Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи III-го семестра №3.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 627.

Содержаніе: Два случая изъ обобщенной теоремы Ферма. *М. Бритмана.* — Радіоэлементы и періодическая система. *Проф. К. Фаянса.* (Окончаніе). — Условіе наивыгоднѣйшаго соединенія гальваническихъ элементовъ въ группы при данномъ внѣшнемъ сопротивленіи. *В. Дудецкаго.* — Библіографія. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. «Русскій астрономическій календарь». — Задачи №№ 243 — 246 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. Отдѣлъ I. №№ 196, 204, 205 и 206 (6 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

Два случая изъ обобщенной теоремы Ферма.

М. Бритмана.

Подъ обобщенной теоремой Ферма разумѣютъ теорему: $a^{\varphi(p)}-1$ дѣлится на p, если a и p числа взаимно простыя, а $\varphi(p)$ означаетъ число всѣхъ чиселъ взаимно простыхъ съ p и не превосходящихъ p „*).

Изъ этой теоремы вытекаютъ нижеслѣдующія два слѣдствія, причемъ второе, собственно говоря, вытекаетъ изъ частнаго случая этой теоремы, именно изъ случая p простого.

I.

Теорема. Если a, b и p числа попарно взаимно простыя и $\varphi(p)=2^k y$, гдѣ y есть нечетное число, то, при l цѣломъ и неменьшемъ k, числа $a^{2^l}+b^{2^l}$ и p не могутъ имѣть общихъ дѣлителей, кромѣ 2 и 1.

Доказательство. Разность $a^{m\varphi(p)}-1$ при всякомъ цѣломъ и положительномъ m дѣлится на $a^{\varphi(p)}-1$, а послѣдняя разность, по

*) Правильнѣе называютъ это предложеніе теоремой Эйлера.

обобщенной теоремѣ Ферма, дѣлится на p; слѣдовательно, $a^{m\varphi(p)}-1$ дѣлится на p. Другая разность $b^{m\varphi(p)}-1$ также дѣлится на p. Изъ этого слѣдуетъ, что $a^{m\varphi(p)}-b^{m\varphi(p)}$ дѣлится на p.

Положимъ $m=2^{l-k}$, гдѣ l цѣлое число $\geqq k$. Тогда, принявъ во вниманіе равенство $\varphi(p)=2^k y$, будемъ имѣть, что разность $a^{2^l y}-b^{2^l y}$ дѣлится на p. Раздѣлимъ эту разность на сумму $a^{2^l}+b^{2^l}$. Остатокъ отъ этого дѣленія найдемъ, подставивъ въ дѣлимомъ $-b^{2^l}$ вмѣсто a^{2^l}. Обозначивъ частное черезъ Q, получимъ:

$$a^{2^l y}-b^{2^l y}=(a^{2^l}+b^{2^l})\,Q-2b^{2^l y}.$$

Если бы $a^{2^l}+b^{2^l}$ и p имѣли общаго дѣлителя $\partial>2$, то при нечетномъ ∂ число $b^{2^l y}$ дѣлилось бы на ∂ и потому числа p и $b^{2^l y}$ имѣли бы общаго дѣлителя ∂, чего не должно быть, такъ какъ, согласно условію, числа p и b взаимно простыя. При ∂ четномъ и большемъ 2 мы нашли бы, что $b^{2^l y}$ дѣлится на $\frac{\partial}{2}$. Въ этомъ случаѣ p и $b^{2^l y}$ имѣли бы общимъ дѣлителемъ число $\frac{\partial}{2}$, которое >1.

Ясно, что числа $a^{2^l}+b^{2^l}$ и p не могутъ имѣть общихъ дѣлителей отличныхъ отъ 2 и 1.

Примѣчаніе. Теорема остается вѣрной при замѣнѣ a черезъ a^{2^r} и b черезъ b^{2^s}, гдѣ r и s цѣлыя положительныя числа. Можно также положить $b=1$.

Изъ этой теоремы вытекаетъ нижеслѣдующее предложеніе:

„Простое число вида $4n+3$ не можетъ быть представлено въ видѣ суммы квадратовъ двухъ чиселъ, взаимно простыхъ, и не можетъ быть дѣлителемъ такой суммы“.

Для доказательства этого предложенія надо въ предыдущей теоремѣ положить $k=1$, потому что $\varphi(4n+3)=4n+2=2(2n+1)$, и $l=1$.

О дѣлителяхъ выраженія $\frac{x^n-y^n}{x-y}$.

Теорема I. Если $\frac{x^n-y^n}{x-y}$, гдѣ n число простое, а x и y цѣлыя взаимно простыя числа, дѣлится на n, то и $x-y$ также дѣлится на n и наоборотъ.

Прямая теорема доказывается при помощи тождества

$$x^n-y^n=x^n-x+x-y^n+y-y.$$

Отсюда находимъ:

$$x^n-y^n=x(x^{n-1}-1)-y(y^{n-1}-1)+(x-y).$$

Для доказательства обратной теоремы воспользуемся тождествомъ

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}=(x-y)\,Q+ny^{n-1},$$

гдѣ Q и ny^{n-1} суть частное и остатокъ отъ дѣленія многочлена $x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$ на $x-y$.

Примѣчаніе. Теорему I можно доказать еще слѣдующимъ способомъ.

Положивъ $x-y=a$, находимъ:

$$x=a+y \quad \text{и} \quad \frac{x^n-y^n}{x-y}=\frac{(a+y)^n-y^n}{a}=$$

$$=a^{n-1}+na^{n-2}y+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-3}y+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}ay^{n-2}+ny^{n-1}. \tag{1}$$

Изъ этого равенства легко вывести разсматриваемую теорему.

Пользуясь равенствомъ (1), легко доказать слѣдующія 2 теоремы:

Теорема II. Число $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ не дѣлится на n^2, если x и y числа взаимно простыя.

Теорема III. Неравный числу n дѣлитель $x-y$ не можетъ быть дѣлителемъ выраженія $\frac{x^n-y^n}{x-y}$, если числа x и y взаимно простыя, и обратно.

Перейдемъ теперь къ доказательству второго слѣдствія изъ теоремы Ферма.

Теорема IV. Отличные отъ n простые дѣлители числа $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ при x и y взаимно простыхъ имѣютъ видъ $2kn+1$.

Пусть m обозначаетъ простой дѣлитель числа $\frac{x^n-y^n}{x-y}\cdot$ Предположимъ, что $m-1$ не дѣлится на простое число n. Въ этомъ случаѣ $m-1$ и n взаимно простыя числа и потому можно найти два цѣлыхъ положительныхъ числа p и q, удовлетворяющихъ условію $pn-q(m-1)=1$. Далѣе имѣемъ:

$$x^{pn}-y^{pn}=x^{q(m-1)+1}-y^{q(m-1)+1}=x^{q(m-1)+1}-x+x-y^{q(m-1)+1}+y-y=$$

$$=x\,[x^{q(m-1)}-1]-y\,[y^{q(m-1)}-1]+(x-y). \tag{2}$$

Выраженіе $x^{pn}-y^{pn}$ дѣлится на x^n-y^n и, слѣдовательно, на $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ и на m. Разность $x^{q(m-1)}-1$ дѣлится на $x^{m-1}-1$. Такъ какъ $\varphi(m)=m-1$, потому что m число простое, и такъ какъ x на m не дѣлится, то разность $x^{m-1}-1=x^{\varphi(m)}-1$ по теоремѣ Ферма, дѣлится на m. Слѣдовательно, разность $x^{q(m-1)}-1$ также дѣлится на m. Этимъ же способомъ можно доказать, что и $y^{q(m-1)}-1$ дѣлится на m. Изъ равенства (2) заключаемъ, что $x-y$ дѣлится на m.

Полученный результатъ невозможенъ, такъ какъ, по теоремѣ III, число m не можетъ быть дѣлителемъ разности $x-y$.

Отсюда заключаемъ, что сдѣланное нами предположенiе о томъ, что $m-1$ не дѣлится на n, невѣрно. Значитъ, $m-1$ дѣлится n. Обозначивъ это частное, которое есть четное число, такъ какъ m и n числа нечетныя, черезъ $2k$, получимъ равенство $m-1=2kn$, откуда $m=2kn+1$.

Замѣчанiе. Предыдущiя теоремы справедливы и при замѣнѣ y черезъ $-y$.

Примѣръ. При $n=7$, $x=3$ и $y=2$ выраженiе

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=\frac{3^7-2^7}{3-2}=2187-128=2059=29\,.\,71,$$

при чемъ 29 простое число и равняется $7\,.\,4+1$, а 71 простое число, равное $7\,.\,10+1$.

1-ое слѣдствiе изъ теоремы IV. Только что доказанная теорема даетъ возможность легко доказать, что „число простыхъ чиселъ вида $2kn+1$, гдѣ n простое число, безконечно".

Теорема эта будетъ доказана, если мы докажемъ, что имѣя нѣсколько простыхъ чиселъ вида $2kn+1$, можно найти еще одно простое число такого же вида и неравное никакому изъ данныхъ простыхъ чиселъ.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_m$ простыя числа вида $2kn+1$. Положимъ $x=z_1 z_2 \ldots z_m$, а y приравняемъ какому нибудь цѣлому числу, не дѣлящемуся ни на одно изъ чиселъ $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Проще всего положить $y=2$. Въ этомъ случаѣ $x-y$ не дѣлится на n и всѣ простые множители выраженiя $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ будутъ вида $2kn+1$. Ни одинъ изъ этихъ простыхъ множителей не можетъ равняться какому либо изъ чиселъ $z_1, z_2, \ldots, z_m$, потому что при x и y взаимно простыхъ выраженiе $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$ не можетъ имѣть общихъ множителей ни съ x, ни съ y.

