№ 673—674.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серіи

VII-го семестра № 1—2.

ОДЕССА.
Типографія „Техникъ"—Екатерининская, 58.
1916.

Второй серіи VII-го семестра № 1—2.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

№ 673—674.

Теорія подобія Христіана Вольфа и постулатъ Левека.

Проф. Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Учебная математическая литература отражаетъ въ себѣ характеръ своей эпохи. Вольфіанскій*) учебникъ носитъ на себѣ метафизическій отпечатокъ. Учебникъ Лежандрова**) типа, этотъ учебникъ безъ аксіомъ, представляющій собой сведеніе элементарной математики къ низшей, подготовительной школѣ для высшей математики, какъ болѣе совершеннаго метода вычисленія, — можно, пожалуй, назвать чисто-математическимъ учебникомъ. Учебникъ итальянской школы, отличающійся логической строгостью доказательствъ, тенденціей къ разложенію математическихъ понятій на чисто логическіе элементы, даетъ уже логическій типъ. Наконецъ, въ методикѣ логика постепенно начинаетъ уступать свои позиціи психологіи, и интуитивистическій учебникъ послѣдняго времени [напримѣръ, Борель-Штеккеля***) или Генрици и Трейтлейна****)] представляетъ собою психологическій типъ.

---

*) Х. Вольфъ (1679 — 1754) — извѣстный нѣмецкій философъ, философская система котораго базируется преимущественно на идеяхъ Лейбница.

**) Legendre — „Éléments de Géométrie“, 1794 г. Лежандръ — знаменитый французскій математикъ (1758 — 1833).

***) Борель-Штеккель — «Элементарная математика»; пер. подъ ред. прив.-доц. В. Ф. Кагана; изд. т-ва «Mathesis» въ Одессѣ.

****) Henrici und Treutlein.

Эта послѣдняя эпоха сходится съ первой въ томъ, что выдвигаетъ на первый планъ идеи, методы же изысканія и методы доказательствъ отодвигаетъ на второй планъ. Учебникъ Бореля даетъ очень мало съ точки зрѣнія формально-воспитательнаго принципа, ибо онъ плохо и мало учитъ логически мыслить. Учебники Вольфа не даютъ методовъ — это кульминаціонная точка развитія односторонне-объективной методики, павшей отъ руки геніальнаго Песталоцци (Pestalozzi).

Но какая разница въ обработкѣ этихъ идей? Математикъ XVII и первой половины XVIII вѣка бѣжитъ отъ конкретной дѣйствительности, онъ постоянно настаиваетъ на необходимости отрѣшенія отъ чувственности и на чисто-интеллектуальномъ постиженіи тѣхъ общихъ абстрактныхъ идей, которыя онъ кладетъ въ основаніе своихъ построеній.

Интуитивистъ же старается привести учащагося въ близкое соприкосновеніе съ опытомъ, который онъ пытается поставить такимъ образомъ, чтобы основныя идеи можно было узрѣть интуиціей раньше, чѣмъ будетъ приведенъ въ движеніе формально-логическій аппаратъ. Поэтому интуитивная геометрія становится геометріей подвижной модели, между тѣмъ какъ раціоналистическій учебникъ XVIII вѣка былъ геометріей неподвижныхъ абстракцій.

Съ каждой основной идеей въ первой системѣ связывается экспериментъ, во второй — аксіома, но при этомъ такая, что ей одной и другими, ей аналогичными, аксіомами формально-логическій аппаратъ нельзя привести въ движеніе.

Аксіома объявляетъ: всѣмъ объектамъ P присуще свойство a; но объекты P опредѣляются съ помощью признаковъ, не выражаемыхъ въ чисто-математическихъ, а тѣмъ болѣе — чисто-логическихъ терминахъ. Они лежатъ въ той области, въ которой лежатъ метафизическія концепціи. Чтобы отнести объектъ p къ классу P, приходится не доказывать, а убѣждать, при чемъ незамѣтно проскальзываетъ цѣлый рядъ скрытыхъ аксіомъ и создается, такъ сказать, обстановка, при которой не бывшее раньше очевиднымъ не безъ колебанія принимается за очевидное.

Нѣкоторые изъ такихъ метафизико-математическихъ аксіомъ подверглись математизаціи путемъ сокращенія объема класса P.

Вотъ принципъ Лейбница*): Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata, т.-е. если данныя упорядочены, то и искомыя упорядочены; иначе — тотъ порядокъ, который имѣется въ data, остается и въ quaesitum.

При разъясненіи этой терминологіи смыслъ сводится къ слѣдующему: свойства, присущія X, Y, ..., остаются и въ предѣлѣ, къ которому приближаются X, Y, ...

Для Лейбница значенія X, Y, ...— вообще data, для Л. Бертрана это какъ числа, такъ и геометрическія формы.

*) См. Brunschvigg — «Les étapes de la philosophie mathématique», p. 208. Мнѣ представляется, что глава о Лейбницѣ въ этой превосходной книгѣ, къ сожалѣнію, въ нѣкоторыхъ случаяхъ несправедливой (напримѣръ, къ средневѣковью), заслуживаетъ особаго вниманія.

„Окружность, говоритъ Л. Бертранъ, есть предѣлъ расширенія (de dilatation) правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ съ $6 . 2^n$ сторонами, а равно предѣлъ сжиманія (de la contraction) описанныхъ многоугольниковъ того же числа сторонъ“ *).

Такимъ образомъ, Л. Бертранъ говоритъ о формѣ окружности, какъ о предѣльной формѣ ряда формъ многоугольниковъ.

У Лакруа**) говорится о длинѣ окружности, какъ о предѣлѣ периметровъ многоугольниковъ — вмѣсто предѣловъ формъ и чиселъ имѣемъ предѣлъ только числа, ибо въ ариѳметизированномъ учебникѣ Лежандрова типа всякая длина мыслится выраженной числомъ.

§ 2. Въ методической литературѣ сыграла нѣкоторую роль аксіома изогенности пространства, которую можно выразить такъ: пространство во всѣхъ своихъ частяхъ однородно, здѣсь оно то же, что тамъ.

Это основная аксіома Л. Бертрана изъ Женевы. Любитель у Бертрана, который естественнымъ путемъ приходитъ къ сознанію основныхъ геометрическихъ истинъ и устанавливаетъ такимъ образомъ естественный порядокъ изложенія геометріи, прежде всего замѣчаетъ это простѣйшее свойство нашего пространства, которое самъ Бертранъ формулируетъ слѣдующимъ образомъ:

„Часть пространства, которую заняло бы тѣло въ одномъ мѣстѣ, не отличается отъ той, которую оно заняло бы въ другомъ, къ чему мы еще прибавимъ, что пространство около одного тѣла то же, что пространство около этого тѣла, помѣщеннаго въ другомъ мѣстѣ“.

Слѣдующій за фактомъ изогенности бросающійся въ глаза любителя фактъ это — возможность раздѣленія пространства на двѣ части такого рода, что „ничего нельзя сказать объ одной, чего нельзя было бы сказать о другой“, при чемъ граница между этими частями находится въ одинаковыхъ взаимоотношеніяхъ съ обѣими частями. Эта граница и представляетъ плоскость. Ясно, какимъ образомъ затѣмъ отъ плоскости дѣлается переходъ къ прямой.

Съ помощью этой аксіомы Бертранъ доказываетъ пересѣкаемость двухъ плоскостей по прямой: „ибо точки, общія двумъ плоскостямъ, служатъ раздѣломъ однородныхъ частей пересѣкающихся плоскостей“.

У самого Бертрана аксіома о плоскости отнюдь не служитъ рабочей аксіомой; онъ о ней скоро забываетъ, и въ дальнѣйшемъ онъ ближе къ Евклиду, чѣмъ долженъ былъ бы быть, если бы послѣдовалъ своимъ основнымъ идеямъ. То же относится и къ аналогичной аксіомѣ о прямой.

Приводимые ниже примѣры я беру не изъ Бертрана, но они могутъ хорошо иллюстрировать значеніе Бертрановскихъ аксіомъ въ до-Лежандровой геометріи.

---

*) L. Bertrand — «Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques prise dans toute son étendue», Genève 1778.

**) Lacroix — «Éléments de Géométrie», Paris 1814.

Объ учебникахъ XVIII вѣка, въ частности о Бертранѣ, см. В. Бобынинъ — «Элементарная геометрія и ея дѣятели во второй половинѣ XVIII вѣка».

Отчего окружность дѣлится діаметромъ пополамъ?—Потому что обѣ полуокружности совершенно одинаковымъ образомъ получаются съ помощью діаметра, а обѣ части плоскости по одну и другую сторону діаметра совершенно однородны относительно этой прямой. Вѣдь въ обоихъ случаяхъ центръ, изъ котораго описывается дуга, берется въ одной и той же точкѣ на діаметрѣ, радіусъ одинъ и тотъ же и концы обѣихъ полуокружностей лежатъ тамъ же — на діаметрѣ, но все это вполнѣ опредѣляетъ окружность.

Отчего равноудаленныя отъ перпендикуляра наклонныя равны?— Потому что для полученія ихъ въ изогенныхъ частяхъ, на которыя дѣлится плоскость прямою, производятся однѣ и тѣ же операціи, вполнѣ опредѣляющія наклонныя. Возстановляются перпендикуляры изъ одной и той же точки, откладываются на нихъ одинаковые отрѣзки DA и DB и концы A и B этихъ отрѣзковъ соединяются съ одной и той же точкой прямой.

Отчего биссектриса угла, образованнаго двумя прямыми, есть геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ этихъ прямыхъ?— Потому что обѣ прямыя и всѣ операціи, выполняемыя при опусканіи на эти прямыя перпендикуляровъ изъ точекъ биссектрисы, одинаковы для изогенныхъ частей плоскости, опредѣляемыхъ этой биссектрисой.

§ 3. Совершенно такимъ же образомъ, какъ въ XVIII вѣкѣ Бертранъ оперировалъ съ изогенностью пространства, въ сравнительно недавнее время Дельбёфъ*) оперируетъ съ гомогенностью — со свойствомъ пространства или пространственныхъ фигуръ сохранять свои свойства при измѣненіи своихъ размѣровъ.

Пространство микрокосмоса то же, что пространство макрокосмоса.

Основной операціей при установленіи постулатовъ является увеличеніе или уменьшеніе фигуры при сохраненіи ея формы. Изъ гомогенности пространства вытекаетъ, что такое увеличеніе или уменьшеніе фигуры возможно безпредѣльно. Отсюда вытекаетъ постулатъ Валлиса**): „для каждой фигуры существуетъ ей подобная произвольнаго размѣра“, къ которому Валлисъ сводитъ 5-ый постулатъ Евклида.

Къ этой аксіомѣ о гомогенности пространства примыкаетъ опредѣленіе прямой (представляющее собою развитіе логически не примѣняемаго опредѣленія Евклида)***): прямая линія — линія одно-

---

*) Delboef — «Sur les fondements de Géométrie»; Delboef — «L'ancienne et les nouvelles géométries», Révue philosophique dirigée par Th. Ribot, T. 36, 37 (1893 — 1894).

Объ изогенности и гомогенности пространства см. также Roussel — «Essai sur les fondements de Géométrie».

**) Wallis — «De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euclidis disceptatio geometrica», Operum mathematicorum volumen alterum, Oxford 1693, стр. 665 — 678.

Engel-Stäckel — «Die Theorie der Parallellinien», Leipzig 1895, стр. 26.

***) «Прямая линія есть та, которая лежитъ равно своими точками» (Опр. I книги I „Началъ“ Евклида, изд. Θ. Петрушевскаго).

родная, т. е. такая, части которой, произвольно выбранныя, подобны между собой или различаются только по длинѣ“.

Что прямая опредѣляется двумя точками, это, по мнѣнію Дельбёфа, вытекаетъ изъ ея гомогенности, ибо

1) прямая получается увеличеніемъ одной ея части, такъ что часть прямой уже опредѣляетъ всю прямую;

2) такъ какъ увеличеніе отрѣзка получается черезъ раздвиженіе концовъ этой прямой, то эти концы, т.-е. двѣ точки, вполнѣ опредѣляютъ прямую.

Конечно, этотъ выводъ не можетъ пониматься въ смыслѣ формально-логическаго вывода.

