъ такъ называемое частичное пониженіе.

Изслѣдованія Рауля (съ 1882 г.) показали, что частичное пониженіе для органическихъ веществъ, растворенныхъ въ водѣ, заключается между довольно тѣсными предѣлами и равно среднимъ числомъ 19; такимъ образомъ имѣемъ $k.m=19$; отсюда $m=\frac{19}{k}$.

Для раствора въ уксусной кислотѣ частичное пониженіе очень близко къ 39. Поэтому m частичный вѣсъ растворeннаго вещества равенъ $\frac{39}{k}$, гдѣ k коэффиціентъ пониженія. Для раствора въ бензолѣ частичное пониженіе около 49.

Ограничимся однимъ примѣромъ. Коэффиціентъ пониженія бензоловаго раствора одного органическаго соединенія [1]), плотность пара котораго не можетъ быть опредѣлена, найденъ равнымъ 0,129, а такъ какъ $m=\frac{49}{0{,}129}$, то для частичнаго вѣса получаемъ 379, что и показываетъ, что простѣйшая формула этого соединенія $C^{11}H^{13}NO^2$ должна быть удвоена, такъ какъ для формулы $C^{22}H^{26}N^2O^4$ вычисляемъ частичный вѣсъ 382, а для первой лишь 191.

Въ заключеніе замѣтимъ, что недавно тотъ-же Рауль показалъ, что для опредѣленія частичнаго вѣса различныхъ соединеній можно воспользоваться сравненіемъ упругости пара эфирнаго раствора f' съ упругостью пара эфира f, такъ какъ частичное пониженіе упругости A, равное $\frac{f-f'}{f}\times\frac{m}{p}$ (гдѣ m частичный вѣсъ, а p вѣсъ вещества растворенпаго во 100 грам. эфира) колеблется въ весьма тѣсныхъ предѣлахъ: именно среднимъ числомъ оно равно 0,71. Такъ для вышеупомянутаго органическаго соединенія при $m=382$, $A=0{,}68$.

Интересующихся подробностями отсылаемъ къ оригинальнымъ статьямъ Рауля (Raoult): Conférences faites à la societé chimique de Paris en 1883—1884—1885—1886. Paris 1886; 139—163 p.—Revue Scientifique 1886. 1-er sémestre 673—683 p.

Температура и ея измѣреніе.

Проф. Н. Шиллера.

(*Окончаніе*) [2]).

Соотношеніе между объемомъ v_0 какого нибудь тѣла, при температурѣ таянія льда, и объемомъ v_t того-же тѣла при иной температурѣ t^0, отмѣренной по воздушному термометру, выражается обыкновенно съ достаточною точностію нижеслѣдующею формулою:

$$v_t=v_0(1+kt), \tag{4}$$

гдѣ k есть коэффиціентъ кубическаго расширенія тѣла отъ тепла. Насколько хватаютъ матеріалы опытныхъ изслѣдованій, можно сказать, что

---

[1]) Метиловаго эфира азокуминовой кислоты.

[2]) См. „Вѣстникъ“ № 22.

для всѣхъ тѣлъ, за исключенiемъ газовъ (и то не абсолютно) коэффицiентъ k не остается постояннымъ для разныхъ температуръ, но измѣняется, возрастая въ большинствѣ случаевъ съ температурою. Такимъ образомъ, вычисляя по форм. (4) объемы даннаго тѣла для различныхъ температуръ, мы должны брать разные множители k; отличая эти послѣднiе значкомъ t, мы должны формулу (4) представить въ видѣ:

$$v_t = v(1 + k_t t). \qquad (4')$$

Предположимъ теперь, что устроенъ термометръ, основанный на тепловомъ расширенiи какого нибудь тѣла; съ помощiю формулъ (3) и (4′) мы можемъ рѣшить, какому числу градусовъ n, отсчитанныхъ по новому термометру, соотвѣтствуетъ температура t^0, по воздушному термометру, ибо мы будемъ имѣть:

$$n^0 = \frac{v_t - v_0}{\frac{1}{100}(v_{100} - v_0)} = \frac{k_t}{k_{100}} t^0; \qquad (5)$$

отсюда видимъ, что показанiя такого термометра тогда совпадаютъ съ воздушнымъ, когда коэффицiентъ расширенiя не мѣняется съ температурою, т. е. когда $k_t = k_{100}$, что имѣетъ мѣсто приблизительно только для газовъ.

На обыкновенныхъ ртутныхъ термометрахъ температура различается по объемамъ ртути, выходящей изъ резервуара термометра и размѣщающейся по различнымъ длинамъ термометрической трубки. Зная коэффицiенты кубическаго расширенiя ртути и стекла для разныхъ температуръ (по воздушному термометру), легко найти соотношенiе между показанiями ртутнаго и воздушнаго термометровъ. Обозначимъ черезъ v_0 объемъ при 0^0 резурвуара термометра и той части трубки, которая остается наполненною ртутью при температурѣ таянiя льда; черезъ k_t и α_t обозначимъ коэффицiенты кубическаго расширенiя ртути и стекла при температурѣ t^0 (возд. терм.). Тогда объемъ ртути, выходящей изъ границъ вышеупомянутаго объема резервуара и трубки при 100^0, будетъ:

$$v_0(1 + k_{100}\,100) - v_0(1 + \alpha_{100}\,100) = v_0(k_{100} - \alpha_{100})\,100. \qquad (6)$$

Сотая часть этого объема, соотвѣтствующая сотой части объема трубки, отъ дѣленiя 0 до дѣленiя 100, при 100^0, будетъ: $v_0(k_{100} - \alpha_{100})$. Вмѣстимость той-же части объема трубки при какой нибудь температурѣ t_0 (по возд. терм.) будетъ

$$v_0(k_{100} - \alpha_{100}) \frac{1 + \alpha_t t}{1 + \alpha_{100} 100}, \qquad (7)$$

и будетъ представлять измѣненіе, соотвѣтствующее величинѣ одного градуса при температурѣ t. Объемъ ртути, выходящей за дѣленіе 0, при температурѣ t, будетъ

$$v_0(k - \alpha_t)\,t. \tag{8}$$

Раздѣливъ этотъ объемъ на (7), получимъ число градусовъ n отъ нуля по ртутному термометру, при температурѣ t воздушнаго термометра; т. е. будемъ имѣть:

$$n = t \cdot \frac{k_t - \alpha_t}{k_{100} - \alpha_{100}} \cdot \frac{1 + 100\,\alpha_{100}}{1 + \alpha_t t}. \tag{9}$$

Въ ртутномъ вѣсовомъ термометрѣ взвѣшивается ртуть, вылившаяся изъ резервуара при разныхъ температурахъ; по полученнымъ вѣсовымъ количествомъ различаются температуры. Для теоретическаго сравненія такого термометра съ воздушнымъ, обозначимъ черезъ v_0 объемъ резервуара, наполненнаго ртутою при 0^o, черезъ k_t и α_t—коэффиціенты расширенія ртути и резервуара. Тогда объемъ ртути, выливающейся изъ резервуара при 100^0, будетъ, какъ въ (6): $v_0(k_{100} - \alpha_{100})\,100$. Если D_0 будетъ плотность ртути при 0^0, то вѣсъ упомянутаго вылившагося объема (въ граммахъ) будетъ

$$\frac{D_0 v_0 (k_{100} - \alpha_{100}) \cdot 100}{1 + 100\,k_{100}}. \tag{10}$$

Вѣсъ ртути, выливающейся при t^0 (по возд. терм.), будетъ

$$\frac{D_0 v_0 (k_t - \alpha_t)\,t}{1 + k_t t}. \tag{11}$$

Дѣля (11) на сотую часть (10), получаемъ число градусовъ n отъ нуля по вѣсовому термометру, соотвѣтствующее t^0 воздушнаго термометра:

$$n^0 = t\,\frac{k_t - \alpha_t}{k_{100} - \alpha_{100}} \cdot \frac{1 + k_{100} \cdot 100}{1 + k_t \cdot t}. \tag{12}$$

Соотношеніе между n и t будетъ другое, если мы будемъ измѣрять не вѣсъ вылившейся ртути, но его отношеніе къ вѣсу ртути, оставшейся въ резервуарѣ. Упомянутое отношеніе при температурѣ t будетъ:

$$\frac{D_0 v_0 (k_t - \alpha_t)\,t}{1 + k_t t} : \left(D_0 v_0 - \frac{D_0 v_0 (k_t - \alpha_t)\,t}{1 + k_t t}\right) =$$

$$= \frac{(k_t - \alpha_t)\,t}{1 + \alpha_t t}. \tag{13}$$

Дѣля (13) на сотую долю подобнаго-же отношенія, вычисленнаго для температуры въ 100°, получаемъ показанiе вѣсового термометра n', отсчитанное по другому способу:

$$n' = t\,\frac{k_t - \alpha_t}{k_{100} - \alpha_{100}} \cdot \frac{1 + 100\,\alpha_{100}}{1 + \alpha_t t}\,, \qquad (14)$$

одинакое съ показанiемъ закрытаго ртутнаго термометра, съ трубкою и резервуаромъ изъ вещества, имѣющаго коэффицiентъ кубическаго расширенiя α_t.

