Обложка
ищется

Обложка
пщется

Второй серіи III-го семестра № 1.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
# и
# Элементарной Математики.

№ 625.



## † Николай Алексѣевичъ Умовъ.

Начало 1915 г. ознаменовалось въ области физико-математическихъ наукъ тяжкой утратой. Въ день его наступленія скончался одинъ изъ наиболѣе извѣстныхъ русскихъ физиковъ, бывшій профессоръ Новороссійскаго университета, а затѣмъ Московскаго, **Николай Алексѣевичъ Умовъ.**

Редакція въ ближайшихъ номерахъ помѣститъ статью, посвященную памяти покойнаго ученаго.

# Радіоэлементы и періодическая система.

*Профессора К. Фаянса.*

## 1. Введеніе.

Періодическая система элементовъ, установленная Менделѣевымъ и дополненная Лотаромъ Мейеромъ (L. Meyer), несомнѣнно принадлежитъ къ важнѣйшимъ завоеваніямъ современной теоретической химіи. Съ момента своего появленія она получила въ наукѣ фундаментальную роль, какъ основа систематики химическихъ элементовъ. Но помимо того огромное значеніе періодической системы заключается еще въ томъ, что она весьма убѣдительно доказала существованіе тѣсной связи между всѣми многочисленными элементами. Благодаря этому, для науки возникла очень заманчивая задача — изслѣдовать природу этихъ отношеній. Но въ этомъ направленіи изслѣдованіе подвигалось весьма медленно, и недавно единственнымъ болѣе или менѣе достовѣрнымъ результатомъ можно было считать лишь положеніе, что въ основѣ всѣхъ элементовъ лежитъ одна и та же первичная матерія — электричество. Однако, для этой химической проблемы, какъ и для множества вопросовъ новѣйшей физики, радіоактивность дала совершенно новыя точки зрѣнія, которыя открылись, можно сказать, сами собой, сейчасъ же послѣ того какъ въ 1913 г. удалось ввести радіоэлементы въ періодическую систему.

Впрочемъ, въ самомъ началѣ радіоэлементы, казалось, умножили собой тѣ затрудненія, которыя причиняли періодической системѣ іодъ и теллуръ, калій и аргонъ и рѣдкія земли. Въ самомъ дѣлѣ, изученіе радіоактивныхъ элементовъ привело къ открытію не менѣе 30 новыхъ элементовъ, и для нихъ невозможно было найти соотвѣтствующихъ мѣстъ въ системѣ. Сейчасъ мы объяснимъ это подробнѣе.

## 2. Радіоактивные элементы.

Вскорѣ послѣ того какъ супруги Кюри (Curie) открыли радій, они показали, что онъ по своимъ химическимъ свойствамъ весьма сходенъ съ баріемъ и потому долженъ быть отнесенъ къ той же группѣ въ періодической системѣ. Когда удалось получить соли радія въ чистомъ видѣ и опредѣлить его атомный вѣсъ, то было найдено, что этотъ послѣдній равенъ 226, и такимъ образомъ для этого новаго элемента нашлось весьма подходящее свободное мѣсто во второй группѣ послѣдняго горизонтальнаго ряда періодической системы. Въ химическомъ отношеніи радій не представляетъ, слѣдовательно, ничего новаго, и огромный интересъ, который онъ возбудилъ, какъ извѣстно, вызванъ не химическими свойствами его, а радіоактивными.

Радій и прочіе радіоактивные элементы испускаютъ совершенно своеобразные лучи, обладающіе, между прочимъ, способностью дѣлать воздухъ проводникомъ электричества, далѣе, дѣйствовать на фотографическую пластинку и производить физіологическія дѣйствія, которыя уже и теперь играютъ огромную роль въ медицинѣ. Завѣса, покрывавшая загадочную природу этихъ дѣйствій радія въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ послѣ его открытія, была поднята, благодаря блестящимъ открытіямъ Рётгерфорда (Rutherford), высказавшаго необыкновенно смѣлую идею, что радіоактивные элементы подвержены самопроизвольному, или „спонтанному", превращенію. Теорія превращенія радіоактивныхъ элементовъ, открывшая наукѣ совершенно новые пути, поразительно скоро встрѣтила всеобщее признаніе. Нынѣ, спустя 10 лѣтъ, эта идея уже болѣе не является гипотезой: многочисленные опыты доказали окончательно, что радій и прочіе радіоактивные элементы находятся въ процессѣ превращенія. Мы знаемъ теперь, что за опредѣленное время изъ данной массы радіевыхъ атомовъ вполнѣ опредѣленная часть подвергается разложенію. Атомъ радія распадается, и при томъ на двѣ весьма неравныя части. Въ моментъ своего превращенія онъ выбрасываетъ атомъ гелія, атомный вѣсъ котораго равенъ, какъ извѣстно, 4,0; остается атомъ новаго элемента, а именно — атомъ эманаціи радія, которая хорошо извѣстна благодаря своимъ медицинскимъ примѣненіямъ. Эманація радія есть настоящій элементъ, который при обыкновенной температурѣ и давленіи находится въ газообразномъ состояніи; она имѣетъ опредѣленный спектръ и по своимъ химическимъ свойствамъ совершенно сходна съ открытыми Рамзаемъ (Ramsay) благородными газами: геліемъ, неономъ, аргономъ, криптономъ, ксенономъ; подобно этимъ послѣднимъ эманація радія не даетъ соединеній ни съ какимъ другимъ элементомъ. Атомный вѣсъ эманаціи былъ найденъ путемъ опредѣленія плотности ея паровъ, предполагая, что валентность эманаціи равна единицѣ; полученное число (222) показало, что эманація должна быть помѣщена въ свободномъ мѣстѣ въ группѣ благородныхъ газовъ, въ послѣднемъ горизонтальномъ рядѣ періодической системы.

Но и сама эманація радія весьма непостоянный элементъ. Она распадается подобно радію и при этомъ выдѣляетъ также гелій, какъ доказали извѣстные классическіе опыты Рамзая и Содди (Soddy). Здѣсь весьма интересно замѣтить, что геліевый атомъ, отщепляемый при этихъ радіоактивныхъ превращеніяхъ, выбрасывается изъ распадающаго атома со скоростью, которая доходитъ до 20 000 *км.* въ секунду, и при этомъ атомъ гелія всегда несетъ съ собой положительный зарядъ, вдвое большій, чѣмъ наименьшій встрѣчающійся электрическій зарядъ, — такъ называемый элементарный зарядъ. Въ этомъ видѣ атомъ гелія, или, какъ его иначе называютъ, $\alpha$-частица обладаетъ способностью производить дѣйствія, наблюдаемыя у радіоактивныхъ тѣлъ, а рой такихъ $\alpha$-частицъ образуетъ такъ называемые $\alpha$-лучи радіоактивныхъ веществъ. Если помѣстить эманацію радія вблизи заряженнаго электроскопа, то онъ разряжается. Чѣмъ больше взятое количество эманаціи, тѣмъ скорѣе совершается разрядъ. Если будемъ наблюдать такимъ образомъ, опредѣленную массу эманаціи, то увидимъ, что уже спустя 3,85 дня первоначально взятая масса уменьшится на половину, черезъ 7,7 дней останется лишь четвертая часть, и т. д. Принято говорить, что эманація радія имѣетъ періодъ полураспада въ 3,85 дней. Радій представляетъ собой несравненно болѣе устойчивый элементъ; путемъ косвенныхъ опытовъ удалось все же установить что его періодъ полураспада составляетъ примѣрно 1800 лѣтъ.

