№ 638.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серіи

IV-го семестра № 2.

ОДЕССА

Типографія „Техникъ"—Екатерининская, 58.

1915.

Съ 21-го сентября сего года въ г. Москвѣ

въ помѣщеніи

Торговой Школы Ананьина

(Покровка, 38)

открылись занятія для учениковъ 3-хъ классного Комм. училища А. ЕЖЕВСКАГО,

учрежд. въ г. Варшавѣ.

Откликнитесь Русскіе люди!

ЕЯ ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЕЛИЧЕСТВУ ГОСУДАРЫНѢ ИМПЕРАТРИЦѢ АЛЕКСАНДРѢ ѲЕОДОРОВНѢ благоугодно было образовать въ составѣ Верховнаго Совѣта Особую Комиссію по призрѣнію пострадавшихъ за время настоящей войны офицерскихъ и нижнихъ воинскихъ чиновъ, вольнонаемныхъ лицъ и служащихъ на желѣзныхъ дорогахъ, въ районахъ военныхъ дѣйствій, а также служащихъ въ тѣхъ же районахъ на правительственныхъ и земскихъ шоссейныхъ и грунтовыхъ дорогахъ, а равно на водныхъ путяхъ, а также семей всѣхъ этихъ лицъ, какъ погибшихъ, такъ и пострадавшихъ на войнѣ, а предсѣдательствованіе въ этой Комиссіи ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕ возложить на меня.

Стремясь возможно полнѣе осуществить возложенныя на Особую Комиссію задачи и считая, что самою главною ея цѣлью должно быть повышеніе трудоспособности пострадавшихъ, я буду добиваться всѣми способами, дабы, по возвращеніи пострадавшихъ въ свои родныя семьи, они не только не были имъ въ тягость, а были бы такими же, какъ другіе, работниками, работающими, по волѣ ВСЕВЫШНЯГО, на другомъ поприщѣ.

Сознавая всю трудность поставленной цѣли, я вѣрю, однако, что милостью БОЖІЕЮ и благодаря содѣйствію всѣхъ русскихъ людей своими знаніями, трудами и пожертвованіями, по всей Россіи будутъ устроены необходимыя временныя и постоянныя убѣжища для возстановленія здоровья пострадавшихъ, обученія каждаго посильнымъ для него знаніямъ и ремесламъ, которыя дадутъ имъ душевную бодрость трудового человѣка, достатокъ, а, вмѣстѣ съ ними, всѣ остальныя радости жизни, а тяжело увѣчнымъ, не могущимъ обходиться безъ посторонней помощи и требующимъ помѣщенія въ постоянныя убѣжища, душевный и тѣлесный покой.

Для дѣтей павшихъ и пострадавшихъ героевъ предположено устраивать пріюты, школы и вообще всемѣрно заботиться объ ихъ воспитаніи и обученіи.

Всѣ, кто согласенъ работать въ указанномъ направленіи, всегда найдутъ во мнѣ и Особой Комиссіи полное сочувствіе, нравственную и посильную денежную помощь своимъ начинаніямъ.

Откликнитесь Русскіе люди!

Помогите устроить тяжело увѣчныхъ, а кто можетъ изъ нихъ работать, тѣмъ дать вѣрный заработокъ.

Дѣтей же героевъ-воиновъ, отдавшихъ жизнь свою за Вѣру, ЦАРЯ и Отечество, воспитать достойными ихъ отцовъ.

Великая Княгиня КСЕНІЯ АЛЕКСАНДРОВНА.

Второй серіи IV-го семестра № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 638.

О нѣкоторыхъ свойствахъ квадратовъ, вписанныхъ въ треугольникъ и описанныхъ около треугольника.

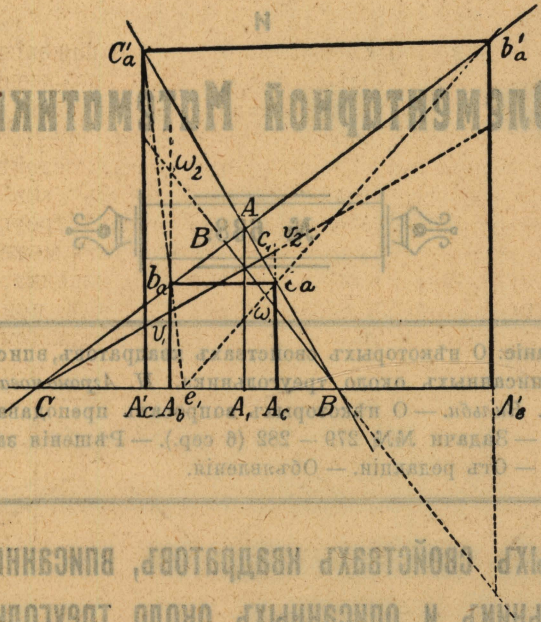
Н. Агрономова.

Въ каждый треугольникъ можно вписать 6 квадратовъ такъ, чтобы 2 вершины каждаго квадрата лежали бы на одной изъ сторонъ треугольника, а двѣ остальныя вершины на двухъ другихъ сторонахъ треугольника. Изученію свойствъ этихъ квадратовъ посвящается настоящая статья.

§ 1. Допустимъ, что сперва взяты тѣ квадраты, стороны которыхъ лежатъ на сторонахъ треугольника, а не на ихъ продолженіяхъ, и остальныя вершины также на сторонахъ треугольника, а не на ихъ продолженіяхъ. Эти квадраты будемъ называть в п и с а н н ы м и. Разсмотримъ одинъ изъ нихъ, а именно тотъ, у котораго сторона совпадаетъ со стороной BC треугольника ABC и двѣ остальныя вершины котораго лежатъ на AB и AC. Обозначимъ вершины этого квадрата черезъ A_c, A_b, b_a, c_a (A_c и A_b лежатъ на BC, при чемъ A_c ближе къ B; a_a на AC и c_a на AB).

Обозначая сторону этого квадрата черезъ n_a, для опредѣленія ея составляемъ слѣдующее уравненіе:

$$S=\frac{(h_a-n_a)\,n_a}{2}+n_a{}^2+\frac{n\ \ (a-n_a)}{2}\,, \tag{1}$$



Черт. 1.

получаемое изъ разсмотрѣнія площади S треугольника ABC, какъ суммы площадей трехъ треугольниковъ и одного квадрата. Отсюда

$$n_a=\frac{h_a a}{a+h_a}=\frac{2S}{a+h_a}\,. \tag{2}$$

Равнымъ образомъ, вводя для двухъ другихъ вписанныхъ квадратовъ аналогичныя обозначенія, получимъ:

$$n_b=\frac{h_b b}{b+h_b}=\frac{2S}{b+h_b}\cdot \quad (2') \qquad n_c=\frac{h_c c}{c+h_c}=\frac{2S}{c+h_c}\cdot \quad (2'')$$

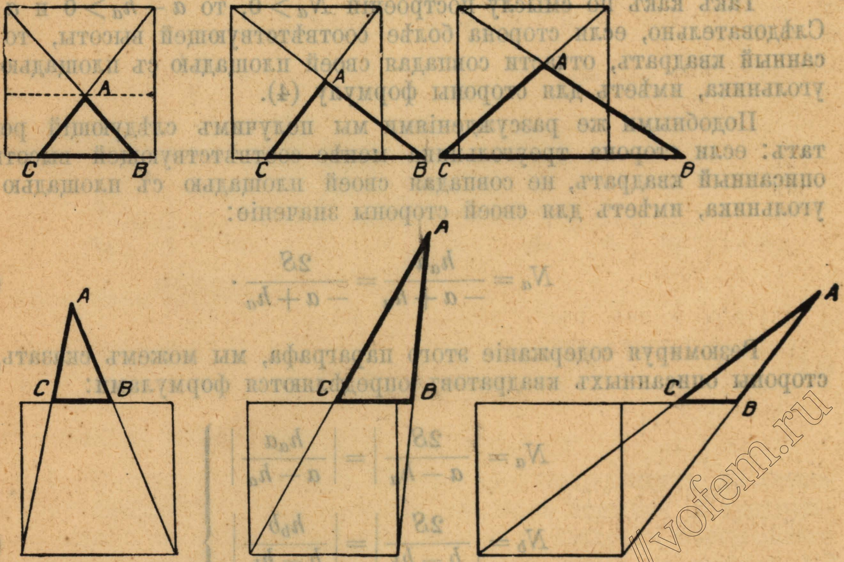
§ 2. Изъ формулъ (2), (2′), (2″) вытекаетъ и способъ построенія вписанныхъ квадратовъ. Въ самомъ дѣлѣ, представляя первую изъ формулъ для сторонъ въ видѣ:

$$\frac{h_a}{n_a}=\frac{h_a+a}{a}\,.$$

На продолженіи высоты AA_1 откладываемъ отрѣзокъ $A_1A'=a$; въ точкѣ A' къ AA' возставляемъ перпендикуляръ $A'a_1=a$. Соединяемъ a_1 съ A. Если a_1 точка встрѣчи BC съ Aa_1, то $A_1a_1=n_a$. Несомнѣнно, что, основываясь на формулахъ для n_a, n_b, n_c можно найти и болѣе геометрографическія построенія (см. § 6).

