№ 631.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакцiей

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серiи

III-го семестра № 7.

ОДЕССА
Типографiя „Техникъ"—Екатерининская, 58.
1915.

Второй серіи III-го семестра № 7.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

Элементарной Математики.

№ 631.

О тождествѣ многочленовъ.

Проф. И. Ю. Тимченко.

Опредѣленіе 1. Два многочлена, расположенные по степенямъ перемѣнной x — двѣ цѣлыхъ алгебраическихъ функцій отъ x — называются тождественными, если они одной и той же степени относительно x, и если соотвѣтственно равны ихъ постоянные члены и коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнной.

Опредѣленіе 2. Нетождественными или различными многочленами 1-го рода называются два многочлена одной и той же степени у которыхъ равны соотвѣтственно коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнной, но различны постоянные члены.

Опредѣленіе 3. Нетождественными или различными многочленами 2-го рода называются два многочлена различной степени, или одной и той же степени, въ этомъ послѣднемъ случаѣ, если не всѣ коэффиціенты одного изъ многочленовъ равны соотвѣтственно коэффиціентамъ при тѣхъ же степеняхъ перемѣнной другого многочлена.

Слѣдствіе 1. Всякіе два многочлена могутъ быть или тождественными, или различными многочленами 1-го рода или различными многочленами 2-го рода. Каждый изъ этихъ трехъ случаевъ исключаетъ возможность двухъ другихъ.

Слѣдствіе 2. Разность значеній двухъ различныхъ многочленовъ 1-го рода, соотвѣтствующихъ одинаковымъ значеніямъ перемѣнной равна разности ихъ постоянныхъ членовъ.

Слѣдствіе 3. Два различныхъ многочлена 1-го рода не могутъ быть равными ни при какихъ значеніяхъ перемѣнной.

Слѣдствіе 4. Алгебраическая разность двухъ различныхъ многочленовъ 2-го рода есть многочленъ нѣкоторой опредѣленной степени относительно перемѣнной x; т. е. разность значеній двухъ многочленовъ такого рода при одномъ и томъ же произвольномъ значеніи перемѣнной равна значенію нѣкотораго третьяго многочлена при томъ же значеніи перемѣнной.

Теорема 1. Если $f(x)$ есть цѣлая функція n-ой степени относительно x, коэффиціентъ высшаго члена которой равенъ A, и если $f(a)=0$, то при всѣхъ значеніяхъ x

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть нѣкоторый многочленъ степени $n-1$, коэффиціентъ высшаго члена котораго есть также A, если $n>1$; если же $n=1$, то

$$f(x)=A\,(x-a).$$

Доказательство: Пусть

$$f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}\,x+A_n, \quad \text{гдѣ } n>1,$$

тогда по условію теоремы

$$Aa^n+A_1a^{n-1}+\cdots+A_{n-1}\,a+A_n=0. \qquad (1)$$

Составимъ многочленъ

$$\varphi(x)=Ax^{n-1}+(Aa+A_1)\,x^{n-2}+(Aa^2+A_1a+A_2)\,x^{n-3}+\cdots$$
$$\cdots+(Aa^{n-1}+A_1a^{n-2}+\cdots+A_{n-1}).$$

Умноживъ $\varphi(x)$ на $x-a$, получимъ послѣ приведенія подобныхъ членовъ

$$\varphi(x)\,.\,(x-a)=f(x)-(Aa^n+A_1a^{n-1}+\cdots+A_n),$$

или, вслѣдствіе равенства (1),

$$f(x)=\varphi(x)\,.\,(x-a).$$

Если же $n=1$, то пусть $f(x)=Ax+B$, тогда $Aa+B=0$, слѣдовательно,

$$A\,(x-a)=Ax-Aa+Aa+B=Ax+B, \text{ или } f(x)=A\,(x-a),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть неравныя числа, $f(x)$ — цѣлая функція n-ой степени, и

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0,$$

то

$$f(x) = A(x - a_1)\, x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x, гдѣ A коэффиціентъ высшаго члена функціи $f(x)$.

Если $n = 1$, то справедливость этой теоремы есть слѣдствіе теоремы 1. Если же $n > 1$, то, на основаніи теоремы 1,

$$f(x) = f_1(x)(x - a_1),$$

гдѣ $f_1(x)$ есть многочленъ степени $n - 1$, въ которомъ коэффиціентъ высшаго члена есть A; такъ какъ $f(a_2) = 0$ и $(a_2 - a_1) \neq 0$, то $f_1(a_2) = 0$ и, слѣдовательно, на основаніи предыдущей теоремы

$$f_1(x) = f_2(x)(x - a) \quad \text{и} \quad f(x) = f_2(x) \,.\, (x - a_1)(x - a_2),$$

гдѣ $f_2(x)$ есть многочленъ степени $n - 2$, въ которомъ коэффиціентъ высшаго члена есть A.

Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы убѣдимся въ томъ, что

$$f(x) = f_{n-1}(x) \,.\, (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1}),$$

гдѣ $f_{n-1}(x)$ есть двучленъ вида $Ax + B$, что $f_{n-1}(a_n) = 0$ и что, слѣдовательно,

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1})(x - a_n),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Многочленъ n-ой степени относительно перемѣнной x не можетъ обращаться въ 0 болѣе чѣмъ при n различныхъ значеніяхъ перемѣнной.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть n различныхъ значеній перемѣнной, при которыхъ многочленъ n-ой степени $f(x)$ обращается въ 0. Тогда, на основаніи предыдущей теоремы, при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

гдѣ A коэффиціентъ старшаго члена функціи $f(x)$.

Если бы при какомъ нибудь значеніи x отличномъ отъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ обратился въ 0, то сдѣлалось бы равнымъ нулю при томъ же значеніи перемѣнной и произведеніе

$$A(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

что очевидно невозможно.

Слѣдствіе. Никакая цѣлая функція отъ x не можетъ обращаться въ 0, при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x.

Теорема 4. (Законъ тождества цѣлыхъ функцій). Двѣ цѣлыхъ функціи отъ x, имѣющія равныя значенія при всѣхъ одинаковыхъ значеніяхъ x, тождественны.

Доказательство. Дѣйствительно, допустимъ, что предложенныя функціи не тождественны. Тогда эти функціи суть различныя функціи 1-го или 2-го рода.

Но различными функціями 1-го рода онѣ быть не могутъ, такъ какъ такого рода функціи не могутъ быть равны ни при какихъ значеніяхъ перемѣнной. Не могутъ быть онѣ и различными функціями 2-го рода, такъ какъ тогда разность ихъ была бы нѣкоторымъ многочленомъ опредѣленной степени, который по условію теоремы былъ бы равенъ нулю при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной, что по доказанному невозможно. Слѣдовательно, предложенныя функціи тождественны. Что и требовалось доказать.

О расположеніи корней двучлена второй степени.

П. Сюшара.

Переводъ съ французскаго*).

1. Жиро (Girod) далъ пять условій, которыя должны быть удовлетворены для того, чтобы корни даннаго квадратнаго уравненія были заключены между двумя данными числами α, β. Жераръ (Gérard), свелъ число этихъ условій къ тремъ.

Въ настоящей статьѣ мы сначала выводимъ тѣ же условія Жиро, но способомъ, отличнымъ отъ предложеннаго имъ; затѣмъ мы даемъ методъ, позволяющій намъ одновременно рѣшить болѣе общую задачу о расположеніи корней квадратнаго уравненія по отношенію къ двумъ даннымъ числамъ, или, что то же самое, по отношенію къ корнямъ другого квадратнаго уравненія.

2. Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

будетъ данное уравненіе, α, $\beta\,(\alpha < \beta)$ — данныя два числа, x', x'' корни уравненія (1). Расположеніе (въ порядкѣ возрастающихъ величинъ) α, x', x'', β будетъ имѣть мѣсто, если удовлетворены неравенства:

$$\Delta > 0, \quad x' - \alpha > 0, \quad \beta - x' > 0, \quad x'' - \alpha > 0, \quad \beta - x'' > 0,$$

гдѣ Δ есть дискриминантъ уравненія (1). Замѣтимъ, что послѣднія четыре неравенства эквивалентны двумъ слѣдующимъ:

$$\frac{x' - \alpha}{\beta - x'} > 0, \quad \frac{x'' - \alpha}{\beta - x''} > 0$$

или другимъ двумъ:

$$(x' - \alpha)(\beta - x') > 0, \quad (x'' - \alpha)(\beta - x'') > 0.$$

---

*) L'Einseignement Mathématique. 1915.

Вышенаписанныя пять неравенствъ эквивалентны, слѣдовательно, тремъ:

$$\Delta > 0, \quad \frac{x' - a}{\beta - x'} > 0, \quad \frac{x'' - a}{\beta - x''} > 0 \tag{u}$$

или же:

$$\Delta > 0, \quad (x' - a)(\beta - x') > 0, \quad (x'' - a)(\beta - x'') > 0. \tag{v}$$

Удовлетвореніе этихъ неравенствъ, очевидно, необходимо и достаточно. Впрочемъ, эти двѣ системы могутъ быть замѣнены слѣдующими, эквивалентными имъ и симметричными по отношенію къ корнямъ x' и x'':

$$\Delta > 0, \quad \frac{x' - a}{\beta - x'} \cdot \frac{x'' - a}{\beta - x''} > 0, \quad \frac{x' - a}{\beta - x'} + \frac{x'' - a}{\beta - x''} > 0 \tag{u'}$$

или же:

$$\begin{gathered} \Delta > 0, \quad (x' - a)(\beta - x')(x'' - a)(\beta - x'') > 0, \\ (x' - a)(\beta - x') + (x'' - a)(\beta - x'') > 0. \end{gathered} \tag{v'}$$

Но

$$\frac{x' - a}{\beta - x'} + \frac{x'' - a}{\beta - x''} = -\frac{2c + b(a + \beta) + 2aa\beta}{f(\beta)},$$

а

$$\frac{x' - a}{\beta - x'} \cdot \frac{x'' - a}{\beta - x''} = \frac{f(a)}{f(\beta)}.$$

Слѣдовательно, система (u') переходитъ въ

$$\Delta > 0, \quad f(a) f(\beta) > 0, \quad f(\beta)\,[2c + b(a + \beta) + 2aa\beta] < 0, \tag{u''}$$

и мы получаемъ такимъ образомъ условія Жиро.

Система (v') можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\Delta > 0, \quad f(a) f(\beta) > 0, \quad a\,[2c + b(a + \beta) + 2aa\beta] + b^2 - 4ac < 0, \tag{v''}$$

и легко замѣтить, что первая система имѣетъ преимущество по сравненію съ послѣдней, а именно: ея третье неравенство линейно по отношенію къ коэффиціентамъ даннаго уравненія.

3) Неравенства системъ (u') и (v') могутъ быть интерпретированы слѣдующимъ образомъ. Числа $\dfrac{x' - a}{\beta - x'}$ и $\dfrac{x'' - a}{\beta - x''}$ суть корни квадратнаго уравненія, которое получится, если мы подвергнемъ уравненіе (1) гомографическому преобразованію при помощи подстановки $y = \dfrac{x - a}{\beta - x}$.

Мы возвращаемся такимъ образомъ къ тому самому методу, которымъ пользовался Жераръ, если замѣтимъ, что нѣтъ нужды писать самое преобразованное уравненіе, разъ мы изъ системы (u') уже знаемъ, какимъ условіямъ корни этого уравненія должны удовлетворять. Замѣтимъ также, что если мы напишемъ уравненіе

$$\varphi(x) = x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0, \tag{2}$$

имѣющее корнями данныя числа α и β, то система (v') представляетъ собою непосредственное выраженіе тѣхъ условій, которыя должны быть удовлетворены, если мы хотимъ, чтобы расположеніе корней уравненія (1) по отношенію къ корнямъ уравненія (2) было: α, x', x'', β.

Или же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, если подвергнуть уравненіе (1) преобразованію при помощи подстановки $y = (x - \alpha)(\beta - x)$, то (v') выражаетъ, что корни преобразованнаго уравненія должны быть положительны.