Требуемое доказано.

2-ое слѣдствiе изъ теоремы IV. Разсмотримъ число, изображенное при помощи только одной цифры, единицы, написанной n разъ, гдѣ n число простое >3. Докажемъ, что всѣ простые дѣлители этого числа имѣютъ видъ $2kn+1$.

Число $\overbrace{11\ldots1}^{n\text{ цифръ}}=10^{n-1}+10^{n-2}\,.\,1+10^{n-3}\,.\,1^2+\cdots+10^2\,.\,1^{n-3}+$ $+10\,.\,1^{n-2}+1^{n-1}=\frac{10^n-1}{10-1}\cdot$ Такъ $10-1$ на n не дѣлится, потому что

n простое число > 3, то простые дѣлители числа $\overbrace{111\ldots1}^{n\text{ цифръ}} = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$ имѣютъ, по теоремѣ IV, видъ $2kn + 1$.

Для примѣра разсмотримъ числа 11111 и 1111111.

Число $11111 = 41 \,.\, 271$, при чемъ 41 и 271 числа простыя и, кромѣ того, $41 = 2 \,.\, 4 \,.\, 5 + 1$ и $271 = 2 \,.\, 27 \,.\, 5 + 1$.

Число $1111111 = 239 \,.\, 4649$, гдѣ 239 и 4649 числа простыя и, кромѣ того, $239 = 2 \,.\, 17 \,.\, 7 + 1$ и $4649 = 2 \,.\, 332 \,.\, 7 + 1$.

3-ье слѣдствіе изъ теоремы IV. При x и y взаимно простыхъ и x не дѣлящемся на 3 всѣ нечетные простые дѣлители суммы $x^2 + 3y^2$ имѣютъ видъ $6k + 1$.

Положимъ $x + y = u$ и $y - x = t$. Тогда будемъ имѣть:

$$y = \frac{u + t}{2}, \quad x = \frac{u - t}{2} \quad \text{и} \quad x^2 + 3y^2 = u^2 + ut + t^2 = \frac{u^3 - t^3}{u - t}.$$

Пользуясь выраженіями для x и y, легко доказать способомъ отъ противнаго, что, если одно изъ взаимно простыхъ чиселъ x и y четное, то u и t числа взаимно простыя. Въ этомъ случаѣ, такъ какъ $u - t = 2x$ не дѣлится на 3, выраженіе $x^2 + 3y^2 = \dfrac{u^3 - t^3}{u - t}$ имѣетъ простыхъ дѣлителей только нечетныхъ и при томъ вида $2k \,.\, 3 + 1$.

Если оба числа x и y нечетныя, то, какъ легко видѣть, u и t оба четныя, при чемъ $\dfrac{u}{2}$ и $\dfrac{t}{2}$ взаимно простыя, что легко доказать по способу отъ противнаго. Положивъ $\dfrac{u}{2} = p$ и $\dfrac{t}{2} = q$, будемъ имѣть

$$u = 2p, \quad t = 2q \quad \text{и} \quad x^2 + 3y^2 = 4\,(p^2 + pq + q^2) = 4 \cdot \frac{p^3 - q^3}{p - q}.$$

Такъ какъ p и q числа взаимно простыя и $p - q$ не дѣлится на 3, то всѣ нечетные простые дѣлители суммы $x^2 + 3y^2$ имѣютъ видъ $2k \,.\, 3 + 1$

III.

Помѣщенная въ I части этой статьи теорема допускаетъ нѣкоторое упрощеніе.

„Пусть $p = c^r \,.\, \partial^s \,.\, e^t \ldots h^u$, гдѣ $c, \partial, e, \ldots, h$ различныя простыя числа, большія 1, а $r, s, t, \ldots, u$ числа цѣлыя и положительныя. Полагая $c - 1 = 2^{k_1} \,.\, y_1$, $\partial - 1 = 2^{k_2} \,.\, y_2$, $e - 1 = 2^{k_3} \,.\, y_3, \ldots$, $h - 1 = 2^{k_m} \,.\, y_m$, гдѣ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ числа нечетныя (цѣлыя), а $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ числа цѣлыя и положительныя (одно изъ нихъ можетъ быть и нулемъ), выберемъ изъ чиселъ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ наибольшее и обозначимъ его черезъ k. Если a и b числа взаимно простыя, то при l цѣломъ и неменьшемъ k сумма $a^{2^l} + b^{2^l}$ и число p не могутъ имѣть общихъ дѣлителей, кромѣ 2 и 1“.

Чтобы доказать эту теорему, слѣдуетъ только доказать, что $a^{2^l}+b^{2^l}$ не дѣлится ни на одинъ изъ нечетныхъ простыхъ множителей числа p и на 4.

Пусть ∂ есть нечетный простой множитель числа p. Если одно изъ взаимно простыхъ чиселъ a и b дѣлится на ∂, то сумма $a^{2^l}+b^{2^l}$, какъ легко сообразить, на ∂ не дѣлится. Если же ни одно изъ чиселъ a и b на ∂ не дѣлится, то такъ какъ l, будучи не меньше наибольшаго изъ чиселъ $k_1, k_2, \ldots, k_m$, въ то же время, очевидно, не меньше k_2, мы, замѣчая, что $\varphi(\partial)=\partial-1=2^{k_2}.y_2$, можемъ примѣнить теорему, помѣщенную въ I-ой части настоящей статьи, и по ней заключить, что $a^{2^l}+b^{2^l}$ не дѣлится на ∂.

Остается еще доказать, что $a^{2^l}+b^{2^l}$ не дѣлится на 4. Если одно изъ чиселъ a и b четное, то другое обязательно нечетное, такъ какъ a и b числа взаимно простыя. Въ этомъ случаѣ $a^{2^l}+b^{2^l}$ число нечетное и потому на 4 не дѣлится. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда a и b числа нечетныя. Пусть, $a=2q+1$. Тогда

$$a^{2^l}=(2q+1)^{2^l}=[(2q+1)^2]^{2^{l-1}}=[4(q^2+q)+1]^{2^{l-1}}=4\alpha+1.$$

Такъ же можно доказать, что $b^{2^l}=4\beta+1$. Отсюда находимъ, что

$$a^{2^l}+b^{2^l}=4(\alpha+\beta)+2$$

и потому на 4 не дѣлится.

Слѣдуетъ замѣтить, что l не меньше единицы.

Легко сообразить, что по упрощенной теоремѣ числу l можетъ быть дано, вообще говоря, меньшее значенiе, чѣмъ по первоначальной теоремѣ.

Радiоэлементы и перiодическая система.

Профессора К. Фаянса.

(*Окончанiе* *).

7. Законы перемѣщенiй.

Мы видѣли, что отдѣлъ перiодической системы отъ урана до таллiя съ химической точки зрѣнiя можетъ быть совершенно точно согласованъ съ общей системой. Но мы знаемъ объ этомъ отдѣлѣ гораздо больше, чѣмъ объ остальной части системы, такъ какъ мы можемъ точно анализировать его образованiе. При этомъ прежде всего возни-

---

*) См. „Вѣстникъ“, № 626.

каетъ вопросъ о связи между послѣдовательностью элементовъ въ радіоактивныхъ рядахъ и послѣдовательностью ихъ въ горизонтальныхъ рядахъ періодической системы. Еще недавно изслѣдователи были склонны допустить, что превращенія отъ высшихъ атомныхъ вѣсовъ къ низшимъ ведутъ черезъ всѣ группы періодической системы. Но около двухъ лѣтъ тому назадъ Содди указалъ въ своей химіи радіоэлементовъ, что на самомъ дѣлѣ этого нѣтъ. Онъ показалъ, что при многихъ превращеніяхъ α-лучей, у которыхъ къ тому времени былъ извѣстенъ химическій характеръ уже для обоихъ элементовъ, превращеніе ведетъ не къ ближайшей низшей группѣ, но черезъ одну къ слѣдующей; такъ, напримѣръ, отъ торія четвертой группы къ мезоторію второй или отъ торія X второй группы къ эманаціи торія въ нулевой группѣ. Содди показалъ также, что превращенія не всегда сохраняютъ одинаковое направленіе въ системѣ; напримѣръ, превращеніе мезоторія ведетъ сперва къ элементу четвертой группы—радіоторію, и лишь потомъ происходитъ дальнѣйшее паденіе къ нулевой группѣ. Содди, однако, не удалось пролить полный свѣтъ на существующія здѣсь соотношенія.

Въ началѣ 1913 года этой проблемой занялись одновременно Г. ф. Гефеза*) (v. Hevesy), Рёссель**) (Russel) и авторъ настоящей статьи***). Предложенныя рѣшенія, несмотря на свое сходство, отличаются, однако, въ весьма существенныхъ пунктахъ. Правильной оказалась точка зрѣнія автора, къ которой скоро примкнулъ и Содди****), и потому только ее мы изложимъ подробно.

Къ этому времени электрохимическія отношенія элементовъ были уже изучены гораздо подробнѣе, чѣмъ химическія, и незадолго передъ тѣмъ мною было установлено слѣдующее общее предложеніе*****): продуктъ всякаго „превращенія α-лучей“ менѣе благороденъ сравнительно съ прямымъ материнскимъ веществомъ, а продуктъ всякаго „превращенія β-лучей“, напротивъ, благороднѣе, чѣмъ материнское вещество. Исходя изъ этого предложенія и опираясь на извѣстный уже передъ тѣмъ опытный матеріалъ относительно химической природы почти половины радіоэлементовъ, я распространилъ на всѣ „превращенія α-лучей“ правило, высказанное Содди, а именно, что послѣ „превращенія α-лучей“ имѣетъ мѣсто переходъ къ второй низшей группѣ, т. е. влѣво въ горизонтальномъ ряду; къ этому я присоединилъ предложеніе, что послѣ каждаго „превращенія β-лучей“ совершается переходъ къ ближайшей высшей группѣ. На основаніи этихъ двухъ предложеній можно было предсказать химическую природу всѣхъ остальныхъ радіоэлементовъ, не вполнѣ еще изслѣдованныхъ въ этомъ отношеніи, и вывести заключеніе о существованіи новаго элемента, а

*) Physikal. Ztschr. 14, 49 (1913). **) l. c. ***) l. c.