Для того чтобы уяснить себѣ способъ отсчитыванiя температуръ на другомъ примѣрѣ, представимъ себѣ еще термометръ, основанный на измѣненiи тона струны, съ измѣненiемъ температуры этой послѣдней. Вообразимъ себѣ нѣкоторую металлическую проволоку, растянутую между двумя колками, какъ на гитарѣ или фортепiано. При разныхъ температурахъ длина и вѣсъ проволоки остаются, очевидно, неизмѣнными, если устроить такъ, чтобы измѣненiе температуры не имѣло влiянiя на доску, въ которой укрѣплены колки. Отъ нагрѣванiя тонъ проволоки будетъ понижаться, и по разнымъ ея тонамъ можно, слѣдовательно, судить о разныхъ ея температурахъ. Обозначая черезъ N_0, N_{100}, N_t числа колебанiй (положимъ, простыхъ) проволоки соотвѣтственно для температуръ таянiя льда, кипѣнiя воды и измѣряемой температуры, мы найдемъ число градусовъ n по нашему термометру отъ нуля, соотвѣтствующее упомянутой температурѣ, слѣдующимъ образомъ, согласно съ формулою (1):

$$n = \left(N_t - N_0\right) : \frac{N_{100} - N_0}{100}\,. \qquad (15)$$

Чтобы сравнить это число градусовъ съ соотвѣтствующимъ показанiемъ воздушнаго термометра при той-же температурѣ, обратимъ вниманiе на то, что съ повышенiемъ температуры ослабляется натяженiе проволоки такъ, какъ будто-бы съ колка была спущена часть проволоки, соотвѣтствующая удлинненiю этой послѣдней отъ нагрѣванiя. Если мы обозначимъ черезъ β_t коэффицiентъ линейнаго расширенiя проволоки для температуры въ t^0, по газовому термометру, то удлиненiе проволоки при этой температурѣ должно бы представляться частiю $\beta_t t$ ея длины при 0°; слѣдовательно, на такую часть должно теперь уменьшиться ея растяженiе. Извѣстно, что вообще для растяженiя проволоки на опредѣленную часть ε ея длины потребна на каждую единицу площади ея сѣченiя растягивающая сила величиною въ $E\varepsilon$, при чемъ E есть такъ называемый Юнговъ модуль упругости даннаго вещества; сила, которая, для упомянутой цѣли, должна дѣйствовать на все сѣченiе q проволоки, будетъ

$qE\varepsilon$. Если растяженіе проволоки уменьшится на $\beta_t t$, то растягивающа сила, обусловленная сопротивленіемъ колковъ, уменьшится на величину $q\,E\,\beta_t t$, если мы пренебрежемъ соотвѣтствующимъ измѣненіемъ площади сѣченія. Итакъ положимъ, что натягивающая сила проволоки при 0° была P, что длина и масса проволоки суть l и m; тогда, на основаніи извѣстной формулы:

$$N_0 = \sqrt{\frac{P}{m.\,l.}}; \tag{16}$$

а на основаніи предъидущаго разсужденія:

$$N_t = \sqrt{\frac{P - qE\beta t}{l\,m}}, \tag{17}$$

ибо длина и масса звучащей части проволоки остаются неизмѣнными. Приведенное равенство даетъ намъ далѣе:

$$N^2{}_t = \frac{P}{l\,m} - \frac{qE\beta t}{l\,m} = N^2{}_0 - \frac{qE\beta t}{l\,m} = N^2{}_0\left(1 - \frac{qE\beta t}{N^2{}_0\, l\, m}\right),$$

при чемъ мы удерживаемъ для простоты нѣкоторой среднiй для всѣхъ температуръ коэффиціентъ расширенія β. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$N_t = N_0 \sqrt{1 - \frac{qE}{N^2{}_0\, l\, m}\beta t}. \tag{18}$$

Называя множитель $qE{:}N^2{}_0\, l\, m$ черезъ A, мы будемъ имѣть слѣдующее выраженіе для величины измѣненія числа колебаній, соотвѣтствующаго одному градусу по новому термометру:

$$\frac{N_{100} - N_0}{100} = \frac{N_0}{100}\left(\sqrt{1 - 100.\,A} - 1\right),$$

и слѣдующее выраженіе для искомаго числа n градусовъ новаго термометра при температурѣ t:

$$n = \frac{\sqrt{1 - At} - 1}{\sqrt{1 - 100\,A} - 1}.\,100. \tag{19}$$

Положимъ, напримѣръ, что нашъ звуковой термометръ представляется въ видѣ латунной проволоки, имѣющей массу $m=1$ гр., длину $l=50$ цент., площадь сѣченія $q=0{,}002$ цент.^{2} (діаметръ приблизительно въ $^1/_2$ милл.) и натянутую такимъ образомъ, что она даетъ тонъ въ 500 простыхъ колебаній въ секунду при 0°. Если мы примемъ, что Юнговъ омдуль для латуни есть 10^{12} дин: $цм.^2$ и коэффиціентъ линейнаго расширенія отъ тепла есть 0,00002, то мы найдемъ, что та-же проволока, между тѣми-же колками, будетъ при 100^0 давать тонъ въ 412,3 простыхъ колебаній; слѣдовательно каждое убываніе числа колебаній нашей проволоки на 0,877 прост. колеб. должно быть принято соотвѣтствующимъ повышенію температуры на одинъ градусъ по нашему термометру. Но конечно то-же убываніе не будетъ соотвѣтствовать измѣненію температуры на такое-же число градусовъ по воздушному термометру. Вычисляя величины n формулы (19) для показаній воздушнаго термометра въ $t=0$, $t=10$, $t=50$, $t=100$, мы найдемъ соотвѣтственно для n слѣдующія величины:

$$t = 0, \quad 10, \quad 50, \; 100$$
$$n = 0, \; 9.08, \; 47.6, \; 100.$$

Основывая нашъ способъ различенія температуръ на тепловыхъ свойствахъ разныхъ тѣлъ, зависящихъ не только отъ температуръ этихъ послѣднихъ, но и отъ ихъ другихъ специфическихъ свойствъ, мы будемъ имѣть, очевидно, столько термометрическихъ системъ или *скалъ*, сколько будетъ у насъ на лицо отличныхъ другъ отъ друга тепловыхъ явленій и сколько будетъ группъ тѣлъ, для которыхъ каждое изъ упомянутыхъ явленій будетъ отличаться своими особенностями. Предсказать напередъ, какое соотношеніе будетъ между показаніями двухъ какихъ нибудь термометровъ, основанныхъ на тепловыхъ явленіяхъ двухъ различныхъ группъ, мы можемъ тогда, когда всѣ такія явленія заранѣе изслѣдованы. Такая *относительность* различныхъ термометрическихъ скалъ заставляетъ насъ задаваться вопросомъ, не существуетъ-ли какое нибудь тепловое явленіе, общее для всѣхъ тѣлъ и независимое отъ другихъ спеціальныхъ свойствъ этихъ тѣлъ, кромѣ различія ихъ температуръ. Если-бы такое явленіе подлежало нашимъ измѣреніямъ, то эти послѣднія различались-бы другъ отъ друга только постольку, посколько различались-бы соотвѣтственныя температуры, но не тѣла; а слѣдовательно на основаніи подобныхъ измѣреній мы могли-бы построить скалу температуръ, которая была-бы *абсолютна*, т. е. не зависѣла-бы отъ спеціальныхъ свойствъ термометровъ. Механическая теорія тепла даетъ намъ способъ установить *абсолютную скалу* температуръ, которая имѣла-бы выше намѣченныя свойства. Именно, эта теорія учитъ насъ, что, нагрѣвая и охлаждая послѣдовательно какое нибудь тѣло, можно произвести нѣкоторую работу, и что произведенная такимъ образомъ работа, при опредѣленномъ способѣ смѣны нагрѣванія и охлажденія, зависитъ только отъ температуръ, соотвѣтствующихъ процессамъ нагрѣванія и охлажденія, не завися отъ свойствъ употребляемаго для этой цѣли тѣла. Такимъ образомъ, измѣряя различныя величины упомянутой работы, мы можемъ судить только объ однѣхъ температурахъ тѣлъ, независимо отъ остальныхъ свойствъ этихъ послѣднихъ. Полное понятіе объ измѣреніи температуръ по обсолютной скалѣ мы можемъ себѣ составить, опредѣливши предварительно понятіе о количествѣ тепла и объ эквиваленціи тепла и работы, о чемъ мы и предполагаемъ дать разъясненіе въ послѣдующихъ статьяхъ.