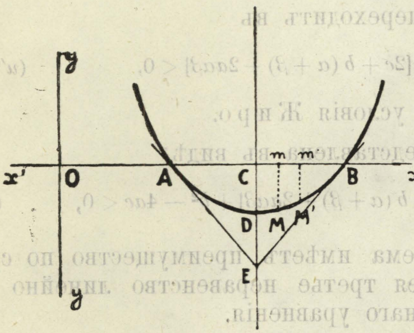
4. Въ дальнѣйшемъ мы хотимъ разрѣшить, пользуясь нѣкоторыми геометрическими соображеніями, болѣе общую задачу о расположеніи корней уравненія (1) по отношенію къ двумъ даннымъ числамъ, или по отношенію къ корнямъ другого даннаго уравненія. Построимъ, кривую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$\varphi(x) = x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta, \tag{3}$$

и пусть

$$y = mx + n \tag{4}$$

будетъ уравненіемъ прямой линіи, пересѣкающейся съ нашей кривой въ двухъ точкахъ, абсциссы которыхъ равны корнямъ x', и x'' уравненія (1). Для опредѣленія m и n напишемъ, что



$$mx + n = x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta,$$

уравненіе абсциссъ точекъ пересѣченія прямой, опредѣленной уравненіемъ (4), съ кривой, опредѣленной уравненіемъ (3), имѣетъ тѣ же корни, что и уравненіе (1). Получаемъ:

$$\frac{1}{a} = -\frac{\alpha + \beta + m}{b} = \frac{\alpha\beta - n}{c}.$$

Уравненіе (4) можетъ, слѣдовательно, быть представлено въ видѣ:

$$y = -\left(\alpha + \beta + \frac{b}{a}\right) x + \alpha\beta - \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Проведемъ касательныя къ кривой (3) въ точкахъ A и B, абсциссы которыхъ равны α и β, и обозначимъ черезъ E общую точку пересѣченія этихъ касательныхъ съ осью кривой. Уравненіе этой оси будетъ:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}. \tag{6}$$

Извѣстно далѣе, что вершина параболы D дѣлитъ надкасательную CE пополамъ. Такъ какъ $CD = \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$, то имѣемъ:

$$CE = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}. \tag{7}$$

Обозначимъ черезъ y ординату точки пересѣченія прямой (5) съ осью параболы, опредѣленной уравненіемъ (6). Получаемъ послѣ преобразованій:

$$y = -\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}. \tag{8}$$

Теперь разсмотримъ, какіе вообще возможны случаи расположенія α, β, x', x'' въ порядкѣ возрастающихъ величинъ. Всѣ возможныя различныя расположенія будутъ слѣдующія:

$$\alpha,\ x',\ \beta,\ x'';\quad x',\ \alpha,\ x'',\ \beta;\quad x',\ \alpha,\ \beta,\ x'';$$

$$x',\ x'',\ \alpha,\ \beta;\quad \alpha,\ \beta,\ x',\ x'';\quad \alpha,\ x',\ x'',\ \beta;$$

Согласно формулѣ (3), ординаты точекъ параболы, соотвѣтствующихъ абсциссамъ x', x'', будутъ $\varphi(x')$, $\varphi(x'')$. Эти ординаты будутъ противоположны по знаку при первомъ и второмъ расположеніяхъ, одного и того же знака при четырехъ послѣднихъ. Замѣтивъ еще, что

$$\varphi(x')\cdot\varphi(x'') = \frac{f(\alpha)\cdot f(\beta)}{a},$$

заключаемъ, на основаніи сказаннаго, что первое расположеніе возможно, если

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0,\quad \alpha+\beta+\frac{b}{a} < 0,$$

второе, если

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0,\quad \alpha+\beta+\frac{b}{a} > 0.$$

При $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$ возможно одно изъ четырехъ послѣднихъ расположеній. Но ордината y точки пересѣченія прямыхъ (5) и (6) будетъ положительна при третьемъ расположеніи и отрицательна при трехъ послѣднихъ. Слѣдовательно, третье расположеніе будетъ имѣть мѣсто при

$$f(\alpha)\, f(\beta) > 0,\quad y > 0.$$

Замѣтимъ далѣе, что ордината y по абсолютному своему значенію будетъ больше CE при четвертомъ и пятомъ расположеніяхъ, меньше CE при послѣднемъ. Принявъ во вниманіе формулу (7), заключаемъ, что четвертое расположеніе будетъ имѣть мѣсто при

$$\Delta > 0,\quad f(\alpha)\, f(\beta) > 0,\quad y + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} < 0;\quad \alpha+\beta+\frac{b}{a} > 0,$$

пятое при

$$\Delta > 0, \quad f(\alpha)f(\beta) > 0; \quad y + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} < 0, \qquad \alpha + \beta + \frac{b}{a} < 0,$$

наконецъ, шестое при

$$\Delta > 0, \quad f(\alpha)f(\beta) > 0, \quad y < 0, \quad y + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} > 0.$$

Но послѣднія два неравенства эквивалентны одному:

$$y\left[y + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\right] < 0,$$

слѣдовательно, для шестого расположенія, мы имѣемъ слѣдующія условія:

$$\Delta > 0, \quad f(\alpha).f(\beta) > 0, \quad y\left[y + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\right] < 0.$$

Замѣняя въ послѣднемъ неравенствѣ y черезъ его значеніе, данное формулой (8), мы можемъ это неравенство представить въ видѣ:

$$[f(\alpha) + f(\beta)]\,[f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta-\alpha)^2] < 0,$$

или же, такъ какъ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ одного знака, въ видѣ:

$$f(\beta)\cdot[f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta-\alpha)^2] < 0.$$

Замѣтивъ, что

$$f(\alpha) + f(\beta) - a(\beta-\alpha)^2 = 2c + b(\alpha+\beta) + 2a\alpha\beta,$$

получаемъ такимъ образомъ наши прежнія неравенства системы (u'').

5. Въ полученныхъ шести группахъ неравенствъ, соотвѣтствующихъ шести различнымъ расположеніямъ, всѣ неравенства симметричны относительно α и β, а выраженіе $(\beta-\alpha)^2$ есть дискриминантъ Δ' уравненія

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0;$$

тѣ же самыя неравенства даютъ намъ, слѣдовательно, условія различнаго расположенія корней уравненія (1) относительно корней этого послѣдняго уравненія, когда оно дано въ формѣ

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'} = 0.$$

Необходимо только добавить къ неравенствамъ третьей, четвертой и пятой группы неравенство $\Delta' > 0$.

6. Если точка пересѣченія прямой, опредѣленной уравненіемъ (5) съ осью абсциссъ совпадаетъ съ точкой A или B, то легко видѣть,

что въ такомъ случаѣ уравненія (1) и (3) имѣютъ общій корень, и что этотъ корень есть абсцисса упомянутой точки пересѣченія

$$x = \frac{\alpha\beta - \dfrac{c}{a}}{\alpha + \beta + \dfrac{b}{a}}, \quad \text{или} \quad x = -\frac{\dfrac{c'}{a'} - \dfrac{c}{a}}{\dfrac{b'}{a'} - \dfrac{b}{a}},$$

если уравненіе (3) дано въ формѣ

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Такъ какъ это число есть общій корень послѣдняго уравненія и уравненія (1), то необходимо

$$f\left(-\frac{\dfrac{c'}{a'} - \dfrac{c}{a}}{\dfrac{b'}{a'} - \dfrac{b}{a}}\right) = 0.$$

Это есть условіе, которое должно быть выполнено, если два уравненія имѣютъ общій корень. Изслѣдованіе расположенія корней въ этомъ случаѣ не представляетъ никакихъ трудностей.

Измѣреніе небесныхъ разстояній.

А. Р. Гинкса.

(*Окончаніе* *).

Не выходя изъ рамокъ настоящей статьи, мы можемъ разсмотрѣть только одинъ или два изъ числа всѣхъ интересныхъ вопросовъ, какіе возникли во время сравненія результатовъ, полученныхъ при помощи различныхъ методовъ измѣренія и разработки и опубликованныхъ одни съ большею, другіе съ меньшею полнотой.

Наше вниманіе, прежде всего, останавливаетъ одинъ вопросъ общаго характера. Когда въ наше распоряженіе поступаетъ новый инструментъ, напримѣръ, фотографическій телескопъ, то должны ли мы создать совершенно новые пріемы работы, вполнѣ приспособленные къ новымъ преимуществамъ, какія предоставляетъ въ наше распоряженіе этотъ инструментъ, или мы можемъ ограничиться приспособленіемъ его къ старымъ и привычнымъ пріемамъ, что облегчило бы работу въ большей или меньшей степени? Въ упомянутомъ частномъ случаѣ этого вопроса разница между обѣими альтернативами выражается въ слѣдующемъ. Въ первомъ случаѣ мы признаемъ, что звѣзд-

*) См. „Вѣстникъ“, № 630.

ныя фотографіи суть проекціи небольшихъ участковъ неба на плоскость. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ это можетъ быть разсматриваемо, какъ значительное преимущество, облегчающее намъ разработку, хотя послѣдняя и представляется въ такой формѣ, которая, съ перваго взгляда, кажется намъ непривычной. Мы можемъ либо предпочесть эту форму и отложить до самаго послѣдняго момента неизбѣжное сравненіе съ прежней, привычной для насъ сферой; либо при болѣе консервативномъ отношеніи къ дѣлу, мы можемъ стараться возможно скорѣе вернуться отъ плоскости къ обычной сферѣ.

Тѣ немногіе, которые внимательно слѣдили за послѣдовательнымъ развитіемъ изслѣдованій надъ Эросомъ, вспомнятъ, что значительная часть работы производилась по первому методу, но что, въ концѣ концовъ, вернулись обратно къ прежнему, т. е. второму способу. Это, какъ оказалось, былъ путь наименьшаго сопротивленія, такъ какъ здѣсь пришлось имѣть дѣло съ результатами, отчасти уже обработанными при помощи обычныхъ средствъ. Не лишено, однако, возможности, даже вѣроятно, что болѣе полное признаніе достоинствъ геометрической стороны работы на плоскости съ ея линейными формулами, которыя быстро приводятъ къ механическимъ методамъ вычисленія, дастъ возможность извлечь въ будущемъ много выгодъ.

Смотря на все это предпріятіе, какъ на спеціальное испытаніе методовъ небесной фотографіи, необходимо вспомнить, что, хотя программа наблюденія была составлена для астрографическаго телескопа основного типа, однако, огромная часть работы въ дѣйствительности производилась совершенно иными инструментами. Въ частности рефлекторъ Крослэй (Crossley) Ликской обсерваторіи, какъ параболическій рефлекторъ, обладалъ настолько малымъ полемъ зрѣнія, что послѣднее почти не содержало основныхъ звѣздъ.

Здѣсь представилась та же необходимость, что и при визуальныхъ наблюденіяхъ съ помощью микрометра, нужно было дополнить ихъ точными положеніями многочисленныхъ слабыхъ звѣздъ.

Мы уже замѣтили выше, что составленіе каталога этихъ звѣздъ составило бо́льшую часть всей работы, и не надо забывать, что онъ врядъ ли былъ бы вообще составленъ, если бы не совѣтъ Лёви, который показался очень страннымъ и къ которому, поэтому, отнеслись критически. Мы имѣемъ въ виду указаніе, согласно которому каждый наблюдатель долженъ былъ измѣрить на полученныхъ имъ пластинкахъ положеніе всѣхъ слабыхъ звѣздъ, лежащихъ по обѣ стороны отъ пути прохожденія планеты внутри пояса шириной въ 10 минутъ; это же могло быть сдѣлано только на пластинкахъ съ широкимъ полемъ зрѣнія или, другими словами, на пластинкахъ астрографическаго типа. Эта утомительная задача была, въ дѣйствительности, выполнена только нѣкоторыми обсерваторіями, которыя были въ состояніи это сдѣлать, и это были совершенно не тѣ обсерваторіи, которыя много сдѣлали для изученія самой планеты, а вмѣстѣ съ тѣмъ и для нахожденія величины солнечнаго параллакса. Я считаю нужнымъ подчеркнуть это обстоятельство, такъ какъ одинъ только поверхностный взглядъ на то, что внесли въ уравненія параллакса различныя обсерваторіи, даетъ очень неясное представленіе о той роли, какую сыграла во всемъ дѣлѣ каждая изъ нихъ.