****) Chem. News. 107, 97 (1913).

*****) Диссертація (Habilitationsschrift), Karlsruhe, 1912.

именно урана X. Опубликованными тѣмъ временемъ опытами Флека*) (Fleck), В. Меценера**) (W. Metzener) и моего сотрудника П. Бера***) (P. Beer) были подтверждены всѣ эти предсказанія безъ исключенія; О. Гёрингу (Göhring) и мнѣ****) удалось найти неизвѣстный элементъ X_2. Этотъ элементъ возможно было, согласно предсказанію, отдѣлить отъ урана X; его періодъ полураспада составляетъ лишь 1,15 минуты, и, какъ слѣдовало ожидать, онъ въ химическомъ отношеніи является аналогомъ тантала. Ему принадлежитъ свободное мѣсто въ пятой группѣ послѣдняго горизонтальнаго ряда періодической системы; въ виду этого Гёрингъ и я дали этому элементу особое, не генетическое имя, а именно „бревій" Bv (Brevium).

Эти подтвержденія окончательно доказали всеобщность двухъ изложенныхъ правилъ; послѣднія даютъ также возможность съ большой достовѣрностью судить о химической природѣ элементовъ, которые вслѣдствіе своей кратковѣчности не допускаютъ непосредственнаго изслѣдованія. Слѣдуетъ также замѣтить, что два упомянутыхъ выше безлучистыхъ превращенія химически сходны съ „превращеніями β-лучей", тогда какъ превращенія, при которыхъ повидимому испускаются какъ α-лучи такъ и β-лучи, обнаруживаютъ характеръ „превращенія α-лучей". Ихъ β-излученіе указываетъ, слѣдовательно, либо на существованіе развѣтвленій, либо же оно представляетъ вторичное дѣйствіе при испусканіи α-лучей. Прибавимъ еще, что „превращенія α-лучей" эманацій ведутъ отъ нулевой группы одного горизонтальнаго ряда къ шестой группѣ ближайшаго высшаго горизонтальнаго ряда. Это показываетъ, что нулевая группа имѣетъ вмѣстѣ съ тѣмъ характеръ восьмой группы, что тріады восьмой группы, слѣдовательно, должны быть помѣщены въ пробѣлахъ нулевой группы. Такимъ образомъ, и при α-превращеніяхъ эманацій мы наблюдаемъ скачокъ черезъ одну группу, а именно, черезъ седьмую.

На основѣ двухъ приведенныхъ выше предложеній мы теперь можемъ наблюдать точную послѣдовательность, съ которой превращенія элементовъ проходятъ черезъ группы періодической системы. Остается лишь добавить, что три радіоактивныхъ ряда обнаруживаютъ очень большую аналогію. Начиная съ радіоторія, іонія, радіоактинія и ниже, которые образуютъ группу химически неотдѣлимыхъ элементовъ, а именно принадлежатъ всѣ къ плеядѣ торія превращенія во всѣхъ трехъ рядахъ идутъ совершенно одинаковымъ образомъ. Эти три элемента испытываютъ одинаковаго рода превращеніе, въ результатѣ чего возникаютъ химически тождественные элементы, которые въ свою очередь подвергаются одинаковымъ превращеніямъ. Это повторяется до конца рядовъ съ той лишь разницей, что рядъ торія и рядъ актинія обрываются раньше, чѣмъ урано-радіевый рядъ.

Если мы теперь ближе прослѣдимъ, напримѣръ, послѣдній рядъ, то увидимъ (ср. таблицы 1 и 2), что отъ урана 1 шестой группы

---

*) L. c. **) Ber. d. d. Chem. Ges. 46, 979 (1913). ***) Die Naturwissenschaften, 1, 338 (1913). Диссертація, Karlsrue, 1914.

****) Ibid. 1, 339 (1913); Physikal. Ztschr. 14, 877 (1913). Ср. также O. Hahn и L. Meitner ibid. 14, 752 и A. Fleck, Phil. Mag. 26, 528 (1913).

α-превращеніе ведетъ къ четвертой группѣ, чтобы послѣ двухъ „превращеній β-лучей“ привести обратно къ шестой группѣ, при чемъ возникаетъ элементъ, химически тождественный съ первымъ. Затѣмъ онъ проходитъ черезъ три α-превращенія по четвертой и шестой группамъ къ нулевой и т. д. То же самое относится и къ другимъ двумъ рядамъ, и мы теперь можемъ легко понять происхожденіе плеядъ. Они возникаютъ отчасти вслѣдствіе наличія трехъ аналогичныхъ радіоактивныхъ рядовъ, отчасти же потому, что во многихъ случаяхъ за однимъ α-превращеніемъ слѣдуютъ два β-превращенія.

8. Атомный вѣсъ и продолжительность жизни изотоповъ.

Одинъ пунктъ мы должны, однако, разсмотрѣть еще ближе. Какъ мы уже видѣли, въ каждой такой плеядѣ встрѣчаются весьма различные атомные вѣса, и во многихъ случаяхъ въ лѣво-стоящей плеядѣ атомные вѣса многихъ элементовъ на нѣсколько единицъ больше, чѣмъ у нѣкоторыхъ элементовъ правостоящей плеяды. И тѣмъ не менѣе мы обнаружили правильное паденіе атомныхъ вѣсовъ справа налѣво, когда мы приняли, что въ систему подходятъ наиболѣе долговѣчные члены плеяды, для того, чтобы не нарушить согласія съ другими элементами. Этотъ результатъ указываетъ на то*), что продолжительность жизни элементовъ въ плеядахъ не можетъ распредѣляться совершенно произвольно. Я старался поэтому найти соотношенія между атомнымъ вѣсомъ и продолжительностью жизни плеяды. Хотя я не могу утверждать, что мнѣ удалось вполнѣ выяснить вопросъ, но все же оказалось возможнымъ найти закономѣрности**), за которыми скрывается, повидимому, болѣе глубокій смыслъ.

Мы видѣли уже выше, что перемѣщенія, вызванныя „превращеніями β-лучей“ противоположны перемѣщеніямъ, обусловливаемымъ „превращеніями α-лучей“. Подобная же противоположность обнаруживается и въ тѣхъ закономѣрностяхъ, о которыхъ мы сейчасъ будемъ говорить. Если сравнимъ (см. таблицы 1 и 2) между собой α-излучатели, то окажется, что внутри плеяды продолжительность ихъ жизни падаетъ вмѣстѣ съ атомнымъ вѣсомъ. Это явственно видно у торія, іонія и т. д., у эманацій, у урановой плеяды у радія A, торія A и т. д. Полоній, впрочемъ, представляетъ собой исключеніе, значеніе котораго трудно понять. Совершенно противоположныя отношенія мы находимъ у плеядъ β-излучателей. Здѣсь мы находимъ повышеніе продолжительности жизни съ паденіемъ атомнаго вѣса, какъ это можно наблюдать у мезоторія 2 и актинія, у торія D, актинія D и радія C_2, у радія B торія B и радія D. Можно также замѣтить, что продукты актиніеваго ряда подчиняются этимъ закономѣрностямъ, если приписать актинію атомный вѣсъ радія. Только актиній B и актиній X представляютъ тогда исключенія изъ правилъ.

*) Ср. L. Fajans. Ber. d. D. Chem. Ges. 46, 438 (1913).

**) Le Radium 10, 171 (1913).

Интересно примѣненіе правила къ продуктамъ: радію C_1, торію C_1 и актинію C, представляющимъ собою какъ α-излучатели, такъ и β-излучатели. Оказывается, что упомянутыя выше столь различныя количественныя отношенія развѣтвленія у этихъ трехъ элементовъ можно, основываясь на правилѣ, свести къ различію въ ихъ атомномъ вѣсѣ*). Нужно упомянуть еще, что если въ одной плеядѣ встрѣчаются β-излучатели наряду съ α-излучателями, то первые обладаютъ бо́льшимъ атомнымъ вѣсомъ и меньшей продолжительностью жизни, чѣмъ ближайшій слѣдующій элементъ плеяды, какъ это видно на примѣрѣ мезоторія 1 и урана X_1.

Легко видѣть, что эти закономѣрности могутъ сдѣлать для насъ понятными правильныя соотношенія между атомными вѣсами горизонтальныхъ рядовъ, несмотря на дѣйствительную сложность явленій. Мы видимъ, такимъ образомъ, что часть періодической системы отъ урана до таллія можно свести къ законамъ измѣненій группъ при радіоактивныхъ превращеніяхъ и къ господствующимъ внутри плеяды закономѣрностямъ въ продолжительности жизни элементовъ.

9. Опытъ распространенія на обыкновенные элементы.