Это разсужденіе опирается не только на гомогенность прямой, но также и на возможность увеличенія отрѣзка безъ измѣненія его положенія (что, конечно, не имѣетъ мѣста при увеличеніи треугольника), а также на разныя свойства раздвиженія, служащаго для увеличенія отрѣзка, такъ какъ эти свойства не вытекаютъ, конечно, изъ одной только гомогенности прямой.

Тотъ же характеръ имѣетъ доказательство того, что кратчайшая линія между двумя точками есть прямая.

§ 4. Что такое подобіе? Евклидъ, а за нимъ и Лежандръ на этотъ вопросъ не отвѣчаютъ. Они даютъ только опредѣленіе подобныхъ треугольниковъ, а затѣмъ многоугольниковъ. Но того же нельзя сказать о всѣхъ учебникахъ Лежандрова типа. Этому типу учебника мы обязаны методической обработкой идеи преобразованія*). При свѣтѣ этой идеи подобныя фигуры разсматриваются, какъ фигуры, получаемыя одна изъ другой путемъ особаго рода преобразованій.

Это преобразованіе относится къ классу проективныхъ преобразованій, при чемъ послѣднее опредѣляется или аналитически или геометрически, какъ построеніе фигуры, перспективной данной, и переведеніе ея въ другое, не перспективное, положеніе. Отсюда вытекаетъ такое опредѣленіе подобныхъ фигуръ: это — фигуры, которыя можно передвиженіемъ сдѣлать гомотетичными, т.-е. такими, что соотвѣтствующія вершины будутъ лежать на прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ, а соотвѣтствующія стороны сдѣлаются взаимно параллельными.

Не безынтересно сравнить это опредѣленіе съ опредѣленіемъ Веронезе**), стремящимся логизировать эту идею (впрочемъ, возможность этого опредѣленія онъ не доказываетъ, апеллируя къ интуиціи). Подобными называются такія фигуры, для которыхъ возможно установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе между точками такъ, чтобы отрѣзки, соединяющіе соотвѣтственныя точки, были пропорціональны. Если точкѣ A отвѣчаетъ точка A', точкѣ $B - B'$, точкѣ $C - C'$ и точкѣ $D - D'$, то имѣетъ мѣсто пропорція $AB : CD = A'B' : C'D'$.

*) Въ этомъ отношеніи заслуживаютъ вниманія слѣдующіе учебники Лежандрова типа: Vincent — «Cours de Géométrie élémentaire», Paris 1834; Sonnet — «Géométrie théorétique et pratique». Paris 1850.

**) G. Veronese — «Elementi di Geometria ad uso dei Gimnasi e Licei e instituci tecnici», Padova 1911, parti I, II.

Интуивистическій учебникъ занимается воспитаніемъ скорѣе чувства, чѣмъ абстрактнаго понятія — подобія, отказываясь опредѣлять послѣднее въ математическихъ, а тѣмъ болѣе — логическихъ терминахъ. Это воспитаніе ведется съ помощью моделей и рисунковъ.

§ 5. Остается сказать еще о раціоналистахъ. Х. Вольфъ*) опредѣляетъ подобіе такъ: „Подобіе есть тожество тѣхъ признаковъ, которыми вещи другъ отъ друга отличаются". Приведемъ еще сопровождающую это опредѣленіе схолію, которая указываетъ на чисто умозрительную операцію, имѣющую своей цѣлью снять туманъ съ этого опредѣленія.

„Возьмемъ, говоритъ Х. Вольфъ, двѣ вещи: A и B. Направь свое вниманіе на признаки, которые могутъ наблюдаться въ A, и наблюденное запиши на бумагѣ. Съ равнымъ вниманіемъ отмѣть и признаки вещи B, которыя въ ней можешь распознать. Если всѣ признаки, замѣченные въ A и B, окажутся при этомъ одинаковыми, то вещи A и B будутъ подобными. Изъ числа признаковъ исключается только quantitas (размѣръ), который, конечно, нельзя формулировать въ словахъ".

Такимъ образомъ, въ каждомъ геометрическомъ объектѣ слѣдуетъ различать: 1) размѣръ его; 2) форму, опредѣляемую всѣми другими признаками, кромѣ размѣра. Объекты одинаковой формы, но разныхъ размѣровъ, подобны**).

Отнесеніе пары объектовъ къ классу подобныхъ паръ не можетъ быть строго-логически обосновано, ибо предполагаетъ безконечный процессъ, такъ какъ за признаки, напримѣръ, двухъ треугольниковъ можно принять и углы между сторонами, и углы, образованные медіанами со сторонами, и отношеніе сторонъ, и отношеніе медіаны къ биссектрисѣ и т. д., — вообще, безконечное число свойствъ. И дѣйствительно, Вольфъ не дѣлаетъ изъ этого опредѣленія никакихъ выводовъ. Оно остается въ такой же мѣрѣ логически не примѣняемымъ, какъ опредѣленіе прямой у Евклида.

Вольфіанская теорія подобія опирается на его 6-ую аксіому, соединяющую въ себѣ безконечное число аксіомъ: „Если двѣ фигуры или линіи одинаковымъ путемъ производятся или описываются и если при этомъ тѣ элементы, съ помощью которыхъ онѣ производятся, подобны, то подобны также фигуры и линіи". Необходимо пояснить, что для обѣихъ фигуръ предполагается по одному элементу, который подвергается одинаковымъ операціямъ***).

При этомъ, конечно, эта аксіома можетъ лечь въ основаніе теоріи подобія только въ томъ случаѣ, если подобіе нѣкоторыхъ геометрическихъ объектовъ, — напримѣръ, двухъ малыхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, — признать непосредственно. Углы Вольфъ не признаетъ

---

*) Wolfius — Compendium elementorum Matheseos Universae in usum studiosae luventutis adornatum a Christiano Wolfio», Venetiis 1761.

**) Такъ опредѣляетъ подобіе Лейбницъ.

***) Операціи, конечно, берутся только тѣ, которыя даютъ вполнѣ опредѣленный результатъ. Нельзя считать операціей надъ отрѣзкомъ проведеніе изъ точки, лежащей внѣ его, прямой, ему параллельной.

за элементы: построеніе угла на отрѣзкѣ не вводитъ новаго элемента и представляетъ операцію надъ тѣмъ отрѣзкомъ, въ концѣ котораго онъ строится*). Построенія равныхъ угловъ на двухъ различныхъ отрѣзкахъ разсматриваются, какъ одинаковыя операціи надъ подобными элементами.

Въ силу подобія отрѣзковъ прямыхъ, принимаемыхъ за радіусы двухъ круговъ C_1 и C_2, и вслѣдствіе тожественности дѣйствій при описаніи этихъ круговъ — подобны и всякіе два круга C_1 и C_2.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, имѣющіе по парѣ соотвѣтственно равныхъ угловъ:

$$\angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B_1 = \angle B_2,$$

должны быть признаны подобными, ибо оба производятся съ помощью построенія въ концахъ отрѣзковъ c_1 и c_2 соотвѣтственно равныхъ угловъ.

По тѣмъ же причинамъ подобны два отрѣзка съ построенными въ концѣ каждаго изъ нихъ равными углами или какой-либо уголъ съ отрѣзкомъ на его сторонѣ и тотъ же уголъ (а не только равный) съ другимъ отрѣзкомъ: Если пересѣчь прямыя, образующія этотъ уголъ, двумя параллельными, то пары отрѣзковъ (a, a'), (b, b'), получаемыхъ на его сторонахъ, слѣдуетъ считать, на основаніи Вольфіанской аксіомы, подобными (въ обоихъ случаяхъ проведеніе прямой изъ конца отрѣзка въ одномъ и томъ же направленіи), вслѣдствіе чего и всѣ признаки этихъ паръ, а, слѣдовательно, и всякія взаимныя зависимости ихъ одинаковы; въ частномъ случаѣ, это относится и къ тѣмъ зависимостямъ, которыя получаются при ихъ количественномъ сравненіи (3-е опредѣленіе 5-ой книги „Началъ“ Евклида“)**), т.-е.

$$a : a' = b : b'.$$

Отсюда выводится пропорціональность соотвѣтственныхъ сторонъ въ подобныхъ треугольникахъ. Все это даетъ возможность X. Вольфу обойти трудный въ методическомъ отношеніи „случай несоизмѣримости“ въ теоріи подобія.

Покажемъ, какое значеніе имѣла аксіома Вольфа, вызванная отнюдь не научными, а чисто-методическими нуждами, въ экономизаціи математической мысли. Возьмемъ два подобныхъ треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ и, вписавъ въ нихъ круги, соединимъ точки касанія пря-

*) Къ операціи построенія опредѣленныхъ угловъ остается только прибавить переносъ построенныхъ отрѣзковъ, проведеніе прямыхъ, параллельныхъ данному или построенному отрѣзку, дѣленіе отрѣзка на части, дѣленіе угла, описаніе окружности радіусомъ, равнымъ построенному отрѣзку, соединеніе точекъ прямой и опредѣленіе точки пересѣченія прямыхъ. Во времена Вольфа вѣрили, что всѣ построенія могутъ быть выполнены съ помощью циркуля и линейки; поэтому, если Вольфъ разумѣетъ подъ построеніями — Евклидовы построенія, то мы ихъ не опредѣляемъ ближе.

**) „Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ“, пер. Ѳ. Петрушевскаго, СПб., 1819. Книга V, 3 опредѣленіе: „Отношеніе есть взаимная нѣкая зависимость двухъ однородныхъ величинъ по ихъ количеству“, стр. 164.

мыми. Получаемые такимъ образомъ треугольники $E_1F_1G_1$ и $E_2F_2G_2$ подобны.

Вольфіанская теорія подобія даетъ такое доказательство. Основные элементы треугольниковъ $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. Далѣе, операціи, выполняемыя для полученія треугольника $E_1F_1G_1$ изъ треугольника $A_1B_1C_1$ и треугольника $E_2F_2G_2$ изъ треугольника $A_2B_2C_2$, одинаковы, такъ какъ онѣ состоятъ въ

1) дѣленіи угловъ треугольниковъ пополамъ;

2) опусканіи перпендикуляровъ изъ точки пересѣченія биссектрисъ на стороны;

3) соединеніи основаній перпендикуляровъ прямыми.

Для негомогеннаго пространства, каковымъ является, напримѣръ, пространство Лобачевскаго, аксіома Вольфа не имѣетъ мѣста.

Надъ отрѣзкомъ a возможенъ рядъ операцій. По его уменьшеніи уже становится невозможнымъ произвести эти операціи. Для неизогеннаго пространства — тѣ операціи, которыя возможны при одномъ положеніи a, невозможны уже при другомъ.

§ 6. Геометрическому учебнику Лежандрова типа побѣда досталась легко. Послѣ выхода въ свѣтъ „Элементовъ“ Лежандра у него не было серьезныхъ противниковъ, кромѣ русскаго математика Гурьева, оригинальныя сочиненія котораго, написанныя на русскомъ языкѣ, не были оцѣнены и не оказали вліянія даже на русскую учебную литературу*). Въ особенности быстро досталась побѣда учебнику Лежандра во Франціи. Французскій учебникъ XVIII вѣка находится подъ сильнымъ вліяніемъ Арно, автора „L'art de penser“ и „Nouveux éléments de Géométrie“, и довольно значительно уклоняется отъ Евклида. Арно былъ прекраснымъ философомъ, но плохимъ методистомъ. Его сочиненіе дало оригинальныя, совершенно чуждыя Евклиду, идеи, относящіяся къ распорядку теоремъ, къ сущности опредѣленій и аксіомъ, но не дало новыхъ методическихъ идей.

Подъ напоромъ уже методическихъ требованій учебникъ Арнольдовскаго типа постепенно теряетъ все цѣнное и оригинальное. Съ методической точки зрѣнія дѣйствительно новое даетъ только Клеро**); но Клеро изъ методическихъ затрудненій выходитъ съ помощью обращенія неочевидныхъ положеній въ опытныя данныя, въ которыя онъ предлагаетъ вѣрить, что, конечно, не могло удовлетворить стремившихся къ строгой постановкѣ преподаванія математики. Сочиненія де-ла-Шапелля***) и Л. Бертрана представляютъ не учебники, а скорѣе популяризированныя геометріи. Такимъ образомъ, во Франціи учебникъ Лежандра не имѣлъ сильныхъ конкурентовъ. Иначе обстояло дѣло въ Германіи. Здѣсь мы имѣемъ прежде всего „Mathesis Iuve-

*) Въ настоящее время на работы Гурьева обратили вниманіе историкъ В. Бобынинъ и методистъ Галанинъ.