Есть еще другое обстоятельство, благодаря которому простой подсчетъ этихъ уравненій даетъ ложное представленіе о степени важности участія различныхъ обсерваторій: цѣнность какого-нибудь наблюденія планеты зависитъ отъ его параллактическаго множителя, т. е. отъ величины смѣщенія планеты по параллаксу въ моментъ наблюденія. Значительное число превосходныхъ во всѣхъ другихъ отношеніяхъ измѣреній, оказались мало пригодными, такъ какъ въ моментъ, когда они дѣлались, смѣщеніе планеты было слишкомъ мало. Зимнее небо въ Европѣ въ общемъ неблагопріятно для фотографированія при низкихъ высотахъ, когда параллактическое смѣщеніе велико и, такимъ образомъ, большая часть энергіи, потраченной на наблюденія планеты, пропала даромъ. За исключеніемъ обсерваторій, расположенныхъ въ особо благопріятныхъ климатическихъ условіяхъ, астрономическія наблюденія по большей части совершенно безплодны, и этого факта нельзя оставить безъ вниманія. Наблюденіе Эроса показало, что во всякой подобной работѣ самымъ лучшимъ будетъ предоставить наблюденіе самой планеты только сравнительно немногимъ обсерваторіямъ, находящимся въ исключительно благопріятныхъ климатическихъ условіяхъ, а другимъ обсерваторіямъ поручить опредѣленіе положеній основныхъ звѣздъ — задачу, которую онѣ такъ успѣшно выполнили въ разсматриваемомъ случаѣ. Сравнительная легкость этой работы и удобное время, когда она можетъ быть сдѣлана, можетъ служить нѣкоторымъ утѣшеніемъ при утратѣ того, что, казалось бы, должно было быть самой почетной долей во всемъ дѣлѣ.

Мы посвятили нѣкорое время тому, что можно назвать политикой предпріятія, и это стоило потраченнаго труда, такъ какъ всякій проектъ, предполагающій совмѣстное участіе обсерваторій и астрономовъ, разбросанныхъ по всему міру, не легко выполнимъ; прошлое науки показываетъ, что такія попытки далеко не всегда удавались. Такіе проекты могутъ стать очень обширными, такъ какъ легко каждый разъ включить въ нихъ новыя и интересныя задачи, которыя, однако, будутъ задерживать окончаніе работы. Кто-то предложилъ придерживаться хорошаго рабочаго правила, что ни одинъ планъ не долженъ обнимать промежутка времени, большаго 10 лѣтъ.

Прилагая эту мѣрку къ послѣдней кооперации для опредѣленія солнечнаго параллакса, мы видимъ, что она была какъ разъ удачной: начата она была на астрографическомъ конгрессѣ въ іюлѣ 1900 г., а послѣдніе результаты были сообщены Парижской Академіей Наукъ въ апрѣлѣ 1910 г.

Легко выяснить причины, способствовавшія успѣшному завершенію работъ надъ Эросомъ. Онѣ уже были указаны: большія средства Академіи и Парижской Обсерваторіи позволили быстро начать работу; либеральное отношеніе, какое проявилъ Лёви къ нуждамъ каждаго, заинтересованнаго въ проблемѣ, позволили многимъ присоединиться къ работѣ во время ея завершенія. Къ концу былъ критическій моментъ, когда предпріятіе было обязано очень многимъ директору

Парижской Обсерваторіи Бэльо (Bailloud), посвятившему ему всѣ свои усилія, и Лагарду (Lagarde), директору вычислительнаго бюро.

Результаты фотографическихъ и визуальныхъ наблюденій оказались тождественными; солнечный параллаксъ, выведенный изъ оппозицій планеты Эроса въ 1900 г., оказался равнымъ 8,806″, съ вѣроятной ошибкой, которую можно считать равной ± 0,002″. Въ такой формѣ выражаетъ этотъ результатъ астрономія; если же мы захотимъ получить его въ киллометрахъ, то должны спросить у геодезистовъ, какую это даетъ величину земного экваторіальнаго радіуса. Они отвѣчаютъ, что онъ близокъ къ 6378 *км.*; тогда среднее разстояніе солнца отъ земли есть 149 400 000 *км.* Планета Эросъ подтверждаетъ, такимъ образомъ, результатъ, полученный измѣреніями надъ Викторіей, Сафо и Ириссъ, что солнечный параллаксъ немногимъ превышаетъ 8,80″. Таковъ результатъ обработки всей массы наблюденій; часть матеріала, полученнаго въ Гринвичѣ, Ниццѣ, Вашингтонѣ и на горѣ Гамильтонъ даетъ почти то же самое. Быть можетъ наиболѣе существенная черта всего предпріятія состоитъ въ томъ, что мы получаемъ одинъ и тотъ же результатъ, изъ какихъ бы мѣстъ наблюденія и въ какомъ бы объемѣ мы ни выбирали матеріалъ изъ всей его массы, полученной за это время. Мы можемъ сказать, что Эросъ не позволяетъ оцѣнить солнечный параллаксъ ниже 8,80″, что вполнѣ подтверждаетъ лучшіе результаты прежнихъ прямыхъ наблюденій.

Въ настоящее время нельзя утверждать, что несогласіе этого результата съ постоянной аберраціи можетъ имѣть какой нибудь вѣсъ противъ него; напротивъ мы вправѣ отнестись съ нѣкоторымъ недовѣріемъ ко всякой оцѣнкѣ постоянной аберраціи, превышающей 20,47″.

Тѣмъ не менѣе большая часть послѣднихъ опредѣленій этой постоянной дали значительно большія числа, чѣмъ это, и была высказана даже мысль, что причину противорѣчія надо искать въ недостаткахъ теоріи аберраціи. Въ настоящее время вопросъ находится въ иномъ положеніи; теперь представляется почти несомнѣннымъ, что источникъ ошибки надо искать не въ теоріи аберраціи, а въ опредѣленіи зенита. Опредѣленіе постоянной аберраціи при помощи зенитнаго телескопа даетъ настолько сильно отличающіяся другъ отъ друга значенія, что эти отклоненія никакъ не могутъ быть объяснены иначе; мы должны искать причину ошибокъ въ отклоненіяхъ зенита. Къ сожалѣнію, присутствіе въ верхнихъ слояхъ атмосферы области постоянной температуры оказывается недостаточнымъ для объясненія этого явленія.

Это недовѣріе къ результатамъ зенитнаго опредѣленія аберраціи заслуживаетъ вниманія. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Капштадская обсерваторія посвятила свой новый и очень хорошій спектрографъ опредѣленію солнечнаго параллакса изъ радіальныхъ скоростей звѣздъ въ плоскости эклиптики. Это очень простой и изящный методъ: наблюдая звѣзду возможно долго, въ теченіе всего года, можно отдѣлить отъ скорости собственнаго движенія звѣзды перемѣнную слагающую скорости, входящую въ составъ полной относительной скорости и обусловливаемую движеніемъ земли по ея орбитѣ. Получивъ, такимъ образомъ, скорость земли по ея орбитѣ и зная продолжительность года, мы можемъ, повидимому, легко прямо опредѣлить искомую величину — радіусъ орбиты.

Работая въ этомъ направленіи, Гау (Hough) и Гэлмъ (Halm) нашли для солнечнаго параллакса 8,80″, что находится въ полномъ согласіи съ полученнымъ выше результатомъ. Однако, почти тотчасъ же послѣ этого Плуммеромъ (H. C. Plummer) было показано, что такимъ образомъ былъ полученъ не солнечный параллаксъ, а постоянная аберрація свѣта.

Съ этой точки зрѣнія найденный результатъ получаетъ совершенно новое значеніе: это оказалось значительно болѣе прямымъ опредѣленіемъ этой постоянной сравнительно съ тѣми, какія когда либо дѣлались, и дало результатъ, вполнѣ согласный съ полученнымъ прямымъ измѣреніемъ солнечнаго параллакса.

Изложенное прямо приводитъ насъ къ выводу, что зенитный телескопъ даетъ для постоянной аберраціи невѣрныя значенія; есть много указаній, что причину этихъ ошибокъ надо искать въ недостаточномъ постоянствѣ самого зенита.

Въ настоящій моментъ можно считать уже разрѣшенными всѣ тѣ сомнѣнія, какія были связаны съ вопросомъ о солнечномъ параллаксѣ. Введенныя въ „Nautical Almanach" въ началѣ этого вѣка значенія постоянныхъ останутся, вѣроятно, въ употребленіи еще нѣкоторое время; другія величины, теоретически съ ними связанныя, будутъ исправлены соотвѣтствующимъ образомъ. Такъ, новое значеніе параллактическаго неравенства луны, которое найдетъ себѣ мѣсто въ новыхъ лунныхъ таблицахъ, будетъ взято не изъ наблюденій, а будетъ вычислено на основаніи связи съ солнечнымъ параллаксомъ, какъ болѣе точное, по всей вѣроятности, чѣмъ всѣ найденныя изъ наблюденій значенія этой трудно доступной величины; также и для постоянной аберраціи будетъ найдено соотвѣтствующее значеніе. Быть можетъ въ системѣ основныхъ постоянныхъ теперь впервые установится нѣкоторая устойчивость.

Однако, еще остается вопросъ о массѣ луны, связь которой съ солнечнымъ параллаксомъ не лишена интереса и заслуживаетъ того, чтобы недолго на ней остановиться. Существуетъ хорошо извѣстное соотношеніе между массами земли и солнца, длиной секунднаго маятника на экваторѣ и разстояніемъ между солнцемъ и землей. Если извѣстны отношеніе массъ и длина маятника, то мы можемъ опредѣлить солнечный параллаксъ; и обратно, если извѣстенъ солнечный параллаксъ и длина маятника, то мы найдемъ отношеніе массъ. Послѣднее значеніе можно сравнить со значеніемъ, полученнымъ независимо отъ этого изъ наблюденія нѣкоторыхъ возмущеній, оказываемыхъ землей на планеты. Леверье (Leverrier) высказывалъ большое довѣріе къ этому методу опредѣленія солнечнаго параллакса и даже былъ убѣжденъ, что значеніе послѣдняго, выведенное изъ возмущеній Марса и Венеры, было лучшимъ изъ всѣхъ, какія могли быть сдѣланы въ то время. Это значеніе было 8″86.

Черезъ 20 лѣтъ Ньюкомъ, сдѣлавъ такое же изслѣдованіе тѣхъ же возмущеній, однако, нашелъ значительно меньшее значеніе 8″76, которое онъ, въ свою очередь, былъ склоненъ предпочесть всякому другому измѣренію.

Какимъ образомъ возможна такая большая разница между обоими результатами, это еще совершенно неясно, такъ какъ каждый изъ нихъ является завершеніемъ поистинѣ колоссальнаго изслѣдованія. Но, можетъ быть, существованіе такого разногласія заставитъ кого-нибудь думать, что это изслѣдованіе далеко не можетъ считаться окончательнымъ. Одно обстотельство говоритъ въ пользу этого метода опредѣленія разстоянія солнца, называемаго обыкновенно гравитаціоннымъ — именно, то, что оно кумулативно, т. е. величина, какую мы пытаемся найти, именно возмущеніе, оказываемое землей на положеніе узловъ и перигеліевъ Венеры и Марса, есть вѣковое возмущеніе, величина его возрастаетъ равномѣрно и съ теченіемъ времени накопляется, становится достаточно большимъ и легко доступнымъ измѣренію. И все таки врядъ ли можно утверждать, что этотъ методъ представляетъ собою способъ опредѣленія солнечнаго параллакса, цѣнность котораго постоянно увеличивается со временемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что теорія планетныхъ движеній въ дѣйствительности несовершенна, законъ тяготѣнія можетъ оказаться не настолько точнымъ, что никогда впослѣдствіи не будетъ найдено уклоненій отъ него. Въ виду этого мы предпочитаемъ думать, что связь между разстояніемъ солнца и массой земли даетъ окончательное подтвержденіе истинности закона тяготѣнія, и, съ этой точки зрѣнія, методъ прямого наблюденія для измѣренія солнечнаго параллакса сохранитъ навсегда преимущественное значеніе.