§ 3. Предположимъ теперь, что вершины квадратовъ лежатъ не только на сторонахъ треугольника, но и на продолженіяхъ сторонъ. Эти квадраты въ отличіе отъ первыхъ будемъ называть **описанными** квадратами.

Положеніе описанныхъ квадратовъ по отношенію къ треугольнику ABC нѣсколько болѣе сложно, чѣмъ положеніе вписанныхъ квадратовъ. Здѣсь могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1, 2) двѣ вершины квадрата лежатъ на сторонѣ треугольника, а двѣ другія на продолженіяхъ сторонъ, при этомъ квадратъ можетъ или отчасти покрывать треугольникъ или лежать внѣ треугольника; 3, 4) одна вершина квадрата лежитъ на сторонѣ треугольника, а три остальныя на продолженіяхъ, при этомъ квадратъ можетъ или отчасти покрывать треугольникъ или лежать внѣ треугольника; 4, 5) всѣ вершины квадрата лежатъ на продолженіяхъ сторонъ, при чемъ имѣются два положенія квадрата относительно треугольника (см. черт. 2).



Черт. 2.

Допустимъ, что для даннаго треугольника ABC описанный квадратъ, соотвѣтствующій сторонѣ BC занялъ положеніе 1. Тогда, разбивая площадь квадрата на площадь прямоугольника, треугольника и двухъ трапецій, получимъ для опредѣленія стороны N_a описаннаго квадрата слѣдующее уравненіе:

$$N_a^2 = \frac{h_a\,[2N_a \operatorname{cotg} C - 2a + c\cos B]}{2} + \frac{h_a\,[2N_a \operatorname{cotg} B - 2a + b\cos C]}{2} + S + N_a\,(N_a - h_a) \tag{3}$$

и послѣ упрощеній

$$N_a = \frac{h_a a}{a - h_a} = \frac{2S}{a - h_a}. \tag{4}$$

Допуская далѣе, что для даннаго треугольника ABC описанный квадратъ, соотвѣтствующій сторонѣ BC, занялъ положеніе 3-ье или 5-ое и составляя опять площадь квадрата изъ площадей другихъ фигуръ, мы получимъ снова уравненія для опредѣленія N_a. Не приводя этихъ уравненій, отмѣтимъ вообще, что если описанный квадратъ занимаетъ положенія (1), (2), (3), его сторона выражается формулой:

$$N_a = \frac{h_a a}{a - h_a} = \frac{2S}{a - h_a}.$$

Такъ какъ по смыслу построеній $N_a > 0$, то $a - h_a > 0$ и $a > h_a$. Слѣдовательно, если сторона болѣе соотвѣтствующей высоты, то описанный квадратъ, отчасти совпадая своей площадью съ площадью треугольника, имѣетъ для стороны формулу (4).

Подобными же разсужденіями мы получимъ слѣдующій результатъ: если сторона треугольника менѣе соотвѣтствующей высоты, то описанный квадратъ, не совпадая своей площадью съ площадью треугольника, имѣетъ для своей стороны значеніе:

$$N_a = \frac{h_a a}{-a + h_a} = \frac{2S}{-a + h_a}. \tag{5}$$

Резюмируя содержаніе этого параграфа, мы можемъ сказать, что стороны описанныхъ квадратовъ опредѣляются формулами:

$$\left.\begin{aligned} N_a &= \left|\frac{2S}{a - h_a}\right| = \left|\frac{h_a a}{a - h_a}\right| \\ N_b &= \left|\frac{2S}{b - h_b}\right| = \left|\frac{h_b b}{b - h_b}\right| \\ N_c &= \left|\frac{2S}{c - h_c}\right| = \left|\frac{h_c c}{c - h_c}\right| \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 4. Изъ формулъ (6) вытекаетъ и способъ построенія описанныхъ квадратовъ. Этотъ способъ, очевидно, аналогиченъ способу, изложенному въ § 3. Необходимо только въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ наблюдать за тѣмъ, что бо́льше—высота или сторона. Въ § 14 будетъ указанъ болѣе удобный способъ построенія.

§ 5. Прежде, чѣмъ приступить къ болѣе подробному изложенію свойствъ нашихъ квадратовъ, отмѣтимъ нѣсколько слѣдствій, вытекающихъ изъ формулъ (2) и (6). Такъ какъ

$$\left.\begin{aligned} a^2 + 2ah_a + h_a{}^2 &= \frac{4S^2}{n_a{}^2} \\ a^2 - 2ah_a + h_a{}^2 &= \frac{4S^2}{N_a{}^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то

$$4ah_a = \frac{4S^2}{n_a{}^2} - \frac{4S^2}{N_a{}^2} \tag{8}$$

или

$$\frac{2}{S} = \frac{1}{n_a{}^2} - \frac{1}{N_a{}^2}. \tag{9}$$

Слѣдовательно, вообще

$$\frac{1}{n_a{}^2} - \frac{1}{N_a{}^2} = \frac{1}{n_b{}^2} - \frac{1}{N_b{}^2} = \frac{1}{n_c{}^2} - \frac{1}{N_c{}^2} = \frac{2}{S}. \tag{10}$$

Изъ формулъ (2) слѣдуетъ

$$\frac{1}{n_a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{n_b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{h_b}, \quad \frac{1}{n_c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h_c}.$$

Складывая, получимъ:

$$\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{r}, \tag{11}$$

гдѣ r — радіусъ вписаннаго круга.

§ 6. Въ статьѣ „Свойства квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника“ *) было доказано, что, если вершину A треугольника соединить съ двумя вершинами внѣшняго квадрата, построеннаго на противоположной сторонѣ BC, то прямыми этими на сторонѣ BC отсѣчется отрѣзокъ

$$\frac{2aS}{a^2 + 2S},$$

т. е. какъ разъ сторона вписаннаго квадрата n_a. Это обстоятельство

*) „Вѣстникъ“, № 633, стр. 208.

даетъ намъ въ руки удобный способъ построенія сторонъ вписанныхъ квадратовъ.

§ 7. Извѣстно изъ аналитической геометріи слѣдующее предложеніе; если черезъ вершины A, B, C треугольника ABC и черезъ точку M въ плоскости треугольника провести прямыя AA_1, BB_1, CC_1 встрѣчающія стороны BC, CA, AB въ точкахъ A_1, B_1, C_1, то барицентрическія координаты точки M будутъ пропорціональны площадямъ MBC, MCA, MAB и кромѣ того, обозначая эти координаты черезъ α, β, γ,

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\gamma}{\beta};\quad \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\alpha}{\beta};\quad \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\beta}{\gamma}. \tag{12}$$

Основываясь на этомъ опредѣленіи, найдемъ барицентрическія координаты центровъ вписанныхъ квадратовъ. Обозначимъ эти центры черезъ i_a, i_b, i_c. Барицентрическія координаты центра i_a будутъ пропорціональны площадямъ треугольниковъ BCi_a, CAi_a, ABi_a. Для того, чтобы знать эти площади, необходимо опредѣлить высоты трехъ вышеупомянутыхъ треугольниковъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{высота треугольника } BCi_a=\frac{n_a}{2}\\
&\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad CAi_a=\frac{n_a\sqrt{2}}{2}\sin(45^\circ+90^\circ-C)=\frac{n_a}{2}(\sin C+\cos C)\\
&\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad ABI_a=\frac{n_a\sqrt{2}}{2}\sin(45^\circ+90^\circ-A)=\frac{n_a}{2}(\sin B+\cos B)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}
&\text{площ. } BCi_a=\frac{an_a}{4}\\
&\text{,,}\quad CAi_a=\frac{bn_a}{4}(\sin C+\cos C)\\
&\text{,,}\quad ABi_a=\frac{cn_a}{4}(\sin B+\cos B)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и барицентрическими координатами i_a будутъ

$$a,\ b(\sin C+\cos C),\quad c(\sin B+\cos B),$$

или имъ пропорціональныя величины:

$$\frac{a}{(\sin C+\cos C)(\sin B+\cos B)},\quad \frac{b}{\sin B+\cos B},\quad \frac{c}{\sin C+\cos C}. \tag{15}$$

Равнымъ образомъ барицентрическими координатами центровъ i_b, i_c будутъ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin A+\cos A},\quad \dfrac{b}{(\sin A+\cos A)(\sin C+\cos C)},\quad \dfrac{c}{\sin C+\cos C} \\[2ex] \dfrac{a}{\sin A+\cos A},\quad \dfrac{b}{(\sin B+\cos B)},\quad \dfrac{c}{(\sin A+\cos A)(\sin B+\cos B)} \end{array}\right\} \quad (15')$$