Таблица 1.

$$\underset{6}{\text{Уранъ}_1} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{UX_1} \overset{\beta}{-} \underset{5}{UX_2} \overset{\beta}{-} \underset{6}{U_2} \overset{\alpha}{-} \Big| \ \underset{4}{Jo} \overset{\alpha}{-} \overset{\beta}{\underset{2}{Ra}} \overset{\alpha}{-} \underset{0}{Ra\,Em} \overset{\alpha}{-} \underset{6}{Ra\,A} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{Ra\,B} \overset{\beta}{-} \underset{5}{Ra\,C_1} \begin{array}{l} \nearrow {}_{\alpha}\underset{(3)}{RaC_2} \overset{\beta}{-} \underset{(4)}{?} \\ \searrow {}^{\beta}\underset{(6)}{RaC'} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{RaD} \overset{\beta}{-} \underset{5}{RaE} \overset{\beta}{-} \underset{6}{RaF} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{RaG} \text{ (Свинецъ)} \end{array}$$

$$\underset{4}{\text{Торій}} \overset{\alpha}{-} \underset{2}{Ms\,Th_1} \overset{(\beta)}{-} \underset{3}{Ms\,Th_2} \overset{\beta}{-} \Big| \ \underset{4}{Rd\,Th} \overset{\alpha}{-} \overset{\beta}{\underset{2}{Th\,X}} \overset{\alpha}{-} \underset{0}{Th\,Em} \overset{\alpha}{-} \underset{(6)}{Th\,A} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{Th\,B} \overset{\beta}{-} \underset{5}{Th\,C_1} \begin{array}{l} \nearrow {}_{\alpha}\underset{3}{ThD} \overset{\beta}{-} \underset{(4)}{?} \\ \searrow {}^{\beta}\underset{(6)}{ThC_2} \overset{\alpha}{-} \underset{(4)}{(ThD_2)} \end{array}$$

$$\underset{3}{\text{Актиній}} \overset{(\beta)}{-} \Big| \ \overset{\beta}{\underset{4}{Rd\,Ac}} \overset{\alpha}{-} \underset{2}{Ac\,X} \overset{\alpha}{-} \underset{0}{Ac\,Em} \overset{\alpha}{-} \underset{(6)}{Ac\,A} \overset{\alpha}{-} \underset{4}{Ac\,B} \overset{\beta}{-} \underset{5}{Ac\,C} \nearrow {}_{\alpha}\underset{(3)}{AcD} \overset{\beta}{-} \underset{(4)}{?}$$

Эта скорость распада радіоактивнаго элемента совершенно не зависитъ ни отъ какихъ физическихъ и химическихъ вліяній. Она вполнѣ характерна для соотвѣтственнаго элемента; если обнаруживаютъ активность, убывающую съ новой, еще не наблюдавшейся скоростью, то это считаютъ достаточнымъ признакомъ, что открытъ новый радіоактивный элементъ. Посредствомъ этого и подобныхъ ему методовъ было открыто большинство радіоактивныхъ элементовъ, и въ настоящее время ихъ извѣстно не менѣе 35. Правда, они большей частью столь недолговѣчны, что совершенно невозможно отдѣлить ихъ въ чистомъ видѣ. Такъ, напримѣръ, извѣстно, что эманація радія послѣ своего распада даетъ твердое тѣло, которое называютъ радіемъ *A* и которое, въ свою очередь, распадается, выдѣляя гелій при періодѣ полураспада въ 3 минуты, и переходя въ другой новый элементъ — радій *B*.

Какъ видимъ, четыре элемента: радій, эманація радія, радій *A* и радій *B* находятся въ генетической зависимости между собой, которая можетъ быть выражена слѣдующей схемой:

$$Ra \xrightarrow{a} Ra\,Em \xrightarrow{a} Ra\,A \xrightarrow{a} Ra\,B.$$

Точно такъ же всѣ найденные до сихъ поръ радіоэлементы, за исключеніемъ калія и рубидія, могутъ быть размѣщены въ три большихъ такъ называемыхъ радіоактивныхъ ряда.

### 3. Три трансмутаціонныхъ ряда.

Это рядъ урана-радія, рядъ торія и рядъ актинія. Въ каждомъ изъ этихъ трехъ рядовъ элементы находятся въ генетической зависимости между собой, а именно, каждый элементъ при своемъ превращеніи даетъ послѣдующій.

Рядъ урана-радія начинается извѣстнымъ элементомъ ураномъ и приводитъ черезъ нѣсколько превращеній къ радію. Этотъ послѣдній, какъ мы видѣли, распадается въ свою очередь и черезъ нѣкоторое число превращеній приводитъ къ элементу полонію (*Ra F*), который въ свое время вызвалъ большой интересъ, такъ какъ это былъ первый новый радіоактивный элементъ, открытый г-жей Кюри. Превращеніе полонія даетъ, — это можно считать вполнѣ установленнымъ — элементъ свинецъ, и здѣсь рядъ, повидимому, обрывается, ибо до сихъ поръ еще не удалось обнаружить дальнѣйшаго превращенія свинца.

Превращеніе торія приводитъ сперва къ хорошо извѣстнымъ въ медицинѣ элементамъ мезоторію, радіоторію и торію *X*, который, въ свою очередь, даетъ эманацію, весьма сходную съ радіевой, но еще значительно менѣе долговѣчную, а затѣмъ послѣ ряда превращеній, во многомъ соотвѣтствующихъ ряду радія, рядъ торія обрывается. До послѣдняго времени мы не располагали никакими данными, опираясь на которыя можно было бы судить, къ какимъ устойчивымъ продуктамъ приводитъ этотъ рядъ.

Исходный элементъ ряда актинія до настоящаго времени не былъ полученъ въ чистомъ видѣ. Превращенія этого ряда совершенно аналогичны превращеніямъ другихъ рядовъ, и о конечныхъ продуктахъ слѣдуетъ сказать то же, что и относительно торіеваго ряда. Нужно еще упомянуть, что рядъ актинія находится, какъ въ высшей степени вѣроятно, въ генетической связи съ рядомъ урана; объ этомъ мы еще будемъ говорить ниже.

Всѣ эти многочисленныя превращенія можно раздѣлить на двѣ группы. Съ превращеніями одного рода мы уже знакомы: они основаны на расщепленіи атома въ ближайшій атомъ ряда и на геліевый атомъ, выбрасываемый въ видѣ $\alpha$-частичекъ. Превращенія этого рода называются *превращеніями* $\alpha$-*лучей*, а подверженные имъ элементы — $\alpha$-*излучателями*. Превращенія другого рода это — такъ называемыя *превращенія* $\beta$-*лучей*, когда испускаются $\beta$-лучи, т. е. извергаются очень быстро движущіеся отрицательные электроны (скорости ихъ достигаютъ такого значенія, какъ скорость свѣта). Буквы $\alpha$ и $\beta$ на стрѣлкахъ, обозначающихъ превращенія соотвѣтственныхъ элементовъ, показываютъ родъ превращенія *).

Въ двухъ превращеніяхъ, а именно у актинія и мезоторія, не обнаружено никакихъ лучей. Однако, весьма вѣроятно, что мы имѣемъ здѣсь дѣло съ весьма „мягкими“ съ ничтожной способностью проникновенія $\beta$-лучами, для обнаруженія которыхъ требуется преодолѣть нѣкоторыя затрудненія. Какъ показываетъ, между прочимъ, и таблица, въ трехъ случаяхъ, а именно у радія, торія $X$ и радіоактинія, испускаются, повидимому, лучи обоихъ родовъ. Но весьма возможно, что здѣсь соотвѣтственныя превращенія имѣютъ болѣе сложную природу, чѣмъ тѣ, о которыхъ мы говорили до сихъ поръ. Дѣйствительно, намъ извѣстны случаи, когда *одинъ элементъ* испытываетъ *два различныхъ превращенія*. Это мы находимъ, напримѣръ, у радія $C_1$ и торія $C_1$. Одна часть атомовъ этихъ элементовъ испытываетъ „превращенія $\alpha$-лучей“, при чемъ возникаютъ $\beta$-излучатели: радій $C_2$ и торій $D$; остальные же атомы подвергаются „превращеніямъ $\beta$-лучей“, которыя приводятъ къ $\alpha$-излучателямъ: радію $C'$ и торію $C_2$. Такимъ образомъ, при этихъ элементахъ радіоактивные ряды обнаруживаютъ *развѣтвленіе*. Весьма интересны количественныя отношенія, наблюдаемыя при этихъ развѣтвленіяхъ. При торіи $C$ **35**$^0/_0$ всѣхъ атомовъ испытываютъ „превращеніе $\alpha$-лучей“, а остальные 65$^0/_0$ — „превращеніе $\beta$-лучей“. У радія $C_1$ почти всѣ атомы испытываютъ „превращеніе $\beta$-лучей“, и только около **3 — 4** тысячъ испытываютъ „превращеніе $\alpha$-лучей“. Вѣроятно, что и актиній $C$ подверженъ, помимо извѣстнаго $\alpha$-превращенія, также и $\beta$-превращенію; но здѣсь, въ противоположность радію $C_1$, превращеніе $\alpha$-лучей находитъ для себя несравненно болѣе благопріятныя условія.