Обратимся теперь къ болѣе обширной задачѣ измѣренія разстояній звѣздъ отъ солнца. Теперь у насъ базой служитъ діаметръ земной орбиты. Годичный параллаксъ звѣзды есть видимое смѣщеніе при ея наблюденіи съ двухъ противоположныхъ концовъ діаметра орбиты или, другими словами, угловой діаметръ земной орбиты, какъ онъ виденъ съ этой звѣзды.

Въ исторіи практической астрономіи очень давно было найдено, что звѣзды должны имѣть годичный параллаксъ. Такъ, уже Тихо-Браге пытался открыть звѣздный параллаксъ и, не найдя его, счелъ себя вынужденнымъ отказаться отъ системы Коперника. Хотя это его заключеніе оказалось ложнымъ, однако, самое разсужденіе было глубоко правильно, и въ этомъ отношеніи Тихо-Браге не всегда воздавали должную справедливость.

Черезъ два столѣтія послѣ его смерти проблема оставалась еще не рѣшенной и еще цѣлый вѣкъ усилій послѣ этого не принесъ какихъ либо результатовъ, соразмѣрныхъ глубокимъ нуждамъ звѣздной астрономіи. Въ дѣйствительности, мы вынуждены признать, что звѣздныя разстоянія почти что недоступны нашимъ средствамъ измѣренія.

Только съ одной звѣзды діаметръ земной орбиты виденъ подъ угломъ въ одну секунду въ дуговой мѣрѣ. Меньше, чѣмъ у двадцати звѣздъ параллаксъ оказывается большимъ 0,2″, меньше двадцати звѣздъ, другими словами, находятся отъ насъ на разстояніи, меньшемъ милліона радіусовъ орбиты земли.

Чтобы составить себѣ представленіе о степени точности, какая требуется при опредѣленіи столь малыхъ смѣщеній, выразимъ ихъ въ той мѣрѣ, какая примѣняется при измѣреніи фотографическихъ пластинокъ. Въ типичномъ астрографическомъ телескопѣ одной минутѣ дуги соотвѣтствуетъ одинъ миллиметръ на фотографической пластинкѣ. Звѣзда съ параллаксомъ въ 0,2″ опишетъ въ теченіе года эллипсъ, большая ось котораго составляетъ 0,4″, или меньше 6 микроновъ на фотографической пластинкѣ, а вѣдь мы видѣли, что такіе большіе параллаксы встрѣчаются рѣдко.

Нѣкоторые считаютъ вѣроятнымъ, — я съ этимъ мнѣніемъ не согласенъ — что астрономамъ осталось открыть не больше двухъ-трехъ параллаксовъ. Однако, всѣ согласны съ тѣмъ, что, если взять наудачу какую-нибудь звѣзду, то вѣроятность, что она имѣетъ измѣримый параллаксъ, есть 1 противъ 1000; отсюда слѣдуетъ, что звѣзды, составляющія предметъ изслѣдованія, не выбираются наудачу. Всякій изслѣдователь естественно старается, чтобы его работа не осталась безъ результата, поэтому онъ старается выбирать звѣзды съ большимъ видимымъ движеніемъ. Этимъ принципомъ руководился Б е с с е л ь (Bessel), выбирая звѣзду 61 созвѣздія Лебедя; того же принципа держались и всѣ болѣе поздніе изслѣдователи, посвятившіе себя измѣренію звѣздныхъ параллаксовъ. Результатъ пользованія видимымъ движеніемъ звѣздъ, какъ критеріемъ разстоянія, необходимо долженъ имѣть характеръ о д н о с т о р о н н о с т и.

Теперь представляется немаловажнымъ рѣшить, оказывается ли этотъ односторонній выборъ въ пользу дѣйствительнаго (а не кажущагося) распредѣленія звѣздъ въ пространствѣ, или нѣтъ. То, что мы называемъ видимымъ движеніемъ звѣзды принадлежитъ, отчасти самой звѣздѣ, отчасти — солнцу. Слагающая, принадлежащая самой звѣздѣ, называется теперь о с о б ы м ъ д в и ж е н і е м ъ, а другая, только кажущаяся слагающая есть п а р а л л а к т и ч е с к о е д в и ж е н і е.

А такъ какъ въ то же время звѣзды со значительнымъ собственнымъ движеніемъ по большей части суть тѣ, для которыхъ особое и параллактическое движеніе имѣютъ одно и то же направленіе, т. е. направленіе обратное направленію движенія солнца, то отсюда ясно, что при опредѣленіи параллакса въ слишкомъ большой пропорціи разсматриваются звѣзды, движущіяся навстрѣчу солнцу.

До тѣхъ поръ, пока оказывалась возможность разсматривать с о б с т в е н н ы я движенія звѣздъ, какъ случайныя, это обстоятельство не имѣло первостепеннаго значенія, и односторонній выборъ не измѣнялъ статистическихъ законовъ, выведенныхъ изъ параллактическихъ результатовъ.

Совершенно иное мы будемъ имѣть, если признаемъ, что собственныя движенія звѣздъ въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ солнцемъ происходятъ не случайно, а образуютъ „звѣздные потоки", не такъ давно описанные Э д и н г т о н о м ъ. Въ этомъ случаѣ совершенно ясно, что мы будемъ предпочтительнѣе выбирать звѣзды, принадлежащіе потоку, идущему навстрѣчу солнцу, чѣмъ звѣзды съ противоположнымъ направленіемъ, и на нашихъ статистическихъ выводахъ отразится разница плотностей обоихъ потоковъ.

Возможно скорое полученіе свѣдѣній о параллаксахъ большого числа звѣздъ дѣлается особенно желательнымъ благодаря существованію звѣздныхъ потоковъ, такъ какъ для насъ существенно важно, какъ можно скорѣй рѣшить, въ какой мѣрѣ обнаруженные уже потоки имѣютъ мѣстный характеръ и оказываютъ свое вліяніе только въ непосредственной близости къ солнцу, или составляютъ во вселенной явленіе общаго характера. Съ каждымъ днемъ становится все болѣе и болѣе очевиднымъ, что звѣздный міръ, доступный нашимъ инструментамъ, имѣетъ гораздо большее протяженіе въ плоскости Млечнаго Пути, чѣмъ въ направленіяхъ къ ней перпендикулярныхъ. Кромѣ того почти достовѣрно, что звѣзды расположенныя по направленіямъ къ Млечному Пути, не имѣютъ замѣтнаго собственнаго движенія и совершенно недоступны современному изслѣдованію. Непосредственный интересъ возбуждаетъ слѣдующій вопросъ: оказываются ли звѣзды, расположенныя въ направленіяхъ къ полюсамъ Млечнаго Пути столь же недоступными, или они входятъ въ составъ звѣздныхъ потоковъ, наблюдаемыхъ вблизи солнца? Какъ рѣшить этотъ вопросъ? Представляется мало вѣроятнымъ, что его можно рѣшить на основаніи такихъ измѣреній звѣздныхъ параллаксовъ, каковы недавно опубликованныя измѣренія Рёсселя (Russel) и Шлезингера (Schlesinger).

Оба эти ряда наблюденій, произведенныхъ фотографическимъ путемъ, находятся въ полномъ согласіи одинъ съ другимъ во всѣхъ тѣхъ отношеніяхъ, которыя являются у нихъ общими. Въ нихъ виденъ и большой прогрессъ въ точности измѣренія, и отсутствіе систематическихъ ошибокъ. Какъ показалъ первый изслѣдователь, его результаты удивительнымъ образомъ подтверждаютъ справедливость хорошо извѣстной формулы Каптейна (Kapteyn), выражающей связь между параллаксомъ, собственнымъ движеніемъ и величиной звѣзды. Однако, съ другой стороны, они показываютъ, что почти безнадежно разсчитывать, что съ помощью нашихъ современныхъ средствъ или средствъ, какими мы можемъ располагать въ ближайшемъ будущемъ, окажется возможнымъ измѣрять параллаксы меньшіе одной или двухъ сотыхъ секунды дуги.

И тѣмъ не менѣе есть основанія думать, что вселенная простирается во всѣхъ направленіяхъ значительно дальше предѣла, соотвѣтствующаго этому параллаксу.

Хотя формула Каптейна подтверждается самыми послѣдними результатами, полученными для звѣздъ съ измѣримымъ параллаксомъ, однако, очевидно, что ею нельзя воспользоваться для экстраполяціи и на основаніи ея составить себѣ представленіе о разстояніяхъ наиболѣе удаленныхъ звѣздъ съ малымъ собственнымъ движеніемъ.

Что же, въ такомъ случаѣ, можетъ намъ дать необходимыя для нашей задачи данныя?

Поскольку объ этомъ можно судить, въ настоящее время есть только одинъ путь, обѣщающій успѣхъ. Мы не должны жалѣть усилій на опредѣленіе собственныхъ движеній слабыхъ звѣздъ; тогда съ теченіемъ времени мы получимъ возможность вывести изъ нихъ, если не подробныя, то во всякомъ случаѣ общія свѣдѣнія о разстояніяхъ наиболѣе удаленныхъ частей звѣздной вселенной. Мы уже видѣли, что собственное движеніе можетъ быть разложено на двѣ слагающихъ: „особое“, принадлежащее самой звѣздѣ, и параллактическое, обусловливаемое движеніемъ солнца въ пространствѣ. Параллактическимъ движеніемъ ни въ коемъ случаѣ нельзя пренебрегать.

Годичное передвиженіе солнца составляетъ около четырехъ радіусовъ земной орбиты, откуда прямо вытекаетъ, что параллактическое смѣщеніе всякой звѣзды равно учетверенному годичному параллаксу. Когда самъ параллаксъ очень малъ, то эта величина также не велика и въ теченіе одного года не можетъ быть измѣрена. Однако, сравнительно съ параллаксомъ, она обладаетъ неоцѣнимымъ преимуществомъ, которое выражается въ томъ, что это не періодическая, а вѣковая величина; съ каждымъ годомъ дѣйствіе этого движенія накапливается, такъ что въ концѣ концовъ оно становится не только доступнымъ измѣренію, но и настолько замѣтнымъ, что на него нельзя не обратить вниманія. Разсмотримъ, напримѣръ, звѣзду съ параллаксомъ въ одну только тысячную долю секунды (дуги), т. е. одну изъ тѣхъ звѣздъ, какія, вѣроятно, находятся въ сторонѣ отъ Млечнаго Пути на самой границѣ звѣздной системы. За промежутокъ въ 1000 лѣтъ эта звѣзда передвинется, благодаря параллактическому движенію, на 4 секунды — величина, какую можно считать значительной при условіи, конечно, если положеніе звѣзды на небѣ позволитъ въ полной мѣрѣ обнаружить послѣдствія движенія солнца.

Къ этому должно быть прибавлено еще особое движеніе звѣзды; здѣсь важно изслѣдовать, не настолько ли велико послѣднее, что слѣдствія параллактическаго движенія сравнительно съ нимъ мало и съ трудомъ поддается отдѣленію. На это можно дать вполнѣ удовлетворительный отвѣтъ.

У насъ есть основанія предполагать, что особыя движенія по своимъ размѣрамъ представляютъ собою величины того же порядка, что и движеніе солнца; такимъ образомъ, особое и параллактическое движенія могутъ быть сравниваемы. А если это такъ, то не составитъ большого затрудненія произвести требуемое раздѣленіе.

Этотъ процессъ, конечно, окажется очень медленнымъ, требующимъ по меньшей мѣрѣ нѣсколькихъ столѣтій. Помимо того нами еще не было принято во вниманіе, что явленіе звѣздныхъ потоковъ въ области наиболѣе удаленныхъ звѣздъ можетъ внести въ наши расчеты усложненіе.

Прежде чѣмъ сдѣлать это, остановимся одну минуту на вопросѣ, могутъ ли средства современной намъ астрономіи послужить тѣмъ основаніемъ, на которомъ будущія поколѣнія могутъ строить съ полнымъ спокойствіемъ. Намъ необходимо накопить большой запасъ свѣдѣній о собственныхъ движеніяхъ звѣздъ, и свѣдѣнія эти должны быть свободны отъ систематическихъ ошибокъ.