Вѣрно ли то же самое для всей періодической системы? Въ правѣ ли мы принять, что и она есть не что иное, какъ выраженіе законовъ превращеній элементовъ? Эти вопросы переносятъ насъ на совершенно гипотетическую почву, такъ какъ до сихъ поръ у элементовъ съ меньшимъ атомнымъ вѣсомъ, за исключеніемъ калія и рубидія, не обнаружено было ни прямого превращенія, ни даже испусканія радіоактивныхъ лучей, которые указывали бы на такое превращеніе. Но если вспомнимъ, что продолжительность жизни извѣстныхъ намъ радіоэлементовъ колеблется между 10^{-11} секундами 10^{10} годами, то мы найдемъ пріемлемымъ, что другіе элементы еще гораздо долговѣчнѣе и потому недоступны для радіоактивныхъ методовъ. Такъ какъ радіоэлементы занимаютъ въ періодической системѣ обособленное мѣсто единственно вслѣдствіе своего болѣе высокаго атомнаго вѣса, то мы должны, слѣдовательно, заключить, что, вообще, элементы съ болѣе

Таблица 3.

0 (VIII)	I	II	III	IV	V	VI	VII
He	*Li*	*Be*	*B*	*C*	*N*	*O*	*F*
Ne	*Na*	*Mg*	*Al*	*Si*	*P*	*S*	*Cl*
A	*K*	*Ca*	*Sc*	*Ti*	*V*	*Cr*	*Mn*
Fe Co Ni	*Cu*	*Zn*	*Ga*	*Ge*	*As*	*Se*	*Br*
Kr	*Rb*	*Sr*	*Y*	*Zr*	*Nb*	*Mo*	—
Ru Rh Pd	*Ag*	*Cd*	*In*	*Sn*	*Sb*	*Te*	*J*
X	*Cs*	*Ba*	*La* и другіе	*Ce* и другіе	*Ta*	*W*	—
Os Ir Pt	*Au*	*Hg*	*Tl*	*Pb*	*Bi*	*Po*	—
Ra Em	—	*Ra*	*Ac*	*Th*	*Bv*	*U*	

*) K. Fajans, Physik. Ztschr. 14, 91β (1913).

высокимъ атомнымъ вѣсомъ подвергаются превращенію быстрѣе, чѣмъ легкіе элементы. Мы обладаемъ возможностью провѣрить это заключеніе, такъ какъ ясно, что недолговѣчные элементы представлены въ меньшемъ количествѣ, чѣмъ долговѣчные, и, слѣдовательно, о долговѣчности обыкновеннаго элемента можно судить по тому, насколько часто онъ встрѣчается. Но, какъ давно уже извѣстно, почти 99% всей земной коры состоитъ изъ элементовъ, атомный вѣсъ которыхъ не больше, чѣмъ у желѣза. Такимъ образомъ, въ дѣйствительности болѣе легкіе элементы повидимому долговѣчнѣе, чѣмъ тяжелые. Но мы можемъ идти еще дальше. У радіоэлементовъ продолжительность жизни еще не опредѣляется однимъ атомнымъ вѣсомъ. Такъ, напримѣръ, элементы: уранъ 2, уранъ X_2 и уранъ X_1 имѣютъ одинаковый атомный вѣсъ, тогда какъ періодъ ихъ полураспада равенъ соотвѣтственно $2 . 10^6$ лѣтамъ, 24,6 днямъ и 1,15 минуты. Очевидно, что и химическій характеръ элемента играетъ при этомъ роль. Мы будемъ поэтому сравнивать, какъ часто встрѣчаются химически сходные элементы, принадлежащіе къ однѣмъ и тѣмъ же группамъ и подгруппамъ періодической системы; при этомъ мы исключимъ, однако, первые два горизонтальныхъ ряда, которые, вообще, занимаютъ въ системѣ исключительное положеніе. Уже Кларкъ (E. Clarke) показалъ *), что въ огромномъ большинствѣ группъ сходные элементы встрѣчаются тѣмъ рѣже, чѣмъ больше ихъ атомный вѣсъ. Такъ, напримѣръ, мышьякъ встрѣчается гораздо чаще, чѣмъ сурьма, а эта послѣдняя чаще, чѣмъ висмутъ. То же самое повторяется и въ рядахъ хлоръ, бромъ, іодъ; аргонъ, ксенонъ, криптонъ, эманація; калій, рубидій, цезій и т. д. Это правило имѣетъ, однако, три исключенія: галлій встрѣчается рѣже, чѣмъ индій, а этотъ послѣдній чуть чаще, чѣмъ таллій. Нѣчто подобное мы находимъ и въ рядѣ скандій **), иттрій, лантанъ и германій, олово, свинецъ. Если мы разсмотримъ соотвѣтственные радіоэлементы, то найдемъ (ср. таблицы 1 и 2), какъ разъ въ этихъ трехъ группахъ β-излучатели, тогда какъ во всѣхъ другихъ группахъ преобладаютъ α-излучатели. Такимъ образомъ, существуетъ повидимому, замѣчательная связь между зависимостью частоты сходныхъ элементовъ отъ ихъ атомнаго вѣса, съ одной стороны, и родомъ превращенія соотвѣтственныхъ элементовъ — съ другой. Поразительно при этомъ, что въ плеядахъ зависимость отъ атомнаго вѣса противоположна зависимости, наблюдаемой въ группахъ ***).

*) Data of Geochemistry, Bulletin U. S. Geological Survey, 1911, стр. 37. Ср. также I. H. L. Vogt, Ztschr. prakt. Geologie 1898.

**) Активій, конечно, исключается изъ ряда.

***) Тотъ фактъ, что цезій не радіоактивенъ, тогда какъ рубидій испускаетъ очень мягкіе, а калій — нѣсколько болѣе жесткіе β-лучи, хорошо согласуется съ взглядомъ, что въ вертикальныхъ группахъ устойчивость β-излучателей падаетъ съ атомнымъ вѣсомъ. Съ другой стороны, сравнивая, какъ часто встрѣчаются эти элементы, нужно заключить, что наиболѣе устойчивымъ между ними является калій. Можно, однако, понять оба эти факта, если принять, что β-лучи щелочныхъ металловъ происходятъ не отъ главной массы этихъ элементовъ, но отъ примѣси менѣе долговѣчныхъ изотоповъ. Въ такомъ случаѣ активные продукты могли бы быть отдѣлены при помощи фракціонированной диффузіи.

Заслуживаетъ вниманія еще слѣдующее обстоятельство: если сравнить, какъ часто встрѣчаются элементы свинецъ, висмутъ и таллій, то окажется, что въ этомъ отношеніи на первомъ мѣстѣ долженъ быть поставленъ свинецъ, затѣмъ висмутъ, и на послѣднемъ мѣстѣ — таллій; съ другой стороны, мы видимъ, что радіоэлементы въ плеядѣ свинца являются наиболѣе долговѣчными, а въ плеядѣ таллія наименѣе долговѣчными. Итакъ, сравнивая, какъ часто встрѣчаются обыкновенные элементы, мы видимъ, что это сравненіе говоритъ въ пользу воззрѣнія, что всѣ элементы подвержены процессу превращенія, и что скорость превращенія опредѣляется, съ одной стороны, химическимъ характеромъ, а съ другой — атомнымъ вѣсомъ.

Но какъ мы должны представлять себѣ эти превращенія обыкновенныхъ элементовъ? Наиболѣе естественнымъ является предположеніе, что эти превращенія представляютъ собой просто продолженіе трехъ извѣстныхъ намъ рядовъ, и что эти послѣдніе идутъ отъ самыхъ тяжелыхъ элементовъ къ самымъ легкимъ черезъ всю систему такимъ же образомъ, какъ мы это увидѣли на двухъ нижнихъ рядахъ. Согласно этому воззрѣнію, такъ называемые конечные продукты этихъ рядовъ являются первыми членами ряда, превращенія котораго настолько медленны, что не могутъ быть обнаружены съ помощью современныхъ методовъ. Но если таково положеніе вещей, то и въ дальнѣйшемъ будетъ несомнѣнно повторяться явленіе, которое мы наблюдали въ двухъ самыхъ нижнихъ рядахъ: именно, элементы, которые намъ кажутся химически простыми, въ дѣйствительности представляютъ собой смѣси нѣсколькихъ химически тождественныхъ элементовъ съ различнымъ атомнымъ вѣсомъ. Такимъ образомъ, атомные вѣсы обыкновенныхъ элементовъ являются, можетъ быть, лишь средними значеніями атомныхъ вѣсовъ нѣсколькихъ элементовъ. Здѣсь также возможно, конечно, что одинъ какой-нибудь элементъ смѣси настолько долговѣчнѣе прочихъ, что онъ одинъ опредѣляетъ собою средній атомный вѣсъ. И если мы будемъ опираться на данныя, къ которымъ приводитъ изслѣдованіе радіоэлементовъ, то такое предположеніе является даже самымъ вѣроятнымъ.

10. Заключеніе.

Мы зашли бы слишкомъ далеко, если бы пожелали прослѣдить всѣ тѣ заключенія, которыя вытекаютъ изъ вышеизложеннаго. Однако, важнѣе, чѣмъ эти гипотетическія соображенія, тѣ опыты, которые могутъ быть выполнены для повѣрки этихъ новыхъ столь своеобразныхъ заключеній. Какъ мы видѣли выше, включеніе радіоэлементовъ въ ряды періодической системы обнаружило слѣдующіе два новыхъ факта, имѣющихъ большое значеніе: 1) оказывается, что, вопреки господствовавшему до сихъ поръ воззрѣнію, атомный вѣсъ не опредѣляетъ однозначно химическихъ свойствъ элементовъ; 2) дѣйствительное число элементовъ, повидимому больше, чѣмъ могутъ открыть намъ химическіе методы раздѣленія.

