№ 630.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

Второй серіи

III-го семестра № 6.

ОДЕССА

Типографія „Техникъ“—Екатерининская, 58.

1915.

Второй серіи III-го семестра № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 630.

Измѣреніе небесныхъ разстояній.

А. Р. Гинкса.

Въ теченіе послѣднихъ лѣтъ мы присутствовали при завершеніи новаго измѣренія разстоянія земли отъ солнца, а также связаннаго съ этимъ новаго опредѣленія массы луны. Въ то же время мы видѣли, что всѣ изслѣдователи, занимающіеся опредѣленіемъ небесныхъ разстояній, были охвачены новымъ интересомъ. Этотъ интересъ можно, съ одной стороны, приписать тому довѣрію, которое внушилъ сравнительно новый методъ точнаго фотографированія, какимъ въ настоящее время вооруженъ астрономъ, а съ другой стороны, осуществленію насущной потребности болѣе точно знать размѣры вселенной, если мы хотимъ оцѣнить дѣйствительное значеніе послѣднихъ открытій, относящихся къ систематическимъ движеніямъ звѣздъ.

Среднее разстояніе земли отъ солнца или, скорѣе, отношеніе экваторіальнаго радіуса земли къ этому разстоянію, извѣстное подъ именемъ солнечнаго параллакса, есть одна изъ наиболѣе важныхъ, основныхъ величинъ солнечной системы. Она находится въ тѣсной связи съ постоянной аберраціи свѣта, массой земли, съ наиболѣе важнымъ неравенствомъ движенія луны и съ теоріей затменія спутниковъ Юпитера. Болѣе того, радіусъ земной орбиты есть базисъ, съ помощью котораго мы измѣряемъ разстоянія звѣздъ.

Величина, имѣющая такъ много отношеній къ другимъ величинамъ, быть можетъ, столь же хорошо опредѣленнымъ, естественно должна находиться въ совершенно особенномъ положеніи. Отношенія, доказанныя въ теоріи, должны существовать и на практикѣ. Если же они не выполняются строго, то мы должны разсмотрѣть всѣ обстоятельства и, если возможно, рѣшить, есть ли это разногласіе только кажущееся, которое происходитъ отъ несовершеннаго знанія какой-нибудь изъ заключающихся здѣсь величинъ, или это есть расхожденіе дѣйствительное, указывающее на какой-нибудь дѣйствительный, хотя въ то же время и скрытый недостатокъ въ теоретическихъ соотношеніяхъ, которыя мы считали точно установленными.

Соображеніями именно такого рода былъ, главнымъ образомъ, обусловленъ интересъ къ новому измѣренію солнечнаго параллакса.

Оказалось, что существуетъ разногласіе между результатами измѣреній при помощи прямого астрономическаго наблюденія и результатами, полученными косвеннымъ путемъ изъ аберраціи свѣта или изъ опредѣленія массы земли. Существованіе такого разногласія удивитъ только тѣхъ, у кого сложилось преувеличенное представленіе о томъ совершенствѣ, какого достигла наиболѣе точная изъ наукъ. Теорія, методы наблюденія и вычисленія доведены въ нѣкоторыхъ случаяхъ до такого развитія, что ихъ можно считать вполнѣ совершенными.

Коуэйлль (Cowell) и Кроммелинъ (Crommelin) утверждали, что ихъ вычисленія послѣдняго возвращенія кометы Галлея настолько полны, что ошибка въ предсказаніи не могла превосходить половины сутокъ, если вещество кометы вполнѣ подчиняется законамъ Ньютона и если она не подвергается вліянію какихъ-либо иныхъ воздѣйствій. Въ дѣйствительности, ошибка въ предсказаніи была около трехъ дней, и мы вынуждены поэтому признать, что на комету оказывало вліяніе нѣчто иное помимо тяготѣнія. Съ другой стороны, въ движеніи луны также существуетъ хорошо извѣстная неправильность, которая не поддается объясненію. На ея существованіе обратилъ вниманіе Ньюкомъ (Newkomb) и, когда возникла необходимость какъ можно лучше урегулировать вопросъ объ обычныхъ методахъ предсказанія положенія луны въ „Nautical Almanac“, онъ и далъ чисто эмпирическія поправки таблицъ Гансена (Hansen), которыя оказываются достаточными на нѣсколько лѣтъ.

Между тѣмъ Гилль (Hill) усовершенствовалъ свою теорію движенія луны, а Браунъ (Brown) взялъ на себя трудную задачу придать этой теоріи числовую форму, удобную для вычисленій.

Несомнѣнно, всѣ надѣялись, даже ожидали, что по завершеніи этой работы исчезнетъ разногласіе между предсказаніемъ и наблюденіемъ. Эта надежда оказалась напрасной. Въ теоріи не оказалось никакихъ слѣдовъ членовъ съ длинными періодами, съ какими Ньюкому пришлось имѣть дѣло на практикѣ.

Но они несомнѣнно существуютъ въ наблюдаемомъ въ настоящее время движеніи луны, и съ необходимостью приводятъ къ заключенію, что, когда мы исчерпаемъ всѣ средства нашихъ теперешнихъ теорій, которыя принимаютъ во вниманіе силы и воздѣйствія, существующія въ нашей солнечной системѣ, то передъ нами окажутся остатки, соотвѣтствующіе причинамъ, о какихъ мы въ настоящее время не имѣемъ никакого представленія.

Если, слѣдовательно, существуетъ разногласіе между значеніемъ солнечнаго параллакса, полученнымъ прямымъ измѣреніемъ, и тѣмъ значеніемъ, какое находится по одной или нѣсколькимъ связаннымъ съ нимъ величинамъ, доступнымъ независимому измѣренію, то мы не должны этимъ смущаться. Мы можемъ даже привѣтствовать это, какъ указаніе на новыя проблемы, которыя могутъ быть здѣсь обнаружены. Только мы должны быть вполнѣ увѣрены, что несогласіе здѣсь не обусловливается лишь недостаточной точностью того или иного измѣренія.

Таковы были соображенія, вызвавшія огромный интересъ къ новому измѣренію солнечнаго параллакса.

Въ 1896 г. Ньюкомъ проявилъ большую энергію въ дѣлѣ введенія однородной системы астрономическихъ постоянныхъ — 8″,80 для солнечнаго параллакса и 20″,47 для постоянной аберраціи — во всѣ національные астрономическіе альманахи. Однако, еще до того, какъ эти постоянныя вошли въ употребленіе, онъ высказалъ мнѣніе, что онѣ должны быть пересмотрѣны. Многочисленныя позднѣйшія опредѣленія постоянной аберраціи дали для нея въ результатѣ гораздо большее число: 20″,53 вмѣсто 20″,47. Это предполагаетъ для солнечнаго параллакса значительно меньшую величину, именно 8″,77.

Въ то время еще не было возможности утверждать, что прямыя измѣренія настолько твердо говорятъ въ пользу большей цифры, чтобы можно было съ разумнымъ основаніемъ сомнѣваться въ точности послѣдней. Прохожденіе Венеры не дало никакихъ заключеній. Наблюденія сера Давида Гилля надъ Марсомъ на островѣ Вознесенія въ 1877 г. дали число 8″,78; его же геліометрическія наблюденія малыхъ планетъ Викторіи, Ирисы и Сафо въ 1896 г. дали 8″,80; и хотя представлялось несомнѣннымъ, что послѣднее измѣреніе имѣетъ большую точность, тѣмъ не менѣе не представлялось возможнымъ считать настолько исключительнымъ всякій источникъ систематическихъ ошибокъ, чтобы принять это измѣреніе и совершенно игнорировать другіе результаты, полученные косвенными методами.

Новое, точное и независимое прямое измѣреніе было въ виду этого особенно желательно.