Элементъ $Y$, найденный Г. *Антоновымъ* **), также предста-

*) Большинство $\beta$-излучателей испускаютъ, кромѣ того, еще и $\gamma$-лучи; эти послѣдніе на діаграммѣ не показаны, такъ какъ они не имѣютъ существеннаго значенія для нашей проблемы.

**) Phil. Mag. 22, 419 (1911); сравн. F. *Soddy*, ibid. 27, 215 (1914) и O. **Hahn** и L. **Meitner**, Physik. Ztschr. 15, 236 (1914).

вляетъ продуктъ отвѣтвленія въ началѣ урановаго ряда. На таблицѣ I этого элемента нѣтъ, такъ какъ его отношенія къ элементамъ этого ряда еще недостаточно выяснены.

Генетическая связь между актиніевымъ рядомъ и урановымъ тоже, вѣроятно, состоитъ въ подобнаго рода отвѣтвленіи перваго ряда отъ второго; но пока еще неизвѣстно, въ какомъ именно мѣстѣ уранова ряда происходитъ это отвѣтвленіе.

## 4. Атомные вѣса радіоэлементовъ.

Чтобы объяснить, почему было такъ трудно включить всѣ эти радіоэлементы въ ряды періодической системы, посмотримъ, каковы ихъ атомные вѣса. Конечно, о непосредственномъ опредѣленіи атомнаго вѣса этихъ элементовъ не можетъ быть и рѣчи, по крайней мѣрѣ, съ помощью обыкновенныхъ химическихъ методовъ, такъ какъ большинство радіоэлементовъ обладаютъ чрезвычайно малой долговѣчностью и потому доступны намъ лишь очень малыя количества ихъ. Но генетическія отношенія этихъ элементовъ даютъ намъ путь для нахожденія ихъ атомныхъ вѣсовъ. Въ самомъ дѣлѣ, при превращеніяхъ $\alpha$-лучей отщепляется атомъ гелія, такъ что слѣдуетъ ожидать, что атомный вѣсъ продукта превращенія меньше, чѣмъ атомный вѣсъ его материнскаго вещества, на величину атомнаго вѣса гелія (4,00). Съ другой стороны, при „превращеніяхъ $\beta$-лучей“ теряется лишь одинъ электронъ, масса котораго составляетъ $^1/_{1800}$ часть массы водороднаго атома. Но, согласно принятому теперь представленію о строеніи атома, нейтральный наружу атомъ состоитъ изъ равныхъ массъ положительнаго и отрицательнаго электричествъ. Сообразно съ этой точкой зрѣнія мы должны принять, что даже указанное малое измѣненіе атомнаго вѣса не имѣетъ мѣста при „превращеніяхъ $\beta$-лучей“, что атомный вѣсъ продукта превращенія равенъ, слѣдовательно, атомному вѣсу материнскаго вещества.

Слѣдовало бы, пожалуй, принять еще во вниманіе измѣненіе массы, которое согласно принципу относительности должно имѣть мѣсто при радіоактивныхъ превращеніяхъ вслѣдствіе измѣненія содержанія энергіи. Но, какъ недавно вычислилъ Свинне*) (R. Swinne), эти измѣненія столь малы, что мы здѣсь не можемъ принять ихъ во вниманіе.

Предыдущимъ способомъ можно, такимъ образомъ, вычислить атомные вѣса всѣхъ радіоэлементовъ, принадлежащихъ рядамъ урановому, радіевому и торіевому, какъ какъ атомный вѣсъ урана (238,5) и торія (232,4) извѣстны, и всѣ превращенія, происходящія въ этихъ двухъ рядахъ, точно изучены. Что этотъ методъ даетъ вѣрный результатъ, по крайней мѣрѣ, въ первомъ приближеніи, слѣдуетъ изъ того, что онъ даетъ для атомнаго вѣса радія $238{,}5 - 12{,}0 = 226{,}5$, т. е. значеніе, дѣйствительно, весьма хорошо согласующееся съ атомнымъ вѣсомъ радія (225,97), который въ настоящее время извѣстенъ намъ съ большой точностью благодаря прекраснымъ изслѣдованіямъ

*) Physikal. Ztschr. 14, 145 (1913).

О. Гёнигшмида*) (O. Hönigschmid). Отклоненіе обусловливается, вѣроятно, неточностью въ опредѣленіи атомнаго вѣса урана.

Атомный вѣсъ актинія точно еще неизвѣстенъ. Однако, какъ мы увидимъ ниже, представляется вѣроятнымъ, что онъ равенъ атомному вѣсу радія, и поэтому мы можемъ вычислить отсюда атомные вѣса всѣхъ продуктовъ актиніева ряда.

Этимъ способомъ найдено, что атомные вѣса всѣхъ этихъ 35 элементовъ заключаются между 238 и 206. Если бросимъ взглядъ на таблицу періодической системы, то замѣтимъ, что число свободныхъ мѣстъ, имѣющихся въ таблицѣ для этого атомнаго промежутка, настолько мало, что нечего и думать о томъ, чтобы каждому изъ этихъ элементовъ отвести особое мѣсто.

*(Окончаніе слѣдуетъ).*

# О кривой, проходящей сколь угодно близко къ каждой точкѣ плоскости.

*М. Зимина.*

§ 1. Плоская кривая $S$, заданная уравненіями

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad y = b \operatorname{tg} \lambda t,$$

въ которыхъ $a$ и $b$ суть произвольныя положительныя числа, $\lambda$ — положительное ирраціональное число и $t$ — перемѣнный параметръ, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что для каждой точки $(x_0, y_0)$ плоскости можно найти точку кривой $S$, произвольно близкую къ $(x_0, y_0)$.

При выводѣ указаннаго свойства кривой $S$ намъ придется воспользоваться результатомъ изслѣдованій П. Л. Чебышева, изложенныхъ въ его мемуарѣ: „Объ одномъ ариѳметическомъ вопросѣ" **). Въ этомъ мемуарѣ Чебышевъ рѣшаетъ вопросъ о нахожденіи по даннымъ числамъ $a$ и $b$ двухъ наименьшихъ цѣлыхъ чиселъ $X$ и $Y$, при которыхъ абсолютное значеніе выраженія $Y - aX - b$ меньше произвольно малаго заданнаго положительнаго числа $\varepsilon$, т. е.,

$$| Y - aX - b | < \varepsilon. \tag{1}$$

Для нашихъ цѣлей достаточно лишь установить фактъ существованія цѣлыхъ чиселъ $X$ и $Y$, удовлетворяющихъ неравенству (1). Въ

*) Wien. Ber. 121, 1973 (1912).

*) Сочиненія. Петроградъ, 1899, т. I, стр. 637.