Съ другой стороны, обычный методъ опредѣленія собственнаго движенія звѣзды заключается въ томъ, что въ теченіе долгихъ промежутковъ времени дѣлаютъ меридіанныя наблюденія и сравниваютъ положенія звѣзды для различныхъ моментовъ, учитывая величину прецессіи, считаемую извѣстной. Эта послѣдняя найдется, конечно, изъ разсмотрѣнія наиболѣе изученныхъ, т. е. самыхъ яркихъ звѣздъ, наблюденія которыхъ подвержены хорошо извѣстнымъ, но плохо измѣреннымъ систематическимъ ошибкамъ.

Мнѣ кажется невозможнымъ считать этотъ процессъ перехода отъ болѣе яркихъ звѣздъ къ слабымъ звѣздамъ способнымъ дать въ результатѣ высокую степень точности, какая необходима въ такого рода изслѣдованіяхъ.

Въ небольшой статьѣ, помѣщенной въ „Monthly Notices“ Королевскаго Астрономическаго Общества я сдѣлалъ попытку показать, что болѣе надежнымъ представляется переходить отъ болѣе слабыхъ звѣздъ, къ болѣе яркимъ

Это очень легко сдѣлать, если располагать двумя фотографіями, относящимися къ двумъ достаточно удаленнымъ моментамъ. При помощи очень простого вычисленія обѣ пластинки можно расположить такимъ образомъ, чтобы звѣзды съ собственнымъ движеніемъ выступили изъ общаго фона, образуемаго массой неподвижныхъ слабыхъ звѣздъ; тогда ихъ собственныя движенія опредѣлятся по отношенію къ этому фону.

Такимъ же образомъ легко можно будетъ найти движенія звѣздъ, не входящихъ въ число наиболѣе удаленныхъ, но которыя тѣмъ не менѣе гораздо дальше тѣхъ, какія изучаются обычными способами меридіанной астрономіи.

Однако, такой процессъ еще не даетъ намъ абсолютныхъ собственныхъ движеній — это суть движенія относительно фона, состоящаго изъ массы слабыхъ звѣздъ; и хотя, вѣроятно, эти относительныя движенія можно считать абсолютными съ той же степенью точности, что и при всякомъ вообще измѣреніи, тѣмъ не менѣе совершенно ясно, что они будутъ недостаточны для нашей конечной цѣли, такъ какъ, по всей вѣроятности, не во всѣхъ частяхъ неба звѣзды настолько удалены, чтобы образовать вполнѣ неподвижный фонъ, какой необходимъ для насъ.

Наиболѣе надежный критерій для рѣшенія вопроса о подвижности или неподвижности фона заключается въ сопоставленіи значительно удаленныхъ другъ отъ друга частей неба при помощи абсолютныхъ угловыхъ измѣреній, а въ этомъ отношеніи единственнымъ удовлетворительнымъ методомъ въ настоящее время является методъ меридіанныхъ наблюденій.

Тѣмъ не менѣе отсюда еще не слѣдуетъ, что мы должны вернуться къ нашимъ теперешнимъ методамъ. Описаннымъ выше методомъ мы находимъ движенія всѣхъ звѣздъ по отношенію къ фону, каковъ бы ни былъ послѣдній; съ другой стороны у насъ есть сѣть меридіанныхъ наблюденій положеній звѣздъ для каждаго опредѣленнаго момента времени, къ какимъ относятся различные центры фотографическихъ пластинокъ. Конечной задачей будетъ связать между собой эти двѣ сѣти наблюденій. Если угодно, мы можемъ смотрѣть на эти сѣти наблюденій, какъ на двѣ геодезическія тріангуляціи, и постараться сопоставить ихъ между собой совершенно такъ же, какъ это мы сдѣлали бы въ геодезической съемкѣ. Когда будетъ достигнуто возможно большее согласіе, мы сможемъ опредѣлить изъ остаточныхъ членовъ, есть ли въ звѣздномъ фонѣ какое либо смѣщеніе или искривленіе, что дало бы намъ указаніе на тѣ разстоянія, до какихъ простирается звѣздный міръ. Надо замѣтить, что во всемъ сказанномъ нѣтъ ничего новаго — это только иной способъ выраженія того факта, что для окончательной разработки матеріала мы должны предварительно опредѣлить постоянную прецессіи изъ имѣющагося подъ руками матеріала. И это совершенно вѣрно: это только мы и пытались доказать.

И тѣмъ не менѣе будетъ полезно разсмотрѣть все въ нѣсколько иномъ видѣ, чѣмъ это обычно дѣлается, такъ какъ, разсматривая явленія, такъ сказать, съ задняго плана, мы видимъ много такихъ сторонъ, какія не были замѣтны съ фронта.

Болѣе того, если эта точка зрѣнія правильна, то изъ нея вытекаетъ рядъ слѣдствій, затрагивающихъ современную программу работы. Основою для этихъ будущихъ измѣреній собственныхъ движеній слабыхъ звѣздъ, несомнѣнно, будетъ служить огромный астрографическій каталогъ. Намъ будутъ необходимы координаты всѣхъ звѣздъ, измѣренныя на пластинкахъ каталога, кромѣ того, также меридіанныя наблюденія двухъ или трехъ тысячъ промежуточныхъ основныхъ звѣздъ. Наблюденія послѣднихъ начато въ самое послѣднее время подъ покровительствомъ и контролемъ Постояннаго Комитета. Но мы не настаиваемъ на томъ чтобы этими положеніями звѣздъ теперь же воспользоваться для соединенія всѣхъ пластинокъ въ одну общую карту неба.

Если наше мнѣніе будетъ найдено правильнымъ, то въ этой огромной работѣ не будетъ надобности; уже въ силу этого видна необходимость теперь же обсудить лежащіе въ основаніи этого принципы.

Резюмируя все сказанное, мы видимъ, что прямое опредѣленіе звѣздныхъ разстояній очень скоро оказывается невозможнымъ, такъ какъ смѣщеніе земли въ пространствѣ при ея движеніи вокругъ солнца совершенно недостаточно для базы, какая необходима въ такого рода измѣненій: база слишкомъ коротка и не можетъ быть удлинена; тріангуляція, слѣдовательно, невозможна. Мы обратились поэтому къ другой возможной альтернативѣ.

Передвиженіе солнца въ пространствѣ заставляетъ относительную конфигурацію звѣздъ испытывать медленное, но непрерывно прогрессирующее измѣненіе; съ теченіемъ времени, послѣднее позволитъ обнажить ихъ распредѣленіе въ пространствѣ. Чтобы будущія поколѣнія получили возможность произвести сравненіе звѣзднаго неба черезъ 1000 лѣтъ, современные астрономы завѣщаютъ имъ наблюденіе неба въ современномъ его состояніи. Эту задачу они лучше всего могутъ выполнить, отдавшись всей душей завершенію и усовершенствованію астрографическаго каталога. Нѣсколько зонъ уже закончены; работа надъ другими значительно подвинулась впередъ; только надъ одной или двумя изъ нихъ она находится въ застоѣ за недостаткомъ матеріала. При составленіи недавно предпринятаго каталога промежуточныхъ основныхъ звѣздъ все вообще дѣло нуждается въ энергичной помощи меридіанныхъ наблюдателей.

Каждое собраніе Парижскаго Астрографическаго Конгресса постоянно вноситъ новый и болѣе широкій интересъ въ общее дѣло.

Ближайшая задача этихъ конгрессовъ — усовершенствованіе каталога, конечная цѣль — по собственнымъ движеніямъ звѣздъ найти строеніе звѣзднаго міра.

Теорія пленусовъ и ея примѣненія.

Н. Михальскаго.

Глава I. Простой пленусъ.

§ 1. Понятіе о пленусѣ. Пусть дано n количествъ: x_1, $x_2, \ldots$ x_{n-1}, x_n. Выберемъ число k такое, чтобы разность $n-k$ была четнымъ числомъ и станемъ составлять различныя произведенія по k, соблюдая слѣдующія требованія: 1) чтобы начальный индексъ въ каждомъ произведеніи былъ нечетнымъ, 2) чтобы индексы множителей въ каждомъ произведеніи шли въ порядкѣ ихъ возрастанія, 3) чтобы каждые два рядомъ стоящіе множители имѣли индексы, отличающіеся на нечетное число.

Если мы, согласно этому правилу, составимъ всѣ возможныя произведенія и затѣмъ сложимъ ихъ, то полученная сумма можетъ быть названа пленусомъ изъ данныхъ n количествъ по k въ каждомъ членѣ (произведеніи) пленуса.

Такой пленусъ мы символически обозначимъ черезъ $\left|\begin{matrix} n \\ x_k \end{matrix}\right|$.

§ 2. Примѣръ. Легко видѣть, что, напримѣръ,

$$\begin{array}{l} \left|\begin{matrix} 7 \\ x_3 \end{matrix}\right| = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_5 + x_1x_2x_7, \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; x_1x_4x_5 \quad x_1x_4x_7, \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; x_3x_4x_5 \quad x_3x_4x_7, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; x_1x_6x_7, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; x_3x_6x_7, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; x_5x_6x_7, \end{array}$$

Здѣсь сначала выписанъ головной членъ $x_1x_2x_3$, по немъ написаны основные $x_1x_2x_5$, $x_1x_2x_7$, а по этимъ послѣднимъ и всѣ остальные члены путемъ послѣдовательнаго увеличенія на 2 индексовъ множителей, пока не получатся въ концѣ каждой колонны члены съ индексами, составляющими натуральный рядъ чиселъ.

Такъ какъ здѣсь приходится пополнять индексы до натуральнаго ряда чиселъ, то отсюда и названіе „пленусъ" (отъ латинскаго слова plenus).

§ 3. Рекуррентная формула для пленуса. Таковой будетъ формула: $\left|\begin{matrix} n \\ x_k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n-2 \\ x_k \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} n-1 \\ x_{k-1} \end{matrix}\right| . x_n.$ (1)

Для доказательства ея раскроемъ пленусы лѣвой части:

$$\begin{array}{l}
\left|\begin{matrix} n-2 \\ x_k \end{matrix}\right| = x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k-1}x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+2} + \cdots + x_1x_2x_3\ldots x_{k-1}x_{n-2}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_1x_2\ldots x_{k+1}x_{k+2} \qquad\qquad\quad x_1x_2x_3\ldots x_{k+1}x_{n-2}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_3x_4\ldots x_{k+1}x_{k+2} \qquad\qquad\quad x_{2a_1+1}x_{2a_2+2}\ldots x_{n-3}x_{n-2}.
\end{array} \qquad (A)$$

$$\begin{array}{l}
\left|\begin{matrix} n-1 \\ x_{k-1} \end{matrix}\right| = x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k-1} + x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k+1} + \cdots + x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{n-1}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_1x_2\ldots x_k\ \ x_{k+1} \qquad\qquad\quad x_1x_2\ldots x_k\ \ x_{n-2}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_3x_4\ldots x_k\ \ x_{k+1} \qquad\qquad\quad x_{2a_2+1}x_{2a_2+2}\ldots x_{n-2}x_{n-1}.
\end{array} \qquad (B)$$

Если умножить пленусъ $\left|\begin{matrix} n-1 \\ x_{k-1} \end{matrix}\right|$ на x_n, то получимъ:

$$\begin{array}{l}
\left|\begin{matrix} n-1 \\ x_{k-1} \end{matrix}\right| \cdot x_n = x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k-1}x_n + x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k+1}x_n + \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_1x_2\ldots x_k\ \ x_{k+1}x_n \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_3x_4\ldots x_k\ \ x_{k+1}x_n \\
\cdots + x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{n-3}x_n + x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{n-1}x_n \\
\qquad x_1x_2\ldots x_k\ \ x_{n-3}x_n \qquad x_1x_2\ldots x_k\ \ x_{n-1}x_n \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ x_{n-2}x_{n-3}x_n\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{2a_2+1}\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n.
\end{array} \qquad (C)$$

Колонны лѣвой части равенства (C) можно, очевидно, переписать въ одну основнымъ членомъ которой будетъ $x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k-1}x_n$:

$$\begin{array}{l}
x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{k-1}x_n \quad \text{— 1-ая колонна (C).} \\
\left.\begin{array}{r} x_1x\ldots x_{k-2}x_{k+1}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_3x_4\ldots x_k\ \ x_{k+1}x_n \end{array}\right\} \text{— 2-ая колонна (C).} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{n-3}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \ .\ \ .\ x_{k-2}x_{n-1}x_n \end{array}\right\} \text{— предпослѣдняя колонна (C).} \\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2\ldots x_{k-2}x_{n-1}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{2a_2+1}x_{2a_2+2}\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n \end{array}\right\} \text{— послѣдняя колонна (C).}
\end{array} \qquad (D)$$

Сложивъ эту колонну (D) съ колоннами (A), т. е. приписавъ ее въ концѣ колоннъ (A), получаемъ:

$$\begin{vmatrix} n-2 \\ x_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{k-1} \end{vmatrix} . x_n =$$

$$\begin{array}{l} = x_1x_2\ldots x_{k-1}x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{k+2} + \cdots + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_{n-2} + x_1x_2\ldots x_{k-1}x_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad x_3x_4\ldots x_{k+1}x_{k+2} \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{2a_1+1}\ldots x_{n-3}x_{n-2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{2a_2+1}\ldots x_{n-1}x_n . \end{array}$$

Легко видѣть, что лѣвая часть послѣдняго равенства и есть какъ разъ пленусъ $\begin{vmatrix} n \\ x_k \end{vmatrix}$, написанный въ раскрытомъ видѣ. Формула (1) доказана.