**) Clairaut — «Éléments de Géométrie», Paris 1775 (первое изданіе вышло въ 1741 г.).

***) De-la-Chapelle — «Institutions de Géométrie», 1765.

nalis“ Іоганна Штурма*), методическія идеи котораго пускаютъ свои корни въ педагогику Амоса Коменскаго, затѣмъ богатую учебную литературу Х. Вольфа и его учениковъ, обрабатывающихъ учебникъ именно съ методической точки зрѣнія.

Здѣсь слѣдуетъ сказать нѣсколько словъ объ односторонне-объективной методѣ, въ которой, противополагая ее односторонне-субъективной методѣ Песталоцци, находятъ обычно одни только недостатки. Песталоцци ставитъ цѣлью обученія — развитіе способностей, Вольфъ — знанія; но Вольфъ прекрасно сознаетъ необходимость упражненій для пріобрѣтенія твердыхъ и ясныхъ знаній. „Omnis habitus, говоритъ онъ, acquiritur exercitu, non autem regularum observandarum nudo studio“, т.-е. „всякое знаніе пріобрѣтается упражненіями, но не голымъ изученіемъ надлежащихъ правилъ“; въ виду этого въ его учебникахъ помѣщены и упражненія. Наши русскіе учебники XVIII вѣка [Румовскаго**), Муравьева***), Аничкова****)] представляютъ довольно типичные Вольфіанскіе учебники. Нѣмецкій крупный методистъ Кестнеръ*****) принадлежитъ еще къ Вольфіанской школѣ, хотя, можно сказать, уже насыщенъ новыми идеями, — напримѣръ, изъ теоріи предѣловъ, на мѣстѣ которой въ Вольфіанскихъ учебникахъ обычно еще остаются недѣлимыя.

Такимъ образомъ, въ Германіи побѣдоносно шествующій Лежандръ встрѣтилъ оригинальную, уже крѣпко вставшую на ноги, геометрическую методику.

Безспорно, Вольфъ долженъ былъ оказать вліяніе и на французскую учебную литературу. Въ тѣхъ немногихъ французскихъ учебникахъ XIX столѣтія, которые болѣе рѣзко отклонились отъ Лежандрова типа, хотя все-таки представляютъ типы, къ нему близкіе, можно усмотрѣть вліяніе Вольфа на ряду съ вліяніями Арно и Бертрана.

§ 7. Это вліяніе можно замѣтить, напримѣръ, въ сочиненіи довольно оригинальнаго методиста Сюзанна******).

Разсмотримъ приводимое имъ доказательство равновеликости пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами. Теорему эту мы доказываемъ совершенно иначе, чѣмъ соотвѣтствующій плоскій аналогонъ: треугольники съ равными основаніями и высотами равновелики. Эту послѣднюю теорему можно доказывать, обнаруживая

---

*) Joh. Christophori Sturmii «Mathesis Iuvenalis»... Anno 1699.

**) С. Румовскій — «Сокращенія математики», СПб., 1760.

***) Н. Муравьевъ — «Начальное основаніе математики», СПб., 1752.

****) Аничковъ — «Теоретическая и практическая геометрія».

*****) Kästner — «Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie ebenen und sphärischen etc.», Göttingen 1786. Эта книга была переведена на русскій языкъ.

******) Suzanne — «De la manière d'étudier la mathématique», Paris, 1809. Отъ Лежандра отклоняется еще больше: Develay — «Éléments de Géométrie distribués dans l'ordre naturel», Paris, 1816 и Остроградскій — «Руководство къ геометріи».

разложимость треугольниковъ на полигоны, соотвѣтственно равные, или же обнаруживая такую разложимость для полигоновъ, получаемыхъ черезъ присоединеніе къ треугольникамъ равныхъ полигоновъ *).

Согласно изслѣдованіямъ Дена**) и Кагана***), та же схема доказательства съ замѣной полигона — полиэдромъ является неосуществимой для пирамидъ. Представляется, что остается только одинъ путь — методы исчисленія безконечно-малыхъ въ той или другой формѣ [методъ исчерпыванія (на школьномъ жаргонѣ: чертова лѣстница) или принципъ Кавальери].

Сюзаннъ идетъ не по тому пути, невозможность котораго доказана Деномъ и Кагано мъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ избѣгаетъ и безконечно-малыхъ. Въ основаніе своего доказательства онъ ставитъ постулатъ, приписываемый имъ Левеку: „Если мы имѣемъ тѣло P и производимъ построеніе тѣла Q съ помощью операцій, опредѣляемыхъ только формой тѣла P, а не его размѣрами, то отношеніе объемовъ тѣлъ P и Q не зависитъ отъ размѣра тѣла P и при переходѣ отъ тѣла P къ тѣлу P', подобному тѣлу P, сохраняется", такъ что

$$\text{об. } P : \text{об. } Q = \text{об. } P' : \text{об. } Q'.$$

Такими построеніями будутъ: дѣленіе отрѣзка или угла на равныя части, проведеніе параллельныхъ и т. д.

По всей вѣроятности, эта аксіома пускаетъ свои корни въ Вольфіанскую теорію подобія. То, что Левекъ и Сюзанъ называютъ операціей, опредѣляемой только формой, Вольфъ называетъ просто построеніями надъ однимъ основнымъ элементомъ. Согласно аксіомѣ Вольфа, если тѣла P и P' подобны, то и тѣла Q и Q' подобны, но въ такомъ случаѣ подобны и пары (P, Q) и (P', Q'), а потому отношенія об. P : об. Q и об. P' : об. Q' одинаковы.

Вмѣсто объемовъ тѣлъ P, Q можно взять площади или прямолинейные отрѣзки и формулировать обобщенный постулатъ Левека такимъ образомъ: „Если мы имѣемъ двѣ подобныя фигуры S и S' и съ помощью одинаковыхъ (въ Вольфіанскомъ смыслѣ) построеній получаемъ изъ нихъ (прямолинейные отрѣзки, площади, объемы) P и P', а затѣмъ, съ помощью одинаковыхъ построеній, Q и Q', то

$$P : Q = P' : Q'.$$

Общая схема опредѣленія объема, основаннаго на этомъ принципѣ, состоитъ изъ слѣдующихъ моментовъ:

---

*) Hilbert — «Grundlagen der Geometrie». Каганъ — «Основанія геометріи». Киселевъ — «Геометрія», изд. 1913 г. Wittstein — «Lehrbuch der Elementar-Mathematik», Bd. I, гдѣ можно найти доказательство равновеликости треугольниковъ съ равными высотами и основаніями по разложенію безъ дополненія.

**) Dehn — «Ueber den Rauminhalt», Mathem. Annalen, 55, 1902.

***) Kagan — «Ueber die Transformation der Polyeder», Math. Ann., 57. В. Каганъ — «О преобразованіи многогранниковъ», изд. «Матезисъ», Одесса.

1) Тѣло P разбивается на нѣсколько равныхъ между собой тѣлъ, подобныхъ тѣлу P, и на нѣсколько тѣлъ, равныхъ тѣлу Q, объемъ котораго мы знаемъ, такъ что

$$\text{об. } P = \alpha \text{ об. } P' + \beta \text{ об. } Q,$$

гдѣ α и β извѣстны;

2) если об. $P = \lambda$ об. Q, то, согласно основному принципу, об. $P' = \lambda$ об. Q';

3) на основанiи сдѣланнаго построенiя опредѣляется отношенiе $m = \dfrac{\text{об. } Q}{\text{об. } Q'}$.

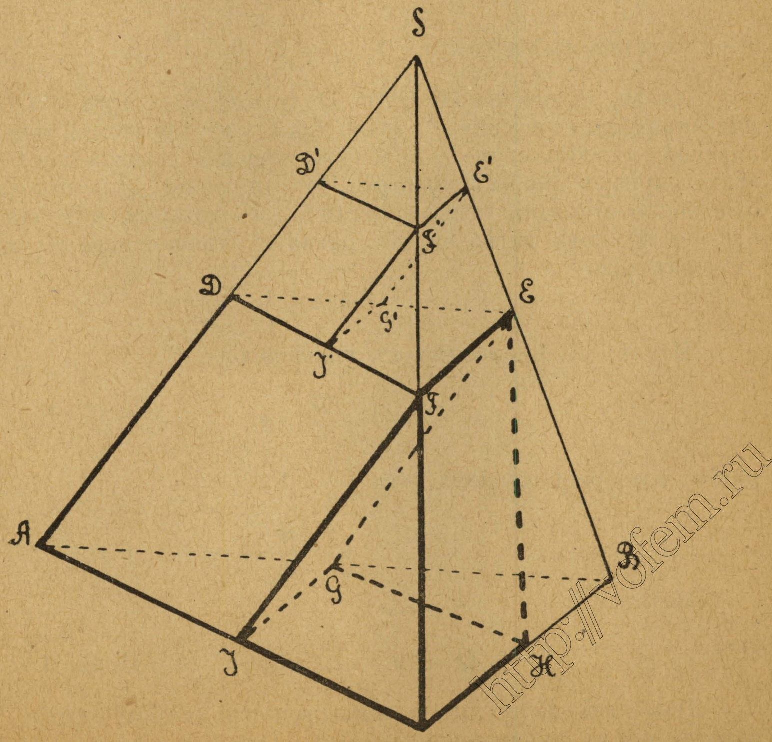
Для λ получается уравненiе

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda}{m} + \beta,$$

которое остается рѣшить.

Аналогичная схема годится и при опредѣленiи площадей.

Опредѣленiе объема треугольной пирамиды ведется слѣдующимъ образомъ.



Въ треугольной пирамидѣ $SABC$ (см. чертежъ) проводятся: плоскость DEF, параллельная основанiю ABC, плоскость EGH, параллельная боковой грани SAC, и плоскость $EFIG$, параллельная ребру SA, при чемъ точка D есть середина ребра SA, въ силу чего имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$SD = \tfrac{1}{2} SA, \quad BH = \tfrac{1}{2} BC.$$

Этимъ путемъ пирамида разбивается

1) на двѣ треугольныя призмы $AGIDEF$ и $GEHIFC$ (обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ Q и Q_1);

2) на двѣ равныя между собою треугольныя пирамиды $DEFS$ и $GBHE$ (обозначимъ каждую изъ нихъ черезъ P').

Объемъ первой призмы Q равенъ произведенію площади основанія AGI на ея высоту, т.-е. на $^1/_2\,h$, гдѣ h есть высота разсматриваемой пирамиды. Объемъ второй призмы Q_1, разсматриваемой, какъ половина параллелепипеда съ основаніемъ $GHCI$ равенъ произведенію площади основанія $GHCI$ на половину высоты этого параллелепипеда, т.-е. на $^1/_2 \,.\, ^1/_2\,h = {}^1/_4\,h$.

Но легко видѣть, что пл. $GHCI = 2$ пл. AGI. Поэтому об. $Q_1 =$ об. Q. Такимъ образомъ,

$$\text{об. } P = 2 \text{ об. } P' + 2 \text{ об. } Q,$$

т.-е. въ данномъ случаѣ $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Далѣе, отношеніе об. Q : об. Q' (гдѣ Q' есть призма $DG'I'D'E'F'$, вписанная въ пирамиду P' точно такимъ же образомъ, какъ призма Q вписана въ пирамиду P) равно отношенію произведеній основаній этихъ призмъ на ихъ высоты. Но отношеніе ихъ основаній равно отношенію основаній тѣхъ пирамидъ, въ которыя онѣ вписаны; послѣднее же, какъ легко видѣть, равно 4; отношеніе же высотъ равно 2; слѣдовательно,

$$m = 8.$$

Итакъ, мы приходимъ къ уравненію

$$\lambda = \frac{2\lambda}{8} + 2,$$

рѣшая которое получаемъ, что

$$\lambda = \frac{8}{3}.$$

Поэтому

$$\text{об. } P = {}^8/_3 \text{ об. } Q = {}^8/_3 \,.\, {}^1/_4 \text{ пл. } ABC \,.\, {}^1/_2\,h = {}^1/_3 \text{ пл. } ABC \,.\, h.$$

Изъ этой формулы и выводится упомянутая выше теорема о равновеликихъ пирамидахъ.

Методъ обобщается такимъ образомъ.