Очень скоро послѣ этого, въ 1898 г., благодаря открытію малой планеты Эроса представился желаемый случай. Орбита новой планеты оказалась замѣчательной, даже единственной въ своемъ родѣ. Хотя ея среднее разстояніе отъ солнца было очень близко къ разстоянію Марса, однако, эксцентриситетъ ея орбиты оказался настолько значительнымъ, что планета въ нѣкоторыхъ благопріятныхъ положеніяхъ приближается къ землѣ на разстояніе въ 15 милліоновъ миль, т. е. на половину наименьшаго разстоянія Марса отъ земли. Въ этой планетѣ усмотрѣли тотчасъ же несравненно болѣе могущественное средство, чѣмъ всѣ, до сихъ поръ извѣстныя, для измѣренія солнечнаго параллакса.

Благопріятныя положенія планеты имѣютъ мѣсто не очень часто; однако, сравнительно хорошее положеніе представилось осенью 1900 г. По счастливому совпаденію какъ разъ въ іюлѣ этого года должно было состояться въ Парижѣ собраніе постояннаго комитета астрографической карты (Commité permanent de la carte astrographique). Это обстоятельство оказалось очень важнымъ, такъ какъ было очевидно, что здѣсь потребуется особенно энергичная совмѣстная работа, и что наблюденія будутъ преимущественно фотографическими. Далѣе, ясно было также, что въ этой совмѣстной работѣ окажется необходимымъ руководитель, не столько для того, чтобы заставить всѣхъ участвующихъ въ ней работать по одному опредѣленному шаблону, который вредилъ бы только дѣлу, но чтобы координировать, поскольку возможно, ихъ индивидуальныя усилія, и заблаговременно позаботиться о необходимыхъ матеріалахъ, звѣздныхъ каталогахъ и спеціальныхъ эфемеридахъ, чего каждый отдѣльный изслѣдователь не смогъ бы сдѣлать собственными силами, главнымъ образомъ, потому, что до начала наблюденій оставалось очень мало времени.

Комитетъ астрографической карты назначилъ особую коммиссію, которая должна была выработать программу и наблюдать за всѣми работами. Предсѣдателемъ коммиссіи былъ выбранъ Морисъ Лёви (Maurice Loewy), бывшій тогда директоромъ Парижской Обсерваторіи; его знаменитые сотрудники по коммиссіи первые, конечно, признали, что именно ему всецѣло должны принадлежать руководство и контроль надъ предстоявшими тогда работами.

Для возникшаго такимъ образомъ предпріятія особенно счастливымъ оказалось то обстоятельство, что какъ разъ въ это время весь механизмъ комитета астрографической карты былъ въ полномъ ходу и вполнѣ готовъ былъ служить новой задачѣ. Однако, въ новой кооперацiи были такія черты, которыя рѣзко отличали ее отъ той первоначальной задачи, для какой этотъ механизмъ предназначался. Не лишено интереса разсмотрѣть эти черты подробно.

Прежде всего необходимо было запастись новыми меридіанными наблюденіями всѣхъ звѣздъ, выбранныхъ за основныя.

Предпринятый въ 1887 г. астрографическій каталогъ могъ быть основанъ на частичныхъ каталогахъ Германскаго Астрономическаго Общества, которые печатались какъ разъ въ это время. Его пригодность въ качествѣ основанія для фотографическаго каталога, даже тогда было сомнительнымъ; впослѣдствіи было признано необходимымъ произвести въ нѣкоторыхъ случаяхъ новыя меридіанныя наблюденія основныхъ звѣздъ. Для несравненно болѣе точной работы, какой должно было быть новое опредѣленіе солнечнаго параллакса, не было возможно основываться на существующихъ тогда меридіанныхъ каталогахъ, которые къ 1900 г. были уже старыми. Въ виду этого, первой задачей, какую поставила себѣ коммиссія, была организація возможно болѣе точныхъ меридіанныхъ наблюденій около 700 звѣздъ, выбранныхъ на пути, по которому должна была двигаться планета въ ближайшую оппозицію.

Замѣтимъ мимоходомъ, что рѣшеніе создать новый звѣздный каталогъ имѣло важныя послѣдствія. Оно заставило астронома-фотографа освоиться съ мыслью, что разъ ему необходимо располагать точными данными относительно положенія его основныхъ звѣздъ, то надо заставить кого-нибудь сдѣлать необходимыя наблюденія.

Конечно, многіе астрономы, производящіе меридіанные наблюденія, съ удовольствіемъ взялись бы сдѣлать для него требуемыя наблюденія, однако, при условіи, если онъ скажетъ имъ, что̀ именно ему необходимо; съ другой стороны, онъ напрасно пытался бы найти требуемое въ обычныхъ меридіанныхъ наблюденіяхъ, какія производятся наблюдателями, не ставящими себѣ его спеціальной задачи. Естественнымъ слѣдствіемъ этого было то, что астрономы, отъ которыхъ зависѣло созданіе астрографическаго каталога, убѣдились въ томъ, что именно они должны подготовить новую систему основныхъ звѣздъ, которыя послужили бы окончательнымъ базисомъ ихъ каталога; чтобы произвести это съ возможнымъ совершенствомъ, они призвали на помощь людей, которые всю свою жизнь были заняты астрономіей положенія, и которые до сихъ поръ никогда не занимались вопросами небесной фотографіи.

Астрографическій конгрессъ 1909 г. оказался, такимъ образомъ, скорѣе, общимъ собраніемъ астрономовъ, которые въ различныхъ своихъ секціяхъ были заняты вопросами о положеніяхъ основныхъ звѣздъ, о вспомогательныхъ основныхъ измѣреніяхъ, о визуальной и фотографической фотометріи и о предстоявшемъ вычисленіи орбиты планеты Эроса. Всѣ усилія астрономовъ-наблюдателей направлялись по двумъ путямъ: одни участвовали въ Астрографическомъ Конгрессѣ, другіе въ Мѣждународномъ Союзѣ для изученія солнца, который въ послѣднемъ своемъ засѣданіи рѣшилъ включить астрофизику въ число предметовъ своихъ изслѣдованій.

Однако, мы должны вернуться къ Парижскому Конгрессу 1900 г. и его приготовленіямъ для наблюденія Эроса осенью того же года.

Около 40 обсерваторій приняли участіе въ этомъ предпріятіи. Въ общемъ было рѣшено, что большая часть опредѣленій пути и положеній планеты будетъ найдено при помощи фотографіи, при чемъ не исключались и визуальныя наблюденія микрометромъ съ нитями или геліометромъ.

Интересно, между прочимъ, отмѣтить, что настойчивость тѣхъ, которые придерживались старыхъ методовъ, имѣла подъ собою вполнѣ солидныя основанія; однако, они все же были вынуждены обратиться къ фотографіи, чтобы получить положенія тысячъ маленькихъ звѣздъ, какія наблюдались вмѣстѣ съ планетой; и дѣйствительно, опредѣленіе положеній этихъ звѣздъ фотографическимъ путемъ, составило бо̀льшую часть всего предпринятаго труда.

Трудно оцѣнить по достоинству значеніе тѣхъ услугъ, какія оказалъ Л ё в и дѣлу въ этой его стадіи. Рядъ циркуляровъ, напечатанныхъ имъ, быстро увеличивался по объему, они составили цѣлые томы въ сотни страницъ каждый. Въ нихъ были собраны и распредѣлены въ наиболѣе удобной формѣ всѣ инструкціи и указанія, направлявшія ходъ работъ, и всѣ результаты, по мѣрѣ ихъ появленія.

Отъ руководящаго персонала парижской обсерваторіи потребовалось громадное напряженіе силъ; Академія Наукъ затратила на печатаніе значительныя средства.