такомъ случаѣ доказательство можетъ быть построено очень легко. Предполагая число $a$ ирраціональнымъ, разложимъ его въ непрерывную дробь, и пусть $P/Q$ будетъ одна изъ подходящихъ. Имѣемъ:

$$\left|\frac{P}{Q}-a\right|<\frac{1}{Q^2},$$

откуда

$$|P-aQ|<\frac{1}{Q}.$$

Всегда можно выбрать такую подходящую дробь $P/Q$, что $1/Q$ меньше даннаго $\varepsilon$, и тогда

$$|P-aQ|<\varepsilon.$$

Предположимъ, что частное отъ дѣленія $b$ на $|P-aQ|$ заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми (положительными или отрицательными) числами $m$ и $m+1$

$$m<\frac{b}{|P-aQ|}<m+1,$$

отсюда

$$m\,|P-aQ|<b<(m+1)\,|P-aQ|. \tag{2}$$

Если $P/Q$ есть подходящая четнаго порядка, то

$$\frac{P}{Q}-a>0, \quad P-aQ=|P-aQ|,$$

и изъ неравенства (2) слѣдуетъ:

$$|mP-amQ-b|<\varepsilon, \quad |(m+1)P-a(m+1)Q-b|<\varepsilon,$$

такъ что неравенству (1) можемъ удовлетворить слѣдующими значеніями $X$ и $Y$

$$X=mQ, \quad Y=mP,$$

а также

$$X=(m+1)Q, \quad Y=(m+1)P.$$

Если же подходящая дробь $P/Q$ имѣетъ нечетный порядокъ, то

$$a-\frac{P}{Q}>0, \quad aQ-P=|P-aQ|,$$

и въ этомъ случаѣ изъ того же неравенства (2) получаемъ:

$$|-mP+amQ-b|<\varepsilon, \quad |-(m+1)P+a(m+1)Q-b|<\varepsilon,$$

откуда видимъ, что неравенство (1) удовлетворяется при значеніяхъ:

$$X = -mQ, \quad Y = -mP$$

или

$$X = -(m+1)Q, \quad Y = -(m+1)P.$$

Частное отъ дѣленія $b$ на $|P - aQ|$ можетъ оказаться равнымъ цѣлому числу $m$, и въ этомъ случаѣ между $a$ и $b$ существуетъ линейная зависимость вида:

$$\pm m(P - aQ) - b = 0.$$

§ 2. Обращаемся къ доказательству указаннаго выше свойства кривой $S$. Возьмемъ произвольную точку $(x_0, y_0)$ и положимъ:

$$x_0 = a \operatorname{tg} t_1, \quad y_0 = b \operatorname{tg} \lambda t_2.$$

Изъ этихъ уравненій будемъ имѣть:

$$t_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0}{a} = \alpha + \pi X,$$

$$t_2 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{y_0}{b} = \frac{\beta + \pi Y}{\lambda}, \tag{3}$$

гдѣ $\alpha$ и $\beta$ суть нѣкоторыя опредѣленныя значенія для $\operatorname{arc\,tg} x_0/a$ и $\operatorname{arc\,tg} y_0/b$, напримѣръ, тѣ, которыя заключены въ предѣлахъ $-\pi/2$ и $+\pi/2$, а $X$ и $Y$ — произвольныя цѣлыя числа. Изъ равенствъ (3) выводимъ:

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta + \pi Y}{\lambda} - (\alpha + \pi X).$$

Спрашивается, можно ли числа $X$ и $Y$ выбрать такъ, чтобы модуль разности $t_2 - t_1$ былъ меньше заданнаго произвольно малаго $\eta$, т. е., чтобы выполнялось неравенство

$$|t_2 - t_1| < \eta, \tag{4}$$

которое можно записать въ видѣ

$$\left| \frac{\beta + \pi Y}{\lambda} - (\alpha + \pi X) \right| < \eta,$$

или

$$\left| Y - \lambda X - \frac{\alpha\lambda - \beta}{\pi} \right| < \frac{\lambda\eta}{\pi}. \tag{5}$$

Такъ какъ $\dfrac{\alpha\lambda - \beta}{\pi}$ есть нѣкоторое опредѣленное число, то по предыдущей теоремѣ существуютъ цѣлыя числа $X$ и $Y$, при которыхъ выполняется неравенство (5), и которыя по формуламъ (3) даютъ для $t_1$ и $t_2$ значенія, удовлетворяющія неравенству (4).

Будемъ теперь подъ $X$ и $Y$ въ равенствѣ (3) подразумѣвать такія значенія, при которыхъ имѣетъ мѣсто неравенство (4). Между числами $t_1$ и $t_2$ возьмемъ промежуточное число $t_3$ и разсмотримъ точку кривой $S$

$$x' = a \operatorname{tg} t_3, \quad y' = b \operatorname{tg} \lambda t_3$$

и заданную точку $(x_0, y_0)$

$$x_0 = a \operatorname{tg} t_1, \quad y_0 = b \operatorname{tg} \lambda t_2.$$

Имѣемъ:

$$| t_3 - t_1 | < \eta,$$

$$\cos t_3 = \cos t_1 - 2 \sin \frac{t_3 + t_1}{2} \sin \frac{t_3 - t_1}{2},$$

откуда

$$| \cos t_3 | > | \cos t_1 | - \eta,$$

и, если предположимъ

$$\eta < {}^1/_2 \, | \cos t_1 | \quad \text{или} \quad \eta < \frac{a}{2 \sqrt{x_0^2 + a^2}}, \tag{6}$$

то

$$| \cos t_3 | > {}^1/_2 \, | \cos t_1 |.$$

Затѣмъ изъ равенства

$$x' - x_0 = a (\operatorname{tg} t_3 - \operatorname{tg} t_1) = \frac{a \sin (t_3 - t_1)}{\cos t_3 \cos t_1}$$

въ связи съ предыдущимъ слѣдуетъ:

$$| x' - x_0 | < \frac{2 a \eta}{\cos^2 t_1},$$

иначе

$$| x' - x_0 | < \frac{2 (x_0^2 + a^2) \eta}{a}. \tag{7}$$

Подобнымъ же образомъ изъ неравенства

$$| t_3 - t_2 | < \eta$$

и равенства

$$\cos \lambda t_3 = \cos \lambda t_2 - 2 \sin \frac{\lambda (t_3 + t_2)}{2} \sin \frac{\lambda (t_3 - t_2)}{2}$$

выводимъ

$$| \cos \lambda t_3 | > | \cos \lambda t_2 | - \lambda \eta,$$

и если $\eta$ выбрано такъ, что

$$\lambda \eta < {}^1/_2 \, | \cos \lambda t_2 | \quad \text{или} \quad \eta < \frac{b}{2 \lambda \sqrt{y_0^2 + b^2}}, \tag{8}$$

то

$$| \cos \lambda t_3 | > {}^1/_2 \, | \cos \lambda t_2 |.$$

Далѣе, изъ равенства

$$y'-y_0=b(\operatorname{tg}\lambda t_3-\operatorname{tg}\lambda t_2)=\frac{b\sin\lambda(t_3-t_2)}{\cos\lambda t_3\cos\lambda t_2}$$

получаемъ:

$$|y'-y_0|<\frac{2b\lambda\eta}{\cos^2\lambda t_2},$$

или

$$|y'-y_0|<\frac{2\lambda(y_0^2+b^2)\eta}{b}. \qquad (9)$$

Изъ неравенствъ (7) и (9) получаемъ для разстоянія между точками $(x', y')$ и $(x_0, y_0)$ неравенство

$$\sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}<2\sqrt{\frac{(x_0^2+a^2)^2}{a^2}+\frac{\lambda^2(y_0^2+b^2)}{b^2}}\,\eta. \qquad (10)$$

Пусть $\varepsilon$ будетъ произвольно малое заданнное число. Опредѣлимъ число $\eta$, удовлетворяющее при данномъ $\varepsilon$ տремъ неравенствамъ: (6), (8) и неравенству

$$2\sqrt{\frac{(x_0^2+a^2)^2}{a^2}+\frac{\lambda^2(y_0^2+b^2)^2}{b^2}}\,\eta\leqq\varepsilon, \qquad (11)$$

и затѣмъ беремъ цѣлыя числа $X$ и $Y$, при которыхъ выполняется неравенство (5). По формуламъ (3) опредѣляемъ $t_1$ и $t_2$. Между $t_1$ и $t_2$ выбираемъ какое-либо промежуточное число $t_3$. Неравенства (10) и (11) показываютъ, что разстояніе точки $x'=a\operatorname{tg}t_3$, $y'=b\operatorname{tg}\lambda t_3$ кривой $S$ до данной точки $(x_0, y_0)$ меньше $\varepsilon$.