Разложеніе корней квадратнаго уравненія въ непрерывную дробь.

(Отвѣтъ на тему, предложенную въ № 15 «Вѣстн.»).

Ученика 8-го кл. Екатеринославской гимназіи В. К.

1. Возьмемъ квадратное уравненіе:

$$a_1X^2-bX-a=0, \qquad (1)$$

которое имѣетъ одинъ положительный и одинъ отрицательный корень, числа же a, b и a_1 цѣлы и положительны; положимъ, что положительный корень (α) больше единицы, а отрицательный корень $\left(-\frac{1}{\beta}\right)$ по абсолютной величинѣ меньше единицы; такое уравненіе назовемъ *приведеннымъ* (reducible) уравненіемъ.

Пусть C наибольшее цѣлое число, не превосходящее положительнаго корня; сдѣлаемъ

$$X=C+\frac{1}{X_1} \qquad (A)$$

Подставляя это выраженіе въ данное уравненіе, мы получимъ:

$$[a-C(a_1C-b)]X_1^2-(2a_1C-b)X_1-a_1=0.$$

Положивъ: $a-C(a_1C-b)=a_2$ и $2a_1C-b=b_1$, мы приведемъ послѣднее уравненіе къ виду:

$$a_2X_1^2-b_1X_1-a_1=0. \qquad (2).$$

Изъ условнаго уравненія (A) мы находимъ, что $X_1=\frac{1}{X-C}$. Слѣдовательно, большій корень уравненія (2) $\alpha_1=\frac{1}{\alpha-C}$; онъ положителенъ и по абсолютной величинѣ больше единицы, такъ какъ $\alpha-C$ по условію представляетъ собою правильную дробь. Другой же корень: $-\frac{1}{\beta_1}=-\frac{1}{\frac{1}{\beta}+C}$ отрицателенъ и по абсолютной величинѣ меньше единицы, при этомъ C оказывается наибольшимъ цѣлымъ числомъ, заключеннымъ въ β_1. Такимъ образомъ уравненіе (2) есть также приведенное, при чемъ a_2 и b_1 цѣлы, а также и положительны, какъ это очевидно слѣдуетъ изъ доказаннаго соотношенія корней. Выраженіе b^2+4aa_1 называется *опредѣлителемъ* уравненія. Легко видѣть, что опредѣлитель второго уравненія равенъ опредѣлителю перваго уравненія, такъ какъ:

$$b_1^2+4a_1a_2=(2a_1C-b)^2+4a_1[a-C(a_1C-b)]=b^2-4aa_1.$$

Пусть C_1 наибольшее цѣлое число, заключенное въ a_1; сдѣлаемъ $X_1=C_1+\frac{1}{X_2}$. Подставивъ это выраженіе въ уравненіе (2) и, сдѣлавъ соотвѣтственныя замѣненія, мы приведемъ его къ виду: $a_3X_2^2-b_2X_2-a_2=0.$ (3).

2. Продолжая такое разсужденіе, мы получимъ рядъ уравненій и, такъ какъ каждое послѣдующее образуется изъ предшествовавшаго совершенно такимъ-же образомъ, какъ второе уравненіе образуется изъ перваго, то мы можемъ предыдущіе результаты обобщить, а именно:

a) каждое послѣдующее образуется изъ предшествующаго уравненія только однимъ опредѣленнымъ способомъ;

b) каждое уравненіе есть приведенное, при чемъ числа a_{m+1} и b_m цѣлы и положительны;

c) если a_m и $-\frac{1}{\beta_m}$ суть корни $(m+1)$-го уравненія, то C_{m-1} есть наибольшее цѣлое число, заключенное въ β_m.

d) наконецъ, опредѣлитель уравненія есть величина постоянная, которую мы будемъ обозначать чрезъ D.

Замѣняя въ уравненіи: $a=C+\frac{1}{a_1}$ число a_1 чрезъ $C_1+\frac{1}{a_2}$, затѣмъ a_2 чрезъ $C_2+\frac{1}{a_3}$ и т. д., мы разложимъ положительный корень въ непрерывную дробь. Если a есть число раціональное, то оно, какъ всякое раціональное число, разлагается въ конечную непрерывную дробь, т. е. одно изъ полныхъ частныхъ $a, a_1\, a_2 \ldots a_m$ есть число цѣлое. Если-же корни даннаго уравненія ирраціональны, то ни одно изъ полныхъ частныхъ не будетъ ни цѣлымъ, ни раціональнымъ, ибо въ противномъ случаѣ всѣ предшествующія частныя, а стало быть и a были-бы раціональны. Этотъ послѣдній случай мы и будемъ имѣть въ виду при дальнѣйшихъ разсужденіяхъ.

3. Назовемъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ первой степени въ одномъ изъ этихъ уравненій чрезъ u, коэффиціентъ-же при неизвѣстномъ во второй степени и извѣстный членъ—чрезъ y и z. Принявъ во вниманіе, что опредѣлитель уравненія есть величина постоянная, мы имѣемъ уравненіе:

$$u^2+4yz=D.$$

Число значеній, которыя можетъ принимать u не превышаетъ $\sqrt{D}$. Количество различныхъ разложеній числа $\frac{D-u^2}{4}$ на два множителя при каждомъ значеніи для u не превышаетъ $^1/_2\sqrt{D}$; но значеніе каждаго множителя можетъ соотвѣтственно принимать то y, то z; такимъ образомъ maximum числа различныхъ уравненій, обладающихъ однимъ и тѣмъ-же коэффиціентомъ при неизвѣстномъ въ первой степени, есть $2\cdot{}^1/_2\sqrt{D}=\sqrt{D}$. Число всѣхъ возможныхъ различныхъ уравненій не превышаетъ $\sqrt{D}\cdot\sqrt{D}=D$.

Это показываетъ намъ, что при процессѣ разложенія въ непрерывную дробь корня даннаго квадр. уравненія, мы получимъ послѣ ряда приведенныхъ уравненій, число которыхъ не превышаетъ ихъ общаго опредѣлителя, одно изъ встрѣчавшихся уже уравненій; а такъ какъ мы видѣли (2, a), что каждое послѣдующее уравненіе образуется изъ предшествовавшаго только однимъ опредѣленнымъ способомъ, то само собою разумѣется, что вслѣдъ за нимъ повторятся и всѣ послѣдующія уравненія впредь до вторичнаго возвращенія къ тому-же самому уравненію и т. д.; новыхъ-же уравненій при этомъ повтореніи, очевидно, быть не можетъ. Такимъ образомъ, рядъ квадратныхъ уравненій, начиная съ одного изъ нихъ, періодически повторяетсѧ. Но если рядъ уравненій періодически повторяется, то то жо имѣетъ мѣсто и для ряда соотвѣтствующихъ неполныхъ частныхъ; отсюда слѣдуетъ, что ирраціональные корни приведеннаго квадратнаго уравненія разлагаются въ непрерывную періодическую дробь.

Докажемъ, что періодъ начнется съ перваго-же члена.

4. Пусть дано какое нибудь уравненіе:

$$a_{m+1}X^2_m - b_mX_m - a_m = 0, \qquad (m+1).$$

корни котораго суть a_m и $-\dfrac{1}{\beta_m}$, и положимъ, что требуется составить предшествовавшее уравненіе. Неизвѣстное предыдущаго уравненія $X_{m-1} = C_{m-1} + \dfrac{1}{X_m}$, гдѣ C_{m-1} есть наибольшее цѣлое число, заключенное въ β_m. Опредѣливъ это число и положивъ $X_m = \dfrac{1}{X_{m-1} - C_{m-1}}$, подставляемъ это значеніе въ $(m+1)^{oe}$ уравненіе; этой подстановкой $(m+1)$ое уравненіе приводится къ предшествующему:

$$a_m X^2_{m-1} - (b_{m-1} X_{m-1} - a_{m-1}) = 0 \qquad (m).$$

Такъ какъ C_{m-1} есть число опредѣленное, то изъ этого слѣдуетъ, что каждое предшествующее уравненіе только однимъ опредѣленнымъ способомъ образуется изъ послѣдующаго.