Астрономы всего міра останутся въ долгу передъ Франціей за ту щедрость, съ какой она въ этотъ важный моментъ предоставила въ распоряженіе коопераціи всѣ свои громадныя средства. Въ планѣ Лѐви была одна черта, которая дѣлала его замѣчательнымъ, быть можетъ, даже единственнымъ въ смыслѣ либеральности. Въ циркулярахъ Эроса онъ стремился дать всю массу матеріала въ совершенно однородномъ видѣ такъ, чтобы онъ былъ вполнѣ готовъ къ изученію для каждаго, кто заинтересовался бы этимъ; при этомъ онъ не сохранялъ ни за собою, ни за Парижемъ привиллегіи сдѣлать окончательную разработку этого матеріала и подвести окончательные итоги всему предпріятію; онъ предоставилъ это удовлетвореніе всѣмъ сотрудникамъ. Это благородное намѣреніе можно усмотрѣть во многихъ мѣстахъ, разбросанныхъ во введеніяхъ къ послѣдовательнымъ циркулярамъ; на это необходимо указать здѣсь же, такъ какъ съ этимъ связаны многія особенности этого труда, которыя въ противномъ случаѣ остались бы неясными. Въ частности, было бы непонятно, какимъ образомъ случилось, что удовольствіе пожать плоды этого дѣла въ значительной мѣрѣ досталось автору настоящей статьи въ то время, какъ такая значительная часть труда пришлась на долю Лѐви и персонала Парижской Обсерваторіи.

Задача разработки результатовъ, собранныхъ различными обсерваторіями, въ дѣйствительности оказалась не столь простой, какъ это сначала предполагалось, такъ какъ нѣкоторыя принятыя допущенія не были достаточно обоснованными. Напримѣръ, слишкомъ поспѣшно было принято, что матеріалъ, полученный фотографическими телескопами одного и того же типа, въ особенности, работы одного и того же наблюдателя, долженъ считаться совершенно однороднымъ.

Это было чистое допущеніе, такъ какъ до тѣхъ поръ никогда еще не дѣлали точнаго сравненія результатовъ, полученныхъ при помощи различныхъ инструментовъ. Большая часть фотографическихъ телескоповъ, тотчасъ же по ихъ оборудованіи, была примѣнена въ дѣлѣ созданія фотографической карты неба. До тѣхъ поръ не представлялось случая точно сравнить результаты измѣреній фотографій однихъ и тѣхъ же объектовъ, полученныхъ при помощи различныхъ телескоповъ.

Одновременное участіе многихъ телескоповъ въ задачѣ опредѣленія положеній звѣздъ, служившихъ для сравненія и наблюдавшихся вмѣстѣ съ Эросомъ, дало возможность провѣрить допущеніе, что измѣненія на фотографическихъ пластинкахъ свободны отъ систематическихъ ошибокъ. Въ большинствѣ случаевъ это допущеніе оказалось правильнымъ; однако, въ нѣкоторомъ числѣ этого рода наблюденій была открыта значительная ошибка, которая объяснялась неправильной установкой объектива или же подобными причинами. Для ошибки въ одномъ изъ этихъ случаевъ до сихъ поръ еще не было найдено удовлетворительнаго объясненія.

Существованіе этихъ ошибокъ вызываетъ необходимость подвергнуть тщательному разсмотрѣнію и испытанію всякій новый методъ, но оно вовсе не оправдываетъ недовѣрія къ фотографическому методу или даже признанія его негоднымъ, какъ этого нѣкоторые требовали. Существованіе такихъ ошибокъ, доступныхъ учету, въ нѣкоторыхъ изъ опубликованныхъ положеній звѣздъ, ясно показываетъ, что Лёви выказалъ слишкомъ оптимистическое отношеніе, допуская, что опубликованные въ парижскихъ циркулярахъ результаты фотографическихъ операцій были строго однородными. Это необходимо подчеркнуть, чтобы выяснить, почему результаты, которые сначала считались вполнѣ готовыми для примѣненія къ измѣренію солнечнаго параллакса, въ нѣкоторыхъ случаяхъ должны были быть подвергнуты дальнѣйшей предварительной обработкѣ.

Нельзя также не признать, что эти исключительные случаи вызывали неослабѣвающій интересъ; между тѣмъ, если бы все пошло гладко съ самаго же начала, то это, казалось, должно было быть довольно скучной работой.

Мы выше говорили, что Лёви старался придать всему матеріалу вполнѣ пригодную для разработки форму, но что онъ не задавался цѣлью предусмотрѣть тотъ порядокъ, въ какомъ она должна быть выполнена. Въ строгомъ согласіи съ этимъ рѣшеніемъ онъ воздержался отъ расположенія въ формѣ каталога громадной массы меридіанныхъ наблюденій, которыя онъ получилъ изъ многихъ главныхъ обсерваторій земного шара.

Составленіе этого каталога было, такимъ образомъ, первой задачей каждаго, кто попытался бы рѣшить основную проблему. Было хорошо извѣстно, что при оцѣнкѣ яркости наблюдаемыхъ звѣздъ на меридіанныхъ наблюденіяхъ, производимыхъ почти повсемѣстно распространеннымъ тогда способомъ, отражаются индивидуальныя особенности наблюдателя. Существенно важно было устранить этотъ источникъ ошибокъ. Но какъ это сдѣлать? Это былъ очень тонкій вопросъ, относительно котораго мнѣнія различныхъ изслѣдователей могли сильно расходиться, что̀ дѣйствительно и случилось. Такъ, можно было воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что эта ошибка въ значительной мѣрѣ отсутствовала у бо́льшей части фотографическихъ пластинокъ, либо прибѣгнуть къ прекрасному новому методу транзитнаго микрометра, который какъ разъ въ это время входилъ въ употребленіе.

Въ началѣ я самъ не былъ увѣренъ въ безусловномъ превосходствѣ этихъ результатовъ надъ фотографическимъ способомъ исправленія меридіаннаго каталога и съ большой неохотой долженъ былъ отказаться отъ каталога, составленнаго въ Кёнигсбергѣ при помощи транзитнаго микрометра Кономъ (Dr. Cohn). Дальнѣйшіе опыты показали, что работа Кона въ значительно бо́льшей степени, чѣмъ провѣрка каталога при помощи фотографіи, была свободна отъ вышеупомянутыхъ систематическихъ ошибокъ.

Впослѣдствіи, въ несравненно болѣе тонкомъ вопросѣ о массѣ луны, этому заключенію было удѣлено надлежащее вниманіе.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что однимъ изъ интересныхъ побочныхъ результатовъ измѣренія солнечного параллакса оказалось подтвержденіе несомнѣнныхъ преимуществъ новаго метода меридіанныхъ наблюденій.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Къ вопросу объ освобожденіи знаменателя дроби отъ радикаловъ.

Прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Если знаменатель дроби содержитъ радикалъ $r = \sqrt[n]{q}$, то его можно представить въ видѣ *)

$$a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r + a_n, \tag{1}$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть данные коэффиціенты, не содержащіе радикала r. Помножимъ числитель и знаменатель дроби на выраженіе

$$z_1 r^{n-1} + z_2 r^{n-2} + \cdots + z_{n-1} r + z_n. \tag{2}$$

Произведеніе выраженій (1) и (2) послѣ раскрытія скобокъ принимаетъ видъ

$$s_0 r^{2n-2} + s_1 r^{2n-3} + \cdots + s_{2n-3} r + s_{2n-2}, \tag{3}$$

гдѣ $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-3}, s_{2n-2}$ суть выраженія, линейныя и однородныя относительно коэффиціентовъ $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$ многочлена (2). Выводя въ первыхъ $n-1$ членахъ выраженія (3) за скобку r^n и принимая во вниманіе, что $r^n = q$, произведеніе выраженій (1) и (2) можно представить въ видѣ

$$(s_0 r^{n-2} + s_1 r^{n-3} + s_2 r^{n-4} + \cdots + s_{n-3} r + s_{n-2})\, q +$$
$$+ (s_{n-1} r^{n-1} + s_n r^{n-2} + \cdots + s_{2n-3} r + s_{2n-2}),$$

или

$$\begin{gathered} s_{n-1} r^{n-1} + (q s_0 + s_n)\, r^{n-2} + (q s_1 + s_{n+1})\, r^{n-3} + \cdots \\ \cdots + (q s_{n-3} + s_{2n-3})\, r + (q s_{n-2} + s_{2n-2}). \end{gathered} \tag{4}$$

Приравнявъ нулю коэффиціенты при $r^{n-1}, r^{n-2}, \ldots, r^2, r$ въ выраженіи (4), получимъ систему $n-1$ уравненій

$$s_{n-1} = 0, \quad q s_0 + s_n = 0, \quad q s_1 + s_{n+1} = 0, \ldots, \quad q s_{n-3} + s_{2n-3} = 0. \tag{5}$$

Эта система линейна и однородна относительно n коэффиціентовъ z_i, такъ какъ относительно нихъ линейны и однородны коэф-

---

*) См. статью прив.-доц. С. О. Шатуновскаго «Къ ученію о радикалахъ» § 26, стр. 30. „Вѣстникъ“ № 602.