Послѣднее предложеніе, правда, имѣетъ силу лишь, если мы стоимъ на той точкѣ зрѣнія, что элементы плеяды не только чрезвычайно сходны, но и совершенно тождественны химически, и что никогда не удастся раздѣлить ихъ химическими способами. Хотя такой взглядъ рѣзко противорѣчитъ распространенному убѣжденію въ могуществѣ химическихъ методовъ раздѣленія, но, какъ мнѣ кажется, онъ меньше, чѣмъ другая точка зрѣнія, подрываетъ существовавшую до сихъ поръ систему элементовъ. Если принять химическую тождественность изотоповъ, то основаніе періодической системы, — а именно, что существуетъ столько химическихъ типовъ, сколько есть мѣстъ въ системѣ, — остается, какъ мы видѣли, совершенно нетронутой. Радіоэлементы при этомъ учатъ насъ лишь, что обычная таблица періодической системы есть проекція дѣйствительной системы въ трехмѣрномъ пространствѣ, и что вдоль третьей оси этой системы химическая природа элементовъ есть константа и перемѣнными являются лишь продолжительность ихъ жизни и атомный вѣсъ. Если же мы примемъ, что элементы плеяды отличаются химически другъ отъ друга, хотя бы и мало, то существовавшая до сихъ поръ система элементовъ оказывается несостоятельной и въ химическомъ отношеніи, и намъ придется искать новую классификацію, которая могла бы обнять сильно возросшее число химическихъ типовъ. Не слѣдуетъ, понятно, утверждать, что этимъ исключается предыдущая альтернатива. Но мнѣ кажется болѣе раціональнымъ придерживаться болѣе простой точки зрѣнія, выставленной здѣсь мною и защищаемой С о д д и, пока нѣтъ достаточнаго основанія принять различіе изотоповъ въ химическомъ отношеніи; до настоящаго времени защищаемое мною воззрѣніе оказывалось вполнѣ состоятельнымъ въ радіохиміи *).

Въ одномъ отношеніи теорія въ ея теперешнемъ состояніи не вполнѣ удовлетворительна. Вслѣдствіе недолговѣчности большинства радіоэлементовъ не удалось ни изучить химическія свойства ихъ въ чистомъ состояніи, ни опредѣлить прямо ихъ атомные вѣса. Наша теорія поэтому получила бы существенное подтвержденіе, если бы удалось также доказать непосредственно, что два элемента, которые по своимъ химическимъ свойствамъ кажутся тождественными, имѣютъ различные атомные вѣса.

Возможность установить это для одного изъ элементовъ послѣднихъ двухъ рядовъ вытекаетъ изъ того факта, что уранъ и торій, а слѣдовательно, и продукты ихъ превращенія, въ различныхъ минералахъ встрѣчаются въ весьма различныхъ пропорціяхъ.

Напримѣръ, разсмотримъ ближе плеяду торія. Хотя торій, выдѣленный изъ бѣднаго ураномъ тороваго минерала, содержитъ всѣ члены торіевой плеяды, однако, на атомный вѣсъ, найденный на этомъ матеріалѣ, вліяетъ только самъ торій, такъ какъ всѣ прочіе продукты вслѣдствіе своей недолговѣчности представлены слишкомъ малыми количествами. Если же выдѣлить торій изъ уранаго минерала, наиболѣе

*) Ему какъ будто противорѣчитъ указываемая нѣкоторыми различная растворимость въ водѣ трехъ эманацій. [Ср. G. v. H e v e s y, Jahrb. f. Radiakt. & Elektronik. 10, 206 (1913)]. Не слѣдуетъ, однако, забывать, что вслѣдствіе недолговѣчности эманацій торія и актинія соотвѣтственныя опредѣленія отличаются большой неточностью.

бѣднаго торомъ, а именно изъ смоляной обманки, то получимъ матеріалъ, который содержитъ по меньшей мѣрѣ 16% іонія, какъ легко установить радіоактивнымъ способомъ. Поэтому, если мы опредѣлимъ атомный вѣсъ на этомъ матеріалѣ, то должны будемъ получать среднее значеніе между атомными вѣсами торія (232) и іонія (230), которое разнится отъ атомнаго вѣса торія примѣрно на 0,3 единицы. Въ высшей степени замѣчательно, что этотъ торій, столь богатый іоніемъ, обнаруживаетъ такой же самый спектръ, какъ обыкновенный торій; какъ указалъ Содди*), это наводитъ на мысль, что члены одной плеяды сходны между собой не только въ химическомъ отношеніи, но также и въ спектроскопическомъ. Вотъ почему мы съ такимъ интересомъ ждемъ результатовъ предпринятаго Гёнигшмидомъ опредѣленія атомнаго вѣса этого матеріала.

Другой случай, который доставитъ намъ, какъ можно надѣяться, прямое доказательство теоріи, относится къ „конечнымъ продуктамъ" радіоактивныхъ рядовъ. Какъ я упомянулъ уже въ началѣ, можно считать достовѣрнымъ, хотя это еще не доказано непосредственнымъ опытомъ, что конечный продуктъ урано-радіеваго ряда есть свинецъ. Это мнѣніе, высказанное впервые Болтвудомъ (Boltwood), основано на томъ фактѣ, что свинецъ можно найти во всѣхъ урановыхъ минералахъ, и при томъ въ количествахъ, соотвѣтствующихъ содержанію урана и возрасту минерала. Оно вполнѣ согласуется также съ слѣдствіемъ, что продуктъ „превращенія α-лучей" полонія, принадлежащаго къ шестой группѣ, долженъ быть членомъ плеяды свинца. Атомный вѣсъ этого конечнаго продукта найдемъ (206,0) по атомному вѣсу радія, вычтя извѣстное число геліевыхъ атомовъ, отщепляемыхъ въ радіевомъ рядѣ.

Еще недавно было неизвѣстно, что получается изъ торія C_2 и торія D послѣ ихъ превращенія. Знали только, что это должны быть сравнительно долговѣчные элементы, такъ какъ радіоактивными способами уже нельзя было доказать ихъ существованія. Но, основываясь на „законахъ перемѣщенія", не трудно убѣдиться, что это должны быть также элементы плеяды свинца. Химически они должны, слѣдовательно, представлять собой свинецъ. Если мы вычислимъ ихъ атомные вѣса изъ атомнаго вѣса торія путемъ вычитанія соотвѣтственнаго числа геліевыхъ атомовъ, то мы найдемъ для обоихъ значеніе 208,4, которое, слѣдовательно, разнится на цѣлыхъ двѣ единицы отъ вычисленнаго атомнаго вѣса свинца, образовавшагося изъ урана черезъ радій. Можно, слѣдовательно, сказать, что существуетъ урановый свинецъ и торіевый свинецъ.

Такимъ же образомъ оказывается, что продуктъ превращенія актинія D тоже принадлежитъ къ плеядѣ свинца; но, такъ какъ атомный вѣсъ его не установленъ съ достовѣрностью, то мы не будемъ здѣсь о немъ говорить.

Съ другой стороны, атомный вѣсъ свинца, выдѣленнаго изъ обыкновенныхъ свинцовыхъ минераловъ, равенъ 207,1, т. е. заклю-

*) Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik. 10, 188 (1913).

чается между вычисленнымъ атомнымъ вѣсомъ урана*) и тороваго свинца. Такимъ образомъ, получается такое впечатлѣніе, какъ если бы обыкновенный свинецъ былъ смѣсью этихъ двухъ родовъ свинца приблизительно въ равныхъ количествахъ, и слѣдовало бы ожидать, что свинецъ, получаемый изъ урановыхъ минераловъ, свободныхъ отъ тора, обладаетъ атомнымъ вѣсомъ, на двѣ единицы меньшимъ, чѣмъ у свинца изъ торовыхъ минераловъ, свободныхъ отъ урана.

Однако, при ближайшемъ разсмотрѣніи дѣло оказывается не столь простымъ. Торовые минералы, очень бѣдные ураномъ, какъ напримѣръ, торитъ или оранжитъ, содержатъ гораздо меньшее количество свинца, чѣмъ слѣдовало бы ожидать, судя по количеству тора и возрасту минерала, если бы продукты превращенія торія C_2 и торія D были совершенно устойчивы. Это количество свинца также немногимъ больше того, что соотвѣтствуетъ малому содержанію урана въ минералахъ. Мы должны, слѣдовательно, заключить, что эти продукты хотя и настолько устойчивы, что ихъ нельзя обнаружить по радіоактивнымъ дѣйствіямъ, все же продолжаютъ распадаться**) и не аккумулируются въ большемъ количествѣ въ минералахъ. Впрочемъ, какъ я показалъ***), это вполнѣ согласуется съ отношеніемъ между продолжительностью жизни и атомными вѣсами изотоповъ. Неизвѣстный торій D_2 является аналогомъ радія D и подобно послѣднему, весьма вѣроятно, является β-излучателемъ. Его атомный вѣсъ заключается между атомными вѣсами радія D и радія G, во всякомъ случаѣ весьма устойчиваго. Согласно правилу, торій D_2 долженъ быть устойчивѣе, чѣмъ радій D, но менѣе устойчивъ, чѣмъ радій G. Въ виду всего этого невѣроятно, чтобы въ обыкновенномъ свинцѣ торіевый свинецъ и урановый свинецъ могли содержаться въ равныхъ количествахъ. И поэтому мало надежды, чтобы можно было этимъ способомъ вполнѣ удовлетворительно объяснить противорѣчіе между теоретически вычисленнымъ атомнымъ вѣсомъ урановаго свинца и атомнымъ вѣсомъ обыкновеннаго свинца. Но такъ какъ болѣе надежныхъ точекъ опоры для сужденія объ относительной устойчивости этихъ продуктовъ не имѣется, и къ тому же объ атомномъ вѣсѣ актиніеваго свинца нельзя сказать ничего опредѣленнаго, то нѣтъ возможности предвидѣть заранѣе, замѣтно ли отличается атомный вѣсъ свинца изъ урановыхъ минераловъ отъ атомнаго вѣса обыкновеннаго свинца, и не состоитъ ли свинецъ, выдѣленный изъ наибѣднѣйшихъ ураномъ торовыхъ минераловъ, большей частью изъ урановаго свинца. Рѣшенія этого вопроса слѣдуетъ ожидать отъ экспериментальныхъ изслѣдованій, производящихся въ настоящее время и близкихъ уже къ результату.