1) P разлагается на неодинаковыя подобныя тѣла P_i различныхъ размѣровъ:

$$\text{об. } P = \sum_{i=1}^{i=p} a_i \text{ об. } P_i + bQ,$$

гдѣ a_i и b суть цѣлыя положительныя числа;

2) если об. $P = \lambda$ об. Q, то об. $P_i = \lambda$ об. Q_i, гдѣ каждое Q_i по отношенію къ P_i построено точно такъ же, какъ Q относительно P;

3) на основаніи построенія опредѣляются отношенія $m_i = \dfrac{Q}{Q_i}$;

4) по сокращеніи на Q получаемъ уравненіе, опредѣляющее λ:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{i=p} a_i \frac{\lambda}{m_i} + b.$$

Можно разсмотрѣть еще болѣе общій случай, отвѣчающій какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ значеніямъ коэффиціентовъ a_i и b, но мы предоставляемъ это читателю.

Нетрудно видѣть, что проблема о возможности доказательства равновеликости тѣлъ A и B этимъ методомъ сводится къ слѣдующей интересной задачѣ: возможно ли прибавленіемъ и исключеніемъ изъ A и B подобныхъ имъ тѣлъ $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$ привести ихъ къ двумъ эквивалентнымъ тѣламъ $\overline{A}$, $\overline{B}$ (т.-е. такимъ, которыя разлагаются на соотвѣтственно равные между собою полиэдры $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \ldots$, или же такимъ, которыя послѣ присоединенія къ нимъ равныхъ частей образуютъ тѣла, допускающія такое разложеніе на равные между собою полиэдры).

Структура спектровъ.

Ф. Кроза.

Линейчатые спектры.

I. Введеніе.

Вопросъ о строеніи спектровъ является одной изъ основныхъ проблемъ спектроскопіи. Послѣ періода сомнительныхъ попытокъ эта проблема впервые получила правильное разрѣшеніе въ трудахъ Кайзера (Kayser) и Рунге (Runge), а также Ридберга (Rydberg). Начиная съ этого времени,— въ особенности, благодаря систематическимъ изслѣдованіямъ Ритца (Ritz), Пашена (Paschen) и Фоулера (Fowler),— наши свѣдѣнія по этому вопросу значительно расширились. Въ настоящей статьѣ мы намѣрены подѣлиться этими свѣдѣніями съ читателями нашего журнала.

Такъ какъ сущность свѣта состоитъ въ колебательномъ движеніи, то совокупность, или, согласно обычной терминологіи, спектръ лучей, испускаемыхъ или поглощаемыхъ какимъ-либо тѣломъ при извѣстныхъ условіяхъ, можно будетъ считать вполнѣ опредѣленнымъ, если мы измѣримъ: 1) періодъ колебанія или, что сводится къ тому же, длину волны, характерную для каждаго вида лучей, и 2) интенсивность соотвѣтствующаго испусканія или поглощенія лучей. Эти измѣренія представляютъ собою первый этапъ на пути къ разрѣшенію занимающей насъ проблемы.

Далѣе слѣдуетъ найти законы распредѣленія интенсивностей по шкалѣ длины волны. Здѣсь мы сразу можемъ выдѣлить три большихъ класса спектровъ. Если мы подвергаемъ изслѣдованію свѣтъ, испускаемый, напримѣръ, раскаленнымъ твердымъ тѣломъ, то въ полѣ спектроскопа мы замѣчаемъ одну сплошную полосу, вдоль которой можно констатировать постепенное измѣненіе интенсивности и, въ зависимости отъ случая, одинъ или нѣсколько максимумовъ послѣдней: это — спектръ сплошной. Если, напротивъ, изслѣдуемое тѣло есть газъ или паръ, то кривая интенсивностей даетъ чаще всего максимумы, отдѣленные другъ отъ друга промежутками, въ которыхъ интенсивность почти равна нулю: въ этомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло со спектромъ прерывнымъ. Но спектры послѣдняго рода можно, въ свою очередь, свести къ двумъ главнымъ типамъ. Одни изъ этихъ спектровъ состоятъ изъ отдѣльныхъ полосокъ, которыя при помощи приборовъ большой силы могутъ быть разложены на группы тѣсно расположенныхъ тонкихъ линій, интенсивность которыхъ возрастаетъ по мѣрѣ того, какъ увеличивается густота ихъ расположенія; это — спектры полосатые. Другіе изъ несплошныхъ спектровъ состоятъ изъ болѣе или менѣе тонкихъ линій, которыя иногда очень многочисленны; въ противоположность тому, что мы наблюдаемъ въ полосатыхъ спектрахъ, эти линіи не образуютъ областей скопленія, которыя въ то же время представляли бы собою максимумы интенсивности; это — спектры линейчатые. Въ настоящее время они изучены лучше всѣхъ остальныхъ, и въ дальнѣйшемъ изложеніи мы займемся исключительно этими послѣдними спектрами.

Въ случаѣ линейчатыхъ спектровъ изслѣдованіе законовъ распредѣленія интенсивностей должно естественно свестись къ нахожденію числовыхъ соотношеній между длинами волнъ, соотвѣтствующихъ линіямъ этихъ спектровъ.

Такимъ образомъ, изслѣдованіе должно привести насъ къ установленію отдѣльныхъ видовъ линій, положеніе которыхъ опредѣлялось бы при помощи эмпирическихъ формулъ. Но, чтобы быть увѣреннымъ въ томъ, что это дѣйствительно виды естественные, имѣющіе настоящее физическое значеніе, слѣдуетъ быть въ состояніи обнаруживать ихъ при измѣненіяхъ способовъ полученія спектровъ. Способы эти могутъ быть весьма различными. Для того, чтобы довести газъ до состоянія лучеиспусканія, можно либо сообщить ему высокую температуру, либо ввести его въ пламя; можно также подвергнуть его воздѣйствію соотвѣтственнымъ образомъ подобранныхъ свѣтовыхъ лучей или же корпускулярныхъ излученій, каковыми являются лучи катодные, лучи анодные, а также α- и β-лучи радіоактивныхъ тѣлъ. Наконецъ, можно пользоваться вольтовой дугой или электрической искрой; послѣдніе методы являются даже наиболѣе употребительными.

Изученіе всѣхъ этихъ способовъ полученія спектровъ обнаружило, что всѣ линіи интересующихъ насъ здѣсь спектровъ могутъ быть сведены къ двумъ типамъ. Къ первому типу принадлежатъ тѣ линіи, которыя получаются въ наружной части пламени Бунзеновской горѣлки, въ вольтовой дугѣ, а также въ той части искры, которая носитъ названіе сіянія въ противоположность огневой полосѣ. Линіи другого типа, характерныя для голубого конуса пламени Бунзена, слабо выражены въ дугѣ, за исключеніемъ тѣхъ мѣстъ, которыя находятся въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ полюсами; въ искрѣ эти линіи наблюдаются рѣзко-выраженными, но при достаточномъ увеличеніи самоиндукціи разрядной цѣпи онѣ исчезаютъ, сохраняясь лишь въ блестящихъ точкахъ, примыкающихъ къ электродамъ [Гемзалехъ (Hemsalech)]. Линіи перваго типа вообще называются дуговыми линіями, между тѣмъ какъ линіи второго типа носятъ названіе искровыхъ линій или усиленныхъ линій; это enhanced lines (усиленныя линіи) Локіера (Lockyer). Въ дѣйствительности нѣтъ рѣзкаго характернаго различія между линіями обоихъ типовъ. Между отвѣчающими вышеприведеннымъ опредѣленіямъ дуговыми и искровыми линіями наблюдается весьма много промежуточныхъ видовъ, такъ что пришлось установить нѣсколько классовъ искровыхъ линій; въ виду этого подчасъ бываетъ довольно трудно опредѣлить, къ какому типу принадлежитъ данная линія.

Для того, чтобы исключить подобнаго рода неопредѣленность, является удобнымъ наблюдать не тѣ измѣненія спектровъ, которыя обусловливаются различіемъ способовъ полученія ихъ, такъ какъ механизмъ этихъ способовъ намъ очень мало извѣстенъ, а тѣ измѣненія, которыя можно вызвать, подвергая источники свѣта воздѣйствію вполнѣ опредѣленныхъ физическихъ агентовъ, каковыми являются давленіе, а также магнитное или электрическое поле. При этихъ условіяхъ измѣненія, претерпѣваемыя спектрами, состоятъ либо въ разложеніи линій на поляризованныя составляющія, либо въ измѣненіи длины волны. Во всякомъ случаѣ измѣненія эти могутъ быть точно измѣрены; кромѣ того, они, очевидно, тѣсно связаны со способомъ происхожденія модифицированныхъ спектровъ, въ виду чего мы здѣсь имѣемъ могучее и вѣрное средство для провѣрки числовыхъ законовъ распредѣленія. Мало того, обнаруживая, какъ реагируетъ свѣтовой атомъ, эти измѣненія даютъ намъ возможность составить себѣ представленіе объ его строеніи и указываютъ намъ, въ какомъ направленіи слѣдуетъ вести изслѣдованіе для построенія достаточно удовлетворительной теоріи происхожденія спектровъ; послѣдній вопросъ долженъ представлять собою третій и послѣдній этапъ на пути къ разрѣшенію основной спектроскопической проблемы.

II. Списки спектровъ.

Линіи, составляющія линейчатые спектры, не обусловлены вполнѣ монохроматическими лучами, а соотвѣтствуютъ очень узкимъ интерваламъ, обнимающимъ собою лучи съ различной длиной волнъ. Отсюда слѣдуетъ, что полная характеристика такого спектра состоитъ не только въ измѣреніи длины волнъ, соотвѣтствующихъ центру линій этого спектра, но также и въ опредѣленіи ширины линій, ихъ интенсивности и ихъ внутренней структуры.

Въ дѣйствительности, однако, таблицы спектровъ, которыми мы въ настоящее время располагаемъ, весьма неполны, — въ особенности, поскольку дѣло касается интенсивности, ширины и структуры линій. Уже давно при помощи дифракціонныхъ рѣшетокъ можно было обнаружить, что часто спектральныя линіи состоятъ изъ нѣсколькихъ составляющихъ; самая интенсивная изъ этихъ составляющихъ разсматривалась, какъ главная линія, а другія, — какъ ея спутники. Эти составляющія, по большей части, очень тѣсно примыкаютъ другъ къ другу; ихъ можно было обнаружить и расчленить только благодаря значительной разрѣшающей силѣ интерференціонныхъ приборовъ, каковымъ, напримѣръ, является интерферометръ Фабри (Fabry) и Перо (Pérot). При помощи того же прибора Фабри и Бюиссону (Buisson) впервые удалось точно измѣрить ширину нѣкоторыхъ линій. Что касается интенсивности, то, по большей части, удовлетворялись приблизительной ея оцѣнкой, и лишь очень небольшое число линій подверглось фотометрическому изслѣдованію.

Измѣреніе длины волнъ подвергалось гораздо болѣе полному изслѣдованію; эталоны, которыми при этомъ пользуются, были установлены на интернаціональныхъ конгрессахъ. Въ виду того, что въ системѣ эталоновъ, установленной Роулэндомъ (Rowland), который пользовался вогнутыми рѣшетками, допущены незначительныя погрѣшности, было рѣшено замѣнить ее новой, такъ называемой интернаціональной системой, установленной исключительно при помощи интерферометра Фабри и Перо. Эти физики въ сотрудничествѣ съ Бенуа (Benoît) опредѣлили, какъ функцію метра-эталона, длину волны красной линіи кадмія, — линіи простой и, при извѣстныхъ условіяхъ, весьма рѣзкой. Они нашли, что при нормальномъ давленіи, при сухости воздуха и при температурѣ въ 15° С. она равна $6438,4696 \cdot 10^{-10}$ *м.* Обыкновенно говорятъ, что она равна 6438,4696 ангстрёмамъ, при чемъ ангстрёмъ (ångström), общеупотребительная въ настоящее время единица въ спектроскопіи, принимается равнымъ 10^{-8}*см.* съ точностью до одной десятимилліонной*). Вслѣдъ затѣмъ съ длиною волны этой линіи кадмія сравнивали длины волнъ цѣлаго ряда линій, выбранныхъ, главнымъ образомъ, въ дуговомъ спектрѣ желѣза и слѣдовавшихъ одна за другой съ интервалами, приблизительно, въ 50 ангстрёмовъ; среднія величины, выведенныя изъ чиселъ, полученныхъ различными наблюдателями, были приняты въ качествѣ вторичныхъ интернаціональныхъ эталоновъ. Въ настоящее время серія такимъ образомъ принятыхъ „мѣтокъ“ простирается отъ 20581,31 ангстрёмовъ (въ инфракрасной части) до 3370,789 ангстрёмовъ (въ ультрафіолетовой части).