фиціенты $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-3}$. Итакъ система (5) есть система $n-1$ линейныхъ и однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными, а потому эта система всегда совмѣстна, при чемъ она всегда допускаетъ такое рѣшеніе относительно неизвѣстныхъ z_i, въ которомъ хоть одно изъ ихъ значеній отлично отъ нуля. Это свойство системы (5) обезпечиваетъ возможность примѣнять во всѣхъ случаяхъ методъ, рекомендуемый г. Киселевымъ въ § 236 его курса элементарной алгебры, къ освобожденію дробей отъ радикаловъ, правда, въ чуть-чуть измѣненномъ видѣ. Измѣненіе метода, указанное въ настоящей замѣткѣ, заключается лишь въ томъ, чтобы оставить въ началѣ вычисленія неопредѣленнымъ и коэффиціентъ z_1 при r^{n-1} въ выраженіи (2), а не приравнивать его обязательно единицѣ.

Замѣчаніе. Мы приняли въ нашихъ разсужденіяхъ безъ доказательства слѣдующее предложеніе: система n линейныхъ однородныхъ уравненій съ $n+1$ неизвѣстными (и вообще съ m неизвѣстными, если $m > n$) допускаетъ рѣшеніе, въ которомъ значеніе хоть одного изъ неизвѣстныхъ отлично отъ нуля. Это предложеніе, легко доказываемое при помощи теоріи опредѣлителей, можно также доказать индуктивно вполнѣ элементарнымъ путемъ. Одно однородное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными всегда допускаетъ рѣшеніе, въ которомъ значеніе хотя бы одного изъ неизвѣстныхъ отлично отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи $ax + by = 0$ $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то уравненіе удовлетворяется, полагая $x = -\frac{by}{a}$, гдѣ y — любое число, отличное отъ нуля. Если же одинъ изъ коэффиціентовъ a и b, напримѣръ, a равенъ нулю, то уравненіе удовлетворяется, полагая x равнымъ любому отличному отъ нуля числу и y равнымъ нулю.

Пусть теперь теорема доказана для n, равнаго любому опредѣленному числу; докажемъ, что она вѣрна и для $n+1$ уравненій съ $n+2$ неизвѣстными, т. е. докажемъ, что она вѣрна для системы вида

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_1 + b_1x_2 + \cdots + k_1 x_{n+1} + l_1 x_{n+2} = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \cdots + k_2 x_{n+1} + l_2 x_{n+2} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n+1}x_1 + b_{n+1}x_2 + \cdots + k_2 x_{n+1} + l_{n+1} x_{n+2} = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Если въ системѣ (1) всѣ коэффиціенты при одномъ изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ, x_1 равны нулю, то, полагая x_1 равнымъ любому отличному отъ нуля числу и $x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+2} = 0$, мы получимъ рѣшеніе, удовлетворяющее условію теоремы. Если же въ системѣ (1) ни при одномъ изъ неизвѣстныхъ не равны нулю всѣ коэффиціенты, то пусть при x_1 въ нѣкоторыхъ, напримѣръ, въ k первыхъ уравненіяхъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не равенъ нулю, а въ остальныхъ $n+1-k$ уравненіяхъ каждый изъ коэффиціентовъ a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots, a_{n+1}$ равенъ нулю. Тогда система (1) равносильна системѣ уравненій

$$\left.\begin{array}{r}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + l_1 x_{n+2} = 0, \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + l_2 x_{n+2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_k x_1 + b_k x_2 + \cdots + l_k x_{n+2} = 0, \\
b_{k+1} x_2 + \cdots + l_{k+1} x_{n+2} = 0, \\
b_{k+2} x_2 + \cdots + l_{k+2} x_{n+2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n+1} x_2 + \cdots + l_{n+1} x_{n+2} = 0.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Опредѣляя изъ каждаго изъ первыхъ k уравненій системы (2) x_1 и преобразовывая эти k уравненій по способу сравненія величинъ неизвѣстнаго, можно замѣнить систему (2) равносильной системой $n+1$ уравненій

$$\left.\begin{array}{c}
x_1 = -\dfrac{b_1 x_2 + \cdots + l_1 x_{n+2}}{a_1}, \\[2ex]
\dfrac{b_1 x_2 + \cdots + l_1 x_{n+2}}{a_1} = \dfrac{b_2 x_2 + \cdots + l_2 x_{n+2}}{a_2}, \\[2ex]
\dfrac{b_1 x_2 + \cdots + l_1 x_{n+2}}{a_1} = \dfrac{b_3 x_2 + \cdots + l_3 x_{n+2}}{a_3}, \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex]
\dfrac{b_1 x_2 + \cdots + l_1 x_{n+2}}{a_1} = \dfrac{b_k x_2 + \cdots + l_k x_{n+2}}{a_k}, \\[2ex]
b_{k+1} x_2 + \cdots + l_{k+1} x_{n+2} = 0, \quad b_{k+2} x_2 + \cdots + l_{k+2} x_{n+2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n+1} x_2 + \cdots + l_{n+1} x_{n+2} = 0.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Послѣднія n уравненій системы (3) представляютъ собой систему n линейно однородныхъ уравненій съ $n+1$ неизвѣстными $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$; по допущенію можно найти такое рѣшеніе этой системы, въ которомъ хоть одно изъ значеній неизвѣстныхъ $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$ отлично отъ нуля. Пусть $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3, \ldots, x_n = \alpha_{n+2}$ есть такое рѣшеніе; подставляя эти значенія неизвѣстныхъ въ первое изъ уравненій (3), получимъ рѣшеніе

$$x_1 = -\frac{b_1 a_2 + \cdots + l_1 a_{n+2}}{a_1}, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \ldots, \quad x_n = a_{n+2},$$

системы (1), въ которомъ навѣрно не всѣ значенія неизвѣстныхъ равны нулю. Итакъ разсматриваемое предложеніо доказано. Слѣдуетъ замѣтить, что случай $k = n + 1$ не вноситъ въ индуктивную часть доказательства никакихъ существенныхъ измѣненій.

Объ ариѳметическомъ и геометрическомъ среднемъ.

П. Кварра.

Переводъ съ итальянскаго.

Историческій обзоръ.

„Геометрическое среднее нѣсколькихъ величинъ *) меньше ариѳметическаго средняго тѣхъ же величинъ“.

Переводя это предложеніе на языкъ формулъ, имѣемъ: пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначаютъ n величинъ, относительно которыхъ система равенствъ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

не имѣетъ мѣста. Тогда:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right).$$

Возвысивъ обѣ части неравенства въ n-ю степень, получимъ:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n.$$

Т. е.: „произведеніе n величинъ меньше n-ой степени ариѳметическаго средняго тѣхъ же величинъ; случай равенства имѣетъ мѣсто только тогда, когда всѣ эти величины равны между собою“.

Или, иначе: „произведеніе n величинъ, сумма которыхъ равняется данному числу, достигаетъ максимума, когда всѣ эти величины равны между собою“.

---

*) Подъ величиной мы въ настоящей статьѣ понимаемъ „вещественное положительное число“.