Положимъ, что періодъ состоитъ изъ $m+1$ уравненій. Пусть n—тое уравненіе тождественно съ $(n+m+1)$—мъ уравненіемъ. Въ силу только-что доказанной теоремы $(n-1)$—ое уравненіе тожественно $(n+m)$—ому уравненію, $(n-2)$—ое уравненіе тождественно $(n+m-1)$—ому уравненію и т. д.; наконецъ первое уравненіе тожественно $(m+2)$ уравненію. Отсюда слѣдуетъ, что повтореніе начнется съ перваго уравненія. Но въ такомъ случаѣ неполное частное, начинающее второй періодъ (C_{m+1}), равно первому неполному частному (C), такъ какъ $X_{m+1} = X$. Итакъ при разложеніи большаго корня приведеннаго уравненія въ непрерывную дробь періодъ начнется съ перваго члена.

5. Перейдемъ теперь къ разложенію въ непрерывную дробь второго корня даннаго уравненія $\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)$. Но такъ какъ онъ отрицателенъ и по абсолютной величинѣ меньше единицы, то мы будемъ разлагать въ непрерывную дробь единицу, раздѣленную на абсолютную величину этого корня (т. е. β). Сдѣлаемъ для этого въ уравненіи (1) $X = -\dfrac{1}{X_0}$; этимъ положеніемъ мы обратимъ его въ уравненіе приведенное:

$$aX_0^2 - bX_0 - a_1 = 0 \qquad (0)$$

такъ какъ его положительный корень β—больше единицы, а отрицательный $-\dfrac{1}{a}$ по абсолютной величинѣ меньше единицы. Число β, какъ положительный корень приведеннаго уравненія (0) въ силу предыдущаго разлагается въ чистую періодическую непрерывную дробь. Произведемъ это разложеніе.

Мы уже видѣли, что $X = X_{m+1}$, стало быть $\beta = \beta_{m+1}$. Но, какъ было доказано, наибольшее цѣлое число, заключенное въ β_{m+1} (а стало быть и въ β) есть C_m. Положеніемъ $X_0 = C_m + \frac{1}{X_{-1}}$ мы приводимъ уравненіе (0) къ виду:

$$a_0X_{-1}^2 - b_0X_{-1} - a = 0 \qquad (-1)$$

Въ этомъ уравненіи $-\frac{1}{X_{-1}} = C_m - X_0$; съ другой стороны намъ извѣстно, что $X_m = C_m + \frac{1}{X_{m+1}}$; принимая во вниманіе, что $X_0 = -\frac{1}{X} = -\frac{1}{X_{m+1}}$, мы найдемъ, что вторыя части двухъ послѣднихъ уравненій равны, стало быть $X_m = -\frac{1}{X_{-1}}$, или наоборотъ $X_{-1} = -\frac{1}{X_m}$. Это показываетъ, что положительный корень уравненія (-1) есть β_m, а отрицательный $-\frac{1}{\alpha_m}$. Но наибольшее цѣлое число, заключенное въ β_m есть C_{m-1}, стало быть мы должны положить $X_{-1} = C_{m-1} + \frac{1}{X_{-2}}$. Этимъ положеніемъ уравненіе (-1) приводится къ виду:

$$a_{-1}X_{-2}^2 - b_{-1}X_{-2} - a_0 = 0. \qquad (-2).$$

Продолжая предыдущее разсужденіе, мы прійдемъ къ слѣдующимъ результатамъ:

$X_{-2} = C_{m-2} + \frac{1}{X_{-3}}$; $X_{-3} = C_{m-3} + \frac{1}{X_{-4}}$ и т. д. наконецъ $X_{-m} = C + \frac{1}{X_0}$.

Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующему разложенію:

$$\alpha = C + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{C_2 + \dots + \cfrac{1}{C_{m-1} + \cfrac{1}{C_m + \alpha}}}} \qquad \beta = C_m + \cfrac{1}{C_{m-1} + \cfrac{1}{C_{m-2} + \dots + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{C + \beta}}}}$$

Итакъ положительный корень приведеннаго уравненія и единица, раздѣленная на его отрицательный корень, взятый съ обратнымъ знакомъ, разлагаются въ періодическія непрерывныя дроби, періоды которыхъ начинаются съ перваго члена и состоятъ изъ взаимнообратныхъ членовъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ эти члены обладаютъ особенными свойствами, которыя мы и разсмотримъ.

6. Въ силу извѣстнаго соотношенія между корнями квадратнаго уравненія и коэффиціентами при X и X^2 мы можемъ написать равенство: $\alpha - \frac{1}{\beta} = \frac{b}{a_1}$.

Подставляя вмѣсто положительнаго корня $C + \frac{1}{\alpha}$, мы находимъ, что

$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{\beta} = \frac{b}{a_1} - C$. Если $\frac{b}{a_1}$ есть число цѣлое, то послѣднее равенство показываетъ, что $\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta} = 0$, ибо только въ такомъ случаѣ разность двухъ правильныхъ дробей можетъ равняться разности двухъ цѣлыхъ чиселъ. Отсюда $\alpha_1 = \beta$. Но намъ уже извѣстно, что при разложенiи въ непрерывную дробь чиселъ α_1 и β мы получимъ слѣдующiе результаты

$$\alpha_1 = C_1 + \cfrac{1}{C_2 + \cfrac{1}{C_3 + \cfrac{1}{C_4 \ldots. + \cfrac{1}{Cm + \cfrac{1}{C + \alpha_1}}}}} \qquad \beta = Cm + \cfrac{1}{Cm_{-1} + \cfrac{1}{Cm_{-2} + \cfrac{1}{Cm_{-3} + \ldots. + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{C + \beta}}}}}$$

Но такъ какъ одно и тоже число разлагается въ непрерывную дробь однимъ только способомъ (2,a), то равенство чиселъ α_1 и β влечетъ за собою слѣдующiя равенства:

$$C_1 = Cm,\ C_2 = Cm_{-1},\ C_3 = Cm_{-2} \ldots \text{ и т. д.}$$

Итакъ, если въ приведенномъ уравненiи коэффицiентъ при X дѣлится безъ остатка на коэфицiентъ при X^2, то при разложенiи корней въ непрерывную дробь перiодъ состоитъ изъ членовъ, повторяющихся въ обратномъ порядкѣ.

(*Окончанiе слѣдуетъ*).

Касательный кругъ.

(Тема для сотрудниковъ.)

Проф. В. Ермакова

Въ элементарной геометрiи особенный интересъ представляетъ задача о построенiи круга, касающагося трехъ данныхъ круговъ. Эта задача въ первый разъ была рѣшена Апполонiемъ изъ Перги; но относящаяся сюда книга утеряна и была возстановлена Вьетомъ. Эта задача находится въ связи съ радикальною осью и подобiемъ круговъ. Было бы неудобно предпосылать отдѣльныя и подробныя статьи о радикальной оси и о подобiи круговъ. Поэтому мы предлагаемъ изложить предварительно лишь тѣ немногiя теоремы, которыя необходимы для рѣшенiя нашей задачи. Рекомендуемъ слѣдующiй порядокъ.

1. Геометрическое мѣсто точки, изъ которой касательныя къ двумъ кругамъ равны, есть прямая линiя, которая называется радикальною осью.

Въ частномъ случаѣ, когда круги пересѣкаются, радикальная ось проходитъ чрезъ точки пересѣченiя.

Далѣе слѣдуетъ показать, какъ строится радикальная ось двухъ непересѣкающихся круговъ. Это построенiе удобнѣе всего произвести при помощи третьяго круга, пересѣкающаго два данные круга.

2. Три радикальныя оси трехъ круговъ пересѣкаются въ одной точкѣ, которая называется радикальнымъ центромъ.

Точки, дѣлящiя разстоянiе между центрами двухъ данныхъ круговъ внутренне и внѣшне въ отношенiи радiусовъ, называются центрами подобія данныхъ круговъ. Прямая, проходящая чрезъ центръ подобія, называется лучемъ подобія.

3. Разстоянія луча подобія отъ центровъ пропорціональны радіусамъ. Обратно, если разстоянія прямой линіи отъ центровъ пропорціональны радіусамъ, то прямая линія проходитъ чрезъ центръ подобія. Эти теоремы вытекаютъ ихъ опредѣленія центра и луча подобія.

Далѣе слѣдуетъ выяснить понятіе о соотвѣтственныхъ и несоотвѣтственныхъ точкахъ, отрѣзкахъ, хордахъ и касательныхъ.

4. Соотвѣтственные отрѣзки (одного и того же луча подобія) пропорціональны радіусамъ.