Извѣстно далѣе, что если три точки u_1, u_2, u_3 имѣютъ координатами

$$(s_1,\ t,\ q),\ (p,\ s_2,\ q),\ (p,\ t,\ s_3),$$

то прямыя Au_1, Bu_2, Cu_3 пересѣкаются въ одной точкѣ съ координатами $(p,\ t,\ q)$. Основываясь на этомъ, мы заключаемъ, что прямыя, соединяющія вершины треугольника съ центрами соотвѣтственныхъ вписанныхъ квадратовъ, пересѣкаются въ одной точкѣ съ координатами

$$\frac{a}{\sin A+\cos A},\quad \frac{b}{\sin B+\cos B},\quad \frac{c}{\sin C+\cos C}. \qquad (16)$$

Изложенное въ этомъ параграфѣ нѣсколько сложнѣе можетъ быть осуществлено съ отысканіемъ отношеній, въ которыхъ стороны треугольника дѣлятся прямыми, соединяющими вершины треугольника съ центрами вписанныхъ квадратовъ. Мы нашли бы для этихъ отношеній выраженія:

$$\frac{c(\sin B+\cos B)}{b(\sin C+\cos C)},\quad \frac{a(\sin C+\cos C)}{c(\sin A+\cos A)},\quad \frac{b(\sin A+\cos A)}{a(\sin B+\cos B)}.$$

Такъ какъ произведеніе этихъ отношеній равно 1, то отсюда мы заключили бы, что три прямыя Ai_a, Bi_b, Ci_c пересѣкаются въ одной точкѣ ω.

§ 8. Точка ω обладаетъ нѣкоторыми замѣчательными свойствами. Приводимъ безъ доказательства одно изъ нихъ; точка изотомически сопряженная съ ω лежитъ на прямой, соединяющей центръ тяжести треугольника съ точкой Лемуана антидополнительнаго треугольника*).

§ 9. Обозначимъ черезъ I_a, I_b, I_c центры описанныхъ квадратовъ и постараемся найти барицентрическія ихъ координаты.

*) Для читателя, знакомаго съ аналитической геометріей, отмѣтимъ, что опредѣлитель, составленный изъ координатъ трехъ упомянутыхъ точекъ, равенъ 0.

Безъ особыхъ затрудненій можно показать, что

$$
\left.
\begin{aligned}
\text{площ. } BCI_a &= \frac{aN_a}{4} \\
\text{„} \quad CAI_a &= \frac{bN_a}{4}(\sin C - \cos C) \\
\text{„} \quad ABI_a &= \frac{cN_a}{4}(\sin B - \cos B)
\end{aligned}
\right\} \qquad (17)
$$

Слѣдовательно, барицентрическія координаты I_a

$$\frac{a}{(\sin C - \cos C)(\sin B - \cos B)}, \quad \frac{b}{\sin B - \cos B}, \quad \frac{c}{\sin C - \cos C} \qquad (18)$$

Подобнымъ же образомъ находимъ барицентрическія координаты I_b, I_c

Слѣдовательно, *прямыя, соединяющія вершины треугольника съ центрами соотвѣтственныхъ описанныхъ квадратовъ, пересѣкаются въ одной точкѣ* ω, *съ координатами*:

$$\frac{a}{\sin A - \cos A}, \quad \frac{b}{\sin B - \cos B}, \quad \frac{c}{\sin C - \cos C}. \qquad (19)$$

§ 10. *Точка, изотомически сопряженная съ* ω, *лежитъ на прямой, соедяняющей центръ тяжести съ точкой Лемуана антидополнительнаго треугольника.*

§ 11. Разсмотримъ квадратъ $A_cA_bb_ac_a$ съ центромъ i_a. Пусть k_1 — середина A_cA_b. Тогда

$$Bk_1 = \frac{n_a}{2} + n_a \operatorname{cotg} B, \qquad Ck_1 = \frac{n_a}{2} + n_a \operatorname{cotg} C.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{Bk_1}{Ck_1} = \frac{1 + 2\operatorname{cotg} B}{1 + 2\operatorname{cotg} C}. \qquad (20)$$

Если k_2, k_3 — точки, имѣющія аналогичное значеніе, то

$$\frac{Ck_2}{Ak_2} = \frac{1 + 2\operatorname{cotg} C}{1 + 2\operatorname{cotg} A}, \quad \frac{Ak_3}{Bk_3} = \frac{1 + 2\operatorname{cotg} A}{1 + 2\operatorname{cotg} B}. \qquad (21)$$

Такъ какъ произведеніе всѣхъ трехъ отношеній равно 1, то мы имѣемъ возможность установить такую теорему: *прямыя, соединяющія вершины треугольника съ серединами тѣхъ сторонъ вписанныхъ квадратовъ, которыя лежатъ на сторонахъ треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ* φ.

На основанiи формулы (12) заключаемъ, что координатами этой точки являются

$$\frac{1}{1+2\operatorname{cotg} A}, \quad \frac{1}{1+2\operatorname{cotg} B}, \quad \frac{1}{1+2\operatorname{cotg} C}.$$

§ 12. Для описанныхъ квадратовъ имѣемъ аналогичную теорему: прямыя, соединяющiя вершины треугольника съ серединами тѣхъ сторонъ описанныхъ квадратовъ, которыя лежатъ на сторонахъ треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ φ_1.

§ 13. Точки, изотомически сопряженныя съ точками φ и φ', лежатъ на прямой, проходящей черезъ центръ тяжести.

§ 14. Пусть $A'_b A'_c C'_a b'_a$ вершины описаннаго квадрата I_a. Соединимъ точки c_a и b'_a и разсмотримъ точку пересѣченiя b_1 прямой $c_a b'_a$ съ BC. Изъ треугольника ABC, пересѣченнаго прямой $c_a b_a'$ имѣемъ:

$$\frac{Be_1}{Ce_1}\cdot\frac{Cb'_a}{Ab'_a}\cdot\frac{Ac_a}{Bc_a}=1.$$

Такъ какъ $Cb'_a = N_a \operatorname{cosec} A$, $Ab'_a = N_a \operatorname{cosec} A - b$, $c_a B = n_a \operatorname{cosec} B$, $Ac_a = c - n_a \operatorname{cosec} B$, то

$$\frac{Be_1}{Ce_1}=\frac{(N_a \operatorname{cosec} R - b)\, N_a \operatorname{cosec} B}{(c - n_a \operatorname{cosec} B)\, N_a \operatorname{cosec} A}=1.$$

Слѣдовательно, прямыя $b'_a c_a$ проходятъ черезъ середину BC. То же самое можно показать и для $c'_a b_a$. Такимъ образомъ, построивъ вписанный квадратъ $A_c c_a b_a A_b$, мы можемъ найти вершины соотвѣтственнаго описаннаго квадрата, какъ точки пересѣченiя прямыхъ, соединяющихъ середину BC съ c_a и b_a, со сторонами CA и BA.

§ 15. Обозначимъ черезъ A_1, B_1, C_1 основанiя высотъ треугольника. Тогда

$$\frac{A_c A_1}{A_b A_1}=\frac{c\cos B - n_a \operatorname{cotg} B}{b\cos C - n_a \operatorname{cotg} C}=\frac{\cos B}{\cos C}\cdot\frac{c-\dfrac{n_a}{\sin B}}{b-\dfrac{n_a}{\sin C}}=\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}=\frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C},$$

т. е. стороны вписанныхъ квадратовъ высотами дѣлятся пропорцiонально котангенсамъ угловъ, прилежащихъ этимъ отрѣзкамъ.

Отсюда, какъ слѣдствiе можно вывести слѣдующее предложенiе: произведенiе трехъ отрѣзковъ, образованныхъ высотами на сторонахъ вписанныхъ квадратовъ, равно произведенiю трехъ остальныхъ отрѣзковъ.

§ 16. Для описанныхъ квадратовъ эти предложенія можно прочесть такъ: стороны описанныхъ квадратовъ дѣлятся соотвѣтствующими высотами пропорціонально тангенсамъ угловъ, прилежащихъ этимъ отрѣзкамъ.

Произведеніе трехъ отрѣзковъ, образованныхъ на сторонахъ, описанныхъ квадратовъ, равно произведенію трехъ остальныхъ отрѣзковъ.

§ 17. Вычисляя произведенія $A_1A_c \,.\, A_1A'_b$ и $A_1A_b \,.\, A_1A'_c$, на основаніи предыдущаго мы заключаемъ, что они между собой равны. Слѣдовательно, основанія описанныхъ и вписанныхъ квадратовъ (A_c, A'_b, A_b, A'_c) на каждой сторонѣ треугольника образуютъ инволюцію; центромъ инволюціи является основаніе высоты треугольника, опущенной на эту сторону.

§ 17. Допустимъ, что высоты h_c и h_b встрѣчаютъ стороны $A_b b_a$ и $A_c c_a$ въ v_1 и v_2, ω_1 и ω_2.