Для $n=2$ доказательство весьма несложно и непосредственно слѣдуетъ изъ того, что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

есть положительная величина.

Для $n=3$ можно разность

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 - abc$$

разложить на сумму положительныхъ величинъ *):

$$2\,[(a+b+c)^3 - 27abc)] = (a-b)^2\,(a+b+7c) + (b-c)^2\,(7a+b+c)$$
$$+ (c-a)^2\,(a+7b+c).$$

Но эта формула уже очень сложна, а съ возрастаніемъ числа величинъ сложность образованія подобнаго рода тождествъ все возрастаетъ.

Очень расплывчато слѣдующее доказательство, воспроизводимое Бертраномъ (Bertrand. Algebra. Cap. IX.):

Пусть (для примѣра мы беремъ три величины) a, b и c не всѣ равны между собою. Тогда

$$abc < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot c,$$

сумма же сомножителей

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{a+b}{2},\quad c$$

равняется $a+b+c$. Это значитъ: при данной постоянной суммѣ трехъ величинъ $a+b+c$, произведеніе этихъ величинъ abc не достигаетъ максимума, если онѣ не всѣ равны между собою. Но это предложеніе необратимо. Изъ него не слѣдуетъ, что произведеніе достигаетъ максимума, когда сомножители равны между собою.

Коши (Cauchy, Analyse algébrique, стр. 459) даетъ слѣдующее доказательство:

Для 4 сомножителей мы имѣемъ:

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\quad cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2,\quad abcd < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left(\frac{c+d}{2}\right)^2,$$

далѣе

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

и слѣдовательно

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

*) G. Peano. Formulario mathematica. V изд. 1908.

Для 8, 16 и т. д., вообще для 2^n сомножителей доказательство такое же.

Для трехъ величинъ a, b, c мы имѣемъ:

$$abc \cdot \frac{a+b+c}{3} < \left(\frac{4\,(a+b+c)}{3\,.\,4}\right)^4$$

или

$$abc \cdot \frac{a+b+c}{3} < \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4.$$

Сокращая обѣ части на сомножителя $\dfrac{a+b+c}{3}$, получаемъ:

$$abc < \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Аналогично доказательство для любого числа сомножителей. Но это введеніе сомножителей, на которыхъ слѣдуетъ затѣмъ сокращать соотвѣтствующее неравенство, страдаетъ искусственностью.

Много другихъ доказательствъ получается отъ комбинированія тождества, приведенныхъ въ вышеприведенной статьѣ изъ Formulario.

Одну такую комбинацію мы встрѣчаемъ у Катаніа (Catania: Trattato di aritmetica ed algebra, стр. 180 — 372).

Въ настоящей статьѣ мы даемъ доказательство, которое намъ кажется болѣе простымъ.

Доказательство.

Лемма I. Пусть m будетъ цѣлое и положительное число, большее 1, x — либо положительное число, либо отрицательное, заключающееся между -1 и 0. Тогда

$$(1+x)^m > 1 + mx.$$

Для $m = 2$ имѣемъ:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Предположивъ теперь, что лемма доказана для какого нибудь числа m, докажемъ, что изъ этого слѣдуетъ ея вѣрность для $m+1$. Дѣйствительно, умножая неравенство на $1+x$, получаемъ:

$$(1+x)^{m+1} > (1+mx)(1+x) = 1 + (m+1)\,x + mx^2 > 1 + (m+1)\,x.$$

Лемма такимъ образомъ доказана.

Лемма II. Пусть m, n будутъ цѣлыя положительныя числа, x — положительное число, меньшее n. Тогда

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1-\frac{x}{n}\right)^n < 1.$$

Изъ леммы I, если мы замѣнимъ x черезъ x/mn, слѣдуетъ:

$$\left(1+\frac{x}{mn}\right)^n > 1+\frac{x}{m}, \quad \left(1-\frac{x}{mn}\right)^m > 1-\frac{x}{n}.$$

Возвышая первое неравенство въ m-ю, второе въ n-ю степень и перемножая ихъ почленно, получимъ:

$$\left(1+\frac{x}{mn}\right)^{mn} > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m, \quad \left(1-\frac{x}{mn}\right)^{mn} > \left(1-\frac{x}{n}\right)^n,$$

$$\left[\left(1+\frac{x}{mn}\right)\left(1-\frac{x}{mn}\right)\right]^{mn} > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

Но лѣвая часть послѣдняго неравенства меньше 1, такъ какъ

$$(1+x)(1-x) = 1-x^2 < 1,$$

слѣдовательно, лемма доказана.

Лемма III. Пусть m, n будутъ числа положительныя раціональныя либо числа положительныя вещественныя, x — величина положительная меньшая n. Тогда

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1-\frac{x}{n}\right)^n < 1.$$

Если m и n числа раціональныя, то ихъ можно представить въ видѣ:

$$m = \frac{p}{r}, \quad n = \frac{q}{r},$$

гдѣ p, q, r — числа цѣлыя. Изъ леммы II слѣдуетъ:

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p\left(1-\frac{x}{q}\right)^q < 1.$$

Замѣняя x черезъ rx и возвышая обѣ части неравенства въ степень $1/r$, получаемъ, что наша лемма вѣрна для раціональныхъ m, n.

Переходъ отъ раціональныхъ m, n къ ирраціональнымъ слѣдуетъ изъ опредѣленія ирраціональнаго числа.

Изъ доказаннаго непосредственно слѣдуетъ, что если мы имѣемъ два числа

$$1+\frac{x}{m} \text{ и } 1-\frac{x}{n},$$

такъ что ариѳметическое среднее этихъ чиселъ, взятыхъ съ соотвѣтственными вѣсами m и n (т. е. одно m, другое n разъ*), равняется 1,

*) Это обобщеніе понятія ариѳметическаго средняго. Ариѳметическимъ среднимъ величинъ $a, b, c, \ldots$ съ соотвѣтственными вѣсами $m, n, p, \ldots$ называется величина $\dfrac{ma+nb+pc+\cdots}{m+n+p+\cdots}$.

то произведенiе этихъ двухъ чиселъ, возведенныхъ соотвѣтственно одно въ m-ю, другое въ n-ю степень, меньше $m+n$-й степени ариѳметическаго средняго.

Отъ условiя, чтобы ариѳметическое среднее равнялось 1, можно освободиться. Получаемъ тогда слѣдующую теорему:

Пусть a, b будутъ величины положительныя и различныя между собой, m, n — числа положительныя цѣлыя, либо рацiональныя, либо иррацiональныя. Тогда

$$a^m b^n < \left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Дѣйствительно, величины a и b можно выразить черезъ ариѳметическое среднее $\frac{ma+nb}{m+n}$ и разность $a-b$, а именно:

$$a = \frac{ma+nb}{m+n}\left[1+\frac{1}{m}\,\frac{mn(a-b)}{ma+nb}\right], \qquad b = \frac{ma+nb}{m+n}\left[1-\frac{1}{n}\,\frac{mn(a-b)}{ma+nb}\right].$$

Возвысивъ эти тождества соотвѣтственно въ степени m и n, перемножимъ ихъ и, на основанiи послѣдней леммы, получимъ доказательство нашей теоремы.

Теорема. Пусть a, b, c будутъ величины положительныя, m, n, p числа положительныя цѣлыя, либо рацiональныя, либо иррацiональныя; пусть далѣе система равенствъ $a=b=c$ не имѣетъ мѣста. Тогда

$$a^m b^n c^p < \left(\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}\right)^{m+n+p}.$$

На основанiи предыдущей теоремы имѣемъ:

$$a^m b^n < \left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n} \tag{1}$$

и далѣе

$$\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n}\cdot c^p < \left(\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}\right)^{m+n+p}. \tag{2}$$

Изъ сопоставленiя формулъ (1) и (2) получается доказательство нашей теоремы.