При помощи указанныхъ линій, которыя служатъ нормальными мѣтками, сравнительно легко опредѣлить длину волны какой-угодно линіи путемъ интерполяціи между длинами волнъ двухъ достаточно близкихъ мѣтокъ, между которыми эта линія находится. Въ настоящее время мы располагаемъ таблицами длинъ волны для большинства линій различныхъ элементовъ, начиная съ 60000 ангстрёмовъ въ инфра-красной части и кончая 1000 ангстрёмовъ (и даже нѣсколько меньше) въ крайней ультра-фіолетовой части.

Несмотря на многочисленные еще пропуски, которыми страдаютъ эти таблицы, изъ коихъ нѣкоторыя построены на системѣ эталоновъ Роулэнда, онѣ все-таки дали возможность произвести систематическое изслѣдованіе законовъ распредѣленія линій въ спектрахъ различныхъ элементовъ. По отношенію къ этому вопросу опытъ показалъ, что слѣдовало пользоваться не шкалой длины волны, а шкалой частоты колебаній. Какъ извѣстно, частота колебаній N связана съ

---

*) Эта единица названа такъ въ честь шведскаго физика Ангстрёма (Ångström), который впервые установилъ систему эталоновъ для длины волны.

длиной волны въ безвоздушномъ пространствѣ λ формулой $N = \frac{V}{\lambda}$, гдѣ V есть скорость свѣта въ безвоздушномъ пространствѣ. Но скорость эта, одинаковая для всѣхъ лучей, извѣстна намъ съ приближеніемъ лишь до одной тысячной; поэтому нашли болѣе удобнымъ пользоваться для выраженія частоты колебаній количествомъ ν, меньшимъ, чѣмъ N, и ему пропорціональнымъ; количество ν выражаетъ собою число волнъ съ длиною λ, заключающихся въ какой-либо опредѣленной единицѣ длины, — въ данномъ случаѣ въ сантиметрѣ. Такимъ образомъ, если длина волны λ выражена въ ангстрёмахъ, мы будемъ имѣть: $\nu = \frac{1}{\lambda} \cdot 10^{-8}$; чтобы перейти отъ шкалы длинъ волны λ къ шкалѣ уменьшенной частоты колебаній ν, достаточно, пользуясь коэффиціентомъ преломленія воздуха, привести къ безвоздушному пространству длины волнъ, установленныя экспериментальнымъ путемъ, и взять ихъ обратныя величины.

Результатомъ этихъ изслѣдованій было открытіе спектральныхъ серій. Серія есть совокупность линій, которыя, по мѣрѣ увеличенія частоты колебаній, располагаются все болѣе густо и становятся все менѣе интенсивными, стремясь къ нѣкоторой точкѣ скопленія линій, называемой предѣломъ серіи.

III. Серіи.

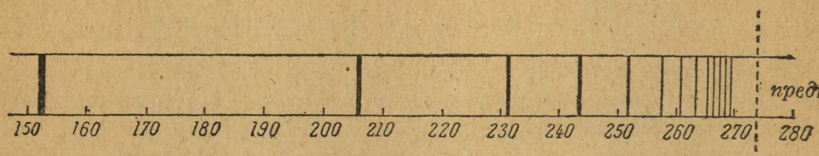
§ 1. Серіи въ дуговыхъ спектрахъ.

Существованіе серій все болѣе сходящихся линій было раньше всего обнаружено для спектровъ дугового типа. Это открытіе явилось результатомъ установленія двухъ существенныхъ фактовъ. Первый изъ нихъ заключается въ томъ, что въ нѣкоторыхъ спектрахъ наблюдаются группы, состоящія изъ двухъ или трехъ линій и совершенно одинаковымъ образомъ повторяющіяся по нѣскольку разъ (дуплеты и триплеты). Впервые это было подмѣчено Маскаромъ (Mascart) въ 1869 году. Позже Гартлей (Hartley) нашелъ, что, если разсматривать линіи по шкалѣ частоты колебаній, то интервалы между членами этихъ группировокъ, двойныхъ или тройныхъ, являются одними и тѣми же для даннаго спектра. Закономѣрность въ послѣдовательности этихъ группировокъ впервые была открыта Бальмеромъ (Balmer) въ 1885 году; онъ установилъ, что четыре главныя линіи водорода могутъ быть представлены по шкалѣ частоты колебаній при помощи формулы

$$\nu = A - \frac{N}{m^2},$$

гдѣ A и N суть двѣ постоянныя величины, а m принимаетъ послѣдовательныя цѣлыя значенія, начиная съ 3. Въ скоромъ времени послѣ этого ту же формулу удалось примѣнить, съ точностью до $^1/_{100000}$, къ девяти другимъ линіямъ, найденнымъ Корню (Cornu) въ ультрафіолетовой части спектра. Фигура 1 изображаетъ совокупность этихъ линій, расположенныхъ по шкалѣ частоты колебаній, при чемъ интенсивность отмѣчена въ грубыхъ чертахъ при помощи черточекъ соотвѣтственной толщины. Здѣсь можно видѣть, что интенсивность убываетъ по мѣрѣ уменьшенія интерваловъ, и что линіи какъ бы стремятся къ нѣкоторому предѣлу, соотвѣтствующему частотѣ колебаній ν, равной $A = 27419,82$ въ интернаціональной системѣ.

Вся важность этого результата была понята тотчасъ же; были предприняты обширныя изслѣдованія съ цѣлью найти аналогичные законы распредѣленія въ линейчатыхъ спектрахъ другихъ элементовъ. Этимъ путемъ удалось прійти къ закону послѣдовательности группировокъ Гартлея и къ разложенію большого числа спектровъ на системы серій, построенныхъ по образцу серіи спектра водорода. Формулы этихъ серій представляютъ собою обобщенія формулы Бальмера.



Фиг. 1.

Серія Бальмера.

Однимъ изъ первыхъ и наиболѣе удачныхъ изъ этихъ обобщеній является формула, предложенная Ридбергомъ (Rydberg):

$$\nu = A - \frac{N}{(m+\mu)^2},$$

гдѣ N есть общая постоянная величина, A представляетъ собою предѣльную частоту колебаній серіи, а μ есть число, постоянное для данной серіи и меньшее единицы. Опытъ показалъ, что эта формула вполнѣ удовлетворительно воспроизводитъ послѣдніе члены серіи, но что она приводитъ къ результатамъ, тѣмъ менѣе согласующимся съ наблюденіемъ, чѣмъ болѣе мы приближаемся къ первымъ членамъ. Поэтому Ритцъ (Ritz) предложилъ къ постоянной величинѣ μ прибавить, въ качествѣ поправки, нѣкоторую величину, которая возрастала бы пропорціонально разности $A - \nu$ между предѣльной частотой колебанія серіи и частотой колебанія, соотвѣтствующей данной линіи. Это приводитъ къ слѣдующей формулѣ:

$$\nu = A - \frac{N}{[m+\mu+\mu'(A-\nu)]^2}.$$

Для удобства вычисленій введенное для поправки выраженіе $\mu'(A-\nu)$ часто замѣняютъ его разложеніемъ въ рядъ по степенямъ величины $\frac{1}{m}$, причемъ обыкновенно ограничиваются первымъ членомъ. Такимъ образомъ, Ритцъ и Пашенъ пользуются формулой:

$$\nu = A - \frac{N}{\left[m+\mu+\frac{\mu'}{m^2}\right]^2},$$

въ то время какъ Г и к с ъ (Hiks) и Ф о у л е р ъ отдаютъ предпочтенiе формулѣ:

$$\nu = A - \frac{N}{\left[m + \mu - \frac{\mu'}{m}\right]^2},$$

которая нѣсколько болѣе точно воспроизводитъ наблюденiя. Въ виду того, что эти формулы слишкомъ длинны, Р и т ц ъ предложилъ ввести для нихъ сокращенное обозначенiе, записывая ихъ символически такъ:

$$\nu = A - (m,\ \mu,\ \mu').$$

Такимъ образомъ, полная формула для серiи, содержащей линiю D_2 натрiя, которая, по Р и т ц у, имѣетъ видъ:

$$\nu = A - \frac{N}{\left[m + \mu + \frac{\mu'}{m^2}\right]^2} = 41444,87 - \frac{109675,0}{\left[m + 0,14593 - \frac{0,1158}{m^2}\right]^2}$$

$$(m = 2,\ 3, \ldots),$$

можетъ быть замѣнена болѣе простой формулой:

$$\nu = A - m\mu\mu' = 41444,87 - m;\ 0,14593;\ 0,1158 \qquad (m = 2,\ 3, \ldots).$$

Часто случается, что общность происхожденiя, которая должна существовать между линiями одной серiи, представляемыми одной и той же формулой, можетъ быть обнаружена уже по внѣшнему сходству. Разсмотримъ для примѣра спектръ цезiя; мы тотчасъ же замѣчаемъ въ немъ три вида линiй, образующихъ три серiи, состоящiя изъ отчетливыхъ дуплетовъ. Линiи одной изъ этихъ серiй, очень яркiя, появляются даже въ то время, когда пары металла не доведены до очень высокой температуры: поэтому эти линiи легко становятся „обращенными"*). Самыя интенсивныя между ними суть не что иное, какъ крайнiя линiи Г р а м о н а (Gramont). Изъ линiй каждаго дуплета болѣе интенсивной является та, которая обладаетъ болѣе короткой длиной волны; въ то же время она болѣе широка и легче подвергается обращенiю. Интервалъ между членами каждаго дуплета, вычисленный по шкалѣ частоты колебанiй, все болѣе уменьшается по мѣрѣ того, какъ дуплеты становятся болѣе сгущенными. Эти дуплеты

*) О свѣтящейся спектральной линiи говорятъ, что она „о б р а щ е н а (renversée)", когда по ея оси проходитъ болѣе или менѣе тонкая темная линiя, происходящая вообще отъ поглощенiя, производимаго наружными слоями источника свѣта.

образуютъ двѣ связанныя между собой серіи, имѣющія одинъ и тотъ же предѣлъ; ихъ совокупность носитъ названіе главной двойной серіи.

Другія линіи, менѣе интенсивныя, появляются лишь при высокой температурѣ вольтовой дуги и съ трудомъ поддаются обращенію. Въ каждой парѣ большей интенсивностью въ этомъ случаѣ отличается та линія, которая соотвѣтствуетъ бо́льшей длинѣ волны, а интервалъ между членами пары остается одинъ и тотъ же. Эти линіи образуютъ серіи, которымъ часто, согласно Рунге и Кайзеру, даютъ названіе побочныхъ серій. Онѣ, въ свою очередь, распадаются на два совершенно различныхъ типа: однѣ изъ нихъ состоятъ изъ рѣзкихъ линій и имѣютъ симметрическій видъ; онѣ образуютъ двѣ связанныя серіи, каждая изъ которыхъ имѣетъ свой собственный предѣлъ; совокупность ихъ носитъ названіе рѣзкой серіи (Ридбергъ) или 2-й двойной побочной серіи (Кайзеръ и Рунге). Другія серіи состоятъ изъ широкихъ линій съ размытыми краями, особенно со стороны красной части спектра; здѣсь линіи отличаются большей интенсивностью, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Въ каждомъ дуплетѣ болѣе интенсивный членъ сопровождается, со стороны бо́льшихъ длинъ волны, спутникомъ, къ которому онъ все болѣе приближается по мѣрѣ возрастанія частоты колебаній. Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ размытой серіей (Ридбергъ) или съ 1-й двойной побочной серіей (Кайзеръ и Рунге); въ данномъ случаѣ постоянство интервала вдоль всей серіи сохраняется между спутникомъ болѣе интенсивнаго члена пары и менѣе интенсивнымъ членомъ.