Читатель безъ труда провѣритъ, что отрѣзокъ $A_b v_1 = A_c \omega_1$, $A_c v_2 = b_a \omega_2$, т. е. двѣ высоты пересѣкаютъ стороны*) не соотвѣственнаго квадрата въ 4 точкахъ такихъ, что отрѣзки, образованныя на одной сторонѣ одной высотой, равны отрѣзкамъ, образованнымъ другой высотой, на другой сторонѣ.

То же самое заключеніе можно сдѣлать и для описанныхъ квадратовъ.

Нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что указанныя свойства не исчерпываютъ всѣхъ свойствъ нашихъ квадратовъ. Къ продолженію дальнѣйшихъ изслѣдованій приглашаются читатели.

Дѣйствіе гироскопа.

К. М. Кильби.

(Переводъ съ англійскаго).

Иногда приходится слышать, что ни одна изъ многочисленныхъ теорій гироскопа не объясняетъ удовлетворительно его дѣйствія. Въ дѣйствительности же, наоборотъ, можно утверждать, что дѣйствіе гироскопа понято наукой вполнѣ и совершенно. Для объясненія его не требуется прибѣгать къ какому-то неизвѣстному закону, такъ какъ совершенно достаточно воспользоваться простѣйшимъ изъ всѣхъ зако-

*) Но не параллельную сторонѣ, соотвѣтствующей 3-ей высотѣ.

новъ науки, а именно, первымъ Ньютоновымъ закономъ движенія. Этотъ законъ инерціи знакомъ намъ изъ повседневнаго обыденнаго опыта. Нижеслѣдующія строки имѣютъ въ виду дать наиболѣе элементарную схему теорію гироскопа.

Ньютоновъ первый законъ движенія гласитъ, что тѣло, находящееся въ покоѣ или въ движеніи, остается въ покоѣ или въ движеніи, и въ этомъ послѣднемъ случаѣ тѣло продолжаетъ двигаться, сохраняя свое направленіе и скорость, пока на него не подѣйствуетъ какая нибудь внѣшняя сила. Проще это можно выразить такъ: никакое тѣло не можетъ самопроизвольно измѣнить ни скорости, ни направленія своего движенія. Это извѣстно изъ повседневнаго опыта. Въ этомъ предложеніи подразумѣвается, что для измѣненія скорости или направленія требуется сила, а также, что тѣло съ извѣстнымъ напряженіемъ противодѣйствуетъ приложенной силѣ. Если бы тѣло не оказывало этого противодѣйствія, то для измѣненія движенія не требовалось бы приложить силы, такъ какъ не было бы сопротивленія, которое приложенная сила должна преодолѣвать.

Объясненіе дѣйствія гироскопа вытекаетъ непосредственно изъ этого перваго закона движенія и связаннаго съ нимъ такъ называемаго третьяго закона движенія.

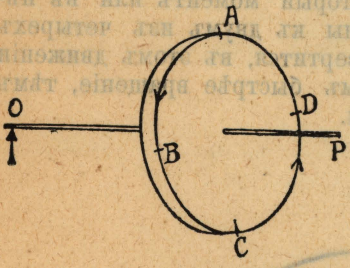


Рис. 1.

Разсмотримъ четыре частицы *A*, *B*, *C* и *D* на окружности вращающагося колеса (рис. 1). Предположимъ, что одинъ конецъ оси опирается на подставку *O* и что колесо вращается въ направленіи, указанномъ стрѣлкой, т. е. отъ *A* къ *B*.

Если конецъ *P* оси мы оставимъ свободнымъ, то останется неуравновѣшенной сила, направленная внизъ и стремящаяся вызвать вращеніе колеса и оси около горизонтальной линіи, проходящей черезъ точку *O* и перпендикулярной къ оси. Какъ только вертящееся колесо начинаетъ падать

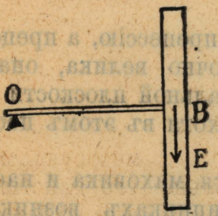


Рис. 2.

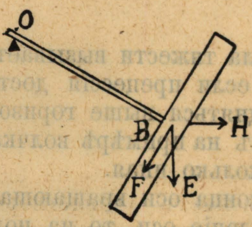


Рис. 3.

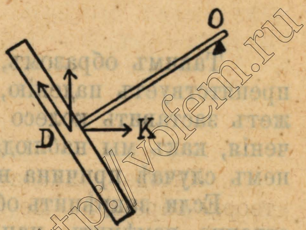


Рис. 4.

вслѣдствіе дѣйствія тяжести, направленія движущихся частицъ *B* и *D* (но не *A* и *C*) измѣняются, при чемъ появляются новыя силы.

Дѣйствіе тяжести стремится привести колесо въ положеніе, представленное на рис. 3, и частица B, двигавшаяся въ извѣстный моментъ въ направленіи BE, въ своемъ новомъ положеніи будетъ двигаться въ направленіи BF. Сообразно съ этимъ ея направленіе измѣнится, и по закону движенія это измѣненіе можетъ быть вызвано только силой, приложенной къ точкѣ B, а именно, силой тяжести. При этомъ, согласно закону инерціи, точка B стремится двигаться въ своемъ первоначальномъ направленіи BE и потому тянетъ въ направленіи BH, прочь отъ точки O. Частица же D на противоположной сторонѣ колеса дѣйствуетъ подобнымъ же образомъ, но въ противоположную сторону, а именно, какъ показано на рис. 4, т. е. въ направленіи къ точкѣ O. Вслѣдствіе того, что точки B и D тянутъ, такимъ образомъ, съ противоположныхъ сторонъ оси, возникаетъ вращеніе колеса и оси около шпиля O въ горизонтальной плоскости. Это движеніе оси называется прецессіей.

При возникновеніи этой прецессіи направленія частицъ A и C мѣняются и производимыя ими силы противодѣйствія вызываютъ вращеніе около точки O въ вертикальной плоскости, которое не даетъ гироскопу падать.

То, что мы сказали относительно четырехъ частицъ A, B, C и D, примѣнимо ко всѣмъ, вообще, частицамъ, изъ которыхъ состоитъ колесо, такъ какъ ихъ направленія въ нѣкоторый моментъ или въ нѣкоторомъ положеніи могутъ быть приведены къ двумъ изъ четырехъ направленій A, B, C и D. Когда колесо вертится, въ этомъ движеніи принимаютъ участіе всѣ частицы, и чѣмъ быстрѣе вращеніе, тѣмъ больше полная сила инерціи всей системы.

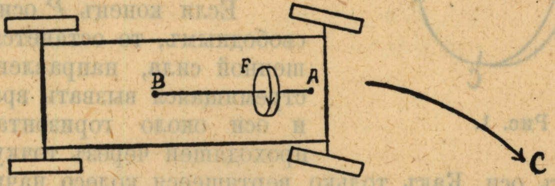


Рис. 5.

Такимъ образомъ, сила тяжести вызываетъ прецессію, а прецессія препятствуетъ паденію, и если прецессія достаточно велика, она можетъ заставить колесо подняться выше горизонтальной плоскости верченія, какъ мы наблюдаемъ на примѣрѣ волчка, хотя въ этомъ послѣднемъ случаѣ причина нѣсколько иная.

Если закрѣпить оба конца оси вращающагося маховика и насильственно измѣнить направленіе оси, то на подшипникахъ возникнетъ противодѣйствующая сила перпендикулярно къ направленію вынужденной прецессіи; въ этомъ можно убѣдиться, разсматривая четыре частицы колеса на рис. 1. Примѣромъ можетъ служить автомобиль, огибающій уголъ улицы. Чѣмъ больше скорость маховика и чѣмъ быстрѣе поворотъ, тѣмъ сильнѣе реакціи на подшипникахъ. Направленіе реакціи перпендикулярно къ плоскости движенія оси (т. е. къ горизонтальной плоскости), и опредѣляется далѣе направленіемъ вращенія маховика и поворота экипажа.

Если маховикъ F вертится, какъ показано на рис. 5, и экипажъ поворачиваетъ въ направленіи C, то ось давитъ на подшипникъ A внизъ, а на подшипникъ B — вверхъ. Величина этой реакціи гораздо больше, чѣмъ представляетъ себѣ иной владѣлецъ автомобиля; при большой скорости машины и рѣзкомъ поворотѣ эта реакція порождаетъ ужасающее напряженіе.

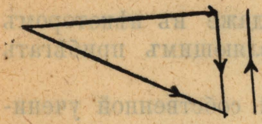


Рис. 6.

Для тѣхъ, которые знакомы съ теоріей векторовъ и роторовъ, дѣйствіе гироскопа можно было бы объяснить болѣе кратко. (На рис. 6 представлена реакція автомобиля); но и элементарная схема ясно показываетъ, почему дѣйствіе гироскопа (или реакція) перпендикулярно къ плоскости вынужденнаго движенія, т. е. къ приложенной силѣ, и почему гироскопъ получаетъ прецессію и не падаетъ, если его вертѣть за одинъ конецъ.

О нѣкоторыхъ вопросахъ преподаванія ариѳметики.