Въ одной изъ формулъ (1) и (2) знакъ $<$ можетъ быть замѣненъ знакомъ равенства, напримѣръ, если $a=b$; но въ обѣихъ формулахъ одновременно этого случиться не можетъ.

Такимъ же образомъ ведется доказательство для большаго числа величинъ.

Приложенiя.

Пусть m и n будутъ числа положительныя. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot 1^n$$

и, слѣдовательно,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot 1^n < \left(\frac{m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)+n\cdot 1}{m+n}\right)^{m+n} = \left(1+\frac{1}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Значеніе выраженія $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, при положительномъ m, возрастаетъ, слѣдовательно, съ возрастаніемъ m, могущаго принимать значенія цѣлыя, дробныя или ирраціональныя.

(Доказательство этого предложенія встрѣчающееся у Серре (Serret) и въ множествѣ другихъ курсовъ дифференціальнаго исчисленія, основано на разложеніи бинома $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, вѣрно только для цѣлаго m, и болѣе сложно, чѣмъ приведенное*).

Аналогичнымъ образомъ получаемъ:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m \cdot 1^n < \left(\frac{m-1+n}{m+n}\right)^{m+n} = \left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{m+n},$$

и далѣе, раздѣливъ 1 на обѣ части неравенства:

$$\left(\frac{m}{m-1}\right)^m > \left(\frac{m+n}{m+n-1}\right)^{m+n}.$$

Т. е. функція $\left(\frac{m}{m-1}\right)^m$ или $\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$ или $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ убываетъ при m положительномъ и возрастающемъ. Но такъ какъ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1,$$

и, слѣдовательно,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

то получаемъ, что значеніе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ при любомъ значеніи m меньше значенія $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ при любомъ томъ же самомъ или другомъ значеніи m.

---

*) Конечно, нельзя согласиться съ тѣмъ, что обычныя доказательства справедливы только для цѣлыхъ значеній m; они разсматриваютъ сначала случай, когда m есть цѣлое число, а затѣмъ распространяютъ предложеніе на дробныя и ирраціональныя значенія чиселъ m.

Ред.

Обозначивъ верхній предѣлъ значеній $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ и нижній предѣлъ значеній $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ черезъ e, получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

при m вещественномъ и положительномъ.

Выводъ формулы наивыгоднѣйшаго соединенія группъ элементовъ.

В. Рюмина.

Въ № 627 „Вѣстника“ г. В. Дудецкій указываетъ, что въ учебникахъ физики, принятыхъ въ среднихъ школахъ, нѣтъ вывода формулы наивыгоднѣйшаго группового соединенія элементовъ. Замѣчаніе его справедливо лишь для средне-учебныхъ заведеній общеобразовательнаго типа, въ среднихъ же техническихъ школахъ этотъ выводъ обычно сообщается учащимся, хотя и въ нѣсколько иномъ (на мой личный взглядъ, болѣе наглядномъ) видѣ *). Привожу этотъ выводъ:

Обозначимъ черезъ e электровозбудительную силу каждаго элемента, черезъ m — число элементовъ въ группѣ, черезъ n — число группъ. Тогда общее число элементовъ $N = m.n$. Обозначимъ еще внутреннее сопротивленіе каждаго элемента черезъ r, а внѣшнее черезъ R. Сила тока будетъ равна

$$I = \frac{Ne}{nr + mR} = \frac{Ne}{mR + \frac{N}{m}r}.$$

Найдемъ максимальное значеніе силы тока, т. е. наивыгоднѣйшее соединеніе элементовъ.

Преобразуемъ знаменатель выраженія:

$$mR + \frac{N}{m}r = \sqrt{\left(mR + \frac{N}{m}r\right)^2} = \sqrt{m^2R^2 + 2NRr + \frac{N^2r^2}{m^2}} =$$

$$= \sqrt{4NRr + m^2R^2 - 2NRr + \frac{N^2r^2}{m^2}} = \sqrt{4NRr + \left(mR - \frac{Nr}{m}\right)^2}.$$

---

*) См., напримѣръ, мой учебникъ — „Ученіе о магнитизмѣ и электричествѣ въ общедоступномъ изложеніи“, изд. 2-ое.

Минимальное значеніе знаменателя, а, слѣдовательно, максимальное значеніе дроби $Imnx = \frac{Ne}{2\sqrt{NRr}}$, когда $mR - \frac{Nr}{m} = 0$, т. е. когда $mR = \frac{N}{m} \cdot r$ или $R = \frac{Nr}{m^2} = \frac{mnr}{m^2} = \frac{n}{m} \cdot r$, сумма внутренняго сопротивленія батареи равна внѣшнему.

Выводъ этотъ, примѣняемый многими иностранными авторами элементарныхъ учебниковъ, вполнѣ доступенъ любому гимназисту и не требуетъ отъ нихъ знанія такого страшнаго слова, какъ „функція“ *).

Геометрическіе софизмы.

Въ журналѣ „Wektor“ напечатаны слѣдующіе 4 софизма. Хотя не всѣ они новы (идея всѣхъ софизмовъ, въ сущности сводится къ очень небольшой категоріи погрѣшностей) считаемъ небезинтереснымъ ихъ здѣсь воспроизвести въ качествѣ упражненія для юныхъ читателей.

1. Если въ четырехугольникѣ $ABCD$ противоположныя стороны AB и CD равны между собою, то двѣ другія стороны—параллельны.

Пусть I и K — середины сторонъ AD и BC; возставимъ въ нихъ перпендикуляры къ AD и BC; эти перпендикуляры пересѣкутся въ точкѣ O. Соединяя O съ вершинами четырехугольника, получимъ треугольники $AOB \equiv COD$. Поэтому $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, а такъ какъ $\triangle IOA \equiv \triangle IOD$; $\triangle KOB \equiv \triangle KOC$, поэтому $\sphericalangle IOA + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOK = 180°$, то линія IOK — прямая, а слѣдовательно, AD параллельно BC.

2. Изъ каждой точки P, не лежащей на данной плоскости α можно опустить безчисленное множество перпендикуляровъ къ послѣдней.

Пусть A и B двѣ произвольныя точки на плоскости α. На PA и PB какъ на діаметрахъ опишемъ сферы, пересѣкающія плоскость α по двумъ окружностямъ, имѣющимъ точки пересѣченія C и D. Углы PCA, PCB, PDA, PDB — прямые; принимая это во вниманіе, найдемъ, что каждая изъ прямыхъ PC и PD перпендикулярна къ двумъ пересѣкающимся на плоскости α прямымъ, а поэтому перпендикулярна къ этой плоскости.

3. Существуетъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ сумма двухъ равныхъ сторонъ, равна основанію.

Данъ равнобедренный трехугольникъ ABC, въ которомъ $AB = BC$; допустимъ, что основаніе $AC > AB$. Пусть M_1 — середина основанія. На равныхъ

*) Слова этого уже никто страшнымъ не считаетъ. Приведенное авторомъ доказательство дѣйствительно приводитъ вопросъ къ нахожденію минимума суммы двухъ слагаемыхъ, произведеніе которыхъ остается постояннымъ.

Ред.

сторонахъ отложимъ въ направленіи къ вершинѣ B отрѣзки $AA_1 = CC_1 = AM_1$; соединяя точки A_1 и C_1, получимъ треугольникъ A_1BC_1, подобный ABC. Если M_2 — середина основанія A_1C_1, отложимъ, по предыдущему $B_1A_2 = C_1C_2 = A_1M_2$ и т. д. Такъ какъ $AM_1 > 1/2\,AB$, $A_1M_2 > 1/2\,A_1B$, то поступая такимъ образомъ, мы должны будемъ исчерпать всю сторону AB; очевидно, что одновременно будетъ исчерпана и сторона CB, а потому существуетъ равнобедренный треугольникъ A_nBC_n, въ которомъ справедливо $A_nB + BC_n = A_nC_n$.

4. На плоскости — нѣтъ пересѣкающихся прямыхъ.