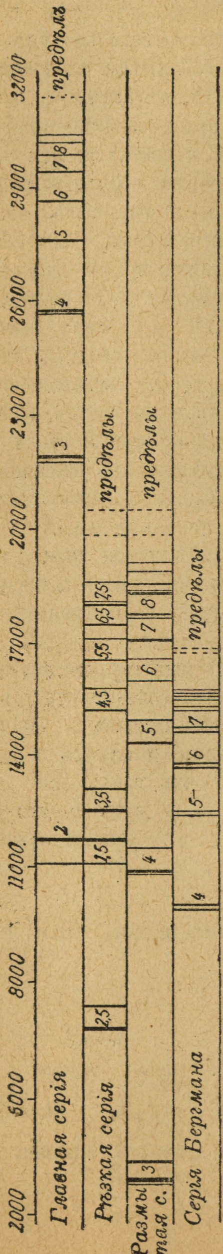
До самыхъ послѣднихъ лѣтъ намъ были извѣстны только эти три типа серій; но работы Бергмана (Bergmann) и Пашена показали, что къ нимъ нужно присоединить еще четвертый типъ; серію послѣдняго типа Ритцъ предложилъ называть серіей Бергмана*). Здѣсь мы имѣемъ дѣло съ серіей, состоящей изъ такихъ же дуплетовъ съ постоянными интервалами, съ какими мы встрѣчались въ случаѣ побочныхъ серій.

Сравнительное изученіе серій этихъ четырехъ типовъ, представленныхъ на фиг. 2, обнаруживаетъ, что между ними существуютъ очень тѣсныя соотношенія.

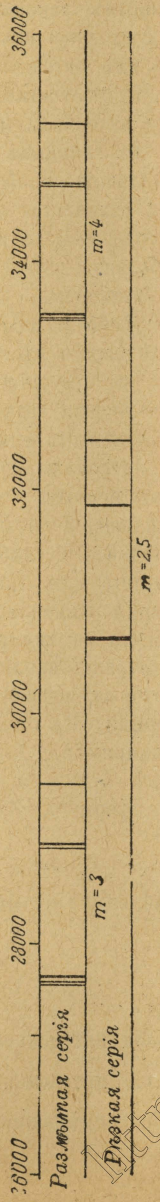
Дѣйствительно, можно замѣтить, что въ двухъ побочныхъ серіяхъ, рѣзкой и размытой, ширина дуплетовъ одна и та же, и что соотвѣтственныя вѣтви этихъ двухъ серій имѣютъ одни и тѣ же предѣлы. Рѣзкая серія, съ другой стороны имѣетъ тѣсное сродство съ главной серіей. Первый дуплетъ послѣдней является общимъ для обѣихъ серій, а числа, выражающія частоту колебаній обоихъ членовъ этого дуплета, соотвѣтственно равны разностямъ между предѣльной частотой колебанія главной серіи и предѣльными частотами колебаній обѣихъ вѣтвей рѣзкой серіи: это — правило Шустеръ (Schuster)-Ридберга. Соотношенія того же рода существуютъ также между размытой серіей и серіей Бергмана. Дѣйствительно, ширина дуплетовъ послѣдней равна интервалу между интенсивнымъ членомъ и его спутникомъ въ первомъ дуплетѣ размытой серіи. Кромѣ того, частоты колебанія этихъ двухъ линій соотвѣтственно равны разностямъ между предѣльной частотой колебанія интенсивной вѣтви размытой серіи и предѣльными частотами колебаній серіи Бергмана.

*) Гиксъ и Фоулеръ называютъ эту серію основной.

Такого же рода систему изъ четырехъ серій мы въ болѣе или менѣе развитомъ видѣ находимъ также въ дуговыхъ спектрахъ другихъ элементовъ.



Фиг. 2.
Система серій дугового спектра цезія.



Фиг. 3.
Триплеты побочныхъ серій кадмія.

Но въ то время, какъ въ случаѣ цезія и другихъ щелочныхъ металловъ, мы всегда имѣемъ дѣло съ серіями, состоящими изъ дуплетовъ, въ другихъ спектрахъ мы встрѣчаемъ часто также серіи простыхъ линій и группъ, состоящихъ каждая изъ трехъ линій (триплетовъ). Въ послѣднемъ случаѣ, относящемся, въ особенности, къ спектрамъ щелочно-земельныхъ металловъ, структура серій подчиняется, правда, вышеуказаннымъ законамъ, но все же она нѣсколько болѣе сложна. Въ каждой группѣ, состоящей изъ трехъ линій, составляющія слѣдуютъ другъ за другомъ въ порядкѣ ихъ интенсивности, а интервалъ, отдѣляющій составляющую большой интенсивности отъ составляющей средней интенсивности, приблизительно, въ два раза больше интервала между послѣднимъ и составляющей слабой интенсивности. Далѣе, въ главныхъ серіяхъ составляющая, обладающая наибольшей преломляемостью, является наиболѣе интенсивной, между тѣмъ какъ въ побочныхъ серіяхъ она отличается наименьшей интенсивностью. Размытая серія состоитъ изъ группъ, содержащихъ по три линіи и отличающихся сложной структурой. Составляющая большой интенсивности сопровождается со стороны волнъ большей длины двумя спутниками, которые вмѣстѣ съ этой составляющей образуютъ группу болѣе тѣсно расположенныхъ трехъ линій, сходную съ группами изъ трехъ линій, входящими въ составъ главныхъ серій; составляющая средней интенсивности также имѣетъ спутника, между тѣмъ какъ составляющая слабой интенсивности вовсе лишена спутниковъ. Эти спутники иногда столь тѣсно примыкаютъ къ сопровождаемымъ ими линіямъ, что отдѣлить ихъ невозможно. Вдоль всей серіи имѣются интервалы постоянной величины, но не между главными составляющими, а между первымъ спутникомъ составляющей большой интенсивности и спутникомъ составляющей средней интенсивности, а также между послѣднимъ спутникомъ и составляющей слабой интенсивности. Фигура 3 изображаетъ двѣ первыя сложныя группы изъ трехъ линій размытой серіи кадмія и вторую группу изъ трехъ линій рѣзкой серіи того же элемента.

Если мы примемъ во вниманіе соотношенія, существующія между серіями, то мы будемъ въ состояніи вполнѣ охарактеризовать систему серій при помощи группы формулъ, которыя можно записать въ весьма сжатой и удобной формѣ, пользуясь обозначеніями Ритца, не вызывающими никакихъ недоразумѣній. Такимъ образомъ, напримѣръ, для системы группъ изъ трехъ линій мы будемъ имѣть таблицу I, гдѣ буквы p, π, s, σ, d, δ, f, φ суть не что иное, какъ постоянныя μ и μ' формулъ Ритца или Гикса, соотвѣтствующія различнымъ серіямъ.

Таблица I. — Изображеніе системы триплетовъ при помощи формулъ.

Главная серія.

Составляющая большой интенсивности $\nu_1 = 1{,}5s\sigma - mp_1\pi_1$ малыя λ

Составляющая средней интенсивности $\nu_2 = 1{,}5s\sigma - mp_2\pi_2$ $\quad m = 2,\ 3,\ 4, \ldots$

Составляющая слабой интенсивности $\nu_3 = 1{,}5s\sigma - mp_3\pi_3$ большія λ

Рѣзкая серія.

Составляющая большой интенсивности $\nu_1 = 2p_1\pi_1 - ms\sigma$ большія λ

Составляющая средней интенсивности $\nu_2 = 2p_2\pi_2 - ms\sigma$ $\quad m = 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5; \ldots$

Составляющая слабой интенсивности $\nu_3 = 2p_3\pi_3 - ms\sigma$ малыя λ

Размытая серія.

1-ый спутникъ	$\nu_1'' = 2p_1\pi_1 - md''\delta''$ большія λ
2-ой спутникъ	$\nu_1' = 2p_1\pi_1 - md'\delta'$
Составляющая большой интенсивности	$\nu_1 = 2p_1\pi_1 - md\delta$
Спутникъ	$\nu_2' = 2p_2\pi_2 - md''\delta''$ $m = 3,\ 4,\ 5,\ldots$
Составляющая средней интенсивности	$\nu_2 = 2p_2\pi_2 - md'\delta'$
Составляющая слабой интенсивности	$\nu_3 = 2p_3\pi_3 - md''\delta''$ малыя λ

Серія Бергмана*).

$$\nu_1 = 3d\delta - mf\varphi \quad \text{большія } \lambda$$

$$\nu_2 = 3d'\delta' - mf\varphi \qquad m = 4,\ 5,\ 6,\ldots$$

$$\nu_3 = 3d''\delta'' - mf\varphi \quad \text{малыя } \lambda$$

Въ случаѣ системы, состоящей изъ дуплетовъ, достаточно будетъ сохранить лишь тѣ формулы, которыя относятся къ составляющимъ со значками 2 и 3, а въ случаѣ системы простыхъ линій — лишь тѣ изъ формулъ, которыя относятся къ составляющей ν_3. Слѣдуя этому пути, легко при помощи простого символа охарактеризовать любую линію изъ какой-либо серіи. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ размытой серіи составляющая большой интенсивности 3-ей сложной группы изъ трехъ линій (триплета) можетъ быть обозначена при помощи выраженія

$$2p_1\pi_1 - 5d\delta.$$

Вышеописанная система четырехъ серій представляетъ собою основную структуру линейчатыхъ спектровъ. Нѣкоторые изъ этихъ спектровъ содержатъ въ одно и то же время серіи группъ, состоящихъ изъ трехъ линій или изъ двухъ линій, а также серіи простыхъ линій. Но даже и въ подобныхъ случаяхъ имѣется лишь часть всѣхъ возможныхъ линій спектра. А именно, Ритцъ показалъ, что изъ четырехъ основныхъ серій можно вывести новыя серіи, которыя онъ назвалъ комбинированными серіями; вслѣдствіе этого число линій, которыя онъ могъ расположить въ видѣ серій, значительно увеличилось. Для того, чтобы понять обобщеніе Ритца, стоитъ только разсмотрѣть строеніе формулъ, установленныхъ для серій. Мы видимъ, что строеніе всѣхъ этихъ формулъ одно и то же, и что они представляютъ собою разность двухъ членовъ. Первый членъ, выражающій предѣлъ серіи, содержитъ опредѣленный параметръ, равный 1,5 для главной серіи, 2 — для побочныхъ серій и 3 — для серіи Бергмана. Если, не внося никакихъ измѣненій во второй членъ, мы будемъ придавать указанному параметру различныя числовыя значенія, то каждому изъ этихъ значеній будетъ соотвѣтствовать новая серія, которая будетъ

---

*) Въ двойныхъ серіяхъ Бергмана постоянныя b и β очень близки соотвѣтственно къ разностямъ $p_1 - p_2$ и $\pi_1 - \pi_2$.

располагаться параллельно соотвѣтственной основной серіи; при этомъ предѣльная частота колебаній такой новой серіи будетъ тѣмъ болѣе значительной, чѣмъ выбранное числовое значеніе будетъ меньше. Если, кромѣ того, мы примемъ во вниманіе, что оба члена, разность которыхъ даетъ частоту колебаній для линій серій основныхъ или параллельныхъ, существуютъ, можно сказать, независимо другъ отъ друга, и если мы будемъ соединять ихъ между собою всѣми возможными способами, то мы получимъ цѣлую систему комбинацій, многія изъ которыхъ были найдены на опытѣ; система основныхъ серій есть лишь частный случай этихъ комбинацій.

Ритцъ предполагаетъ, что эти комбинаціи происходятъ исключительно въ предѣлахъ одной и той же системы основныхъ серій. Пашенъ облекъ идеи Ритца въ еще болѣе общія формы. Онъ показалъ, что въ спектрахъ, обладающихъ нѣсколькими основными системами, можно еще комбинировать между собою серіи, принадлежащія къ различнымъ системамъ, — напримѣръ, серіи простыхъ линій и серію триплетовъ. Это представляетъ собою фактъ, имѣющій важное значеніе, такъ какъ онъ дѣлаетъ очевиднымъ близость происхожденія линій одного и того же спектра, какъ бы онѣ ни были сгруппированы.

§ 2. Линіи въ искровыхъ спектрахъ.

До послѣдняго времени невозможно было найти какую-либо правильность въ распредѣленіи линій искровыхъ спектровъ. Думали даже, что, если такая правильность и существуетъ, то она, скорѣе всего, принадлежитъ къ типу, совершенно отличному отъ тѣхъ, которые мы встрѣчаемъ въ случаѣ дуговыхъ спектровъ. Недавно появившаяся работа Фоулера бросаетъ совершенно новый свѣтъ на этотъ вопросъ; и на этотъ разъ успѣхъ въ этомъ отношеніи былъ достигнутъ благодаря изученію спектра водорода.