А. К. Арндта *).

(Докладъ, прочитанный на засѣданіи секціи математики и физики Юрьевскаго Педагогическаго Общества 28 ноября 1914 г.).

I.

Обыкновенно въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ курсъ ариѳметики распадаетъ на 3 части: на курсъ цѣлыхъ чиселъ, курсъ дробей и курсъ „(гражданскихъ) правилъ“. При этомъ по традиціи еще въ XX вѣкѣ держатся устарѣлые пріемы, подобные тѣмъ „vexationes populi“, противъ которыхъ уже Михаилъ Стифель, извѣстный математикъ XVI вѣка, ратуетъ въ своей „Arithmetica integra“.

Между тѣмъ въ наше время, когда съ другой стороны даже элементы высшей математики постепенно вводится въ курсъ среднихъ учебныхъ заведеній, почему то не рѣшаются отказаться отъ различныхъ способовъ въ сущности никому не нужныхъ. Говорятъ, правда, въ защиту ихъ изученія, что они развиваютъ мыслительныя способности и поэтому съ педагогической точки зрѣнія необходимы.

---

*) Удѣляя мѣсто этой статьѣ, посвященной преподаванію тройныхъ правилъ въ курсѣ ариѳметики, редакція возвратится къ этому вопросу въ ближайшихъ номерахъ.

Но, во-первыхъ, математика и безъ искусственныхъ осложненій даетъ пребогатый матеріалъ для умственнаго развитія и упражненія, а, во-вторыхъ — и это очень важно — не только преподаватель чувствуетъ искусственность этихъ способовъ, и на этой почвѣ потомъ и возникаетъ убѣжденіе о необыкновенной трудности математики — науки, которая и безъ того многимъ не особенно легко дается.

Кромѣ систематическаго курса главныхъ правилъ, основаннаго все же на сознательномъ примѣненіи принципа пропорціональности, встрѣчаются, и при томъ во всѣхъ классахъ, еще искусственныя „спеціальныя“ задачи.

Эти задачи являются особенно труднымъ и даже въ нѣкоторомъ смыслѣ опаснымъ для развитія отдѣломъ, заставляющимъ прибѣгать къ различнымъ уловкамъ.

Живо помню по сіе время эпизодъ изъ моей собственной ученической жизни. Я, тогда ученикъ I класса реальнаго училища, пытался безуспѣшно рѣшить слѣдующую задачу: „дюжина апельсинъ и десятокъ лимонъ стоятъ 98 (коп.). Что стоитъ апельсинъ и лимонъ, если 1 апельсинъ и 1 лимонъ вмѣстѣ стоятъ 9 (коп.)?“ Задача не вышла, какъ я ни бился. На другой день я обратился къ знакомому ученику V класса, того же заведенія. Тотъ и рѣшилъ мнѣ задачу при помощи алгебры, но не могъ ее объяснить „ариѳметически“. Получилъ я, однако, отъ него его алгебраическое рѣшеніе... и вотъ, разсматривая у себя дома внимательно его рѣшеніе я (не зная конечно еще алгебры!) рѣшилъ наконецъ эту задачу „ариѳметически“.

Приступая лѣтъ 15 спустя, въ $190^9/_{10}$ уч. году, къ преподаванію ариѳметики, я убѣдился, что изложеніе этого отдѣла математики находится приблизительно въ той же стадіи. Тогда же я рѣшился на реформу, которую теперь уже успѣшно провелъ въ 8 классахъ разныхъ частныхъ учебныхъ заведеній г. Юрьева.

Такъ какъ принципы рѣшенія уравненія I степени крайне просты, то я по возможности съ самаго начала сталъ на точку зрѣнія равенства, а не пропорціи.

Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, равенство $ab = cd$ представляется, какъ извѣстно, 4 различными способами, въ видѣ пропорціи типа $a:c = d:b$. Очевидно, соотношеніе $ab = cd$ болѣе простое и надежное, чѣмъ $a:c = d:b$, по крайней мѣрѣ на столько, на сколько умноженіе, вообще говоря, проще дѣленія.

Въ II отдѣлѣ этой статьи предлагаю вниманію читателя конспектъ курса „(гражданскихъ) правилъ“ ариѳметики въ томъ приблизительно видѣ, какъ я его излагаю въ настоящее время.

Что же касается „спеціальныхъ“ задачъ, то думаю, что этотъ отдѣлъ слѣдуетъ сократить до самаго крайняго минимума (если не исключить его совершенно), оставляя разборъ тѣхъ особыхъ способовъ ариѳметики, которые представляютъ самостоятельный математическій интересъ [напримѣръ, такъ называемое „regula falsi“ способъ ошибокъ)] на повтореніе предмета въ старшемъ классѣ, гдѣ ученики дѣйствительно способны легко усвоить самый способъ рѣшенія, а не принуждены смотрѣть на отдѣльную задачу, какъ на какой то странный ариѳметическій фокусъ, среди множества подобныхъ.

Даже одно изъ наиболѣе систематически изложенныхъ руководствъ для изученія методовъ ариѳметики Александрова поражаетъ массою (около 12 основныхъ) способовъ; обыкновенные же учебники ариѳметики, напримѣръ, общераспространенный курсъ Киселева, совершенно и не пытаются систематизировать этотъ матеріалъ.

Неужели думаютъ, что легче усвоить и запомнить не систематизированный матеріалъ, ссылаясь на то, что практика должна предшествовать теоріи, когда на самомъ дѣлѣ только параллельное изученіе теоріи и практики ведетъ къ требуемой цѣли. Напрасно въ данномъ вопросѣ соображенія о томъ, что дѣтское (да вообще человѣческое) мышленіе идетъ отъ частнаго къ общему, отъ практики къ теоріи впутываются въ ясное, съ математической точки зрѣнія, положеніе дѣлъ. Если же теорія еще недоступна пониманію на этой ступени, то и практика безполезна и даже вредна, обучая по существу непонятному и развивая безцѣльную дрессировку.

II.

Конспектъ курса 7 названій „гражданскихъ правилъ" ариѳметики.

Отношенія и пропорціи.

Разсматриваются лишь самыя основныя свойства: главное свойство геометрической и ариѳметической пропорцій. Если $a:b=c:d$, то $ad=bc$; и если $a-b=c-d$, то $a+d=b+c$. Этими теоремами можно здѣсь вполнѣ ограничиться, относя всѣ остальные вопросы къ систематическому курсу алгебры, къ главѣ объ уравненіяхъ, такъ какъ разборъ сложныхъ и производныхъ пропорцій, какъ видно изъ нижеслѣдующаго, можно вполнѣ обойти.

Простое и сложное тройное правило.

Задачи на тройное правило рѣшаются приведеніемъ къ единицѣ, при чемъ рекомендую такую запись:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_4(\ )\ldots & & a_3(\ )\ldots & & a_2(\ )\ldots & & a_1(\ )\ldots & & a(\ ) & \\
1 & \downarrow & 1 & \downarrow & 1 & \uparrow & 1 & \uparrow & 1 & \uparrow \\
b_4('')\ldots & & b_3('') & & b_2('') & & b_1('') & & x(\ ) & \\
\hline
\end{array}$$

$$x=a\cdot\frac{b_1\,.\,b_2\,.\,a_3\,.\,a_4}{a_1\,.\,a_2\,.\,b_3\,.\,b_4}(\ )=a^n/_m\doteq a \text{ если } 2n<m \text{ или } \doteq(a+1) \text{ если}$$

$2n\geqslant m$. Знакъ $\doteq$ означаетъ приближенно равно. Слѣдуетъ уже и здѣсь вести приближенныя вычисленія, такъ какъ они играютъ на практикѣ огромную роль.

Понятіе о такихъ вычисленіяхъ очень полезно и при прохожденіи курса физики. Здѣсь, какъ и во всемъ курсѣ, наименованія поставлены въ скобки, чтобы подчеркнуть то важное обстоятельство, что *всѣ дѣйствія производятся всегда и исключительно надъ отвлеченными числами*, а *наименованія ставятся смотря по условіямъ задачи*. Очень часто, особенно въ задачахъ физики, возможны странныя ошибки, источникъ которыхъ лежитъ въ слишкомъ узкой формулировкѣ этихъ начальныхъ основныхъ понятій ариѳметики. Ошибки этого рода встрѣчаются потомъ не только въ работахъ учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Способъ пропорцій, по моему мнѣнію, менѣе удобенъ, такъ какъ для основательнаго разбора необходимо составить систему отдѣльныхъ пропорцій, а потомъ изъ нихъ сложную пропорцію умноженіемъ первоначальныхъ, что вообще менѣе удобно, чѣмъ приведеніе къ единицѣ и доступно полному пониманію лишь при повтореніи въ старшемъ классѣ.

Не полную же запись, пріучая учениковъ къ неяснымъ разсужденіямъ, нельзя допустить и на этой ступени обученія.