5. Произведеніе несоотвѣтственныхъ отрѣзковъ сохранаетъ постоянную величину.

6 Соотвѣтственныя хорды и касательныя параллельны. Доказывается на основаніи теоремы 4.

7. Двѣ точки одного круга и двѣ несоотвѣтствующія точки другого круга находятся на одной окружности. Доказывается на основаніи теоремы 5.

8. Точка пересѣченія несоотвѣтственныхъ хордъ находится на радикальной оси. Доказывается на основаніи предыдущей теоремы. Отсюда какъ частный случай слѣдуетъ, что точка пересѣченія несоотвѣтствующихъ касательныхъ находится на радикальной оси.

9. Если два круга касаются, то одинъ изъ центровъ подобія находится въ точкѣ касанія.

Три круга имѣютъ три внутренніе и три внѣшніе центра подобія.

10. Прямая, соединяющая два центра подобія трехъ круговъ, проходитъ чрезъ третій центръ подобія. Доказывается на основаніи 3-ьей теоремы.

Изъ послѣдней теоремы слѣдуетъ, что шесть центровъ подобія трехъ круговъ находятся въ точкахъ пересѣченія четырехъ прямыхъ линій. Эти четыре прямыя линіи называются осями подобія трехъ круговъ.

11. Если кругъ C касается двухъ круговъ O и O′, то прямая, соединяющая точки касанія, пройдетъ чрезъ центръ подобія круговъ O и O′. Доказывается на основаніи двухъ предыдущихъ теоремъ.

12. Если два круга C и C′ касаются одинаковымъ или противоположнымъ образомъ двухъ круговъ O и O′, то радикальная ось круговъ C и C′ проидетъ чрезъ центръ подобія круговъ O и O′, и обратно: радикальная ось послѣднихъ круговъ проходитъ чрезъ центръ подобія первыхъ круговъ. Доказывается на основаніи теоремъ 11 и 5.

Положимъ теперь, что даны три круга O, O′ и O″. Пусть кругъ C касается внѣшне всѣхъ трехъ круговъ въ (неизвѣстныхъ) точкахъ B, B′ и B″. Пусть другой кругъ C, касается внутренне трехъ данныхъ круговъ въ (неизвѣстныхъ) точкахъ B_1, B_1', B_1''. Прямыя BB_1, $B'B_1'$, $B''B_1''$ пройдутъ чрезъ точку P (теорема 11), которая будетъ центромъ подобія круговъ C и C_1. Эта точка P будетъ также радикальнымъ центромъ (теоремы 12 и 2) трехъ данныхъ круговъ O, O′ и O″. Радикальная ось круговъ C и C_1 должна проходить чрезъ три центра подобія (теорема 12) данныхъ круговъ O, O′ и O″; въ нашемъ примѣрѣ это будетъ ось подобія, проходящая чрезъ три внѣшніе центры подобія; означимъ ее чрезъ MN. Касательныя въ точкахъ B и B_1 равны и потому точка ихъ пересѣченія должна находиться на радикальной оси MN круговъ C и C_1. Отсюда слѣдуетъ, что полюсъ прямой MN находится на прямой BB_1 [1]). Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе касательнаго круга.

Возьмемъ какую нибудь ось подобія трехъ данныхъ круговъ и найдемъ ея полюсы относительно каждаго круга; пусть эти полюсы будутъ D, D' и D'', пусть радикальный центръ данныхъ круговъ будетъ P; прямыя PD, PD' и PD'' пересѣкаютъ данные круги въ шести точкахъ, которыя будутъ точками касанія двухъ искомыхъ круговъ.

Задача имѣетъ восемь рѣшеній.

Если центры трехъ данныхъ круговъ находятся на одной прямой линіи, то данное выше построеніе не примѣнимо. При помощи метода обратныхъ фигуръ [2]) эту задачу можно свести на общую; но такого рѣшенія слѣдуетъ избѣгать, и рекомендуемъ читателю поискать непосредственнаго рѣшенія.

Частные случаи задачи, когда нѣкоторые круги обращаются въ прямыя линіи (радіусъ равенъ безконечности), или въ точки (радіусъ равенъ нулю) могутъ быть выдѣлены въ особую статью.

Рѣшеніе задачи можетъ быть найдено во многихъ сочиненіяхъ на иностранныхъ языкахъ.

Хроника.

Звуковые миражи.

Часто повторяющіяся опасныя и разрушительныя столкновенія морскихъ пароходовъ заставили недавно французскаго ученаго Физо обратить вниманіе Парижской Академіи наукъ на необходимость болѣе точнаго изслѣдованія явленія передачи звука на значительныя разстоянія, которое въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ сопровождаться звуковымъ обманомъ, аналогичнымъ оптическимъ миражамъ.

Подобно тому какъ надъ сильно нагрѣтыми частями почвы воздухъ при безвѣтренномъ состояніи располагается иногда такимъ образомъ, что нижніе слои его, болѣе теплые, отражаютъ свѣтовые лучи, чѣмъ обусловливается явленіе миража, точно также и надъ поверхностью моря въ спокойную погоду распредѣленіе воздуха слоями различной плотности и температуры можетъ быть таково, что звуковыя волны будутъ распространяться неправильно въ томъ смыслѣ, что каждая горизонтально направленная (напр. изъ рупора) волна уклонится вверхъ и очень легко можетъ миновать ближе къ поверхности лежащіе предметы. Примѣрнымъ вычисленіемъ Физо показываетъ, что, незамѣтное для малыхъ разстояній, это уклоненіе звуковыхъ волнъ вверхъ отъ горизонтальнаго первоначальнаго на-

---

[1]) Журналъ Элементарной Математики, томъ II, № 8, страница 184, слѣдствіе 8.

[2]) Вѣстникъ Оп. Физ. и Эл. Мат. №№ 13 и 15.

правленія можетъ достичь 100 м. и болѣе на разстояніи 1 километра отъ источника звука.

Слѣдовательно нечему удивляться, если различные звуковые сигналы, которыми снабжены обыкновенно морскіе пароходы, не всегда могли предотвратить катастрофу столкновенія, въ особенности, если принять во вниманіе, что именно ночью и въ туманную безвѣтренную погоду подобное нарушеніе нормальнаго распредѣленія плотности морского воздуха, по мнѣнію Физо, случается наичаще.

Отсюда прямой выводъ, что—въ ожиданіи обстоятельныхъ опытныхъ изысканій надъ передачею акустическихъ сигналовъ надъ поверхностью суши и моря—слѣдовало бы пріискать возможность слышать сигналы не съ поверхности палубы корабля, а напр. съ высшей точки его мачты, и если помѣщать на мачтѣ спеціально для этой акустической цѣли часового оказалось бы неудобнымъ, то вѣдь очень не трудно было бы, при современномъ состояніи технической физики, устроить такое механическое приспособленіе, которое вполнѣ замѣнило бы подобнаго часового, не нуждаясь притомъ въ смѣнѣ, и уменьшило бы въ значительной степени вредъ, приносимый звуковыми миражами.

„Свойства матеріи" (П. Дж. Тэта).

«*П. Дж. Тэтъ.* Свойства матеріи. Переводъ съ англійскаго подъ редакціею *И. М. Сѣченова.* Спб. 1887. Цѣна 2 р. 50 к.»

Какъ сказано въ предисловіи къ этому сочиненію, предметъ его составляетъ введеніе въ курсъ натуральной философіи Эдинбургскаго университета. Сочиненіе (за исключеніемъ немногихъ отдѣльныхъ параграфовъ) предназначается для учащихся съ основательнымъ знаніемъ обыкновенной геометріи и нѣкоторымъ знакомствомъ съ элементами алгебры и тригонометріи.

Авторъ послѣ вступленія излагаетъ нѣкоторыя гипотезы о конечномъ строеніи матеріи, склоняясь, повидимому, къ гипотезѣ вихрей-атомовъ Томсона; затѣмъ слѣдуетъ краткій разборъ главнѣйшихъ терминовъ, примѣняемыхъ къ веществу: массивный, тяжелый, пластичный, ковкій, вязкій, упругій и т. д. Въ главѣ «о времени и пространствѣ» Тэтъ, начавъ съ нѣсколько иронической ссылки на Кантовское опредѣленіе времени и пространства, описываетъ способы опредѣленія относительнаго положенія тѣлъ «помощью трехъ чиселъ, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно должно быть кратнымъ отъ единицы длины.» (Координаты различнаго рода, горизонтали). Здѣсь-же авторъ слегка касается вопроса о четвертомъ измѣреніи, говоря, что «въ умствованіяхъ этого рода, хотя они до извѣстной степени опираются на научные факты, по необходимости замѣшанъ вопросъ о чувствованіи и воспріятіи; поэтому они собственно выходятъ изъ предѣловъ физики, относясь скорѣе къ физіологіи».