§ 4. Сумма пленусовъ. Если изъ данныхъ n чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ составить всѣ возможные пленусы, именно: по n множителей, по $n-2$ множителя, по $n-4$ и т. д., и всѣ эти пленусы сложить, то полученную величину назовемъ суммой пленусовъ, составленной изъ данныхъ n чиселъ.

Сумму пленусовъ обозначимъ символомъ $\sum\begin{pmatrix} n \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$. Ясно, что, вычитая изъ n сначала 2, затѣмъ 4 и т. д., мы можемъ получить въ результатѣ или 1 (если n — нечетное), или 0 (если n — четное). Въ случаѣ полученія 1 не возникаетъ никакихъ недоразумѣній, такъ какъ $\begin{vmatrix} n \\ x_1 \end{vmatrix} = x_1 + x_3 + \cdots + x_n$. Если же получается 0, то символъ $\begin{vmatrix} n \\ x_0 \end{vmatrix}$ теряетъ смыслъ, но мы примемъ, что $\begin{vmatrix} n \\ x_0 \end{vmatrix} = 1$.

Примѣръ. $\sum\begin{pmatrix} 7 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ x_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 \\ x_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 \\ x_1 \end{vmatrix}$.

§ 5. Рекуррентная формула для суммы пленусовъ. Таковой будетъ формула: $\sum\begin{pmatrix} n \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum\begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} . x_n + \sum\begin{pmatrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для доказательства ея раскроемъ значенія суммъ пленусовъ лѣвой части предполагаемаго равенства:

$$\sum\begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-5} \end{vmatrix} + \cdots + \cdots \qquad \text{(a)};$$

$$\sum\begin{pmatrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} n-2 \\ x_{n-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-2 \\ x_{n-4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-2 \\ x_{n-6} \end{vmatrix} + \cdots + \cdots \qquad \text{(b)}.$$

Принимая во вниманіе что $\begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-1} \end{vmatrix} = x_1x_2\ldots x_{n-1}$, мы получаемъ:

$$x_n . \sum\begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-3} \end{vmatrix} . x_n + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-5} \end{vmatrix} . x_n + \cdots,$$

а потому

$$x_n \sum \begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n +$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} n-2 \\ x_{n-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-3} \end{vmatrix} \cdot x_n \right\} + \left\{ \begin{vmatrix} n-2 \\ x_{n-4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 \\ x_{n-5} \end{vmatrix} \cdot x_n \right\} + \cdots$$

Если же примѣнить къ каждому выраженію, стоящему въ фигурныхъ скобкахъ, рекуррентную формулу для пленуса, то получимъ

$$x_n \cdot \sum \begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n \\ x_{n-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n \\ x_{n-4} \end{vmatrix} + \cdots$$

Лѣвая же часть послѣдняго равенства и есть сумма пленусовъ $\sum \begin{pmatrix} n \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$, написанная въ раскрытомъ видѣ. Формула доказана.

Глава II. Приложеніе теоріи простого пленуса.

§ 6. **Приложеніе теоріи пленуса къ непрерывнымъ дробямъ.** Пусть намъ дана непрерывная дробь

$$A = x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots + \cfrac{1}{x_{n-2} + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{x_n + \cfrac{1}{x_{n+1} + \cdots}}}}}}$$

Зададимся цѣлью вычислить подходящую дробь n-го порядка $\frac{P_n}{Q_n}$. Докажемъ именно, что

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sum \begin{pmatrix} n \\ x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum \begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \text{(a)},$$

гдѣ символъ $\sum \begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$ означаетъ сумму пленусовъ, составленную изъ чиселъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Зная, что $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x_1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{x_1 x_2 + 1}{x_2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_3 + 1}{x_2 x_3 + 1}$,

мы замѣчаемъ, что $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sum \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\sum \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}}$; $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\sum \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Положимъ, что для числителей P_{n-1} и P_{n-2} имѣютъ мѣсто равенства:

$$P_{n-1} = \sum \begin{pmatrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_{n-2} = \sum \begin{pmatrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Извѣстно, что $P_n = P_{n-1} \cdot x_n + P_{n-2}$, т. е., $P_n = \sum \left(\begin{matrix} n-1 \\ x \\ 1 \end{matrix}\right) \cdot x_n + \sum \left(\begin{matrix} n-2 \\ x \\ 1 \end{matrix}\right)$,

Но тогда по § 5 имѣемъ:

$$P_n = \sum \left(\begin{matrix} n \\ x \\ 1 \end{matrix}\right).$$

Аналогичное разсужденіе можно провести и для знаменателя Q_n. Тогда получимъ $Q_n = \sum \left(\begin{matrix} n-1 \\ x \\ 2 \end{matrix}\right)$.

Итакъ, мы видимъ, что, если законъ, выражаемый равенствомъ (a) справедливъ для $n-2$-ой и $n-1$-ой подходящихъ дробей, то онъ оказывается справедливъ и для n-ой подходящей дроби.

Доказанное равенство (a) представляетъ при вычисленіи подходящихъ дробей нѣкоторыя преимущества сравнительно съ общепринятыми способами полученія подходящихъ дробей. Во-первыхъ, мы можемъ сразу вычислить отдѣльно числителя или знаменателя подходящей дроби не вычисляя всей дроби, если производить дѣйствія „съ конца". При этомъ намъ не приходится употреблять многократнаго дѣленія единицы, что, какъ извѣстно, сводится къ „переворачиванію" дробей, а съ этимъ послѣднимъ легко считаться. Во-вторыхъ, по сравненію со способомъ вычисленія членовъ подходящей дроби съ помощью вычисленія предыдущихъ дробей, нашъ пріемъ имѣетъ то преимущество, что мы можемъ сразу вычислять членъ искомой дроби, не обращаясь къ членамъ предыдущихъ дробей *).

§ 7. **Рѣшеніе для одного частнаго случая неопредѣленнаго уравненія n-ой степени съ n неизвѣстными въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.**

Пусть намъ дано неопредѣленное уравненіе съ n неизвѣстными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида

$$A \cdot \sum \left(\begin{matrix} n \\ x \\ 1 \end{matrix}\right) - B \sum \left(\begin{matrix} n-1 \\ x \\ 2 \end{matrix}\right) = 0 \qquad \text{(b)}$$

гдѣ A и B числа цѣлыя и положительныя, при чемъ дробь $\frac{B}{A}$ допускаетъ разложеніе въ непрерывную $(a_1 \geqslant 1, a_2, \ldots, a_n)$.

Не трудно видѣть, что тогда уравненіе (a) допускаетъ рѣшенія $x_1 = a_1$, $x_2, = a_2, \ldots, x_n$, при чемъ эта система рѣшеній есть единственная.

Въ самомъ дѣлѣ, переписавъ уравненіе (a) въ видѣ $\dfrac{\sum \left(\begin{matrix} n \\ x \\ 1 \end{matrix}\right)}{\sum \left(\begin{matrix} n-2 \\ x \\ 2 \end{matrix}\right)} = \dfrac{B}{A}$,

мы замѣчаемъ, что по § 6 правая часть послѣдняго равенства есть

*) Быть можетъ, трудно признать, что указанный авторомъ пріемъ практически проще обычныхъ пріемовъ вычисленія подходящихъ непрерывныхъ дробей; но онъ дѣйствительно даетъ правило непосредственнаго ихъ вычисленія.

Ред.

n-ая подходящая дробь для нѣкоторой непрерывной $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. А потому

$$x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cdots+\cfrac{1}{x_n}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}} \qquad (c).$$

Мы ищемъ для $x_1, x_2, \ldots$ значенія цѣлыя и положительныя, слѣдовательно, $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1 \ldots$ Такъ какъ по условію, $a_1 \geqslant 1$, $a_2 \geqslant 1, \ldots$, то дробь $\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}$ будетъ <1. Значитъ въ дроби $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$ только слагаемое a_1 будетъ цѣлымъ, слѣдовательно, оно и равно x_1. Итакъ, $x_1=a_1$. А потому $x_2+\cfrac{1}{x_3+\cdots}=a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}$, откуда $x_2=a_2$ и т. д. Наконецъ, $x_n=a_n$. Что система рѣшеній $x_1=a_1$, $x_2=a_2 \ldots$ есть единственная видно изъ того, что дробь $\frac{B}{A}$ нельзя различными способами разложить въ непрерывную.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $7xyz-10yz+7x+7z-10=0$ въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ. Переписавъ данное уравненіе иначе: $\frac{xyz+x+z}{yz+1}=\frac{10}{7}$, мы замѣчаемъ, что обѣ части его удовлетворяютъ указанному въ началѣ настоящаго § признаку. А такъ какъ $\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$, то утверждаемъ, что $x=1$, $y=2$, $z=3$.

ПОЛЕМИКА.

По поводу статьи М. Бритмана „Два случая изъ обобщенной теоремы Ферма", помѣщенной въ № 627 „Вѣстника".

А. Охитовича.

Въ № 627 „Вѣстника" помѣщена статья г. М. Бритмана — „Два случая изъ обобщенной теоремы Ферма". Во второй части этой статьи, озаглавленной: „О дѣлителяхъ выраженія $\frac{x^n-y^n}{x-y}$", изложены четыре теоремы, изъ которыхъ первыя три формулированы слѣдующимъ образомъ:

Теорема I. Если $\frac{x^n-y^n}{x-y}$, гдѣ n число простое, а x и y цѣлыя взаимно простыя числа, дѣлится на n, то и $x-y$ также дѣлится на n, и наоборотъ.

Теорема II. Число $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$ не дѣлится на n^2, если x и y числа взаимно простыя.

Теорема III. Неравный числу n дѣлитель $x-y$ не можетъ быть дѣлителемъ выраженія $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$, если числа x и y взаимно простыя, и обратно.

Эти три теоремы являются ничѣмъ инымъ, какъ частями леммы III-ей, входящей въ составъ § 14 (стр. 28—30) моей книжки: А. П. Охитовичъ. „Доказательство великой теоремы Фермата", вышедшей въ свѣтъ пять лѣтъ тому назадъ — въ 1910 году. Помянутая лемма формулирована такъ:

Если число $a+b$, — гдѣ a и b числа несодѣлимыя, — кратно n, числа простого и нечетнаго, то и число $a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\cdots+b^{n-1}$ кратно n, при чемъ число $\dfrac{1}{n}(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ несодѣлимо, какъ съ $a+b$, такъ, слѣдовательно, и съ n.

Подъ терминомъ „несодѣлимыя" здѣсь разумѣются числа, имѣющія общимъ дѣлителемъ только 1*).