Ограничиваясь указаннымъ разборомъ тройного правила, все остальное изложеніе строю на болѣе ясномъ и точномъ понятіи о *равенствѣ* величинъ, а не о ихъ *пропорціональности*, такъ какъ послѣднее понятіе гораздо менѣе ясно.

Рѣшеніе простѣйшихъ типическихъ уравненій.

На основаніи 2 принциповъ: 1) равныя $+$ равныя даютъ равныя; 2) равныя $\times$ на равныя даютъ равныя величины, объясняется рѣшеніе простѣйшихъ типическихъ (такъ сказать ариѳметическихъ) уравненій, напримѣръ, $x+7=10$; $x-7=10$; $3x=30$; $\frac{1}{3}x=10$ и т. д. Разбираются и заучиваются *правила переноса*. Этимъ и положенъ фундаментъ для легкаго и полнаго изученія всего дальнѣйшаго.

Правило процентовъ (%).

Основываясь на томъ объясненіи, что % означаетъ сотую (а ‰ — тысячную) часть даннаго числа, разбираю слѣдующій вопросъ:

1 (руб.) . . . 1 (г.) . . (приноситъ) . . $\frac{5}{100}$ (руб.) — 5%

1 (руб.) . . . 3 (г.) . . „ . . $\frac{3 . 5}{100}$ (руб.)

300 (руб.) . . . 3 (г.) . . „ . . $\frac{300 . 3 . 5}{100}$ (руб.) $= x$

[вообще n (руб.) . . . g (г.) . . „ . . d (руб.)].

$$\text{Слѣдовательно, } x = \frac{300 . 3 . 5}{100} \text{ (руб.)} = 45 \text{ (р.)}.$$

Разсмотрѣвши нѣсколько такихъ примѣровъ, обобщаютъ и даютъ правило:

$$d=\frac{n\cdot p\cdot g}{100}, \qquad \text{(I)}$$

гдѣ „d“ % деньги, „n“ начальный капиталъ, „p“ годовые проценты, „g“ время въ частяхъ года.

Легко составить и второе соотношеніе:

1 (руб.) . . . 1 (г.) . . . $\frac{5}{100}$ (руб.)

1 (руб.) . . . 1 (г.) . . . (приноситъ) . . . $\frac{3\,.\,5}{100}$ (руб.)

1 (руб.) . . . 1 (г.) . . . (превращается въ) . $\left(1+\frac{3\,.\,5}{100}\right)$ (руб.*)

500 (руб.) . . . 3 (г.) . . . „ „ $500\left(1+\frac{3\,.\,5}{100}\right)$ (р.)$=x$

[вообще n (руб.) . . . g (г.) . . . „ „ N (р.)].

Слѣдовательно $x=500\left(1+\frac{3\,.\,5}{100}\right)=500\,.\,1{,}15$ (р.) $=575$ (руб.);

что обобщая даетъ формулу

$$N=n\left(1+\frac{p\cdot g}{100}\right); \qquad \text{(II)}$$

гдѣ „N“ наращенный капиталъ, „n, p, g“ указаны выше. Указавъ еще, что

$$N=n+d, \qquad \text{(IIa)}$$

можно уже рѣшать любую задачу на правило процентовъ.

Примѣненіе этихъ соотношеній гарантируетъ дѣйствительно правильную, сознательную постановку вопроса. Здѣсь уже нѣтъ мѣста постояннымъ ошибкамъ при рѣшеніи задачъ, въ составъ которыхъ, такъ или иначе, входитъ наращенный рубль и наращенный капиталъ „N“.

---

*) Т. е. **наращенный рубль** $=1$ (р.) $+$ его % деньги. Демонстрировать, показывая 1 (р.) $+$ 15 (коп.)

Учетъ векселей.

Совершенно аналогично поступаемъ при разсмотрѣніи учета:

I задача: 1 (р.) . . . 1 (г.) . . . $\frac{5}{100}$ (р.)

1 (р.) . . . 2 (г.) . . . $\frac{2 . 5}{100}$ (р.)

500 (р.) . . . 2 (г.) . . . $\frac{500 . 2 . 5}{100}$ (р.) $= x = 50$ (руб.).

Что даетъ соотношеніе $d = \frac{w . p . g}{100}$; (I)

II задача: 1 (р.) . . . 1 (г.) . . . . . $\frac{5}{100}$ (р.)

1 (р.) . . . 2 (г.) . . . . . $\frac{2 . 5}{100}$ (р.)

1 (р.) . . . 2 (г.) . . $\left(1 - \frac{2 . 5}{100}\right)$ (р.) (учтенный руб.)

500 (1.) . . . 2 (г.) $500\left(1 - \frac{2 . 5}{100}\right)$ (р.) $= x = 450$ (р.).

Вообще $U = W\left(1 - \frac{p . g}{100}\right)$; (II)

нужно указать еще, что

$U = W - d$; (IIa)

здѣсь „d“ дисконтъ векселя, „w“ валюта, „p“ годовые проценты, „g“ время. Единица времени — годъ, лишь въ рѣдкихъ задачахъ — мѣсяцъ (m) и день (сутки) (s), „u“ — уплата по векселю.

Эти соотношенія быстро усваиваются, и потомъ уже легко рѣшаются всѣ задачи этого отдѣла.

Задачи на математическій учетъ, тогда даются очень легко, такъ сказать попутно. Вѣдь при математическомъ учетѣ $u = n$ (и $W = N$), т. е. уплата по векселю (долгосрочному обязательству) разсматривается, какъ начальный капиталъ въ задачѣ на $^0/_0$.

Необходимость такого учета удобно показать на примѣрѣ $W = 100 . 000$ (руб.), $p = 5^0/_0$, $g = 20$ (л.). Опредѣлить u.

Итакъ, въ изложенныхъ задачахъ вмѣсто того, чтобы каждый разъ составить задачу по тройному правилу, рѣшаютъ ее по разъ на всегда составленнымъ 2 равенствамъ, повторяя по временамъ ихъ „выводъ“. Этотъ способъ несомнѣнно болѣе легкій и надежный. Записываю ходъ рѣшенія такъ:

I примѣръ. Дано: $n = 500$ (руб.), $p = 4\%$, $g = x$ (л.) $= 5$ (л.), $N = 600$ (руб.), $d = y$ (р.) $= 100$ (р.).

$$\left.\begin{array}{l} n = 500 \text{ (руб.)}, \\ p = 4\%, \\ g = x\,(\text{л.}) = 5\,(\text{л.}), \\ N = 600 \text{ (руб.)}, \\ d = y\,(\text{р.}) = 100\,(\text{р.}). \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d = \dfrac{n \,.\, p \,.\, g}{100}, \\ 100 = \dfrac{500 \,.\, 4 \,.\, x}{100}, \\ x = \dfrac{100}{20}\,(\text{л.}) = 5\,(\text{л.}). \end{array}$$

II примѣръ. Дано:

$$\left.\begin{array}{l} n = x\,(\text{руб.}) = 500\,(\text{руб.}), \\ p = 4\%, \\ g = 5 \text{ (л.)}, \\ N = 600\,(\text{руб.}), \\ d = y\,(\text{руб.}) = 100\,(\text{руб.}). \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 600 = x\left(1 + \dfrac{4 \,.\, 5}{100}\right), \\ 600 = x \cdot \dfrac{120}{100}, \\ 600 = x \cdot \dfrac{6}{5}, \\ x = \dfrac{600 \,.\, 5}{6} = 500\,(\text{р.}). \end{array}$$

Цѣпное правило.

Составивъ извѣстнымъ образомъ цѣпь, выражаю правило такъ: произведеніе всѣхъ чиселъ I столбца равно произведенію всѣхъ чиселъ II столбца. Изъ этого равенства и опредѣляю x. Этимъ дается ясно установленное цѣпное правило и обходится рядъ обычныхъ ученическихъ ошибокъ и недоразумѣній*).

Задачи на пропорціональное дѣленіе.

Разсмотримъ задачи этого типа на одномъ общемъ примѣрѣ. Дано, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3210$ (руб.) и

$$\begin{array}{l} x_1 : \underline{x_2} = 3 : 4 = (3 \,.\, 5 \,.\, 2) : \underline{(4 \,.\, 5 \,.\, 2)} \\ \underline{x_2} : \underline{\underline{x_3}} = 5 : 6 = \underline{(4 \,.\, 5 \,.\, 2)} : \underline{\underline{(6 \,.\, 4 \,.\, 2)}} \\ \underline{\underline{x_3}} : x_4 = 2 : 4 = \underline{\underline{(2 \,.\, 4 \,.\, 6)}} : (4 \,.\, 4 \,.\, 6) \end{array}$$

составляютъ произведеніе I столбца (аналогія! цѣпное правило!), а потомъ соотвѣтственно умножаютъ члены каждаго отношенія, такъ чтобы одинаково подчеркнутыя части оказались равными. Получаемъ цѣпь (рядъ равныхъ отношеній)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (3 \,.\, 5 \,.\, 2) : (4 \,.\, 5 \,.\, 2) : (2 \,.\, 4 \,.\, 6) : (4 \,.\, 4 \,.\, 6) = 15 : 20 : 24 : 48$$

*) Обыкновенно дѣлятъ „правую“ часть на „лѣвую“, а то и наоборотъ.