Примѣръ. Возьмемъ кривую

$$x=\operatorname{tg}t,\quad y=\operatorname{tg}\sqrt{2}t$$

и найдемъ на ней точку, разстояніе которой до точки (1, 1) меньше даннаго $\varepsilon$. Въ этомъ случаѣ

$$\lambda=\sqrt{2},\quad a=1,\quad b=1,\quad x_0=1,\quad y_0=1.$$

За $\alpha$ и $\beta$ въ равенствахъ (3) примемъ $\pi/4$. Неравенства (6), (8) и (11) для разсматриваемаго случая даютъ:

$$\eta<\frac{1}{2\sqrt{2}},\qquad \eta<\frac{1}{4},\qquad \eta\leqq\frac{\varepsilon}{4\sqrt{3}},$$

такъ что при $\varepsilon<1$ можемъ принять

$$\eta=\frac{\varepsilon}{4\sqrt{3}}.$$

Неравенство же (5) при указанныхъ выше значеніяхъ $\alpha$, $\beta$, $\eta$ обращается въ слѣдующее

$$\left|Y-\sqrt{2}X-\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right|<\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{4\sqrt{3}\pi}. \qquad (12)$$

Цѣлыя числа $X$, $Y$, удовлетворяющія этому неравенству, могутъ быть найдены такъ. Умножимъ обѣ части неравенства (12) на 4 и полученное неравенство напишемъ въ видѣ:

$$\left|(4Y+1)-\sqrt{2}(4X+1)\right|<\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3\pi}}.$$

Возьмемъ разложеніе $\sqrt{2}$ въ непрерывную дробь

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

и разсмотримъ рядъ подходящихъ дробей

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408},\ \frac{1393}{985},\ldots$$

Не трудно замѣтить и затѣмъ провѣрить, что числители и знаменатели подходящихъ порядка

$$1,\ 5,\ 9,\ldots,\ 4n+1, \tag{14}$$

имѣютъ видъ $4N+1$. Поэтому для нахожденія $X$ и $Y$, удовлетворяющихъ неравенству (13), выбираемъ изъ подходящихъ дробей указаннаго порядка (14) дробь $P/Q$ такимъ образомъ, чтобы

$$\frac{1}{Q}<\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3\pi}}. \tag{15}$$

Для этой дроби

$$\left|P-\sqrt{2}Q\right|<\frac{1}{Q}<\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3\pi}},$$

полагая же

$$4X+1=Q,\quad 4Y+1=P,$$

найдемъ $X$ и $Y$. Пусть, напримѣръ, $\varepsilon=\frac{1}{1000}$. Имѣемъ:

$$\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{1000\sqrt{3\pi}}>\frac{1}{10000}.$$

Тринадцатая подходящая $\frac{47321}{33461}$ будетъ удовлетворять условію (15), можемъ поэтому положить:

$$4X+1=33461,\quad 4Y+1=47321,$$

откуда

$$X=8360,\quad Y=11830.$$

По формуламъ (3) находимъ:

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + 8365\pi = 8365{,}25\pi, \qquad t_2 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{11830\pi}{\sqrt{2}} = 5915{,}125\sqrt{2}\pi.$$

За $t_3$ принимаемъ какое угодно число, заключающееся между $t_1$ и $t_2$, напримѣръ, среднее ариѳметическое

$$t_3 = \frac{t_1 + t_2}{2} = (4182{,}625 + 2957{,}5625\sqrt{2})\,\pi.$$

Точка кривой $S$

$$x' = \operatorname{tg} t_3, \quad y' = \operatorname{tg}\sqrt{2}t_3$$

будетъ находиться отъ точки (1, 1) на разстоянiи, не превышающемъ $\frac{1}{1000}$.

§ 3. Переходимъ къ изслѣдованiю вида кривой $S$. Будемъ предполагать, что въ уравненiяхъ кривой

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad y = b \operatorname{tg} \lambda t \tag{16}$$

число $\lambda > 1$. Если бы было $\lambda < 1$, то, вводя въ уравненiя (16) вмѣсто $t$ перемѣнное $\tau$, связанное съ $t$ уравненiемъ $\lambda t = \tau$, мы получили бы вмѣсто системы (16) систему

$$x = a \operatorname{tg} \frac{1}{\lambda}\tau, \quad y = b \operatorname{tg} \tau,$$

въ которой $\frac{1}{\lambda} > 1$.

Изъ уравненiй (16) видно, что абсцисса $x$ обращается въ безконечность, если $t$ получаетъ одно изъ значенiй

$$\cdots -\frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \ldots, \tag{17}$$

вообще, если

$$t = \frac{(2i-1)\,\pi}{2}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для удобства введемъ обозначенiе

$$a_i = \frac{(2i-1)\,\pi}{2}$$

и рядъ (17) напишемъ такъ

$$\cdots a_{-2}, \quad a_{-1}, \quad a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots \tag{18}$$

Равнымъ образомъ, ордината $y$ кривой $S$ обращается въ безконечность для значенiй $t$

$$\cdots -\frac{5\pi}{2\lambda}, \quad -\frac{3\pi}{2\lambda}, \quad -\frac{\pi}{2\lambda}, \quad \frac{\pi}{2\lambda}, \quad \frac{3\pi}{2\lambda}, \quad \frac{5\pi}{2\lambda}, \cdots \tag{19}$$

вообще, когда

$$t = \frac{(2k-1)\pi}{2\lambda}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Полагая

$$\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\lambda},$$

можемъ вышеуказанныя значенія (19) для $t$ представить рядомъ

$$\ldots \beta_{-2}, \ \beta_{-1}, \ \beta_0, \ \beta_1, \ \beta_2, \ldots \tag{20}$$

Члены ряда (18) не имѣютъ себѣ равныхъ въ ряду (20). Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое равенство двухъ членовъ рядовъ (18) и (20) существовало, то мы имѣли бы

$$\frac{(2i-1)\pi}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{2\lambda}$$

и изъ этого равенства получили бы для $\lambda$ раціональное значеніе вопреки предположенію.

По свойству функцій $\operatorname{tg} z$ абсцисса и ордината кривой $S$ будутъ возрастать съ возрастаніемъ $t$. Можно также сказать, что ордината $y$ возрастаетъ съ возрастаніемъ $x$. Всякій разъ, когда одна изъ координатъ съ возрастаніемъ $t$ обращается въ безконечность, она мѣняетъ знакъ съ $+$ на $-$.

Далѣе, когда $x$ при $t = \alpha_i$ обращается въ безконечность, ордината $y$ получаетъ конечное значеніе

$$y = b \operatorname{tg} \lambda \alpha_i.$$

Послѣднее уравненіе при $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, опредѣляетъ рядъ асимптотъ кривой $S$, параллельныхъ оси $x$-овъ. Для $t = \beta_k$, т. е., когда ордината кривой обращается въ безконечность, абсцисса $x$ получаетъ опредѣленное значеніе

$$x = a \operatorname{tg} \beta_k.$$

Давая въ этомъ уравненіи $k$ значенія $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получимъ рядъ асимптотъ кривой $S$, параллельныхъ оси $y$-ковъ.

Предположимъ, что числа рядовъ (18) и (20) сгруппированы въ одинъ рядъ въ порядкѣ возрастанія этихъ чиселъ. Составленный такимъ образомъ рядъ обозначимъ такъ:

$$\cdots \gamma_{-2}, \ \gamma_{-1}, \ \gamma_0, \ \gamma_1, \ \gamma_2, \cdots \tag{21}$$

Возьмемъ промежутокъ $(\gamma_m, \gamma_{m+1})$, опредѣляемый двумя смежными членами ряда (21), и разсмотримъ ту вѣтвь кривой $S$, которая соотвѣтствуетъ измѣненію $t$ въ этомъ промежуткѣ. Для всякаго значенія $t$ внутри промежутка кривая $S$ непрерывна, на границахъ же промежутка одна изъ координатъ кривой обращается въ безконечность. Характеръ разсматриваемой вѣтви кривой будетъ зависѣть отъ того, какому изъ рядовъ (18) и (20) принадлежатъ границы $\gamma_m$

и $\gamma_{m+1}$ промежутка. Замѣтимъ, что такъ какъ разность двухъ смежныхъ членовъ ряда (18) равна $\pi$, а разность такихъ же членовъ ряда (20) равна $\pi/\lambda$ и, слѣдовательно, меньше $\pi$, то между двумя последовательными членами ряда (18) будетъ заключаться по крайней мѣрѣ одинъ членъ ряда (20). Поэтому относительно промежутка $(\gamma_m, \gamma_{m+1})$ можно сдѣлать три предположенія.