Въ главѣ V разобраны вопросы о непроницаемости, пористости и дѣлимости. Свойства эти вообще приписываются матеріи, не отдавая себѣ обыкновенно строгаго отчета въ томъ, почему мы считаемъ ихъ общими, и какъ и въ какой мѣрѣ мы убѣждаемся въ ихъ справедливости.

Глава VI объ «инерціи, подвижности, центробѣжной силѣ» представляетъ краткое, но мастерское изложеніе основъ динамики. Въ главѣ о «тяготѣніи» разбираются слѣдующіе вопросы: *a*) всеобщность тяготѣнія, *b*) направленіе силы между двумя частицами, *c*) пропорціональность силъ произведенію изъ массъ, *d*) законъ обратнаго отношенія квадрату разстояній, *e*) что разумѣть подъ притяженіемъ, *f*) какая причина тяготѣнія.

Главы VIII—XI содержатъ въ себѣ наиболѣе цѣнную часть сочиненія—элементарное изложеніе теоріи упругости, т. е. ученія о зависимости между напряженіемъ и деформаціею въ твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ тѣлахъ. Главы XII и XIII трактуютъ о сцѣпленіи, волосности, диффузіи, осмозѣ, транспираціи, вязкости и т. д. Всѣ эти явленія разобраны совершенно строго и элементарно съ точки зрѣнія теорій Лапласа и Гаусса; здѣсь-же помѣщены результаты новѣйшихъ изслѣдованій по этому поводу Максуэлля, В. Томсона, Грегама, Стокса и другихъ. Заключительная глава говоритъ объ аггрегаціи частицъ. Въ приложеніяхъ къ книгѣ помѣщенъ весьма интересный отрывокъ изъ статьи Кл. Максуэлля «Атомъ» изъ Британской Энциклопедіи.

Книга издана очень хорошо; переводъ вполнѣ гладокъ и терминологія выдержана во всемъ сочиненіи, не смотря на затрудненія, представляемыя съ этой стороны русскимъ языкомъ (слишкомъ много терминовъ, значенія которыхъ не совершенно различены, въ родѣ: натяженіе, растяженіе, вытяженіе, тяга и т. п.). Изрѣдка встрѣчаются отступленія отъ общепринятыхъ терминовъ (напр. *проицированіе* вмѣсто *проектированіе*).

А. Л. К.

Сборникъ физическихъ задачъ (Тодгентера).

«Сборникъ примѣровъ и задачъ элементарной физики *Тодгентера*, профессора математики въ Кэмбриджѣ. Переводъ съ англійскаго. Кіевъ. 1887 г. Цѣна 60 коп.»

Нельзя не порадоваться появленію этой книжки на русскомъ языкѣ, такъ какъ она до нѣкоторой степени пополняетъ настоятельную потребность въ задачникѣ по элементарной физикѣ. Задачи подобраны весьма умѣло во всѣхъ отношеніяхъ; большія числа не встрѣчаются, а потому при рѣшеніи не приходится тратить времени на ариѳметическія выкладки. Небольшое число задачъ (856) вполнѣ окупается тѣмъ, что однородныхъ задачъ встрѣчается мало. Жаль только, что въ сборникѣ вовсе нѣтъ задачъ по магнетизму и электричеству.

Въ серьезный упрекъ переводчику слѣдуетъ поставить то, что онъ всюду оставилъ англійскія мѣры; это весьма стѣсняетъ употребленіе сборника въ учебныхъ заведеніяхъ. Слѣдовало подобрать другія числа и ввести мѣры русскія, или—еще лучше—метрическія. Въ общемъ переводъ удовлетворителенъ; изрѣдка только онъ грѣшитъ противъ точности и ясности формулировки заданія, напр. (зад. 4) «минутная стрѣлка часовъ вдвое *больше* секундной», лучше было-бы сказать «вдвое *длиннѣе*». Попадаются также и опечатки, напр. (зад. 760): «Что будетъ, если въ

Галилеевой трубкѣ будемъ увеличивать размѣры *окуляра,* или его фокусное разстояніе, оставляя *окуляръ* безъ измѣненія?»

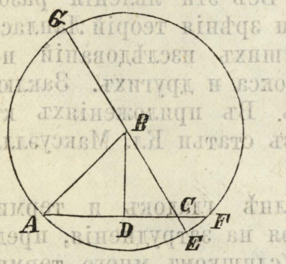
А. Л. К.

Смѣсь.

Доказательство одной извѣстной теоремы геометріи.

Для доказательства, что въ треугольникѣ ABC имѣетъ мѣсто зависимость

Фиг. 73.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.AD,$$

опишемъ изъ B какъ изъ центра окружность радіусомъ$=$AB. Продолживъ прямыя BC и AC до пересѣченія съ окружностью, будемъ имѣть, на основаніи извѣстной теоремы о пересѣкающихся хордахъ,

$$GC.CE = AC.CF.$$

Или: $$(GB+BC)(BE-BC) = AC(AF-AC)$$

Подставляя вмѣсто GB и BE равную имъ сторону AB и замѣняя хорду AF черезъ 2AD, находимъ

$$(AB+BC)(AB-BC) = AC(2.AD - AC)$$

или $$AB^2 - BC^2 = 2AC.AD - AC^2$$

откуда

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC.AD,$$

что и требовалось доказать.

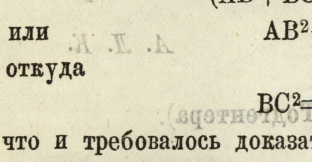
Если-бы точка F была не на продолженіи основанія, а на самомъ основаніи, пришлось бы пользоваться теоремой не пересѣкающихся хордъ, а сѣкущихъ, проведенныхъ изъ внѣшней точки.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ практической геометріи.

(*Продолженіе* [1]).

3. *Опредѣлить ширину рѣки.* Пусть *ab*, *cd* (фиг. 74) изображаютъ берега рѣки, ширину которой требуется опредѣлить. Предполагаемъ, что мѣсто выбрано такъ, что берега *ab* и *cd* можно безъ большой погрѣшности считать за двѣ параллельныя прямыя, и что берегъ *ab* доспупный.

Фиг. 74.



1-ый Способъ. Замѣтимъ на берегу *cd* какую нибудь точку B, которую мы могли-бы визировать и гдѣ нибудь вдоль *ab* поставимъ вѣху C. Приближаясь съ эккеромъ отъ *a* къ C, найдемъ

1) См. „Вѣстникъ“ № 22.

такую точку A, съ которой B и C были-бы видны подъ угломъ эккера α Продолжимъ направленіе BA до E и проведемъ изъ A перпендикуляръ AF къ прямой AE [1]) при помощи веревки или цѣпи. Затѣмъ, при помощи эккера, найдемъ на прямой AF такую точку D, изъ которой точки A и B были бы видны подъ угломъ α. Прямая BD, на которой поставимъ колъ въ K, будетъ очевидно перпендикулярна къ берегамъ рѣки, и ея отрѣзокъ BK есть искомая ширина. Она опредѣлится по формулѣ:

$$BK = \frac{(AD+DK)(AD-DK)}{DK},$$

которая есть слѣдствіе извѣстной для прямоугольнаго треугольника зависимости

$$AD^2 = DK.\,DB,$$

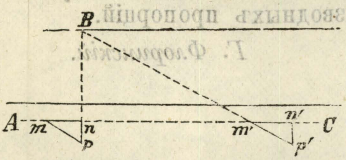
или по формулѣ $BK = \frac{AK^2}{DK}$,

смотря по тому, что удобнѣе измѣрить: AD и DK, или AK и DK.

Эта задача есть въ сущности не что иное, какъ задача опредѣленія разстоянія недоступной точки. Ею много занимались и существуетъ поэтому не мало пріемовъ ея рѣшенія. Приводимъ здѣсь два изъ нихъ, чтобы дать понятіе о томъ, какъ можетъ быть опредѣлена ширина рѣки безъ помощи эккера.