Возьмемъ на двухъ произвольныхъ прямыхъ произвольные точки A и B. Пусть M_1 — середина отрѣзка AB и точка C — пересѣченіе нашихъ прямыхъ. Отложимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ по направленію къ C отрѣзки $AA_1 = BB_1 = AM_1$ и пусть M_2 — середина отрѣзка A_1B_1 и т. д. Постоянно сохраняется равенство: $AB = AA_1 + BB_1$; $A_1B_1 = A_1A_2 + B_1B_2$ и т. д. поэтому, если прямыя дѣйствительно пересѣкаются въ C, то въ послѣднемъ трехугольникѣ мы имѣли бы $A_nB_n = A_nC + CB_n$, что — невозможно.

Третій Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики

Несмотря на неблагопріятное для спокойной работы время, Распорядительный Комитетъ, подготовляющій Третій Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики, усердно разрабатывая планъ предстоящаго съѣзда. Вопросы, подлежащіе обсужденію на 3-мъ Съѣздѣ, предположено разбить на слѣдующіе группы.

I. Общія основанія постановки курса математики въ средней школѣ.
II. Конструкція разныхъ отдѣловъ математики въ средней школѣ.
III. Подготовка преподавателей.
IV. Повѣрка знаній (репетиціи, переводные, выпускные и конкурсные экзамены).
V. Общіе и частные вопросы преподаванія математики.

Вопросы.

I. Общія основанія постановки курса математики въ средней школѣ.

1. Сравнительная постановка курса математики у насъ и въ другихъ странахъ.
2. Раздѣленіе курса общеобразовательной средней школы на двѣ ступени: а) на ступень, общую для всѣхъ учащихся и б) на вторую ступень, „допускающую спеціализацію приноровленную къ индивидуальнымъ способностямъ учащихся и удовлетворяющую требованіямъ высшей школы *)“.

II. Конструкція разныхъ отдѣловъ математики въ средней школѣ.

Элементы анализа и аналитической геометріи въ средней школѣ.

3. Возможныя конструкціи курса анализа, въ виду признанія резолюціей 3-ей Второго Съѣзда необходимости введенія даннаго курса въ среднюю школу всѣхъ типовъ.

4. Подготовка учащихся среднихъ классовъ къ курсу анализа.

5. Возможныя конструкціи курса аналитической геометріи, въ виду признанія резолюціей... и т. д. (см. вопросъ 3-й).

Ариѳметика.

6. Требованія по предмету ариѳметики, предъявляемыя къ дѣтямъ, поступающимъ въ первый классъ средней школы.

7. Составъ курса ариѳметики въ младшихъ классахъ, въ частности вопросъ о пропедевтическомъ курсѣ дробей и вопросъ о рѣшеніи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ и численными коэффиціентами.

8. Вопросы ариѳметическаго содержанія въ курсѣ среднихъ классовъ.

9. Дополнительно-повторительный курсъ ариѳметики въ одномъ изъ старшихъ классовъ.

Алгебра.

10. Вопросъ о тождественныхъ преобразованіяхъ въ курсѣ алгебры.

11. Вопросъ о равносильности уравненій.

12. Вопросъ о возможномъ сокращеніи курса алгебры (неопредѣленныя уравненія; кубическій корень; непрерывныя дроби и пр.).

13. Функціональныя зависимости въ курсѣ алгебры. Графики.

14. Ученіе объ ирраціональномъ числѣ въ средней школѣ.

15. Введеніе въ курсъ алгебры элементовъ исчисленія вѣроятностей въ связи съ комбинаторнымъ анализомъ.

Геометрія.

16. Необходимо ли раздѣленіе курса геометріи въ средней школѣ на циклы и вопросъ о числѣ цикловъ?

1-ый циклъ (пропедевтическій, начальный курсъ).

17. Постановка перваго цикла геометріи въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ и достигаемые этимъ курсомъ результаты.

18. Опредѣленія и разсужденія доказательнаго характера въ первомъ циклѣ геометріи.

19. Развитіе пространственныхъ представленій въ первомъ циклѣ.

2-ой циклъ.

20. Задачи и цѣли 2-го (и 3-го) цикловъ курса элементарной геометріи.

21. Вопросъ о сокращеніи курса Евклида, объ элементахъ геометріи начертательной и проективной.

22. Вопросъ о сліяніи планиметріи съ стереометріей (фюзіонизмъ).

23. Вопросъ о функціональной точкѣ зрѣнія въ геометріи.

24. При наличности курса анализа въ какую форму должно вылиться въ систематическомъ курсѣ геометріи ученіе о вычисленіи тѣхъ геометрическихъ протяженій, гдѣ въ настоящее время пользуются методомъ предѣловъ? *).

25. Какое значеніе можетъ имѣть ознакомленіе учащихся съ логической возможностью геометріи Лобачевскаго?

---

*) Опредѣленные интегралы.

Тригонометрія.

26. Необходимо ли раздѣленіе тригонометріи на два цикла (по типу реальныхъ училищъ)?

III. Подготовка преподавателей.

27. Необходимо всесторонне выяснить вопросъ о соотношеніи между математическимъ и педагогическимъ образованіемъ преподавателя математики.

IV. 28. Повѣрка знаній (репетиціи, переводные, выпускные и конкурсные экзамены).

V. Общіе и частные вопросы преподаванія математики.

29. О соотношеніи между логическимъ и интуитивнымъ элементами въ курсѣ математики.

30. Эстетическій элементъ въ математикѣ.

31. Роль наглядныхъ пособій на различныхъ ступеняхъ обученія математикѣ. „Лабораторный“ методъ при обученіи математикѣ.

32. Что дала экспериментальная психологія для обученія математикѣ?

33. Самостоятельныя занятія учащихся (чтеніе книгъ математическаго содержанія, рефераты, практическія занятія и пр.).

34. Содержаніе задачниковъ (см. резолюцію 3-ью Перваго Съѣзда: въ какой мѣрѣ въ нихъ „должны входить данныя изъ области физики, механики, космографіи . . .“).

Къ организаціи 3-го Съѣзда.

А. Учрежденіе научной секціи въ добавленіе къ тѣмъ секціямъ, которыя были на 1-омъ и 2-омъ Съѣздахъ.

Б. Исполненіе резолюціи V-ой 2-го Съѣзда — „Постоянное Бюро Съѣздовъ Преподавателей Математики“.

В. Докладъ о дѣятельности Международной Коммиссіи.

Г. Докладъ о номографіи специіалиста по математической статистикѣ (научная секція).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

С. И. ШохоръТроцкій. *Методика ариѳметики для учителей начальныхъ школъ.* Въ 2-хъ частяхъ. Изд. 8-е. Часть І-ая. «Ариѳметика изустныхъ вычисленій». Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Стр. 316. Ц. 1 р. 10 к.

Его же. *Новый ариѳметическій задачникъ для учителей начальныхъ школъ.* Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Стр. XX + 544. Ц. 1 р. 50 к.

А. К. Самко, директоръ Евпаторійской гимназіи. *Геометрія.* Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Евпаторія, 1914. Стр. 162. Ц. 1 р. 10 к.

С. Будаевскій. *Прямолинейная тригонометрія.* Полный систематическій курсъ. Примѣры и задачи. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Петроградъ, 1914. Стр. VIII + 102. Ц. 1 р.

Его же. *Ариѳметика.* Теоретическій курсъ и приложенія. Изд. V-ое Т-ва И. Д. Сытина. Петроградъ, 1914 .Стр. VIII + 187.

К. Лосевъ. *Краткій обзоръ химическихъ явленій.* Пособіе по курсу физики средн. учебн. завед. съ 11 рис. Ст. Урюпинская, 1915 Стр. 61. Ц. 40 к.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 251 (6 сер.). Всѣ простыя числа, не превосходящія простого числа p, разбиты на двѣ группы $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ и $\delta, \varepsilon, \ldots, \nu$ такъ, что число r, опредѣляемое равенствомъ

$$r = \alpha \cdot \beta \ldots \gamma - \delta \cdot \varepsilon \ldots \nu$$

заключается между 1 и p^2. Доказать, что r — простое число.