Недавно наша теорія получила существенную поддержку съ совершенно другой стороны. Дж. Дж. Томсонъ****) при своихъ класси-

*) Подъ урановымъ свинцомъ мы подразумѣваемъ здѣсь только свинецъ, образовавшійся черезъ радій, а не черезъ актиній.

**) Можетъ быть безъ лучей, какъ мезоторій 1.

***) Le Radium 10, 170 (1913).

****) Cp. Rays of positive Electricity, London, 1914.

ческихъ изслѣдованіяхъ каналовыхъ лучей по методу магнитнаго и электрическаго отклоненій нашелъ, что атмосферный неонъ даетъ помимо нормальной параболы, соотвѣтствующей атомному вѣсу 20, еще и болѣе слабую, указывающую на присутствіе частицъ съ массою 22. Но такъ какъ по соображеніямъ какъ физическимъ, такъ и химическимъ, представлялось мало вѣроятнымъ, чтобы это было соединеніе NeH_2, то Томсонъ заключилъ, что неонъ есть смѣсь двухъ элементовъ съ атомными вѣсами 20 и 22 (метанеонъ). Ассистентъ его Астонъ (Aston) предпринялъ поэтому раздѣленіе двухъ составныхъ частей. Всѣ химическіе методы раздѣленія остались безуспѣшными, и посредствомъ многократнаго фракціонированнаго выпариванія тоже не удалось увеличить количества новаго элемента. Однако, съ помощью фракціонированной диффузіи, скорость которой у газовъ зависитъ, какъ извѣстно, только отъ ихъ молекулярнаго вѣса, удалось достигнуть частичнаго раздѣленія: плотности послѣднихъ фракцій составляли 20,15 и 20,28 ± 0,02, тогда какъ плотность обыкновеннаго неона равна 20,19. Здѣсь передъ нами, повидимому, первый случай, чтобы внѣ радіоактивныхъ рядовъ элементъ оказывался смѣсью двухъ элементовъ, отличающихся только атомнымъ вѣсомъ. Вѣроятно, не случайно также и то, что разность между атомными вѣсами двухъ членовъ неоновой плеяды, равно двумъ единицамъ совершенно такъ же, какъ между сосѣдними членами радіоактивныхъ плеядъ.

Врядъ ли можно допустить, чтобы это явленіе, обнаруженное въ двухъ нижнихъ рядахъ періодической системы и у неона, не повторялось также и у другихъ элементовъ. Въ этомъ отношеніи оченъ большое значеніе имѣло бы изслѣдованіе возможно большаго числа элементовъ съ помощью метода диффузіи. Въ Бреславскомъ институтѣ предприняты съ этой цѣлью опыты съ азотомъ.

Условіе наивыгоднѣйшаго соединенія гальваническихъ элементовъ въ группы при данномъ внѣшнемъ сопротивленіи.

В. Дудецкаго.

Въ учебникахъ физики, принятыхъ въ настоящее время въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, не приводится вывода условія наиболѣе выгоднаго соединенія элементовъ въ группы. Обыкновенно ограничиваются мало убѣдительной ссылкой на „теорію“, дающую извѣстное условіе равенства внѣшняго и внутренняго сопротивленія цѣпи. Очевидно, что подъ этой недоступной для гимназистовъ теоріей приходится подразумѣвать способъ нахожденія максимума функціи

$$i = \frac{ep}{R + \frac{rp^2}{n}},$$

гдѣ e обозначаетъ электродвижущую силу одного элемента, r — его внутреннее сопротивленіе, R — внѣшнее сопротивленіе, i — силу тока при n элементахъ, раздѣленныхъ на p послѣдовательно включенныхъ группъ.

Я полагаю, что приводимые ниже два вывода требуемаго условія вполнѣ примѣнимы въ средней школѣ.

I. Если p выбрано такъ, чтобы $p=\sqrt{\frac{Rn}{r}}$, то i будетъ наибольшимъ. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ значеніе p, мы получимъ:

$$i_1=\frac{e\sqrt{\frac{Rn}{r}}}{2R} \quad \text{или} \quad i_1^2=\frac{e^2n}{4Rr}.$$

При всякомъ же $p=\sqrt{\frac{Rn}{r}\pm k}$,

$$i_2=\frac{e\sqrt{\frac{Rn}{r}\pm k}}{2R\pm\frac{kr}{n}} \quad \text{или} \quad i_2^2=\frac{e^2n^2(Rn\pm kr)}{(2Rn\pm kr)^2r}.$$

Беремъ разность

$$i_1^2-i_2^2=\frac{e^2n(2Rn\pm kr)^2-e^2n^2(Rn\pm kr)\,4R}{(2Rn\pm kr)^2 4Rr}=\frac{e^2nk^2r}{(2Rn\pm kr)^2 4R}.$$

Разность положительна, независимо отъ k. Значитъ $i_1>i_2$, откуда и вытекаетъ искомое условіе $R=\frac{rp^2}{n}$.

II. Къ тому же условію можно придти еще нѣсколько инымъ путемъ. Для различныхъ p имѣемъ:

$$i_1=\frac{ep}{R+\frac{rp^2}{n}} \quad \text{и} \quad i_2=\frac{ep_1}{R+\frac{rp_1^2}{n}}.$$

Составляемъ разность

$$i_1-i_2=\frac{ep}{R+\frac{rp^2}{n}}-\frac{ep_1}{R+\frac{rp_1^2}{n}}=\frac{ep\left(R+\frac{rp_1^2}{n}\right)-ep_1\left(R+\frac{rp^2}{n}\right)}{\left(R+\frac{rp^2}{n}\right)\left(R+\frac{rp_1^2}{n}\right)}.$$

Очевидно, что для того, чтобы i_1-i_2 было положительнымъ требуется

$$p\left(R+\frac{rp_1^2}{n}\right)-p_1\left(R+\frac{rp^2}{n}\right)>0$$

или

$$(p-p_1)\left(R-\frac{rpp_1}{n}\right)>0,$$

что возможно лишь въ двухъ случаяхъ:

$$p - p_1 > 0 \quad \text{и} \quad R > \frac{rpp_1}{n}$$

или

$$p - p_1 < 0 \quad \text{и} \quad R < \frac{rpp_1}{n}.$$

Слѣдовательно, если p выбрано такъ, что i_1 есть максимумъ, то измѣненіе p въ ту или другую сторону влечетъ за собою соотвѣтствующее измѣненіе вторыхъ неравенствъ. Въ такомъ случаѣ ясно, что при $p_1 = p$ должно быть $R = \frac{rp^2}{n}$.

Оба приведенные вывода доступны для учениковъ средней школы. При выборѣ же одного изъ нихъ приходится считаться съ тѣмъ, что, первый болѣе искусственный такъ какъ сразу вводитъ искомое условіе; второй естественнѣе, требуетъ меньшаго числа дѣйствій, но для недостаточно развитаго класса можетъ представить затрудненія при выводѣ заключенія.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Русскій Астрономическій календарь. Перемѣнная часть. Вып. XXI на 1915 годъ. Изд. Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи. Н.-Новгородъ, 1915. Ц. 60 к.

Настоящій выпускъ, подобно предыдущимъ содержитъ слѣдующія свѣдѣнія: ежемѣсячныя таблицы; опредѣленіе восхода и захода Солнца и Луны для широтъ 38° — 64°; затменія; лунныя покрытія; яркія планеты; положенія Урана, Нептуна и болѣе яркихъ изъ малыхъ планетъ; геліоцентрическія долготы планетъ; истинныя положенія на орбитахъ 4-хъ планетъ; явленія въ системѣ Юпитера; кульминація полярной; падающія звѣзды; перемѣнныя звѣзды; справочникъ наблюдателя.

Кромѣ того, въ приложеніяхъ помѣщены слѣдующія статьи: 1) Успѣхи астрономіи въ 1913 г. I. Полака. 2) Гриничская обсерваторія въ прошломъ. Н. Лямина. 3) Николаевская главная Астрономическая Обсерваторія въ Пулковѣ (съ 14 рис.). А. Н. Высотскаго. 4) Краткій отчетъ о дѣятельности Нижегородскаго Кружка Любителей Физики и Астрономіи.

Въ календарѣ еще помѣщены фотографіи кометы Delavan'a (1913 f) и солнечнаго затменія 8 августа 1914 г. по снимкамъ, полученнымъ Кружкомъ отъ старшаго астронома Пулковской обсерваторіи С. К. Костинскаго.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 243 (6 сер.). Доказать, что во всякой конечной ариѳметической прогрессіи, разность которой отлична отъ нуля, произведеніе двухъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ членовъ, возрастаетъ по мѣрѣ удаленія отъ концовъ ея къ серединѣ.

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 244 (6 сер.). Пользуясь соотношеніемъ, предложеннымъ для доказательства въ задачѣ **№ 235** (см. № 625 „Вѣстника"), доказать слѣдующее тожество:

$$\frac{1}{(x-a)^m(x-b)^m}=\frac{1}{(a-b)^m}\left[\frac{1}{(x-a)^m}+\frac{C_m^1}{(x-a)^{m-1}(b-a)}+\frac{C_{m+1}^2}{(x-a)^{m-2}(b-a)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{C_{m+k-1}^k}{(x-a)^{m-k}(b-a)^k}+\ldots+\frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-a)(b-a)^{m-1}}\right]+$$

$$\frac{1}{(b-a)^m}\left[\frac{1}{(x-b)^m}+\frac{C_m^1}{(x-b)^{m-1}(a-b)}+\frac{C_{m+1}^2}{(x-b)^{m-2}(a-b)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{C_{m+k-1}^k}{(x-b)^{m-k}(a-b)^k}+\ldots+\frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-b)(a-b)^{m-1}}\right].$$

Е. Буницкій (Одесса).