Пикерингъ (Pickering) въ спектрѣ звѣзды ζ созвѣздія Кормы нашелъ нѣсколько линій, которыя, по мнѣнію Ридберга, можно разсматривить, какъ девять первыхъ линій рѣзкой серіи и первую линію главной серіи изъ системы серій спектра водорода, если считать, что формула Бальмера относится къ размытой серіи. Въ 1912 году Фоулеру, при пропусканіи сильныхъ разрядовъ черезъ гейслерову трубку, содержащую водородъ и гелій, въ первый разъ удалось получить экспериментально тѣ же самыя линіи. Но, помимо этого, онъ нашелъ еще новыя линіи, дополнявшія собою главную серію, существованіе которой предполагалось, а также и другія линіи, которыхъ совершенно не ожидали, и которыя помѣщались между только-что указанными линіями, образуя непрерывный рядъ линій убывающей интенсивности. Позже Эвансу (Evans) и Штарку (Stark) удалось получить всю группу этихъ новыхъ линій при помощи трубки съ чистымъ геліемъ, но при этомъ не было никакой возможности открыть хотя бы малѣйшіе слѣды линій серіи Бальмера. Такимъ образомъ, Фоулеръ пришелъ къ заключенію, что эти линіи принадлежатъ искровому спектру гелія, какъ это, впрочемъ, еще раньше предположилъ Боръ (Bohr), исходившій изъ теоретическихъ разсужденій, о которыхъ мы будемъ говорить ниже. Сравнительное изученіе искровыхъ спектровъ щелочно-земельныхъ металловъ и магнія привели въ дальнѣйшемъ Фоулера къ установленію, по отношенію къ линіямъ этой категоріи, новаго типа серій, которыя, въ общемъ, сходны съ вышеописанными серіями и могутъ быть охарактеризованы при помощи соотвѣтствующихъ формулъ путемъ замѣны въ нихъ постоянной величины Ридберга N величиною $4N$.

Въ виду этого оказывается, что линіи, которыя раньше причислялись къ главной серіи водорода, на самомъ дѣлѣ образуютъ вмѣстѣ со вставными линіями одну серію, которую мы назовемъ серіей Фоулера и которая воспроизводится слѣдующей формулой:

$$\nu = 4N\left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right] \quad m = 4,\ 5, \ldots$$

Эта серія представлена на фиг. 4. Точно такъ же серію Пикеринга слѣдуетъ считать не рѣзкой серіей водорода, а серіей гелія, параллельной серіи Фоулера. Этотъ взглядъ былъ, между прочимъ, подтвержденъ работами Лимана (Lyman), который только недавно нашелъ въ крайней ультрафіолетовой части спектра гелія первыя линіи новой серіи, параллельной предыдущимъ.

Такимъ образомъ, можно считать, что серія Фоулера представляетъ собою типичную серію линій, принадлежащихъ искровымъ спектрамъ, между тѣмъ какъ формула Бальмера характеризуетъ серіи, состоящія изъ линій дуговыхъ спектровъ. И подобно тому, какъ серія Бальмера, установленная для водорода, въ дуговыхъ спектрахъ другихъ элементовъ замѣняется системами четырехъ основныхъ серій и ихъ комбинацій, точно такъ же и серія Фоулера, — слѣдуетъ думать, — подвергнется аналогичному разложенію. Дѣйствительно, Фоулеръ убѣдился въ этомъ, изслѣдуя искровые спектры кальція, стронція и магнія, которые распадаются на тѣ же системы серій, что и описанные выше дуговые спектры, обладая въ то же время всѣми существенными чертами послѣднихъ. Однако, онъ не нашелъ никакого числового отношенія между этими новыми серіями и серіями линій дуговыхъ спектровъ, относящихся къ различнымъ элементамъ.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Фиг. 4.

Серія Фоулера (гелій).

Линіи, отмѣченныя крестикомъ, не укладывались въ рамки главной серіи водорода.

Обобщенныя сочетанія и размѣщенія.

Н. Михальскаго.

§ 1. Пленусъ.

Пусть намъ дано m элементовъ $a, b, c, \ldots, l$. Будемъ составлять изъ этихъ элементовъ различныя группы по n элементовъ въ каждой, при чемъ: 1) въ отдѣльной группѣ элементъ a можетъ встрѣтиться α разъ, элементъ b — β разъ, . . ., элементъ l — λ разъ, гдѣ

$$0 \leqslant \alpha \leqslant n, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant n, \ldots, \ 0 \leqslant \lambda \leqslant n \ (\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n);$$

2) элементы входятъ въ группу въ алфавитномъ порядкѣ (сначала элементы a, затѣмъ b и т. д.).

Такія группы мы будемъ называть членами изъ m элементовъ по n.

Совокупность всѣхъ возможныхъ и различныхъ членовъ изъ m элементовъ по n мы будемъ называть пленусомъ изъ m элементовъ по n и обозначимъ символомъ $P\begin{pmatrix} n \\ a \\ m \end{pmatrix}$.

Примѣръ.
$$P\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{lll} aaaa + & aaab + & aaac \\ & aabb & aabc \\ & abbb & abbc \\ & bbbb & bbbc \\ & & aacc \\ & & abcc \\ & & bbcc \\ & & accc \\ & & bccc \\ & & cccc \end{array}$$

Изъ приведеннаго примѣра дѣлается достаточно яснымъ практическій пріемъ написанія членовъ даннаго пленуса, а потому мы не будемъ подробно останавливаться на изложеніи этого пріема. Мы видимъ, что члены пленуса распадаются на столько колоннъ, сколько дано элементовъ. Членъ $aaaa$ (голова пленуса) является руководящимъ по отношенію ко всѣмъ членамъ, такъ какъ по этому члену пишутся члены $aaab$, $aaac$, а по послѣднимъ уже всѣ остальные, путемъ постепенной замѣны элементовъ въ членахъ до тѣхъ поръ, пока въ концѣ каждой колонны не появится членъ, состоящій исключительно изъ элементовъ, соотвѣтствующихъ номеру колонны.

§ 2. Число членовъ пленуса.

Число членовъ пленуса $P\begin{pmatrix} n \\ a \\ m \end{pmatrix}$ обозначимъ черезъ W_m^n. Раскроемъ значеніе этого символа.

Раскрывая пленусы:

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a, \\ b \\ \\ \\ \end{matrix} \quad P\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} aa, \\ ab \\ bb \\ \\ \end{matrix} \quad P\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} aaa, \\ aab \\ abb \\ bbb \end{matrix}$$

непосредственнымъ подсчетомъ членовъ находимъ, что

$$W_2^1 = 2, \quad W_2^2 = 3, \quad W_2^3 = 4.$$

Отсюда видимъ, что $W_2^n = n + 1 = \frac{n+1}{1}$.

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что

$$W_3^1 = 3, \quad W_3^2 = 6, \quad W_3^3 = 10, \quad W_3^4 = 15,$$

или

$$W_3^1 = 1\,.\,3, \quad W_3^2 = 2\,.\,3, \quad W_3^3 = 2\,.\,5, \quad W_3^4 = 3\,.\,5.$$

Слѣдовательно, при n четномъ $W_3^n = \left(1 + \frac{n}{2}\right)(n+1)$, а при n нечетномъ $W_3^n = \frac{n+1}{2} \cdot (n+2)$, а потому при всякомъ n имѣемъ: $W_3^n = \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}$.

Такимъ же путемъ нетрудно найти, что $W_4^n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Пользуясь методомъ полной математической индукціи, находимъ, что вообще

$$W_m^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}.$$

§ 3. Обобщенныя сочетанія.

Обобщенными сочетаніями изъ m элементовъ по n назовемъ такія соединенія по n элементовъ въ каждомъ, которыя отличаются одно отъ другого хотя бы однимъ элементомъ, при чемъ, вообще говоря, одинъ и тотъ же элементъ можетъ встрѣтиться въ отдѣльномъ соединеніи ν разъ, гдѣ $0 \leqslant \nu \leqslant n$.

Ясно, что всевозможныя и различныя обобщенныя сочетанія изъ m элементовъ по n воспроизводятся членами пленуса $P\begin{pmatrix}n\\a\\m\end{pmatrix}$. Отсюда слѣдуетъ, что число всѣхъ обобщенныхъ сочетаній изъ m элементовъ по n есть

$$W_m^n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}. \qquad (1)$$

Нетрудно доказать слѣдующее свойство числа W_m^n:

$$W_m^n = W_{n+1}^{m-1}.$$

Число обыкновенныхъ сочетаній связано съ числомъ обобщенныхъ сочетаній формулой:

$$W_m^n = C_{n+m-1}^n = C_{n+m-1}^{m-1},$$

непосредственно вытекающей изъ формулы (1).

§ 4. Обобщенныя размѣщенія.

Обобщенными размѣщеніями изъ m элементовъ по n назовемъ такія соединенія по n элементовъ въ каждомъ, которыя отличаются одно отъ другого либо порядкомъ элементовъ, либо самими элементами, при чемъ, вообще говоря, одинъ и тотъ же элементъ можетъ встрѣтиться въ отдѣльномъ соединеніи ν разъ, гдѣ $0 \leqslant \nu \leqslant n$.

Обозначимъ число всѣхъ возможныхъ и различныхъ обобщенныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n черезъ M_m^n. Чтобы выразить этотъ символъ въ зависимости отъ m и n, поступимъ слѣдующимъ образомъ. Выпишемъ всѣ обобщенныя сочетанія изъ m элементовъ по n, т.-е. раскроемъ пленусъ $P\begin{pmatrix}n\\a\\m\end{pmatrix}$. Въ каждомъ членѣ пленуса сдѣлаемъ всѣ возможныя перестановки (съ повторяющимися элементами). Общая совокупность всѣхъ перестановокъ дастъ намъ всѣ обобщенныя размѣщенія изъ m элементовъ по n. Пересчитавъ всѣ полученныя перестановки, найдемъ число M_m^n. Если указанный методъ примѣнить къ символамъ M_2^1, M_2^2, M_2^3, $\ldots$; M_3^1, M_3^2, $M_3^3, \ldots$, то легко можно замѣтить, что $M_2^n = 2^n$, $M_3^n = 3^n, \ldots$ Отсюда ясно, что вообще $M_m^n = m^n$.

Задача. Найти число всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ шестизначныхъ чиселъ, составленныхъ исключительно при помощи цифръ 2, 4, 6.

Рѣшеніе. Ясно, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ обобщенными размѣщеніями. Требуется найти число M_3^6. Согласно § 4, $M_3^6 = 3^6 = 729$. Такимъ образомъ, искомое число есть 729.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

367 (6 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$\frac{\sqrt[3]{8x^5+7x^4+x-3}}{\sqrt[6]{x^{10}-2x^9+x^3+4}}\cdot\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+1}\right)^{\frac{x^2+7}{x+6}}$$

при возрастаніи x до безконечности.

А. Бутомо (Саратовъ).

№ 368 (6 сер.). Пересѣчь треугольникъ ABC прямой, встрѣчающей стороны AB, AC и продолженіе стороны BC (отъ точки C) соотвѣтственно въ точкахъ X, Y, Z такъ, чтобы треугольники AXY, CYZ и четырехугольникъ $BXYC$ были равновелики.

Н. С. (Одесса).

№ 369 (6 сер.). Доказать справедливость равенства

$$C_{mn-1}^{m-1}\cdot C_{m(n-1)-1}^{m-1}\cdots C_{2m-1}^{m-1}\cdot C_{m-1}^{m-1}=\frac{(mn)!}{(m!)^n\cdot n!}$$

при любыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ m и n *).

R.

№ 370 (6 сер.). Найти общій видъ цѣлыхъ относительно x многочленовъ $f(x)$, удовлетворяющихъ равенству

$$f'(x)\cdot f''(x)=f(x)$$

при любомъ значеніи x.

N.