М. Огородовъ (Самара).

№ 252 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^5 = 27x^3 - 54x^2 + 100x + 600.$$

N. (Саратовъ).

№ 253 (6 сер.). Найти наибольшее значеніе дроби

$$\frac{4n^2 + 100n + 1}{n^2 + n + 1},$$

котораго она достигаетъ при n цѣломъ и положительномъ.

Н. С. (Одесса).

№ 254 (6 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

при неограниченномъ приближеніи x къ нулю.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 208 (6 сер.). *Доказать, что можно построить безчисленное множество треугольниковъ* xyz, *обладающихъ слѣдующими свойствами: 1) стороны каждаго изъ этихъ треугольниковъ параллельны и пропорціональны медіанамъ даннаго треугольника* ABC, *и 2) медіаны каждаго изъ нихъ параллельны и пропорціональны сторонамъ треугольника* ABC. *Доказать, что если стороны треугольника* xyz, *имѣющаго указанныя свойства, равны медіанамъ треугольника* ABC, *то медіаны треугольника* xyz *равны соотвѣтственно* $\frac{3}{4}$ *сторонъ треугольника* ABC, *а площадь такого треугольника* xyz *равна* $\frac{3}{4}$ *площади треугольника* ABC. *Вывести отсюда, что площадь* Δ *всякаго треугольника* ABC *выражается черезъ его медіаны формулой* $\Delta=\frac{4}{3}\sqrt{p_m(p_m-m_a)(p_m-m_b)(p_m-m_c)}$, *гдѣ* p_m — *полусумма медіанъ.*

Проведемъ медіаны AM и BN треугольника ABC и построимъ на медіанѣ BN какъ, на основаніи, параллелограммъ $BNAP$. Діагональ NP этого параллелограмма должна пройти черезъ середину Q другой его діагонали AB, т. е. черезъ основаніе Q медіаны CQ. Сторона BP параллелограмма $BNAP$ равна и параллельна отрѣзку AN, равному половинѣ AC, а потому отрѣзокъ BP равенъ и параллеленъ отрѣзку CN; поэтому діагональ NP разсматриваемаго параллелограмма равна и параллельна сторонѣ CB даннаго треугольника, а половина ея QP равна и параллельна половинѣ CM этой стороны, откуда слѣдуетъ, что прямая MP равна медіанѣ CQ треугольника ABC. Итакъ, стороны треугольника AMP равны медіанамъ треугольника ABC; дѣйствительно, сторона AM треугольника AMP есть медіана, проведенная изъ вершины A, сторона AP равна медіанѣ BN, какъ противоположная сторона параллелограмма $BNAP$, сторона MP, какъ выше доказано, равна медіанѣ CQ. Назовемъ черезъ a', m', p' соотвѣтственно точки пересѣченія паръ прямыхъ AB и MP, MQ и AP, PQ и AM. Отрѣзокъ PQ равенъ и параллеленъ отрѣзку MC, равному половинѣ BC; поэтому отрѣзокъ PQ равенъ и параллеленъ отрѣзку BM, а потому фигура $PBMQ$ есть параллелограмъ, діагонали котораго дѣлятся въ точкѣ a' пополамъ. Слѣдовательно, Aa' есть медіана треугольника AMP, и такъ какъ $BQ=\frac{AB}{2}$, то $Qa'=\frac{BQ}{2}=\frac{AB}{4}$, откуда $Aa'=AQ+Qa'=\frac{3}{4}AB$. Разсматривая исходящія изъ точки A прямыя AB, AM, AC, пересѣченныя параллельными прямыми PN и BC, находимъ, что $Ap'=p'M$, — откуда слѣдуетъ, что Pp' есть также медіана треугольника AMP, — и что $Qp'=\frac{BM}{2}=\frac{BC}{4}$, откуда $Pp'=PQ+Qp'=BM+Qp'=\frac{BC}{2}+\frac{BC}{4}=\frac{3}{4}BC$. Наконецъ, изъ параллельности прямыхъ MQ и AC слѣдуетъ, что $Pm'=m'A$ и что $Mm'=MQ+Qm'=$ $=\frac{AC}{2}+\frac{AC}{4}=\frac{3}{4}AC$. Итакъ, прямыя Aa', Pp', Mm' служатъ медіанами треугольника AMP и равны соосвѣтственно $\frac{3}{4}$ сторонъ треугольника ABC, при чемъ первая изъ нихъ совпадаетъ по направленію со стороною AB, а двѣ другія медіаны параллельны соотвѣтственно сторонамъ BC и AC; кромѣ того, доказано, что каждая изъ медіанъ треугольника AMP равна $\frac{3}{4}$ соотвѣтствующей стороны треугольника, съ которой она совпадаетъ по направленію; доказано также, что стороны AM, MP, PA треугольника AMP равны соотвѣтственнно медіанамъ AM, CQ и BN треугольника ABC, при чемъ первая изъ нихъ совпадаетъ съ медіаной AM, а двѣ другія стороны параллельны соотвѣтствующимъ медіанамъ треугольника ABC. Такимъ образомъ, если треугольникъ AMP перенести параллельно въ какое нибудь новое положеніе на плоскости, то стороны и медіаны его удовлетворяютъ всѣмъ требованіямъ, изложеннымъ во второй части задачи, а если, не мѣняя направленія сторонъ, измѣнить ихъ всѣ въ одномъ и томъ же отношеніи (напримѣръ, отсѣкая отъ треугольника AMP, подверженнаго предварительно параллельному перенесенію, новый треугольникъ прямой, параллельной одной изъ его сторонъ), то получимъ одинъ изъ безконечнаго множества треугольниковъ, удовлетворяющихъ условіямъ, указаннымъ въ первой части задачи. Наконецъ, изъ выведенныхъ выше равенствъ $Pa' = a'M$ и $Aa' = \frac{3}{4} AB$ вытекаютъ слѣдующія соотношенія между площадями треугольниковъ APM, $Aa'M$, ABM и ABC:

$$\Delta APM = 2\Delta Aa'M = 2 \cdot \frac{3}{4} \Delta ABM = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta ABC}{2} = \frac{3}{4} \Delta ABC,$$

откуда

$$\Delta ABC = \frac{4}{3} \Delta APM = \frac{4}{3} \sqrt{p_m (p_m - m_a)(p_m - m_b)(p_m - m_c)}\,.$$

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *М. Бабинъ* (Могилевъ); *Н. К-новъ* (Петроградъ).

№ 213 (6 сер.). *Найти двузначное число, кубъ суммы цифръ котораго равенъ его квадрату.*

Называя искомое число черезъ x, а сумму его цифръ черезъ s, по условію имѣемъ, что $s^3 = x^2$, откуда

$$\left(\frac{s}{x}\right)^3 = \frac{1}{x}, \quad x = \left(\frac{x}{s}\right)^3.$$

Итакъ x есть кубъ раціональнаго числа $\frac{x}{s}$, а потому, какъ число цѣлое, x есть точный кубъ, будучи въ то же время, по условію, числомъ двузначнымъ. Испытывая два единственныхъ двузначныхъ точныхъ куба 27 и 64 и замѣчая, что $(6+4)^3 \neq 64^2$ и что $(2+7)^3 = 27^2 = 729$, мы видимъ, что искомое число равно 27. Если бы разрѣшить себѣ однозначныя числа записывать искусственно въ видѣ двузначныхъ съ цифрой десятковъ, равной нулю, то изъ однозначныхъ чиселъ давали бы отвѣтъ на вопросъ лишь 0 и 1.

А. Иткинъ (Петроградъ); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *N. N.* (Тифлисъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *Гукъ*; *Б. Смирновъ* (Юзовка, Екатеринославской губ.); *Н. К-новъ* (Петроградъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.