(если возможно сократить!) **). Слѣдовательно:

$$x_1 = 15y = 15 . 30 = 450 \text{ (руб.)}$$
$$x_2 = 20y = 20 . 30 = 600 \text{ (руб.)}$$
$$x_3 = 24y = 24 . 30 = 720 \text{ (руб.)}$$
$$x_4 = 48y = 48 . 30 = 1440 \text{ (руб.)}$$
$$107y = 3210 \text{ (руб.)}$$

провѣрка сложеніемъ частей $y = \frac{3210}{107} = 30$ (руб.) (основной пай).

Задачи же, для рѣшенія которыхъ обыкновенно составляютъ нѣсколько цѣпей, лучше рѣшать приведеніемъ къ основной единицѣ („единичная" строка тройного правила), напримѣръ 1 (рабочій) въ (1 день) . . . x (руб.). 27 (рабочихъ) въ 30 (дней) . . . $27 . 30 . x$ (руб.) и т. д. (ср. эту задачу въ учебникѣ Киселева).

Избѣгать введенія x'а въ подобную задачу нѣтъ никакого основанія.

Задачи на смѣшеніе и сплавы.

Задачи на смѣшеніе I рода (составить смѣсь по всѣмъ даннымъ частямъ), какъ извѣстно, очень просты и рѣшаются обычнымъ способомъ. При рѣшеніи задачъ на смѣшеніе II рода составляю равенство прибыль = убытку, такъ, напримѣръ.

	Единичн. разн.		
Дано: x_1 (фунт.) по 5 (руб./фунт.)	5 (руб./фунт.)	$5x_1$ (руб.)	Приб.
x_2 (фунт.) по 12 (руб./фунт.)	2 (руб./фунт.)	$2x_2$ (фунт.)	Убыт.
Составить 28 (фунт.) по 10 (р./ф.)			

слѣдовательно: $5x_1 = 2x_2$ и лишь изъ этого равенства составляется пропорція $x_1 : x_2 = 2 : 5$ $\left(\text{или } \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{5} = y\right)$, помня, что „произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ".

(Если непосредственно составить пропорцію, то ученики очень часто потомъ не знаютъ, гдѣ у нихъ I и какой II сортъ). Тогда, приравнивая соотвѣтствующіе члены пропорціи, получимъ:

$$x_1 = 2y = 2 . 4 = 8 \text{ (ф.)}$$
$$x_2 = 5y = 5 . 4 = 20 \text{ (ф.)}$$
$$7y = 28 \text{ (ф.)};\ y = \frac{28}{7} = 4 \text{ (ф.)}.$$

**) Обыкновенно руководства ариѳметики допускаютъ такую условную запись, правильнѣе было бы: $\frac{x_1}{15} = \frac{x_2}{20} = \frac{x_3}{24} = \frac{x_4}{48} = y$.

Заданіе же въ этихъ задачахъ вмѣсто цѣны русской или метрической пробы, градусовъ, процента — лишь различные способы заданія качества даннаго сорта.

Задачи на вычисленіе прибыли и убытка рѣшаются, обозначая основную цѣну (безъ прибыли или убытка) черезъ x, если она неизвѣстна.

Вотъ главные типы ариѳметическихъ задачъ. Они и служатъ для перехода къ алгебраическимъ задачамъ общаго и болѣе сложнаго характера; послѣднія по моему мнѣнію уже цѣликомъ относятся къ курсу алгебры.

Задачи такого рода, повторяю, не должны являться загадками или матеріаломъ для изученія безчисленныхъ „способовъ“ ариѳметики. Эти способы являются почти безъ исключенія лишь устнымъ пересказомъ хода рѣшенія алгебраическихъ, вѣрнѣе ариѳметическихъ уравненій. На немногіе способы самостоятельнаго значенія лучше указать лишь при повтореніи ариѳметики.

Вышеизложенный конспектъ передаетъ мою попытку построить курсъ ариѳметики на равенствѣ, а не на пропорціональности и — пріучая къ полной точной записи — рѣшать задачи ариѳметики прямымъ „алгебраическимъ“ путемъ, подготовляя этимъ къ изученію уравненій — настоящаго прочнаго фундамента ариѳметики и (обобщенной ариѳметики) — алгебры.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. **Е. Л. Буницкаго**.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 279 (6 сер.). Доказать тождество

$$C_m^k + C_n^1 C_m^{k+1} + C_n^2 C_m^{k+2} + \cdots + C_n^n C_m^{k+n} = C_{m+n}^{k+n},$$

гдѣ C_p^q обозначаютъ число сочетаній изъ p по q, при условіи, что $k+n \leqq m$.

М. Горнштейнъ (Бердянскъ).

№ 280 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{x^2+22x-7}{x+3} - 8\sqrt{x-1} = 0.$$

В. Тюнинъ (Самара).

№ 281 (6 сер.). Дана окружность и двѣ точки A и B въ ея плоскости. Доказать, что общія хорды данной окружности и всѣхъ окружностей, проходящихъ черезъ точки A и B, проходятъ черезъ нѣкоторую общую точку*).

Н. Сагателянцъ (Шуша).

№ 282 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^{2y-11x}+y^{2x}=y^x x^{y-10x}+y^x x^{y-x}.$$

Д. Ханжiевъ (Армавиръ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 219 (6 сер.). *Доказать неравенство*

$$\frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{na^{\frac{n-1}{2}}(1-a)(1-a^2)}\geqq\sqrt[n]{(1+a)(1+a+a^2)(1+a+a^2+a^3)\cdots(1+a+a^2+\cdots a^{n-1}},$$

гдѣ a — *любое положительное число и* n — *любое цѣлое положительное число. Въ какомъ случаѣ возможенъ знакъ равенства въ предложенной для доказательства формулѣ? Какъ истолковать неравенство при* $a=1$?

Разсмотримъ при положительномъ a рядъ n чиселъ

$$(1)\quad a,\quad a^2(1+a),\quad a^3(1+a+a^2),\cdots,\ a^n(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}).$$

По извѣстной теоремѣ ихъ среднее ариѳметическое не менѣе ихъ средняго геометрическаго, т. е.

$$(2)\quad \frac{a+a^2(1+a)+\cdots+a^n(1+a+\cdots+a^{n-1})}{n}\geqq$$
$$\geqq\sqrt[n]{a^{1+2+\cdots+n}(1+a)(1+a+a^2)\cdots(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})}.$$

Пусть $a \neq 1$. Суммируя геометрическія прогрессіи $1+a$, $1+a+a^2,\ldots$ $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$ въ первой части формулы (2) и ариѳметическую прогрессію $1+2+\cdots+n$ во второй части, находимъ, что

$$(3)\quad \frac{1}{n}\left[\frac{a(1-a)}{1-a}+\frac{a^2(1-a^2)}{1-a}+\frac{a^3(1-a^3)}{1-a}+\cdots+\frac{a^n(1-a^n)}{1-a}\right]\geqq$$
$$\geqq\sqrt[n]{a^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+a)(1+a+a^2)\cdots(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})}.$$

*) Помѣщая въ видѣ задачи это предложеніе, общеизвѣстное въ теоріи системъ окружностей, рекомендуемъ читателямъ «Вѣстника» найти доказательство чисто геометрическаго характера.

Но $\sqrt[n]{a^{\frac{n(n+1)}{2}}} = a^{\frac{n+1}{2}}$, и, послѣ ряда обычныхъ преобразованій,

$$\frac{1}{n}\left[\frac{a(1-a)}{1-a}+\frac{a^2(1-a^2)}{1-a}+\cdots+\frac{a^n(1-a^n)}{1-a}\right]=$$

$$=\frac{a}{n(1-a)}\cdot\left[(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})-(a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1})\right]=$$

$$=\frac{a}{n(1-a)}\left(\frac{1-a^n}{1-a}-\frac{a-a^{2n}}{1-a^2}\right)=\frac{a(1-a^n)}{n(1-a)}\left(\frac{1}{1-a}-\frac{a+a^{n+1}}{1-a^2}\right)=$$

$$=\frac{a(1-a^n)(1-a^{n+1})}{n(1-a)(1-a^2)},$$

а потому формулу (3) можно записать въ видѣ

$$\frac{a(1-a^n)(1-a^{n+1})}{n(1-a)(1-a^2)} \geqq a^{\frac{n+1}{2}}\sqrt[n]{(1+a)(1+a+a^2)\cdots(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})},$$

откуда, дѣля обѣ части на $a^{\frac{n+1}{2}}$, получимъ предложенную для доказательства формулу. При $a=1$ числа ряда (1), получая соотвѣтственно значенія $1, 2, \ldots, n$, не равны между собою, а потому въ основной формулѣ (2) прійдется опустить знакъ равенства, и такимъ образомъ формула (2) даетъ намъ при $a=1$ неравенство