1) Промежутокъ $(\gamma_m, \gamma_{m+1})$ образованъ числомъ ряда (18) $\gamma_m = \alpha_i$ и числомъ ряда (20) $\gamma_{m+1} = \beta_k$. Въ такомъ случаѣ при измѣненіи $t$ отъ $\alpha_i$ до $\beta_k$ $x$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $a \operatorname{tg} \beta_k$, а $y$ возрастаетъ отъ $b \operatorname{tg} \lambda\alpha_i$ до $+\infty$. Соотвѣтствующая промежутку $(\alpha_i, \beta_k)$ вѣтвь кривой имѣетъ двѣ асимптоты

$$y = b \operatorname{tg} \lambda\alpha_i, \quad x = a \operatorname{tg} \beta_k,$$

соотвѣтственно параллельныя оси $x$-овъ и оси $y$-овъ.

2) Промежутокъ $(\gamma_m, \gamma_{m+1})$ образованъ двумя членами ряда (20)

$$\gamma_m = \beta_k, \quad \gamma_{m+1} = \beta_{k+1}.$$

При измѣненіи $t$ отъ $\beta_k$ до $\beta_{k+1}$ $x$ возрастаетъ отъ $a \operatorname{tg} \beta_k$ до $a \operatorname{tg} \beta_{k+1}$, а $y$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Соотвѣтствующая промемежутку $(\beta_k, \beta_{k+1})$ вѣтвь кривой имѣетъ двѣ асимптоты

$$x = a \operatorname{tg} \beta_k, \quad x = a \operatorname{tg} \beta_{k+1},$$

параллельныя оси $y$-овъ.

3) Промежутокъ $(\gamma_m, \gamma_{m+1})$ составленъ изъ числа $\gamma_m = \beta_k$ ряда (20) и числа $\gamma_{m+1} = \alpha_l$ ряда (18). Въ этомъ случаѣ при измѣненіи $t$ отъ $\beta_k$ до $\alpha_l$ $x$ будетъ возрастать отъ $a \operatorname{tg} \beta_k$ до $+\infty$, а $y$ будетъ возрастать отъ $-\infty$ до $b \operatorname{tg} \lambda\alpha_l$. Соотвѣтствующая промежутку $(\beta_k, \alpha_l)$ вѣтвь кривой имѣетъ двѣ асимптоты

$$x = a \operatorname{tg} \beta_k, \quad y = b \operatorname{tg} \lambda\alpha_l,$$

параллельная соотвѣтственно осямъ $y$-овъ и $x$-овъ.

Такимъ образомъ, изслѣдованіе показываетъ, что кривая $S$ состоитъ изъ безконечно большого*) числа вѣтвей двухъ родовъ. Вѣтви одного рода имѣютъ каждая двѣ асимптоты, параллельныя соотвѣтственно двумъ координатнымъ осямъ, а каждая изъ вѣтвей другого рода имѣетъ двѣ асимптоты, параллельныя одной координатной оси, именно (при $\lambda > 1$), оси $y$-овъ.

Замѣчательно то обстоятельство, что всѣ вѣтви кривой $S$, располагаясь по плоскости неограниченно близко одна къ другой, тѣмъ не менѣе не пересѣкаются другъ съ другомъ въ конечной части плоскости. Равнымъ образомъ, каждая вѣтвь кривой не пересѣкаетъ самое себя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такая точка $(x', y')$ пересѣченія су-

*) Совокупность всѣхъ вѣтвей кривой $S$, однозначно соотвѣтствующихъ совокупности промежутковъ между числами ряда (21), образуетъ, очевидно, счетное множество.

ществовала, то для двухъ различныхъ значенiй параметра $t$, напримѣръ, для $t=t_1$ и $t=t_2$ имѣли бы

$$x'=a\,\mathrm{tg}\,t_1=a\,\mathrm{tg}\,t_2,\quad y'=b\,\mathrm{tg}\,\lambda t_1=b\,\mathrm{tg}\,\lambda t_2,$$

откуда

$$t_1-t_2=\pi X,\quad \lambda t_1-\lambda t_2=\pi Y,$$

гдѣ $X$ и $Y$ нѣкоторыя цѣлыя числа. Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ при условiи $t_1 \neq t_2$ получаемъ для $\lambda$

$$\lambda=\frac{Y}{X},$$

а это противорѣчитъ предположенiю объ ирраціональности $\lambda$.

Доказанное свойство кривой $S$ можно иначе формулировать такъ: кривая не имѣетъ кратныхъ точекъ въ конечной части плоскости.

§ 4. Разсужденiями, вполнѣ сходными съ изложенными въ § 2, можно показать, что

1) Кривая

$$x=a\sin t,\quad y=b\sin\lambda t$$

проходитъ сколь угодно близко къ каждой точкѣ внутри прямоугольника, ограниченнаго прямыми

$$x=\pm a,\quad y=\pm b.$$

На этой кривой существуютъ кратныя точки. Дѣйствительно, уравненiя

$$a\sin t_1=a\sin t_2,\quad b\sin\lambda t_1=b\sin\lambda t_2$$

будутъ удовлетворены, если примемъ или

$$t_1-t_2=2\pi X,\quad t_1+t_2=\frac{2\pi Y+\pi}{\lambda},\quad \text{или}\quad t_1+t_2=2\pi X+\pi,\quad t_1-t_2=\frac{2\pi Y}{\lambda},$$

гдѣ $X$ и $Y$ — произвольныя цѣлыя числа. Рѣшая ту или другую систему, найдемъ два различныя (при $X \neq 0$ въ первой системѣ и $Y \neq 0$ во второй) значенiя $t_1$ и $t_2$, которымъ будетъ соотвѣтствовать одна и та же точка кривой.

2) Кривая, заданная уравненiями въ полярныхъ координатахъ

$$\varrho=a\sin t,\quad \omega=b\,\mathrm{tg}\,\lambda t,$$

обладаетъ свойствами предыдущей кривой по отношенiю къ площади, ограниченной окружностью, описанной изъ полюса радiусомъ $a$.

# ПОЛЕМИКА.

## Замѣтка по поводу статьи М. Маліева „Задача о четырехъ краскахъ", помѣщенной въ № 621 „Вѣстника".

*Прив.-доц С. Бернштейна.*

Главная часть разсужденія г. М. Маліева доказываетъ невозможность существованія группы изъ болѣе, чѣмъ четырехъ областей, которыя бы всѣ попарно между собой прикасались. Это утвержденіе, совершенно справедливое, доказано правильно, но заключеніе, которое авторъ выводитъ изъ него, начиная со словъ „Теперь уже легко доказать, что четырьмя красками можно раскрасить любую карту" основано на недоразумѣніи. Въ самомъ дѣлѣ, авторъ составляетъ 5 рядовъ областей, выкрашенныхъ соотвѣтственно особой краской

$$A_1,\ B_1, \ldots, \tag{I}$$

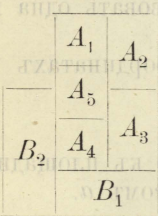
$$A_2,\ B_2, \ldots, \tag{II}$$

$$A_3,\ B_3, \ldots, \tag{III}$$

$$A_4,\ B_4, \ldots, \tag{IV}$$

$$A_5,\ B_5, \ldots, \tag{V}$$

которые, по построенію, удовлетворяютъ лишь двумъ условіямъ: 1⁰ двѣ области одного и того же ряда не соприкасаются, 2⁰ каждая область, не входящая въ предыдущіе ряды, соприкасается, по крайней мѣрѣ, съ одной областью каждаго предыдущаго ряда, и утверждаетъ, что въ 5-мъ ряду не можетъ уже оказаться ни одной области, потому что каждая область 5-го ряда, соприкасаясь съ одной областью изъ каждаго изъ первыхъ четырехъ рядовъ, составила бы вмѣстѣ съ этими четырьмя областями группу изъ 5 попарно соприкасающихся областей.