Замѣнивъ въ моей формулировкѣ a на x и b на y, получимъ формулы г. Бритмана:

1) $a+b=x-y$,

2) $a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1}=\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

Далѣе, при доказательствѣ обратной части I-ой теоремы авторъ разсуждаетъ: „Для доказательства обратной теоремы воспользуемся тождествомъ:

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}=(x-y)\,Q+ny^{n-1},$$

гдѣ Q и ny^{n-1} суть частное и остатокъ отъ дѣленія многочлена $x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$ на $x-y$". Соотвѣтственно въ моей леммѣ доказательство основывается на тождествѣ:

$$a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\cdots+b^{n-1}=$$

$$=(a+b)\,[a^{n-2}-2a^{n-3}b+\cdots+(n-2)\,ab^{n-3}-(n-1)\,b^{n-2}]+nb^{n-1},$$

при чемъ на стр. 27-ой (доказательство леммы I-ой) объяснено, что упомянутое тождество получено дѣленіемъ $a^{n-1}-a^{n-2}b-\cdots+b^{n-1}$ на $a-b$.

Совпаденіе г. Бритмана со мной проявилось не только въ сказанномъ, но и въ недостаткахъ. Такъ въ формулировкѣ приведенной выше леммы III-ей

---

*) Очень удивляемся, зачѣмъ автору понадобилось уклониться отъ столь установленной терминологіи. *Ред.*

поставлено излишнее требованіе, чтобы n было число простое. Между тѣмъ въ дѣйствительности лемма остается справедливой и при n сложномъ. Въ этомъ легко убѣдиться изъ вышецитированнаго тождества: первая часть его будетъ кратна n, въ томъ случаѣ, если число $a+b$ кратно n, независимо отъ того, будетъ ли n число простое или сложное*).

Ту же ошибку, какъ это видно изъ формулировки теоремы I-ой, сдѣлалъ и г. Бритманъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Ю. П. Цельмсъ. *Методы рѣшеній всѣхъ типовъ алгебраическихъ задачъ.* Руководство для учениковъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, репетиторовъ, экстерновъ и лицъ, готовящихся къ дополнительнымъ и курсовымъ экзаменамъ. Подробный анализъ, рѣшенія и объясненія, съ краткимъ изложеніемъ теорій алгебры въ началѣ каждаго отдѣла. Москва, 1914. Стр. I — 368. Ц. 1 р. 50 к.

Такое пространное и заманчивое заглавіе этого труда на дѣлѣ вовсе не оправдывается. Авторъ подъ словомъ «методъ» разумѣлъ, повидимому, умѣнье написать экзаменаціонную работу, т. е., не только умѣнье рѣшить шаблонную задачу, но и расположить извѣстнымъ образомъ рѣшеніе и объясненіе. Впрочемъ, и въ этомъ нельзя быть увѣреннымъ, потому что авторъ на стр. 7 говоритъ о какихъ то методахъ рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Въ дѣйствительности подъ методомъ рѣшенія задачъ принято разумѣть ту или другую идею, освѣщающую путь рѣшенія. Въ этомъ смыслѣ разсматриваемая книга вовсе не содержитъ въ себѣ методовъ рѣшенія или ихъ характеристики, за исключеніемъ только описанія составленія уравненій изъ условія задачи, написаннаго, примѣрно, по учебнику А. Малинина и далеко не охватывающаго сути дѣла.

Затѣмъ въ книгѣ совсѣмъ нѣтъ типовъ алгебраическихъ задачъ въ томъ смыслѣ, какъ это мы понимаемъ. Прежде всего типичная задача представляетъ одно органическое цѣлое. Вотъ, напримѣръ, типичная задача на непрерывныя дроби: «какими циклами изъ простыхъ и високосныхъ годовъ всего точнѣе вести лѣтосчисленіе, считая истинный годъ въ 365 д. 5°48′50″?». Вотъ типичная задача на неопредѣленныя уравненія «существуютъ ли простыя дроби, для умноженія которыхъ достаточно сумму числителей раздѣлить на знаменателей?». Такихъ задачъ безконечно много. Въ книгѣ же г. Цельмса ничего подобнаго найти нельзя, а тѣмъ болѣе смѣло аттестовать эту книгу, какъ содержащую всѣ типы задачъ. На самомъ же дѣлѣ книга г. Цельмса содержитъ въ себѣ исключительно тѣ задачи, которыя лучше всего назвать винегретомъ, и при томъ, какъ будетъ видно ниже, плохо и неумѣло приготовленнымъ.

Затѣмъ ни въ одной задачѣ мы не встрѣтили никакого анализа и тѣмъ болѣе подробнаго анализа, какъ громко выражается авторъ, или же терминъ «анализъ» авторъ понимаетъ какимъ то особеннымъ способомъ, характеръ котораго не улавливается послѣ прочтенія всей книги.

*) Эту поправку я внесу въ готовящееся къ печати 2-ое изданіе „Доказательства“.

Въ книгѣ отсутствуютъ изслѣдованіе уравненій, разъясненіе значенія отрицательныхъ и другихъ рѣшеній, выраженія вида 0/0, разницы между уравненіями вида $\frac{A}{B}=1$ и $A=B$; нѣтъ также необходимаго указазанія на повѣрку корней уравненія съ радикалами или съ дробями, знаменатели которыхъ суть функціи неизвѣстнаго. А между тѣмъ уравненія этого типа встрѣчаются въ книгѣ почти на каждомъ шагу. Отсутствуютъ также очень полезныя задачи въ родѣ слѣдующей «существуютъ ли прямоугольные треугольники, у которыхъ сумма катетовъ вдвое болѣе гипотенузы?». Такого рода задачи рѣшаются исключительно однимъ изслѣдованіемъ полученнаго уравненія. Приводимъ нѣсколько выдержекъ, которыя подтвердятъ все сказанное.

Стр. 6. «Послѣ приравниванія этого уравненія нулю» и «равенство $A.0=B.0$ остается справедливымъ при какихъ угодно числовыхъ значеніяхъ A и B. [redacted]

Задача № 34. «Нѣкоторое число при основаніи системы счисленія, отличномъ отъ 10-ти, изображается тремя цифрами, которыя въ десятичной нумераціи представляютъ собою первыя три члена ариѳметической прогрессіи, имѣющей сумму десяти членовъ въ 10 разъ больше произведенія корней уравненія $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}+\frac{1}{27}$, а сумму третьяго и седьмого членовъ равной суммѣ второго, третьяго и четвертаго членовъ; при основаніи же нумераціи вдвое большей прежняго, это число изображается двумя цифрами изъ которыхъ послѣдняя есть 0, а вторая на два меньше основанія нумераціи. Найти это число».

Вглядываясь въ эту типичную для разбираемой книги микстуру, видимъ, во первыхъ, что слова «отличномъ отъ десяти» совершенно излишни, потому что искомое число можетъ быть и равнымъ и неравнымъ 10. Такъ число 160, написанное по десятичной системѣ, послѣ удвоенія основанія системы, изображается въ видѣ 80, и коренныя требованія задачи удовлетворены.

Подобнаго рода презумпція свойствъ опредѣляемаго числа, какъ извѣстно, всегда составляла одну изъ прерогативъ авторовъ такихъ микстурныхъ задачъ. Читатели ее найдутъ въ очень многихъ задачахъ книги г. Цельмса; напримѣръ, въ извѣстной ариѳметической задачѣ Л. Эйлера*), помѣщенной за № 19, заранѣе указано, что всѣ сыновья получили поровну, между тѣмъ какъ равенство ихъ долей вытекаетъ изъ равенства долей первыхъ двухъ братьевъ и изъ остальныхъ условій задачи. То же самое въ № 59, гдѣ опредѣляемому по даннымъ корнямъ уравненію предписано быть возвратнымъ, и въ № 20, гдѣ радикальному уравненію заранѣе предписано имѣть положительный корень и т. д. [redacted]

Обращаясь опять къ задачѣ № 34, видимъ, что въ послѣднихъ словахъ не указано о какой нумераціи идетъ рѣчь. Очень любопытна прибавка «въ десятичной нумераціи» въ предложеніи «тремя цифрами, которыя въ десятичной нумераціи представляютъ прогрессію». Очевидно, здѣсь авторъ не сознавалъ того, что, если три числа, хотя бы и меньшія десяти, составляютъ прогрессію, то это совершенно не зависитъ отъ той системы, по которой эти числа изображены. Но существеннѣе всего то, что одинъ изъ полученныхъ корней уравненія, помѣщеннаго въ условіи, а именно, $x=1/2$ ему не удовлетворяетъ, помянутое уравненіе имѣетъ только одинъ корень 13. Въ этомъ легко убѣдиться подстановкой въ уравненіе $\frac{2x^2-25x+12}{4x^2-1}=\frac{1}{27}$, къ которому приводится данное уравненіе. Такимъ образомъ произведенія двухъ корней этого уравненія не существуетъ и вся задача распадается, какъ гнилое строеніе. Въ концѣ рѣшенія этой же задачи находимъ совершенно произвольное утвержденіе

*) Отецъ раздѣлилъ свой капиталъ между дѣтьми слѣдующимъ образомъ. Первому досталось 1000 р. и 0,1 оставшагося капитала, второму 2000 р. и 0,1 новаго остатка, третьему 3000 р. и 0,1 новаго остатка и т. д. Сколько получилъ каждый, если первый и второй получили поровну?

«основанiе» системы счисленiя можетъ выражаться лишь цѣлымъ числомъ», тогда какъ на самомъ дѣлѣ этотъ вопросъ разрѣшается въ зависимости отъ той цѣли, которой служитъ система счисленiя. Кстати сказать, задача № 34 выражена въ печати 13-ю строками; но многiя задачи выражены 13 — 18 строками.

Вотъ еще промахи, едва ли допустимые въ руководствѣ.

«Если многочленъ вообще имѣетъ корни, то абсолютная величина этихъ корней входитъ въ послѣднiй членъ этого многочлена» — стр. 148.

«Процентомъ называется прибыль или убыль въ одну единицу на каждую сотню такихъ же единицъ» — стр. 249, между тѣмъ какъ мы говоримъ, что слезы содержатъ около 90% воды и т. п.

«Рыбакъ, гребя все время» въ № 20 и «прямого прямоугольнаго параллелопипеда» въ № 84.

Въ задачѣ № 39 авторъ не замѣчаетъ, что уравненiе видимо сокращается на 36; онъ предпочитаетъ сократить его впослѣдствiи на 864. Въ той же задачѣ заранѣе приказано одному неизвѣстному быть больше другого.

Въ задачѣ № 55 употреблено двусмысленное обозначенiе $\lg x\,(3+\lg 3)$.

Въ задачѣ № 61, разсматривая уравненiе $5^{x-4}=3^{x-4}$, авторъ восклицаетъ: такъ какъ 5 и 3 абсолютно простыя, то это равенство возможно лишь при $x-4=0$.

Почти ни одна задача послѣ внимательнаго просмотра не обходится безъ того или другого упрека.

Насколько можно было замѣтить, авторъ отнесся къ своей не маленькой работѣ съ любовью и съ усердiемъ, превратно понявъ сущность дѣла и слабо его продумавъ и обслѣдовавъ. Въ этомъ смыслѣ его работа заслуживаетъ, какъ и всякая искренняя работа, нѣкотораго уваженiя; но въ концѣ всего мы никакъ не можемъ отнестись къ ней иначе, какъ съ полнымъ осужденiемъ. Что дѣлать? Ненормальныя требованiя школы вызываютъ ненормальные работы, предназначаемыя для школы. Вмѣсто того, чтобы работать надъ идеями науки и ея вѣчной правды, люди тратятъ свои силы на такiя вещи, надъ которыми уже заранѣе занесена рука безвременной Леты. Давно бы пора уничтожить конкурсные экзамены! Каждому желающему имѣть образованiе, соотвѣтственно его познанiямъ должно быть мѣсто въ учебныхъ заведенiяхъ!

И. Александровъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакцiей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакцiя проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшенiй задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенiя. Въ противномъ случаѣ редакцiя не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенiю нуждъ корреспондентовъ.

Редакцiя проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенiя въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшенiями, либо снабжать задачи указанiемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшенiе.

№ 255 (6 сер.). Исключить α и β изъ системы уравненiй

$$\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2,\quad (\alpha^2+\beta^2)^2=4\alpha\beta,$$

$$\alpha(\alpha^2-3\beta^2)x+\beta(3\alpha^2-\beta^2)y=2\alpha^4-2\beta^4.$$

X.