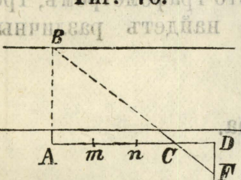
2-ой Способъ. Выбравъ какую нибудь точку B на противоположномъ берегу, стараются прямоугольный треугольникъ *mnp*, стороны котораго (изъ вытянутой веревки) относятся какъ 3: 4: 5, расположить такъ, чтобы меньшій катетъ *np* указывалъ на точку B, а большій катетъ *mn* былъ бы параллеленъ берегу рѣки. Отмѣтивъ на землѣ точку *n*, переносятъ весь (натянутый) треугольникъ вдоль берега такъ, чтобы большій катетъ оставался параллельнымъ берегу, и останавливаются тогда, когда точка B будетъ видна по направленію гипотенузы *m'p'*. Отмѣтивъ точку *m'*, мы получимъ очевидно треугольникъ *Bnm'* подобный нашему треугольнику *mnp*, а слѣдовательно искомая ширина $Bn = {}^3/_4\, nm'$.

Фиг. 75.



3-й Способъ еще быстрѣе ведетъ къ цѣли, и потому, хотя не отличается особенною точностью, часто употребляется. Избираютъ на глазъ точку *A* такъ, чтобы линія AB безъ большой погрѣшности могла быть принята за перпендикулярную къ берегамъ. Вдоль берега и параллельно ему прокладываютъ линію AD, отмѣтивъ на ней нѣсколько, напр. 4 равныхъ частей Am, mn, nC и cD. Въ D проводятъ DE перпендикулярно къ AD и находятъ точку F, лежащую на одной прямой съ точками B и C.—Измѣривъ длину DF, имѣемъ на основаніи подобія треугольниковъ

Фиг. 76.



$$AB = 3DF.$$

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

[1]) Эта задача легко рѣшается при помощи десятисаженной цѣпи на основаніи свойства треугольника, стороны котораго относятся какъ 3: 4: 5. См. статью Проф. В. Ермакова „Простѣйшій способъ межеванія" въ №№ 2, 3 и 5 „Вѣстника" за 1886 г.

Общая формула производныхъ пропорцій.

Обыкновенно главнѣйшія изъ многочисленныхъ формъ производныхъ пропорцій доказываются каждая отдѣльно, что отнимаетъ много времени и придаетъ доказательству искусственность.

Слѣдующій краткій способъ ставитъ всѣ формы производныхъ пропорцій въ зависимость отъ одной общей формулы.

Пусть имѣетъ пропорцію:

$$a:b=c:d;$$

k, l, m, n—пусть какія угодно числа.

Тогда справедливость извѣстнаго равенства:

$$\frac{ka+lb}{ma+nb}=\frac{kc+ld}{mc+nd} \qquad (1)$$

легко доказывается, подставляя во вторую часть $c=\frac{ad}{b}$.

Полагая же въ формулѣ (1) $k=\pm1$ или $k=0$, $l=\pm1$ или $l=0$, $m=\pm1$ или $m=0$ и $n=\pm1$ или $n=0$, и комбинируя эти подстановки, получимъ всѣ главнымъ обр. употребляемыя формы производныхъ пропорцій.

Г. Флоринскій.

Авто-графометръ.

Французскіе инженеры Панонъ и Флоранъ придумали и устроили недавно самочертящій приборъ для топографической съемки плановъ и нивелировки. Это трехколесная повозочка (вѣсомъ около 5 пудовъ), заключающая довольно сложный механизмъ, при помощи котораго на вставленномъ листѣ бумаги одинъ карандашъ чертитъ вертикальный профиль проходимаго повозочкою пути, а другой—отмѣчаетъ всѣ уклоненія пути отъ начальнаго направленія движенія.—Повидимому приборъ этотъ, названный авто-графометромъ, требуетъ еще усовершенствованій; тогда, безспорно, онъ найдетъ различныя примѣненія въ топографическихъ работахъ.

Разборный напильникъ Мюллера.

Въ г. Ревелѣ на фабрикѣ Э. Плена и K°. изготовляются теперь патентованные напильники Мюллера, состоящіе изъ стальныхъ квадратныхъ пластинокъ, набранныхъ на стержень и закрѣпленныхъ гайкой, которая находится въ рукояткѣ.

Интересующихся подробностями весьма остроумнаго устройства этого, столь необходимаго даже въ частной жизни инструмента, отсылаемъ къ I Вып. Записокъ Императорскаго Русскаго Техническаго Общества за 1887 къ статьѣ Г. Тромпетера (стр. 44), гдѣ приложены и рисунки. Здѣсь отмѣтимъ только, что напильники Мюллера могутъ служить очень долго при постоянной работѣ, ибо легко ихъ чистить и натачивать (брускомъ). Всѣ пластинки послѣ разборки укладываются въ общій деревянный желобокъ, въ наклонномъ положеніи (потому что края ихъ скошены), и всѣ заразъ оттачиваются. Напильники эти квадратные и двѣ ихъ грани оставлены гладкими. Къ сожалѣнію, они еще довольно дороги: отъ 8 руб. до $6^1/_2$ рублей за штуку. Тиски для шлифовки пластинокъ стоятъ 3 р. 50 коп.

Вопросы и задачи.

№ 152. Полый шаръ въ водѣ не тонетъ и не плаваетъ; плотность матеріала δ, радіусъ наружной поверхности r. Найти толщину стѣнки.

Проф. О. Хвольсонъ.

№ 153. Показать безъ помощи теоріи бинома Ньютона, что

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$$

для положительныхъ, отрицательныхъ, цѣлыхъ и дробныхъ значеній n, въ предположеніи, что степени α, выше первой, могутъ быть пренебрегаемы по сравненію съ единицею и α.

Проф. Н. Шиллеръ.

№ 154. Извѣстно, что можно обложить кругъ шестью равными ему кругами такъ, что эти круги будутъ касаться даннаго круга и будутъ также попарно касаться между собою.

Найти, каково должно быть отношеніе радіусовъ круговъ А и В, для того чтобы можно было обложить кругами А кругъ В и кругами В кругъ А.?

І. Клейберъ (Спб.)

№ 155. Пусть точки (1), (2), (3), (4), (5), (6) суть средины сторонъ любого плоскаго шестиугольника. Доказать, что точка встрѣчи медіанъ треугольника (1) (3) (5) совпадаетъ съ точкою встрѣчи медіанъ треугольника (2) (4) (6).

А. Гольденбергъ.

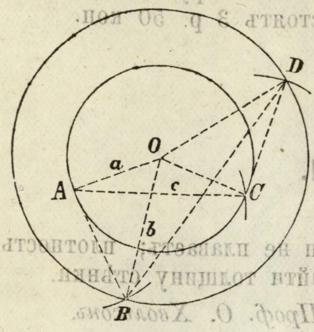
№ 156. Даны на плоскости четыре точки. Черезъ двѣ изъ нихъ должны проходить діагонали, а черезъ двѣ другія—двѣ стороны квадрата. Построить квадратъ.

И. Ивановъ.

Рѣшенія задачъ.

№ 34. При помощи циркуля, не употребляя линейки, найти четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ a, b и c.

Фиг. 77.

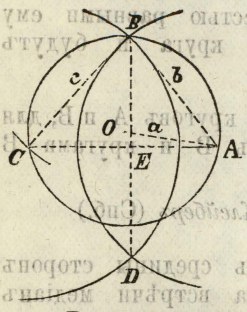


1-ый Способъ. Радіусами $OA=a$, $OB=b$ описываемъ двѣ концентрическія окружности. На первой изъ нихъ, изъ произвольной точки A, растворомъ циркуля$=c$ зачеркиваемъ дугу, которая даетъ намъ въ пересѣченіи точку C. Изъ точекъ A и C произвольнымъ растворомъ циркуля пересѣкаемъ вторую окружность въ точкахъ B и D, такимъ образомъ, чтобы обѣ эти точки соотвѣтственно отъ точекъ A и C находились или вправо, или влѣво. Тогда разстояніе BD даетъ искомую четвертую пропорціональную $x=\frac{bc}{a}$.

Дѣйствительно, изъ равенства произвольныхъ радіусовъ AB и CD слѣдуетъ равенство треугольниковъ AOB и COD, (имѣющихъ по три равныя стороны). Вытекающее отсюда равенство угловъ AOB и COD влечетъ за собою также равенство угловъ AOC и BOD и, слѣдовательно, подобіе равнобедренныхъ треугольниковъ AOC и BOD, изъ котораго находимъ $a:b=c:BD$.

Способъ этотъ возможенъ въ томъ случаѣ, если $c<2a$.

Фиг. 78.



2-ой Способъ. Радіусомъ $OA=a$ описываемъ окружность и изъ нѣкоторой ея точки A описываемъ вторую окружность радіусомъ $AB=b$. Изъ точки пересѣченія B зачеркиваемъ дугу радіусомъ c и въ пересѣченіи ея съ первою окружностью получаемъ точку C. Принявъ ее за центръ, тѣмъ-же радіусомъ $CB=c$ описываемъ третью окружность, которая пересѣчетъ вторую окружность еще въ точкѣ D. Разстояніе BD есть искомая четвертая пропорціональная $x=\frac{bc}{a}$.