№ 245 (6 сер.). Исключить α и β изъ системы уравненій *)

$$\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2,\quad \alpha^2-\beta^2=1,\quad \beta x+\alpha y=4\alpha\beta.$$

N. N.

№ 246 (6 сер). Показать, что числа 593^{337} и 1147^{337} при дѣленіи на 277 даютъ одинъ и тотъ же остатокъ, и вычислить этотъ остатокъ.

В. Яницкій (Острогъ, Волынской губ.).

---

*) Къ исключенію α и β изъ данной системы приводится задача: найти уравненіе кривой, уравненіе подэры которой относительно начала координатъ имѣетъ видъ $x^2-y^2=1$ (подэра кривой относительно данной точки есть геометрическое мѣсто основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на касательную къ кривой).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 196 (6 сер.). *Чиело N есть нѣкоторая степень двухъ. Найти это число, зная, что сумма всѣхъ дѣлителей числа N^2 на 2 095 104 больше суммы всѣхъ дѣлителей числа N.*

Обозначимъ искомое число N черезъ 2^x. Тогда сумма всѣхъ дѣлителей числа N есть

$$1+2+2^2+\ldots+2^x=\frac{2^x\,.\,2-1}{2-1}=2\,.\,2^x-1,$$

$N^2=2^{2x}$, а сумма всѣхъ дѣлителей числа N^2 равна

$$1+2+2^2+\ldots+2^{2x}=\frac{2^{2x}\,.\,2-1}{2-1}=2\,.\,2^{2x}-1.$$

По условію $(2\,.\,2^{2x}-1)-(2\,.\,2^x-1)=2\,095\,104$, или $2\,(2^x)^2-2\,.\,2^x=2\,095\,104$. Сокращая на 2, получимъ $(2^x)^2-2^x-1\,047\,552=0$, откуда

$$2^x=\frac{1\pm\sqrt{4190209}}{2}=\frac{1\pm2047}{2}.$$

Принимая во вниманіе лишь положительный корень, такъ какъ $2^x>0$, находимъ, что $N=2^x=1024=2^{10}$. Искомое число равно 1024.

М. Бабинъ (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Сердобинскій* (Петроградъ). *Н. К-новъ* (Петроградъ); *N. N.* (Тифлисъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *Н. Уварова* (Верхотурье); *А. Гермогеновъ* (Рязань); *Л. Горовицъ* (Одесса); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Г. Юньевъ* (Вологда); *В. Комаровъ* (Петроградъ).

№ 204 (6 сер.). *Найти число по слѣдующимъ даннымъ: сумма цифръ его квадрата вдвое больше суммы его цифръ; если же искомое число написать въ обратномъ порядкѣ, то получимъ сумму цифръ его квадрата.*

Обозначимъ искомое число черезъ N, сумму его цифръ черезъ s, число, получаемое изъ искомаго обращеніемъ порядка цифръ, — черезъ $\overline{N}$, а сумму цифръ числа N^2 — черезъ s'. Изъ условія задачи вытекаетъ, что

$$(1)\quad s'=2s,\qquad (2)\quad \overline{N}=2s.$$

Нуль удовлетворяетъ условію задачи, независимо отъ того, записанъ ли нуль, какъ однозначное число, или же — нѣсколькими нулями, какъ многозначное число. Пусть теперь N отлично отъ нуля. Разсмотримъ сперва тотъ случай, когда искомое число N оканчивается значащей цифрой, и назовемъ черезъ m число цифръ искомаго числа, не исключая, для полноты изслѣдованія, и тотъ случай, что число N, начинаясь однимъ или нѣсколькими нулями, записано, быть можетъ, не наименьшимъ числомъ цифръ по десятичной системѣ. Такъ какъ m-значное число N оканчивается по допущенію значащей цифрой, то и число $\overline{N}$ есть также m-значное число. Поэтому (3) $\overline{N}\geqq10^{m-1}$. Сумма цифръ числа $\overline{N}$, записаннаго тѣми же цифрами, какъ и число N, равна s; такъ какъ число цифръ равно m и такъ какъ каждая цифра не болѣе 9, то

(4) $s \leqq 9m$. Изъ формулъ (3) и (4) слѣдуетъ, что (5) $\frac{\overline{N}}{s} \geqq \frac{10^{m-1}}{9m}$. Обозначая правую часть равенства (5) черезъ $g(m)$ и замѣчая, что $m \geqq 1$, находимъ, что $g(m+1):g(m) = \frac{10^m \cdot 9m}{9(m+1) \cdot 10^{m-1}} = \frac{10m}{m+1} = \frac{10}{1+\frac{1}{m}} \geqq \frac{10}{1+\frac{1}{1}} = 5$, откуда $g(m+1):g(m) \geqq 5$. Поэтому выраженіе $g(m)$ возрастаетъ съ возрастаніемъ цѣлаго числа m. Но изъ равенства (2) слѣдуетъ, что $\frac{\overline{N}}{s} = 2$, а потому [см. (5)] (6) $2 \geqq g(m)$, а уже при $m=3$ мы имѣемъ, что $g(3) = \frac{10^2}{27} = 3\frac{19}{27} > 2$; значитъ, при $m \geqq 3$, находимъ, что $g(m) \geqq g(3) > 2$, откуда $g(m) > 2$, что противорѣчитъ формулѣ (6). Итакъ число N можетъ быть лишь однозначнымъ или двузначнымъ, и мы положимъ, что (7) $N = 10x + y$, гдѣ x и y — цифры, не исключая пока и того случая, что, быть можетъ, $x=0$. По теоремѣ о признакѣ дѣлимости на 9 число $\overline{N}$ отличается отъ своей суммы цифръ, равной s, числомъ кратнымъ 9-ти, т. е. $\overline{N} = s + 9k$, гдѣ k — число цѣлое, откуда [см. (2)] $s + 9k = 2s$, или $s = 9k$. Итакъ N кратно 9-ти, а потому и сумма цифръ его s кратна 9-ти, откуда слѣдуетъ, что s равно 9 или 18, такъ какъ N число двузначное. Но если принять, что $s=18$, то N можетъ быть лишь двузначнымъ числомъ 99, что невозможно, такъ какъ [см. (2)] въ этомъ случаѣ $N = 99 \neq 2(9+9) = 2s$ Значитъ $s=9$, т. е. [см. (7)] $x+y=9$, откуда $y = 9-x$, $\overline{N} = 10y + x = 10(9-x) + x = 90 - 9x$, а потому 81 [см. (2)] $90 - 9x = 2 \cdot 9$, или $90 - 9x = 18$. Опредѣливъ изъ этого уравненія x, получимъ, что $x=8$, $y = 9-8 = 1$, $N = 81$. Это число удовлетворяетъ навѣрно условію (2); такъ какъ $N^2 = 81^2 = 6561$, то $s' = 6+5+6+1 = 18 = 2 \cdot 9 = 2s$, а потому 81 [см. (1)] есть искомое число въ томъ предположеніи, что оно оканчивается значащей цифрой. Пусть теперь искомое число N оканчивается p нулями. Тогда (8) $N = z \cdot 10^p$, гдѣ z — цѣлое число, оканчивающееся значащей цифрой и получаемое изъ N вычеркиваніемъ p нулей справа. Сумма цифръ числа N равно суммѣ цифръ s числа z. Изъ равенства (8) слѣдуетъ, что $N^2 = z^2 \cdot 10^{2p}$, откуда вытекаетъ, что число N^2 получается изъ числа z приписываніемъ $2p$ нулей справа; поэтому сумма цифръ числа N^2 равна суммѣ цифръ s' числа z^2. Число $\overline{N}$ записывается [см. (8)] начальными p нулями и затѣмъ цифрами числа z, написанными въ обратномъ порядкѣ. Поэтому, называя число z, записанное въ обратномъ порядкѣ, черезъ $\overline{z}$, находимъ, что (9) $\overline{N} = \overline{z}$. Изъ равенствъ (1) и (2), которымъ должно удовлетворять число N, изъ того, что суммы цифръ чиселъ N и N^2 равны соотвѣтственно суммамъ цифръ чиселъ z и z^2 и изъ равенства (9) слѣдуетъ, что z есть оканчивающееся значащей цифрой число, удовлетворяющее условію задачи; поэтому, какъ доказано выше, $z=81$, откуда [см. (8)] $N = 81 \cdot 10^p$. Итакъ всѣ искомыя числа, не считая нуля, выражаются формулой $81 \cdot 10^p$, гдѣ $p = 0, 1, 2, \ldots$

Замѣчаніе. При рѣшеніи задачи мы пользовались лишь уравненіемъ (2) и лишь провѣрили рѣшеніе при помощи условія (1). Поэтому, примѣняя предыдущее изслѣдованіе, легко показать, что 81 есть единственное число, вдвое большее своей суммы цифръ, не считая нуля, и что нуль и числа вида $81 \cdot 10^p$ суть всѣ тѣ числа, которыя, послѣ обращенія порядка цифръ, даютъ двойную сумму цифръ первоначальнаго числа.

Н. К-новъ (Петроградъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна) *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *В. Кованько* (Вышній Волочокъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *В. Ревзинъ* (Сумы).