---

*) Это равенство получено при рѣшеніи задачи **№ 312** (см. стр. 262 въ **№ 671—672** „Вѣстника"); въ настоящей задачѣ имѣется въ виду, конечно, провѣрка разсматриваемаго равенства путемъ непосредственныхъ преобразованій.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 315 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\left|\frac{z^2+3}{z^2+z+2}\right|+\left|\frac{z-1}{z^2+z+2}\right|=1,$$

гдѣ z *— искомое комплексное число.*

Полагая (1) $\frac{z^2+3}{z^2+z+2}=u$, находимъ, что

$$\frac{z-1}{z^2+z+2}=1-\frac{z^2+3}{z^2+z+2},$$

т. е.

$$(2)\quad \frac{z-1}{z^2+z+2}=1-u,$$

и такимъ образомъ данное уравненіе можно записать въ видѣ

$$(3)\quad |u|+|1-u|=1.$$

Изъ равенства $u+(1-u)=1$ слѣдуетъ, что, прибавивъ къ нѣкоторому вектору OB, изображающему комплексное число u, векторъ BA, изображающій комплексное число $1-u$, мы должны получить замыкающій векторъ OA, равный вещественной единицѣ. Сумма $|u|+|1-u|$, т. е. сумма длинъ OB и BA, вообще, больше длины OA, т.-е. больше 1, и эта сумма можетъ быть равна длинѣ OA лишь въ томъ случаѣ, если точка B лежитъ на прямой OA и не выходитъ за предѣлы отрѣзка OA. Другими словами, равенство (3) тогда и только тогда справедливо, если векторы OB и BA, изображающіе соотвѣтственно числа u и $1-u$, не отличаются по направленію отъ вектора OA, изображающаго положительную единицу, т.-е. если оба числа u и $1-u$ неотрицательны. Легко провѣрить, что (4) $z=1$ есть корень предложеннаго уравненія, и что значенія неизвѣстнаго z

$$(5)\quad z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2},$$

обращающія въ нуль трехчленъ z^2+z+2, суть единственно возможныя значенія z, при которыхъ лѣвая часть даннаго уравненія теряетъ смыслъ. Будемъ отыскивать теперь корни даннаго уравненія, не равные единицѣ, если таковые вообще возможны. Такъ какъ, по условію, $z\neq 1$, то [см. (2)] $1-u\neq 0$. Но вообще, какъ было доказано, $1-u\geqq 0$, а потому, при

$$(6)\quad z\neq 1,\quad 1-u>0.$$

Поэтому, такъ какъ u должно удовлетворять неравенству $u\geqq 0$, то, при соблюденіи условія (6), частное $\frac{u}{1-u}$ должно быть неотрицательно; обозначая это частное, для удобства дальнѣйшихъ вычисленій, черезъ $2x$, мы должны имѣть такимъ образомъ

$$(7)\quad \frac{u}{1-u}=2x,\quad \text{гдѣ}\quad (8)\quad x\geqq 0,$$

т.-е. [см. (1), (2)]

$$(9)\quad \frac{z^2+3}{z-1}=2x,\quad \text{или}\quad (10)\quad z^2-2xz+2x+3=0,$$

откуда, рѣшая уравненіе (10), находимъ, что

$$(11)\quad z=x\pm\sqrt{x^2-2x-3},$$

гдѣ x есть нуль или нѣкоторое положительное число [см. (8)]. Итакъ, если z есть корень первоначальнаго уравненія, не равный единицѣ, то z можно выразить формулой (11), въ которой $x\geqq 0$. Наоборотъ, формула (11) при всевозможныхъ неотрицательныхъ значеніяхъ x даетъ всѣ корни первоначальнаго уравненія, отличные отъ единицы. Прежде, чѣмъ доказать справедливость этого утвержденія, прослѣдимъ, какъ измѣняется правая часть равенства (11) при возрастаніи x отъ 0 до $+\infty$. Записавъ формулу (11) въ видѣ $z=x\pm\sqrt{(x+1)(x-3)}$, находимъ, что при

$$(12)\quad 0\leqq x<3$$

z есть комплексное число, опредѣляемое равенствомъ

$$(13)\quad z=x\pm i\sqrt{(x+1)(3-x)},$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$. Если же (14) $x\geqq 3$, то z имѣетъ вообще два вещественныхъ значенія, опредѣляемыхъ формулами [см. (11)]

$$(15)\quad z=x+\sqrt{(x+1)(x-3)},\quad (16)\quad z=x-\sqrt{(x+1)(x-3)}.$$

Первое изъ этихъ значеній [см. (15)] при возрастаніи x отъ 3 до $+\infty$ также возрастаетъ отъ 3 до $+\infty$. Второе же значеніе z [см. (16)] при возрастаніи x отъ 3 до $+\infty$ убываетъ отъ 3 до 1, оставаясь больше 1 и стремясь къ 1, какъ къ предѣлу, когда x возрастаетъ до $+\infty$; это вытекаетъ изъ преобразованій

$$x-\sqrt{(x+1)(x-3)}=1+[(x-1)-\sqrt{(x+1)(x-3)}]=$$

$$=1+\frac{[(x-1)-\sqrt{(x+1)(x-3)}]\,[(x-1)+\sqrt{(x+1)(x-3)}]}{x-1+\sqrt{(x+1)(x-3)}}=$$

$$=1+\frac{4}{x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}},$$

если принять во вниманіе, что при возрастаніи x отъ 3 до $+\infty$ выраженіе $x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}$ возрастаетъ отъ 2 до $+\infty$. Такимъ образомъ, при $x\geqq 0$ равенствомъ (11) опредѣляются либо вещественныя значенія z, удовлетворяющія условію (17) $z>1$, либо комплексныя значенія, выражаемыя формулами (12), (13). Ни одно изъ этихъ значеній не равно 1, а также не равно [см. (5)] ни z_1 ни z_2, такъ какъ вещественная часть чиселъ z_1 и z_2 отрицательна, а у комплексныхъ чиселъ, опредѣляемыхъ равенствомъ (13), [см. (12)] она не отрицательна. Пусть теперь x имѣетъ любое неотрицательное значеніе. Подставивъ его въ равенство (11), найдемъ соотвѣтствующее значеніе z, которое не равно ни одному изъ чиселъ z_1, z_2, 1. Поэтому, подставляя въ равенства (1) и (2) разсматриваемое значеніе z, мы получимъ въ лѣвыхъ и въ правыхъ частяхъ вполнѣ опредѣленныя комплексныя числа, при чемъ $1-u\neq 0$, такъ какъ $z\neq 1$. Такимъ образомъ, раздѣливъ равенство (1) на равенство (2), находимъ, что $\frac{u}{1-u}=\frac{z^2+3}{z-1}\cdot$ Но z есть корень уравненія (10), а потому [см. (10), (9)] $\frac{u}{1-u}=2x$, откуда $u=\frac{2x}{1+2x}=|u|$, $1-u=\frac{1}{1+2x}=|1-u|$ такъ какъ $x\geqq 0$, и, наконецъ, $|u|+|1-u|=\frac{2x}{1+2x}+\frac{1}{1+2x}=1$, т.-е. z есть не равный единицѣ корень предложеннаго уравненія. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что всѣ корни даннаго для рѣшенія уравненія выражаются формулами (8) и (11), и, кромѣ того, равенствомъ (4). Можно ограничиться лишь формулами (11) и (8), если пополнить значенія z такъ называемымъ его истиннымъ значеніемъ при $x=+\infty$, конечно, взявъ радикалъ въ формулѣ (11) со знакомъ минусъ; дѣйствительно, выше было показано, что

$$\lim_{x=+\infty}\left[x-\sqrt{(x+1)(x-3)}\right]=1.$$

Изъ изслѣдованія формулы (11) слѣдуетъ, что всѣ корни даннаго уравненія можно также выразить неравенствомъ $z\geqq 1$ [см. (4) и (17)] и формулами (12), (13). Изъ этой послѣдней формы отвѣта, въ связи съ тожествомъ $(x+1)(3-x)=4-(x-1)^2$, вытекаетъ, что всѣ корни $x+iy$ предложеннаго уравненія представляются въ комплексной плоскости точками полуокружности радіуса 2 и съ центромъ $x=1$, $y=0$, лежащей справа (при обычномъ расположеніи осей) отъ оси y, и, кромѣ того, частью оси x, идущей изъ центра полуокружности до $+\infty$.

З а м ѣ ч а н і е. Начало рѣшенія можно изложить въ чисто алгебраической формѣ, не прибѣгая къ геометріи. Пусть $u=a+bi$, гдѣ a и b — вещественныя числа. Тогда $1-u=1-a-bi$, и

$$(18)\qquad |u|+|1-u|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}.$$

Если $a<0$ или же $a>1$, то правая часть равенства (18) больше 1, а потому равенство (3) невозможно. Поэтому (19) $0\leqq a\leqq 1$. Если $b\neq 0$, то, въ силу неравенствъ (19), $|u|=\sqrt{a^2+b^2}>a$, $|1-u|=\sqrt{(1-a)^2+b^2}>1-a$, откуда $|u|+|1-u|>a+1-a=1$, а потому равенство (3) невозможно. Значитъ, $b=0$, а потому [см. (19)] $|u|=|a|=a>0$, $|1-u|=|1-a|=1-a\geqq 0$, т.-е. u и $1-u$ суть неотрицательныя числа; это необходимо для того, чтобы удовлетворить равенству (3), и, какъ легко провѣрить, достаточно.

М. Шебаршинъ (дѣйствующая армія); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская, 58.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльн. выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый, подъ ред. прив.-доц. В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Изъ записной книжки преподавателя. Научная хротика. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Библіографія: I. Рецензіи. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. III. Новости иностранной литературы. Темы для сотрудниковъ. Задачи на премію. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр.—для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ—для дух. семинарій и училищъ.

Въ 1913 г. журналъ былъ признанъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. заслуживающимъ вниманія при пополненіи библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Пробный номеръ высылается за одну 10-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1915/16 году. Второй серіи 4-й и 5-й семестры.

И. Габеръ. Фото-электрическій эффектъ. *Н. Шестериковъ*. Къ ученію о площадяхъ. *И. Агрономовъ*. О нѣкоторыхъ свойствахъ квадратовъ, вписанныхъ въ треугольникъ и описанныхъ около треугольника. *А. К. Арндтъ*. О нѣкоторыхъ вопросахъ преподаванія ариѳметики. *И. Александровъ*. О неразрѣшимости задачъ циркулемъ и линейкой. *Н. С. Васильевъ*. О нѣкоторыхъ случаяхъ относительнаго движенія. *П. Флоровъ*. Ариѳметическая, геометрическая и гармоническая средины. *Ѳ. Сведбергъ*. Строеніе и форма молекулъ. *А. Обри*. Первая глава изъ элементарной теоріи чиселъ. *Проф. И. Ю. Тимченко*. Объ аксіомахъ и постулатахъ въ «Началахъ» Евклида. *О. В. Ричардсонъ*. Электроны и теплота. *Е. Рѣтгерфордъ*. Структура атома. *И. Точидловскій*. Влажность въ элементарныхъ курсахъ физики. Роль Лавуазье въ исторіи химіи. *А. Киселевъ*. О тѣхъ вопросахъ элементарной геометріи, которые обыкновенно рѣшаются помощью предѣловъ. *Т. Чэмберлинъ*. Планетезимальная гипотеза. *С. Маргини*. Электроны и магнетоны. *Ф. В. Дайсонъ*. Съѣздъ Британской ассоціаціи въ Манчестерѣ. *И. Гибшъ*. Опытъ обоснованія первыхъ теоремъ изъ курса школьной геометріи. *А. Эддингтонъ*. Звѣздная вселенная, какъ динамическая система. *Проф. Д. Мордухай-Болтовской*. О моделяхъ ко второй книгѣ «Началъ» Евклида. *М. Давидсонъ*. Непосредственное вліяніе эксцентриситета земной орбиты на климатъ. *А. Турчаниновъ*. Объ одномъ обобщеніи теоремы Пиѳагора. *Б. Славскій*. Краткій очеркъ прямолинейной тригонометріи, основанной на теоремѣ сложенія. *В. Браггъ*. Новая кристаллографія. *Проф. С. Заремба*. Опытъ теоретическаго изслѣдованія природы доказательствъ, примѣняемыхъ въ математическихъ наукахъ. *К. М. Щербина*. Примѣрныя программы и объяснительныя записки, напечатанныя въ «Матеріалахъ по реформѣ средней школы. Петроградъ, 1915».

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ: Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **8 руб.**, за полгода **4 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе **журналъ непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **5 руб.**, за полугодіе **2 руб. 50 к.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Тарифъ для объявленій: за страницу 3 руб.; при печатаніи не менѣе 3 разъ —**10% скидки**, 6 разъ—**20%**, 12 разъ—**30%**.

Журналъ за прошлые годы по **3 руб.**, а учащимся и книгопродавцамъ по **2 руб. 50 коп.** за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по **40 к.**, прошлыхъ семестровъ по **25 к.**

Адр. для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**