Въ самомъ дѣлѣ: для треугольника ABC линія a есть радіусъ круга описаннаго, а потому:

$$2a: AB=BC: BE,$$

а такъ какъ $AB=b$, $BC=c$, и $BE=\frac{1}{2}BD$, то отсюда и находимъ $a:b=c:BD$.

Такое построеніе возможно лишь тогда, когда $b<2a$ и $c<2a$.

NB. На эту задачу было получено нѣсколько рѣшеній, но всѣ они не вполнѣ удовлетворительны, ибо авторы ихъ, забывъ о главномъ условіи—неупотребленіи линейки—сводятъ построеніе на *отложеніе меньшей изъ данныхъ линій на большей.*

Лучшимъ изъ этихъ рѣшеній считаемъ рѣшеніе *Г. Лобовикова.* Предлагаемъ желающимъ придумать такой способъ построенія, который было бы возможно примѣнить *всегда,* независимо отъ того будетъ ли b или c меньше или больше $2a$.

№ 73. Нѣкто A, имѣя денежные расчеты съ своимъ пріятелемъ B, пріобрѣлъ его векселя, одинъ на 35400 р. съ причитающимися сложными процентами за 4 года и—всѣ остальные на сумму 33950 р. 61 к. съ процентами за 1 годъ. Въ свою очередь онъ самъ былъ долженъ B: во 1-хъ 10000 р. съ причитающимися сложными процентами за 5 лѣтъ, во 2-хъ 33833 р. съ такими-же процентами за 3 года и въ 3-хъ еще 11995 р. 80 к. со сложными процентами за 2 года. Желая покончить съ этими взаимными долгами, они пригласили счетовода и для исчисленія сложныхъ процентовъ приняли 8%. Когда расчетъ былъ оконченъ, оказалось, что A долженъ получить съ B сумму 13522 р. 95 к. Находя ее почему-то слишкомъ значительною, A предложилъ сдѣлать вторичное вычисленіе, принимая не 8%, а 6% годовыхъ для сложныхъ процентовъ. Однакожъ, къ немалому удивленію обоихъ пріятелей и самого счетовода, излишекъ долга въ пользу A оказался точь въ точь такимъ-же какъ и прежде, т. е. опять 13522 р. 95 к. Тогда, порѣшивъ, что въ вычисленія вкралась вѣроятно ошибка, которой искать не стоитъ, пріятели велѣли вычислить все съизнова и принять только 5% для облегченія счета. Но, увы, и на этотъ разъ долги B превышали долги его друга ровно на 13522 р. 95 к.

Требуется разъяснить это кажущееся противорѣчіе.

Обозначая чрезъ x то во что обратится одинъ рубль по истеченіи года, видимъ, что условія задачи приводятъ къ уравненію

$$10000x^5-35400x^4+33883x^3+11995{,}8x^2-33950{,}61x+13522{,}95=0,$$

или:

$$x^5-3{,}54x^4+3{,}3833x^3+1{,}19958x^2-3{,}395061x+1{,}352295=0,$$

которое, какъ уравненіе 5-ой степени вообще должно имѣть 5 корней. По условію задачи оно должно удовлетворяться слѣдующими значеніями: $x_1=1{,}08$; $x_2=1{,}06$ и $x_3=1{,}05$. И дѣйствительно, раздѣливъ его на произведеніе

$$(x-1{,}08)\,(x-1{,}06)\,(x-1{,}05),$$

получимъ квадратное уравненіе

$$x^2-0{,}35\,x-1{,}125=0,$$

которое въ свою очередь имѣетъ еще два дѣйствительные корня:

$$x_4=1{,}25 \text{ и } x_5=-0{,}9.$$

Послѣднее изъ этихъ значеній не примѣнимо въ данномъ случаѣ, а значеніе $x_4=1{,}25$ показываетъ, что при тѣхъ-же условіяхъ задачи излишекъ долга B надъ долгомъ A получился бы еще разъ равнымъ 13522 р. 95 к., если бы сложные проценты считать по 25% въ годъ.

А. Гольденбергъ.

№ 93. Нѣкто разложилъ всѣ имѣющіяся у него карты на 11 равныхъ кучекъ и получилъ въ остаткѣ 3 карты; отбросивъ эти 3 карты онъ разложилъ опять всѣ остальныя на 16 кучекъ и получилъ въ остаткѣ

4; отбросивъ эти 4 карты, онъ еще разъ разложилъ на 9 кучекъ и на этотъ разъ получилъ въ остаткѣ 2 карты. Сколько могло быть всѣхъ картъ?

Означивъ черезъ x искомое число картъ, получимъ для трехъ раскладокъ слѣдующія три уравненія:

$$\frac{x-3}{11}=u;\quad \frac{x-7}{16}=v;\quad \frac{x-9}{9}=w; \tag{1}$$

гдѣ u, v и w суть цѣлыя положительныя числа. Послѣднее изъ уравненій (1) показываетъ, что x есть число кратное 9^{-u}; т. е., называя $w+1=z$, имѣемъ

$$x=9z. \tag{2}$$

Подставляя это значеніе въ (1), находимъ

$$9z-11u=3;\ 9z-16v=7;\ z-w=1: \tag{3}$$

Изъ первыхъ двухъ исключаемъ z, тогда зависимость между u и v выразится

$$11u-16v=4;$$

рѣшенія этого неопредѣленнаго уравненія представляются въ видѣ

$$u=16t+12;\ v=11t+8;$$

подставимъ найденное значеніе u въ первое изъ уравненій (3)

$$9z-176\,t=135;$$

рѣшенія этого уравненія будутъ:

$$z=176\,s+15;\ t=9s.$$

Слѣдовательно на основаніи зависимости (2) находимъ окончательно

$$x=9(176\,s+15)$$

гдѣ s можетъ принимать всѣ цѣлыя значенія отъ нуля до $+\infty$.

Итакъ искомое число картъ могло быть

135, или 1719, 3303 и т. д.

П. Сиротининъ, А. Колтановскій. Ученики 5 кл.: Вольскаго р. уч. В. С. и Курской гимназіи В. Б., 6 кл.: Харьк. р. уч. І. Ш., Кишин. р. уч. Д. Л., Бакинск. р. уч. Ф. Р. и Курской гимназіи Е. У., 7 кл. Курской гимн. Л. П., 8 кл. Курской гимн. Л. Я. и Орловской гимн. П. А.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 3 Іюня 1887 года.

Тип. Е. Т. Кереръ, арендуемая Н. Пилющенко и С. Бродовскимъ.

Списокъ книгъ, присланныхъ въ редакцію.

(*Продолженіе*).

25. **Химикъ Шарль Адольфъ Вюрцъ** въ характеристикѣ Ш. Фриделя. Переводъ съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями *П. Алексѣева.* 72 стр. in 8°. Кіевъ. 1887 г. Цѣна 50 коп.

26. **Образованіе грозъ на югѣ Россіи.** *А. Клоссовскаго.* Профессора Императорскаго Новороссійскаго университета. 36 стр. in 8° съ 4-мя таблицами. Одесса. 1886 г. Цѣна не обозначена.

27. **О колебаніяхъ температуры и плотности морской воды вблизи Одессы.** *Проф. Клоссовскаго.* Бр. въ 20 стр. съ 1 табл.

28. **Отъ завѣдывающаго метеор. обсерв. Импер. Новороссійскаго университета въ Одессѣ.** *Проф. Клоссовскаго.* Бр. въ 6 стр.

29. **Метеорологическія наблюденія.** Осадки Херсонской губерніи въ октябрѣ 1886 г. *А. Клоссовскій и Стародубцевъ.* Бр. въ 13 стр.

30. **Инструкціи для наблюденія осадковъ, грозъ и града.** Отъ метеор. обсерваторіи Одесскаго университета. Бр. въ 8 стр.

31. **Объ установкѣ термометровъ** для опредѣленія температуры и влажности воздуха. *Р. Савельева.* Съ таблицею чертежей. Оттискъ изъ Записокъ Императорскаго Русскаго Географическаго Общества. 15 стр. С.-Петербургъ. 1886 г.

32. **О свойствахъ психрометра.** Инженера *Р. Н. Савельева.* Съ таблицею чертежей. Отд. оттискъ изъ XII т. Записокъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. 46 стр. in 8°. Одесса. 1887 г. Цѣна не обозначена.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).