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1.2\ldots n}, \quad \text{или} \quad \frac{n(n+1)}{2n} > \sqrt[n]{n!}, \quad \text{откуда} \quad (4) \quad \frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}.$$

Любопытно, что формулу (4) можно разсматривать, какъ примѣненіе предложенной для доказательства формулы при $a=1$, если опустить въ послѣдней знакъ равенства и если за значеніе правой части принять при $a=1$ такъ называемое ея истинное значеніе, что можно провѣрить при помощи равенствъ

$$\lim_{a=1}\frac{1-a^n}{1-a}=\lim_{a=1}(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=n,$$

$$\lim_{a=1}\frac{1-a^{n+1}}{1-a^2}=\lim_{a=1}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+a}=\frac{n+1}{2}.$$

Знакъ равенства въ предложенной для доказательства формулѣ возможенъ и даже обязателенъ, конечно, при особомъ толкованіи, если $n=1$. Если при $n=1$ въ правой части подъ радикаломъ оставить лишь множитель 1, который всегда можно подразумѣвать, то формула переходитъ въ тожество $1=1$; правильнѣе, однако, считать, что, по самому виду формулы, мы должны принять для цѣлаго положительнаго по условію числа n также и неравенство $n>1$, такъ какъ подъ радикаломъ лишь $n-1$ сомножителей. Если же $n>1$, то въ предложенной для доказательства формулѣ, или, что равносильно, въ формулѣ (2) знакъ равенства возможенъ лишь при равенствѣ всѣхъ чиселъ ряда (1). Если $n=2$, то это возможно, такъ какъ изъ равенства $a=a^2(1+a)$ имѣемъ $a^3+a^2-a=0$, или, такъ какъ $a>0$ по условію, $a^2+a-1=0$, откуда сохраняя, согласно съ условіемъ, положительный корень, который мы обозначимъ черезъ a, — имѣемъ, что $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При этомъ значеніи a разсматриваемая формула переходитъ въ равенство $\frac{(1-a^2)(1-a^3)}{2\sqrt{a}(1-a)(1-a^2)}=\sqrt{1+a}$, которое можно упростить и провѣрить. И это единственный случай знака равенства въ разсматриваемой формулѣ, такъ какъ при $n>2$ для удержанія лишь знака равенства необходимо, чтобы всѣ числа ряда (1) были равны и, въ частности, чтобы три первыхъ числа были равны. Но тогда мы имѣли бы равенства $a=a^2(1+a)$, $a^2(1+a)=a^3(1+a+a^2)$ при $a>0$, откуда вытекало бы, что (5) $a^3+a^2=a$ и $a^5+a^4+a^3=a^3+a^2$, т. е. $a^2(a^3+a^2)=a^2$, или же [см. (5)] $a^3=a^2$, или, наконецъ, такъ какъ $a>0$, $a=1$; но тогда равенство (5) дало бы нелѣпое численное равенство. Итакъ въ разсматриваемой формулѣ нужно удержать во всѣхъ случаяхъ знакъ неравенства, кромѣ того случая, когда $n=2$ и $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Замѣчаніе. При $a>0$ разсматриваемую формулу можно записать въ равносильномъ видѣ еще и такъ:

$$\frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}\geq na^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{(1+a)(1+a+a^2)\cdots(1+a+\cdots+a^{n-1})}.$$

Въ этомъ видѣ формулу можно распространить и на тотъ случай, когда $a=0$, если исключить чисто формальный и приводящій, какъ указано выше, къ неясности случай, когда $n=1$; дѣйствительно, при $a=0$ и при $n>1$ разсматриваемая формула даетъ правильное неравенство, а именно $1>0$.

П. Волохинъ (Одесса); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *Н. С.* (Одесса).

Отъ редакціи.

Задержка въ выходѣ настоящаго номера вызвана затрудненіями въ дѣлѣ полученія бумаги. Первый номеръ семестра пришлось выпустить на неудовлетворительной бумагѣ. Въ настоящее время журналъ уже обезпеченъ бумагой и редакція приметъ всѣ мѣры къ тому, чтобы своевременно закончить семестръ.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый, подъ редакцей прив.-доц. В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Изъ записной книжки преподавателя. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Библіографія: I. Рецензіи. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. III. Новости иностранной литературы. Темы для сотрудниковъ. Задачи на премію. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр.—для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ—для дух. семинарій и училищъ.

Въ 1913 г. журналъ былъ признанъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. заслуживающимъ вниманія при пополненіи библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Пробный номеръ высылается за одну 10 коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1914/15 году. Второй серіи 2-й и 3-й семестры.

М. Зиминъ. О раціональныхъ вписанныхъ многоугольникахъ и описанныхъ многосторонникахъ. *П. Флоровъ.* Страхованіе жизни. *Проф. Ш. Гюи.* Вольтова дуга. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Къ вопросу о доказательствахъ теоремы Лангранжа о конечномъ приращеніи функціи. *Гибсонъ.* Хронологическій обзоръ главныхъ моментовъ эволюціи и развитія безпроволочной телеграфіи. *Прив.-доц Д. А. Крыжановскій.* О доказательствахъ теоремы Лангранжа о конечномъ приращеніи функціи. *А. Фрумкинъ.* Распыленіе катода. *Проф. И. Ю. Тимченко.* О діалектическомъ методѣ древнихъ геометровъ. *А. Рабиновичъ.* Явленіе Штарка—разложеніе спектральныхъ линій ъв электрическомъ полѣ. *Т. Си.* Законъ природы въ небесной эволюціи. *П. Фолькманъ.* Вопросы школьнаго преподаванія физики. *Г. Абботъ.* Утилизація солнечной энергіи. *Н. Извольскій.* О соотношеніи между вписанными и центральными углами круга. *Прив.-доц. В. Ф. Каганъ.* О законѣ тождества цѣлыхъ функцій. *М. Камерлингъ-Оннесъ.* Длительный электрическій токъ безъ электродвижущей силы въ сверхъ-проводникахъ. *М. Зиминъ.* О приближеніяхъ, выражаемыхъ квадратными корнями. *Ш. Филлипсъ.* Современныя формы рёнтгеновскихъ трубокъ *Э. Борель.* Какъ согласовать преподаваніе въ средней школѣ съ прогрессомъ науки. *А. Фрумкинъ.* Новыя изслѣдованія о положительныхъ лучахъ. *Проф. К. Фаянсъ.* Радіоэлементы и періодическая система. *М. Зиминъ.* О кривой, проходящей сколь угодно близко къ каждой точкѣ плоскости. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.* О дѣленіи многочленовъ. *Проф. К. Поссе.* Н. Я. Сонинъ. *Прив.-доц. В. Ф. Каганъ.* Памяти Николая Алексѣевича Умова. *П. Флоровъ.* Провѣрка одного неравенства. *Прив.-доц С. Бернштейнъ.* Задача о четырехъ и о пяти краскахъ. *А. Р. Гинксъ.* Измѣреніе небесныхъ разстояній. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.* Къ вопросу объ освобожденіи знаменателя дроби отъ радикаловъ. *Проф. И. Ю. Тимченко.* О тождествѣ многочленовъ. *П. Сюшаръ.* О расположеніи корней двучлена второй степени. *Н. Михальскій.* Теорія пленусовъ и ея примѣненія. *Проф. А. Грингиль.* Геометрическое изслѣдованіе движенія планетъ. *Прив.-доц. В. Вестфаль.* Новѣйшія изслѣдованія въ ультра-красномъ спектрѣ. *Н. Агрономъ.* Свойства квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника. *Я. Дубновъ.* Формулы Ньютона для выраженія простыхъ симметрическихъ функцій черезъ основныя. *Н. Агрономовъ.* По поводу теоремы К. Неймана (Архимеда). *Лордъ Рэлей.* Какъ мы воспринимаемъ направленіе звука. *С. Вавиловъ.* Объ одномъ возможномъ выводѣ. *Проф. А. Орловъ.* О наблюденіяхъ полнаго солнечнаго затменія 8/12 августа 1914 г. астрономами Императорскаго Новороссійскаго Университета. *А. Гаркеръ.* Отношеніе геологіи къ точнымъ наукамъ и замѣчанія о геологическомъ времени. *П. Флоровъ.* Элементарное рѣшеніе задачи Бюффона по теоріи вѣроятностей. *А. Стрёттъ.* Тригонометрія въ ея связи съ геометріей.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ: Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы нисшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Тарифъ для объявленій: за страницу **30 руб.**; при печатаніи не менѣе 3 разъ—**10%** скидки, 6 разъ—**20%**, 12 разъ—**30%**.

Журналъ за прошлые годы по **2 руб. 50 коп.**, а учащимся и книгопродавцамъ по **2 руб.** за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по **30 к.**, прошлыхъ семестровъ по **25 к.**

Адр. для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**