Ошибка автора кроется въ послѣднемъ соображеніи, ибо мы можемъ утверждать, напримѣръ, что $A_5$ соприкасается съ $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$; но вполнѣ возможно, что $A_4$ вмѣсто того, чтобы соприкасаться съ $A_1$ и $A_2$ соприкасается съ $B_1$ и $B_2$, поэтому $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, вовсе не должны составлять группы. Для того, чтобы съ полной наглядностью уяснить себѣ недоразумѣніе, на которомъ основанъ указанный пріемъ для раскрашиванія областей четырьмя красками, укажемъ простой примѣръ, гдѣ онъ не приводитъ къ цѣли.

Предложенный чертежъ иллюстрируетъ сдѣланное мною замѣчаніе. Сама теорема о четырехъ краскахъ, вѣроятно, справедлива, а предложенныя мною семь областей нетрудно раскрасить даже только тремя красками.

# БИБЛІОГРАФІЯ.

## I. Рецензіи.

**Я. И. Перельманъ.** *Далекіе міры.* Астрономическій очеркъ съ 32 рисунками въ текстѣ и 2 картинами въ краскахъ. Изданіе П. П. Сойкина. Петроградъ, 1914. Стр. 36. Ц. 50 к.

Эта книга посвящена планетамъ. Въ первой главѣ очень отчетливо и ясно представленъ планъ и масштабъ нашей солнечной системы; во второй главѣ авторъ даетъ намъ описаніе Меркурія и Венеры; третья глава посвящена Марсу, четвертая — астероидамъ; пятая — Юпитеру и Сатурну; наконецъ, шестая — Урану и Нептуну. Авторъ отбросилъ рутинный пріемъ канцеляризаціи, состоящій въ сообщеніи полуанекдотическихъ свѣдѣній объ обстоятельствахъ открытій планетъ или явленій на нихъ, и возможно полно наглядно и увлекательно описалъ физическія условія, находящіяся на планетахъ. Далѣе, необходимыя числовыя данныя авторъ сумѣлъ дать въ видѣ живыхъ и ясныхъ примѣровъ. Въ книгѣ много свѣжаго матеріала, мало знакомаго широкой публикѣ. Рисунки исполнены хорошо и подобраны весьма умѣло, къ тому же многія изъ нихъ появляются въ Россіи въ первый разъ. Вообще эта книжка заполняетъ тотъ пробѣлъ, который существовалъ въ нашей популярной, народной литературѣ изъ-за неимѣнія книги, посвященной спеціально планетамъ. Этой книгѣ безспорно принадлежитъ мѣсто въ каждой народной и школьной библіотекѣ и читальнѣ.

*Н. Каменьщиковъ.*

---

## II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

---

**Н. Каменьщиковъ.** *Сокращенный курсъ космографіи.* Съ 83 рисунками и приложеніемъ статей: „Что мнѣ наблюдать на небѣ?", „Простѣйшія наблюденія" и звѣздной карты. Учебникъ для среднихъ учебныхъ заведеній. Изданіе „Новаго Времени" А. С. Суворина. Петроградъ, 1914. Стр. 110 + VIII. Ц. 70 к.

### Изъ предисловія.

„Сокращенный курсъ космографіи" предназначается для тѣхъ учебныхъ заведеній, гдѣ математическая подготовка сравнительно невелика, напримѣръ: женскія гимназіи М. Н. П., учебныя заведенія Вѣдомства Императрицы Маріи, женскія епархіальныя училища, духовныя семинаріи и т. п. учебныя заведенія, или — гдѣ на преподаваніе космографіи удѣляется не болѣе одного часа въ недѣлю, напримѣръ: нѣкоторыя мужскія гимназіи и коммерческія училища.

Основная идея этого учебника та же, какая проведена въ моемъ подробномъ курсѣ космографіи [Космографія (начальная астрономія). Изданіе „Новаго Времени". СПБ., 1912. Ц. 1 р. 20 к.], т. е. наглядное и живое изложеніе началъ астрономіи; но только большинство математическихъ формулъ здѣсь отсутствуетъ, нѣтъ строгихъ расчетовъ и сложныхъ чертежей, — выпущено все, чего нельзя пройти при одномъ урокѣ въ недѣлю и при небольшой математической подготовкѣ.

Главная цѣль, какую преслѣдовалъ авторъ, это заинтересовать учащагося и дать ему ясное и отчетливое изложеніе началъ астрономіи, безъ знанія которыхъ нельзя быть образованнымъ человѣкомъ.

При составленіи этого курса были приняты во вниманіе всѣ указанія Ученаго Комитета М. Н. П. и исправлены всѣ недочеты предыдущаго изданія. Также приняты во вниманіе всѣ пожеланія Перваго Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей Физики, Химіи и Космографіи въ январѣ 1914 г. въ С.-Петербургѣ и, сообразно съ этимъ, сдѣланы сокращенія, исправленія и введены дополненія: „Что мнѣ наблюдать на небѣ?“ и „Простѣйшія наблюденія“. Что же касается до методики космографіи, то интересующагося этимъ я отсылаю къ моему подробному курсу космографіи, гдѣ приведенъ методическій указатель, пользуясь которымъ преподаватель можетъ по своему измѣнять изложеніе предмета и еще болѣе заинтересовать учащихся. Задачи и вопросы къ этому курсу, а также и для практическихъ упражненій по космографіи читатель найдетъ въ моемъ „Сборникѣ задачъ по космографіи“ (около 800 задачъ изъ всѣхъ отдѣловъ космографіи, съ приложеніемъ небесной планисферы, изданіе „Новаго Времени“. СПБ., 1913. Ц. 75 к.).

---

# ЗАДАЧИ.

## Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

---

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 235** (6 сер.). Доказать, что изъ равенства

$$u+v=1$$

вытекаетъ равенство

$$u^m\left(1+C_m^1 v+C_{m+1}^2 v^2+\cdots+C_{2m-2}^{m-1} v^{m-1}\right)+v^m\left(1+C_m^1 u+C_{m+1}^2 u^2+\cdots+C_{2m-2}^{m-1} u^{m-1}\right)=$$

гдѣ $C_p^q$ обозначаетъ вообще число сочетаній изъ $p$ элементовъ по $q$.

*Е. Буницкій* (Одесса).

**№ 236** (6 сер.). Доказать, что уравненіе

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$

не имѣетъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, кромѣ рѣшенія $x=0$, $y=0$.

*М. Бабинъ* (Могилевъ).

**№ 237** (6 сер.). Доказать, что многочленъ

$$x\left(x^{n-1}-na^{n-1}\right)+a^n(n-1)$$

дѣлится на $(x-a)^2$.

*Л. Закутинскій* (Черкассы).

**№ 238** (6 сер.). Доказать, что произведеніе

$$a^2b^2(a^2+b^2)(a^2-b^2)(a^4-1)$$

при $a$ и $b$ цѣлыхъ дѣлится на 900; если же $a$ нечетно, то данное произведеніе дѣлится на 7200.

*Д. Ханжіевъ* (Армавиръ).

---

Поправка. Въ задачѣ **№ 227**, помѣщенной въ номерѣ № 622 **«Вѣстника»**, вмѣсто $7(x+2)$ слѣдуетъ читать $7(x+z)$.