№ 256 (6 сер.). Найти цѣлыя положительныя значенія x, при которыхъ выраженіе

$$x^{x+1}+(x+1)^x$$

дѣлится на 3.

N. (Саратовъ).

№ 257 (6 сер.). Опредѣлить предѣлъ выраженія

$$\cos x\sin^2[f(x)]+a^x\cos^2[f(x)],$$

гдѣ a — данное положительное число, а $f(x)$ — произвольная (т. е. любая данная функція) при неограниченномъ приближеніи x къ нулю.

Н. С. (Одесса).

№ 258 (6 сер.). Опредѣлить два многочлена P и Q степени не выше третьей, удовлетворяющихъ тожеству

$$(QP'-PQ')(1+x^2)=3(P^2+Q^2),$$

гдѣ P' и Q' суть соотвѣтственно производныя многочленовъ P и Q.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 200 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}+\frac{1}{12}\cdot\frac{(x+5)(x-6)}{(x+6)(x-7)}-\frac{1}{11}\cdot\frac{(x+10)(x-11)}{(x+11)(x-12)}=\frac{8}{33}.$$

Раскрывъ скобки, запишемъ уравненіе въ видѣ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}+\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2-x-30}{x^2-x-42}-\frac{1}{11}\cdot\frac{x^2-x-110}{x^2-x-132}=\frac{8}{33}.$$

Полагая (1) $x^2-x=y$, получимъ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{y-2}{y-6}+\frac{1}{12}\cdot\frac{y-30}{y-42}-\frac{1}{11}\cdot\frac{y-110}{y-132}=\frac{8}{33},$$

или

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{y-6}\right)+\frac{1}{12}\left(1+\frac{12}{y-42}\right)-\frac{1}{11}\left(1+\frac{22}{y-132}\right)=\frac{8}{33},$$

откуда, раскрывая скобки и замѣчая, что $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{11}=\frac{8}{33}$, находимъ

$$(2)\quad \frac{1}{y-6}+\frac{1}{y-42}-\frac{2}{y-132}=0.$$

Освободивъ уравненіе (2) отъ знаменателя, получимъ

$$(y-42)(y-132)+(y-6)(y-132)-(y-6)-2(y-6)(y-42)=0,$$

или $(y-132)(2y-48)-2(y-6)(y-42)=0$, откуда послѣ обычныхъ преобразованій находимъ, что $108y-2916=0$, (3) $y=27$. Провѣривъ полученное значеніе y, мы видимъ, что оно, не обращая въ нуль ни одного изъ знаменателей уравненія (2), дѣйствительно ему удовлетворяетъ. Изъ уравненій (1) и (3) слѣдуетъ, что $x^2-x=27$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{109}}{2}.$$

Кромѣ корня $y=27$, уравненіе (2) имѣетъ еще такъ называемое безконечное рѣшеніе, при чемъ, предполагая y даннымъ и разрѣшивъ уравненіе (1) относительно x, легко показать, что при безконечномъ возрастаніи y одно изъ полученныхъ такимъ образомъ значеній для x стремится къ положительной, а другое къ отрицательной безконечности, если абсолютная величина y стремится къ безконечности. Поэтому первоначальное уравненіе также имѣетъ безконечный корень. Это значитъ, что при безконечномъ возрастаніи абсолютной величины x лѣвая часть даннаго для рѣшенія уравненія стремится къ предѣлу, равному $\frac{8}{33}$.

В. Ревзинъ (Сумы); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 212 (6 сер.). *Доказать справедливость неравенства*

$$a^n-1\geqq n\left(a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}\right),$$

гдѣ a — *любое число, большее* 1, *а* n — *любое цѣлое положительное число.*

Представимъ разсматриваемое неравенство въ видѣ

$$(1)\quad a^n-1\geqq na^{\frac{n-1}{2}}(a-1).$$

По условію $a>1$, а потому разность $a-1$ положительна; слѣдовательно, сокративъ неравенство (1) на $a-1$, мы приходимъ къ неравенству

$$(2)\quad a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\cdots+a+1\geqq na^{\frac{n-1}{2}},$$

которое равносильно неравенству, предложенному для доказательства. Полагая

$$(3)\quad s=a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\cdots+a+1,$$

запишемъ слагаемыя правой части въ обратномъ порядкѣ и сложимъ полученное такимъ образомъ равенство съ равенствомъ (3); тогда получимъ

$$(4)\quad 2s=(a^{n-1}+1)+(a^{n-2}+a)+\cdots+(a^{n-k}+a^{k-1})+\cdots+(a+a^{n-2})+(1+a^{n-1}).$$

Такъ какъ $a^{n-k}+a^{k-1}=\left(a^{\frac{n-k}{2}}-a^{\frac{k-1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{n-1}{2}}$, то

$$(5)\quad a^{n-k}+a^{k-1}\geqq 2a^{\frac{n-1}{2}}$$

и такъ какъ правая часть равенства (4) содержитъ n суммъ вида $a^{n-k}+a^{k-1}$

то $2s \geqq 2na^{\frac{n-1}{2}}$, откуда $s \geqq na^{\frac{n-1}{2}}$, т. е. $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1 \geqq na^{\frac{n-1}{2}}$. Такимъ образомъ неравенство (2) доказано, а потому доказано и равносильное ему неравенство (1). Слѣдуетъ замѣтить, что въ формулѣ (5) знакъ равенства возможенъ лишь тогда, если $a^{\frac{n-k}{2}}=a^{\frac{k-1}{2}}$, т. е. если $n-k=k-1$, откуда $k=\frac{n+1}{2}$, что возможно лишь при n нечетномъ и лишь при одномъ значенiи k. Поэтому въ формулахъ вида (5) мы получимъ либо всюду знакъ неравенства $>$ (при n четномъ), либо получимъ этотъ знакъ во всѣхъ такихъ формулахъ, кромѣ одной, исключая случай $n=1$. Поэтому при $n>1$ мы получимъ и въ формулѣ (2) и въ предложенномъ для доказательства неравенствѣ знакъ $>$, а при $n=1$, что легко провѣрить, знакъ равенства. Мы предположили, что $a>1$; легко видѣть, что разсматриваемая формула вѣрна, обращаясь въ равенство, и при $a=1$. Неравенство (2), какъ это видно по ходу доказательства, справедливо при любомъ положительномъ значенiи a. Неравенство (2) можно вывести также, исходя изъ того извѣстнаго предложенiя, что среднее ариѳметическое n положительныхъ чиселъ не менѣе ихъ средняго геометрическаго (при чемъ знакъ равенства возможенъ лишь при $n=1$ или же при равенствѣ этихъ положительныхъ чиселъ). Дѣйствительно, примѣняя указанное предложенiе къ числамъ a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, ..., a, 1, находимъ, что

$$\frac{a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1}{n} \geqq \sqrt[n]{1 \cdot a^{1+2+3+\cdots+(n-1)}}=\sqrt[n]{a^{n(n-1)}}=a^{\frac{n-1}{2}},$$

откуда $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1 \geqq na^{\frac{n-1}{2}}$, при чемъ, при $a>0$, знакъ равенства возможенъ лишь при $n=1$ или при $a=1$.

Н. Михальскiй (Екатеринославъ); *N. N.* (Тифлисъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *Гукъ*; *Н. К-новъ* (Петроградъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 214 (**6 сер.**). *Доказать тожество*

$$1!\ 2!\ 3!\ 4! \ldots n! = \frac{(n!)^{n-1}}{3^1 . 4^2 . 5^3 . 6^4 \ldots n^{n-2}}.$$

Перемножая $n-1$ тожествъ

$$2!=\frac{n!}{3.4\ldots(n-1)n},\quad 3!=\frac{n!}{4.5\ldots(n-1)n},\quad 4!=\frac{n!}{5\ldots(n-1)n},$$

. . . .

$$(n-1)!=\frac{n!}{n-1},\quad n!=\frac{n!}{1}$$

и замѣчая, что въ знаменателяхъ правыхъ частей число 3 встрѣчается одинъ разъ, 4 — два раза, 5 — три раза и т. д., вообще k встрѣчается $k-2$ раза, наконецъ, n встрѣчается $n-2$ раза, получимъ тожество, предложенное для доказательства.

Н. Михальскiй (Екатеринославъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *Гукъ*; *Флавiанъ Д.* (Дѣйствующая армiя); *Б Смирновъ* (Юзовка, Екатеринославской губ); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *Н. Ченгери* (Курскъ); *П. Волохинъ* (Ялта).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.
Типографiя „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый, подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Изъ записной книжки преподавателя. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Библіографія: I. Рецензіи. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. III. Новости иностранной литературы. Темы для сотрудниковъ. Задачи на премію. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр.— для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ—для дух. семинарій и училищъ.

Въ 1913 г. журналъ былъ признанъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. заслуживающимъ вниманія при пополненіи библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1913 году.

50-й и 51-й семестры.

Проф. Р. Вудъ. Новѣйшіе опыты съ невидимымъ свѣтомъ. *Г. Дресслеръ.* Учебныя пособія по математикѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* XIII-ый Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ. *Проф. В. Бьеркнесъ.* Метеорологія, какъ точная наука. *Д-ръ Э. Ленкъ.* Введеніе въ коллоидную химію. *Н. Извольскій.* Цѣль обученія ариѳметикѣ. *М. Рудзкій.* Возрастъ земли. *М. Фихтенгольцъ.* Альфа-лучи и опредѣленіе элементарнаго заряда электричества. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Къ предстоящему II-му Всероссійскому Съѣзду преподавателей математики. *Прив.-доц. Ю. Рабиновичъ.* О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ. *Т. В. Рихардсъ.* Основныя свойства элементовъ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе. *Проф. Эйнштейнъ.* Къ проблемѣ тяготѣнія. *Проф. В. П. Ермаковъ.* Уравненія движенія планеты около солнца. *Проф. О. Д. Хвольсонъ.* Horror absoluti (Источникъ принципа относительности). *Проф. Н. Умовъ.* Возможный смыслъ теоріи квантъ. *Прив.-доц. И. Ю. Тимченко.* Демокритъ и Архимедъ. *Проф. Д. Синцовъ.* О конкурсныхъ экзаменахъ (Къ 25-лѣтію ихъ существованія). *Проф. В. А. Циммерманъ.* О перемѣстительномъ свойствѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей. *Проф. А. Л. Корольковъ.* Графическій пріемъ при изученіи системы линзъ. *В. А. Гернетъ.* Капиллярный анализъ. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.* Къ теоріи maximum'a и minimum'a функціи одного перемѣннаго. *Прив.-доц. Ю. Г. Рабиновичъ.* О наибольшихъ величинахъ въ геометріи. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскій.* Къ ученію о радикалахъ. *Ѳ. Морѣ.* Куда насъ увлекаетъ наше солнце. *Акад. А. А. Марковъ.* Двухсотлѣтіе закона большихъ чиселъ. *А. Риги.* Природа X-лучей. *Акад. П. И. Вальденъ.* О вліяніи физики на развитіе химіи. *Проф. В. П. Ермаковъ.* Полиномъ, сохраняющій между данными предѣлами постоянный знакъ и наименѣе уклоняющійся отъ нуля. *П. Флоровъ.* Результаты, проистекающіе изъ сравненія чиселъ съ ихъ натуральными логариѳмами. *Проф. Н. Умовъ.* Эволюція физическихъ наукъ и ея идейное значеніе. *Проф. I. К. Кантейнъ.* Строеніе вселенной. *Проф. М. Плонкъ.* Новые пути физическаго познанія. *И. Александровъ.* Рѣшеніе задачъ однимъ циркулемъ (геометрія Маскерони).

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ: Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Тарифъ для объявленій: за страницу 30 руб.; при печатаніи не менѣе 3 разъ **—10%** скидки, 6 разъ—**20%**, 12 разъ—30%.

Журналъ за прошлые годы по **2 руб. 50 коп.**, а учащимся и книгопродавцамъ по **2 руб.** за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по **30 к.**, прошлыхъ семестровъ по **25 к.**

Адр. для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“**