№ 205 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$15x^4 - 38x^3 + 11x^2 + 12x - 4 = 0.$$

Лѣвую часть даннаго уравненія можно записать въ видѣ

$$(15x^4 - 35x^3 + 10x^2) + (-3x^3 + 7x^2 - 2x) + (-6x^2 + 14x - 4),$$

или же въ видѣ

$$5x^2(3x^2 - 7x + 2) - x(3x^2 - 7x + 2) - 2(3x^2 - 7x + 2).$$

Такимъ образомъ, вынося за скобку въ лѣвой части множителя $3x^2 - 7x + 2$, данное уравненіе можно записать въ видѣ

$$(3x^2 - 7x + 2)(5x^2 - x - 2) = 0.$$

Итакъ данное уравненіе распадается на два квадратныхъ уравненія

$$3x^2 - 7x + 2 = 0, \quad 5x^2 - x - 2 = 0,$$

рѣшая которыя, находимъ четыре корня даннаго уравненія, а именно

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{10}.$$

Н. К-новъ (Петроградъ); *Л. Савватѣевъ* (Торжокъ, Тверской губ.); *В. Кованько* (Вышній Волочокъ); *Х. Брукъ* (Кривой Рогъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *А. Павловъ* (Суздаль, Владимірской губ.); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *В. Ревзинъ* (Сумы).

№ 206 (6 сер.). *Дана функція*

$$f(x) = \sin \frac{\log x^{2\pi}}{\log 2}.$$

Найти, при данномъ x, *значенія* z, *удовлетворяющія уравненію*

$$f(z) = f(x),$$

и показать, что въ сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$ *функція* $f(x)$ *принимаетъ любое изъ возможныхъ значеній.*

Разсматривая данную функцію, какъ вещественную функцію вещественнаго перемѣннаго x, мы должны предположить, что x принимаетъ лишь положительныя значенія. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію степени съ ирраціональнымъ показателемъ, значеніе степени $x^{2\pi}$ разсматривается въ теоріи функцій вещественнаго перемѣннаго лишь для x положительнаго. Но можно условиться, не измѣняя опредѣленія данной функціи при x положительномъ, расширить его и на отрицательныя значенія x, полагая при любомъ вещественномъ и отличномъ отъ нуля значеніи x, что (1) $x^{2\pi} = (x^2)^\pi$, (или, что $x^{2\pi} = |x|^{2\pi}$). Принявъ условіе (1), можно считать функцію $f(x)$ заданной для всѣхъ вещественныхъ значеній x, кромѣ $x = 0$. Замѣчая, что вообще $\frac{\log a}{\log 2} = \log_2 a$ въ томъ, конечно, предположеніи, что оба логариѳма $\log a$ и $\log 2$ взяты при любомъ, но одномъ и томъ же основаніи), можно записать предложенное для разрѣшенія относительно z уравненіе $f(z) = f(x)$ въ видѣ

$$(2) \quad \sin \log_2 z^{2\pi} = \sin \log_2 x^{2\pi}.$$

Такъ какъ вообще для выполненія равенства $\sin\alpha=\sin\beta$ необходимымъ и достаточнымъ условіемъ является равенство $\alpha=(-1)^m\beta+m\pi$, гдѣ m — любое цѣлое число, то уравненіе (2) равносильно уравненію

$$(3)\quad \log_2 z^{2\pi}=(-1)^m\log_2 x^{2\pi}+m\pi,$$

гдѣ m — любое цѣлое число.

Если m четное, т. е. $m=2n$, гдѣ n — число цѣлое, то уравненіе (3) принимаетъ видъ $\log_2 z^{2\pi}=\log_2 x^{2\pi}+2n\pi$, откуда

$$\log_2 z^{2\pi}-\log_2 x^{2\pi}=2n\pi,\quad \log_2(z^{2\pi}:x^{2\pi})=2n\pi,\quad \left(\frac{z}{x}\right)^{2\pi}=2^{2n\pi},\quad \left(\frac{z}{x}\right)^2=2^{2n},$$

$$\frac{z}{x}=\pm 2^n,$$

т. е.

$$(4)\quad z=\pm 2^n x,$$

гдѣ n — любое цѣлое, — положительное, отрицательное или нуль. Если же m — число нечетное, т. е. $m=2n+1$, гдѣ n — число цѣлое, то въ этомъ случаѣ изъ уравненія (3) мы послѣдовательно находимъ:

$$\log_2 z^{2\pi}=-\log_2 x^{2\pi}+(2n+1)\pi,\quad \log_2 z^{2\pi}+\log_2 x^{2\pi}=(2n+1)\pi,$$

$$(zx)^{2\pi}=2^{(2n+1)\pi},\quad (zx)^2=2^{2n+1},\quad zx=\pm 2^{\frac{2n+1}{2}},$$

откуда

$$(5)\quad z=\pm 2^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{x},$$

гдѣ n — любое цѣлое число. Разсмотримъ любое изъ значеній $f(c)$ разсматриваемой функціи, гдѣ c — любое данное и отличное отъ нуля число. Положимъ въ формулахъ (4) и (5) $x=c$ и n — отрицательнымъ; тогда $n=-p$, гдѣ p — цѣлое положительное число. При этихъ предположеніяхъ правыя части формулъ (4) и (5) обращаются въ $\pm\frac{c}{2^p}$ и $\pm\frac{\sqrt{2}}{2^p c}$, при чемъ, какъ доказано выше,

$$(6)\quad f\left(\pm\frac{c}{2^p}\right)=f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2^p c}\right)=f(c).$$

Но при p достаточно большомъ получимъ, что

$$(7)\quad \left|\frac{c}{2^p}\right|<\delta,\qquad (8)\quad \left|\frac{\sqrt{2}}{2^p c}\right|<\delta,$$

гдѣ δ — напередъ заданное положительное число, при чемъ числа $\pm\frac{c}{2^p}$, $\frac{\sqrt{2}}{2^p c}$ отличны отъ нуля; стоитъ лишь взять p соотвѣтственно столь большимъ, чтобы выполнялись неравенства $2^p>\frac{|c|}{\delta}$, $2^p>\frac{\sqrt{2}}{\delta|c|}$. Мѣняя произвольно c, съ тѣмъ лишь ограниченіемъ, что $c\neq 0$, оставляя δ любымъ, по даннымъ положительнымъ числамъ и мѣняя съ измѣненіемъ c цѣлое положительное число p соотвѣствующимъ образомъ, мы видимъ изъ формулъ (6), (7), (8), что въ любомъ промежуткѣ $(-\delta, \delta)$, т. е. въ любой окрестности точки $x=0$, разсматриваемая функція $f(x)$ принимаетъ всѣ свои значенія. Слѣдуетъ замѣтить, что $f(x)$ можетъ принимать любое значеніе отъ (-1) до 1. Это видно изъ того, что при любомъ значеніи угла φ уравненіе $\sin \log_2 x^{2\pi} = \sin \varphi$ удовлетворяется, если $x^{2\pi} = 2^{\sin \varphi}$, откуда

$$(9)\quad x = \pm \sqrt{2^{\frac{\sin \varphi}{\pi}}}.$$

Замѣчаніе. Если бы отказались отъ условія (1), то приняли бы, что $x > 0$, $c > 0$. Въ формулахъ (4), (5), (6), (9) пришлось бы опустить знакъ минусъ, а двустороннюю окрестность нуля замѣнить окрестностью $(0, \delta)$. Остальныя же разсужденія сохранили бы свою силу.

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

О. Д. Хвольсонъ. *Курсъ физики.* Томъ IV. «Ученіе о магнитныхъ и электрическихъ явленіяхъ». II-ая половина второй выпускъ. Изд. Риккера. Составили: А. П. Аѳанасьевъ, К. К. Баумгартъ, проф. А. Ф. Іоффе, Л. С. Коловратъ-Червинскій, проф. Д. А. Рожанскій и прив.-доц. Д. С. Рождественскій. Съ 95 рис. Петроградъ, 1915. XII + 638. Ц. 3 р. 50 к.

Н. С. Дрентельнъ. *Физика въ общедоступномъ изложеніи.* Пособіе для обученія и самообразованія. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1914. Стр. XVI + 711. Ц. 2 р. 50 к.

П. Енько. *Сборникъ практическихъ разсчетовъ для начальнаго обученія счету по лабораторному методу.* Петроградъ, 1915 Стр. 43. Ц. 15 к.

Его же. *Справочникъ по начальному счету для учащихся.* Петроградъ, 1915. Стр. 33. Ц. 15 к.

Его же *Методика начальнаго счета по лабораторному методу.* Часть I. «Практика обученія». Стр. 130. Ц. 60 к. Часть II. «Теоретическія основанія» Стр. 47. Ц. 30 к. Петроградъ, 1915.

Ф. Линде. *Строеніе понятія.* Логическое изслѣдованіе. Петроградъ, 1915. Стр. XII + 61. Ц. 75 к.

Б. Е. Райковъ. *Тетрадь для практическихъ занятій по природовѣдѣнію.* Изд. Карбасникова. Петроградъ, 1915. Стр. 61. Ц. 40 к.

С. В. Орловъ. *Основанія аналитической геометріи на плоскости.* Курсъ VII класса реальныхъ училищъ. Москва, 1915. Стр. 118. Ц. 80 к.

Ф. Гебель. *Наглядная геометрія въ задачахъ и вопросахъ.* Вып. I. Изд. «Задруга». Москва, 1915. Стр. 119. Ц. 50 к.

XXI Русскій Астрономическій календарь на 1915 г. Изд. Нижегородскаго Кружка любителей физики и астрономіи. Стр. VIII + 205. Ц. 60 к.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
ищется