---

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

## Отдѣлъ I.

**№ 192** (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x(3-x)^5-48(3-x)+64=0.$$

Полагая (1) $3-x=y$, приводимъ данное уравненіе къ виду

$$(1)\quad y^6-3y^5+48y-64=0.$$

Такъ какъ

$$y^6-3y^5+48y-64=(y^2)^3-4^3-3y(y^4-4^2)=(y^2-4)(y^4+4y^2+16-3y^3-12)=$$

$$=(y^2-4)\left[(y^4-8y^2+16)-(3y^3-12y^2+12y)\right]=(y^2+4)\left[(y^2-4)^2-3y(y^2-4y+4)\right]=$$

$$=(y^2-4)\left[(y-2)^2(y+2)^2-3y(y-2)^2\right]=(y^2-4)(y-2)^2\left[(y+2)^2-3y\right]=$$

$$=(y-2)^3(y+2)(y^2+y+4)=0,$$

то уравненіе (1) можно записать въ видѣ $(y-2)^3(y+2)(y^2+y+4)=0$. Поэтому уравненіе (1) распадается на три уравненія

$$(y-2)^3=0,\quad y+2=0\quad \text{и}\quad y^2+y+4=0,$$

рѣшая которыя, находимъ всѣ корни уравненія (1), а именно

$$y_{1,2,3}=2,\quad y_4=-2,\quad y_{5,6}=\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2},$$

откуда получаемъ [см. (1)] шесть корней

$$x_{1,2,3}=1,\quad x_4=5,\quad x_{5,6}=\frac{7\pm i\sqrt{15}}{2}$$

первоначальнаго уравненія.

*И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *N. N.* (Тифлисъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *С. Дрождинъ* (Балта); *В. Ревзинъ* (Сумы); *Н Казариновъ* (Петроградъ); *Н Кунаховичъ* (Вятка); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *Н. Кованько* (Вышній Волочокъ).

**№ 193** (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему уравненій*

$$x^2-y^2-z^2=1,\quad y+z-x=3.$$

Опредѣляя $x$ изъ второго уравненія, находимъ, что

$$(1)\quad x=y+z-3.$$

Подставляя это значеніе $x$ въ первое уравненіе, приводимъ его послѣ обычныхъ преобразованій и послѣ сокращенія на 2 къ слѣдующему виду:

$$(2)\quad yz-3y-3z+4=0.$$

Опредѣляя $y$ изъ уравненія (2), получимъ $y=\dfrac{3z-4}{z-3}$, или

$$(3)\quad y=3+\frac{5}{z-3}.$$

Для того, чтобы $y$ и $z$, будучи цѣлыми числами, удовлетворяли уравненію (3), необходимо и достаточно, чтобы разность $z-3$ равнялась одному изъ дѣлителей 5-ти, т. е. имѣла одно изъ значеній $\pm 1$, $\pm 5$. Опредѣляя послѣдовательно $z$ изъ равенствъ $z-3=1$, $z-3=-1$, $z-3=5$, $z-3=-5$, подставляя найденныя значенія $z$ послѣдовательно въ равенство (3), а затѣмъ — найденныя такимъ образомъ значенія $y$ и соотвѣтствующія значенія $z$ въ равенство (1), находимъ, что всѣ цѣлыя рѣшенія предложенной системы выражаются формулами

$$x_1=-3,\ y_1=-2,\ z_1=2;\quad x_2=9,\ y_2=8,\ z_2=4;\quad x_3=9,\ y_3=8,\ z_3=4;$$

$$x_4=-3,\ y_4=2,\ z_4=-2.$$

*И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Шапошниковъ* (Н.-Новгородъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *В. Кунаховичъ* (Вятка); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *А. Сердобинскій* (Петроградъ).

**№ 194** (6 сер.). *Показать, что существуетъ безконечное множество функцій* $\varphi(x)$, *удовлетворяющихъ тожественно равенству*

$$\varphi[\varphi(x)]=x,$$

*и найти общій способъ для построенія любой изъ нихъ.*

Называя значенія искомой функція $\varphi(x)$ черезъ $y$, имѣемъ равенство (1) $y=\varphi(x)$, и, по условію, $\varphi[\varphi(x)]=x$, или же (2) $\varphi(y)=x$. Записавъ равенство (2) въ видѣ $x=\varphi(y)$, складывая это равенство съ равенствомъ (1) и перенося всѣ члены въ первую часть, получимъ

$$(3)\quad y+x-\varphi(x)-\varphi(y)=0.$$

Лѣвая часть уравненія (3) симетрична относительно $x$ и $y$, при чемъ изъ формулъ (1) и (2) слѣдуетъ, что, полагая $y=\varphi(x)$, мы тожественно удовлетворимъ уравненію (3); другими словами, функцію $\varphi(x)$ можно разсматривать, какъ неявную функцію, опредѣляемую уравненіемъ (3). Кромѣ того, изъ равенства $\varphi[\varphi(x)]=x$ вытекаетъ, что значенія искомой функціи $\varphi(x)$ должны падать въ тотъ же промежутокъ, въ которомъ опредѣлена функція $\varphi(x)$. Наоборотъ, пусть $F(x, y)$ есть такая симетричная функція отъ $x$ и $y$, что, приравнявъ ее нулю, можно изъ полученнаго уравненія опредѣлить $y$, какъ функцію отъ $x$, и пусть значенія полученной такимъ образомъ функціи отъ $x$ падаютъ въ промежутокъ, въ которомъ опредѣлена эта функція; тогда опредѣленная указаннымъ образомъ функція есть одна изъ искомыхъ функцій. Дѣйствительно, пусть

$$(4) \quad F(x, y)=0,$$

при чемъ $F(x, y)$ есть симетричная функція отъ $x$ и $y$. Опредѣливъ изъ уравненія (4) $y$, получимъ равенство (5) $y=\varphi(x)$. Если значенія этой функціи падаютъ въ тотъ промежутокъ, въ которомъ опредѣлена функція $\varphi(x)$, то, записавъ на основаніи симетріи функціи $F(x, y)$ уравненіе (4) въ видѣ $F(y, x)=0$ и опредѣляя $x$ въ функціи отъ $y$, получимъ $x=\varphi(y)$. Подставивъ въ послѣднее равенство значеніе $y$ изъ уравненія (5), приходимъ къ тожеству $x=\varphi[\varphi(x)]$, откуда ясно, что $\varphi(x)$ есть одна изъ безчисленнаго множества искомыхъ функцій. Пусть, напримѣръ, $F(x, y)=x+y-c$, гдѣ $c$ — постоянное число. Изъ уравненія $x+y-c=0$ получимъ $y=c-x$, и $\varphi(x)=c-x$ есть одна изъ искомыхъ функцій; дѣйствительно, $\varphi[\varphi(x)]=c-(c-x)=x$. Пусть теперь $F(x,y)=a^x+a^y-1$, гдѣ $0<a<1$. Полагая $a^x+a^y-1=0$, получимъ отсюда при положительномъ $x$

$$a^y=1-a^x, \quad y=\lg_a(1-a^x)=\varphi(x), \quad \varphi[\varphi(x)]=\lg_a(1-a^{\lg_a(1-a^x)})=$$

$$=\lg_a[1-(1-a^x)]=\lg_a a^x=x.$$

Изъ первой части рѣшенія ясно, что указаннымъ методомъ можно получить всякую изъ искомыхъ функцій.

*А Сердобинскій* (Петроградъ); *N.*

**№ 197** (6 сер.). *Упростить выраженіе*

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}.$$

Принимая во вниманіе, что квадратный корень имѣетъ два значенія, различающіяся лишь по знаку, и пользуясь формулой Moivr'a*), получимъ, что

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$

*) Вмѣсто этой формулы можно также примѣнить непосредственно формулу извлеченія квадратнаго корня изъ комплекснаго числа: см. алгебра Киселева, § 231, стр. 201, изд. 1914 г.

Взявъ послѣдовательно передъ обоими радикалами положительные, передъ обоими отрицательные знаки, передъ первымъ положительный знакъ и передъ вторымъ — отрицательный, наконецъ, — передъ первымъ отрицательный, а передъ вторымъ положительный знакъ, находимъ четыре вообще возможныхъ значенія даннаго выраженія, а именно $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$. Если условиться принять за главныя значенія радикаловъ $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$ и $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ тѣ, которыя отвѣчаютъ первой изъ четырехъ указанныхъ комбинацій, то получимъ $\sqrt{6}$. То же рѣшеніе можно получить и иначе. Полагая $x=\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, получимъ послѣ возвышенія въ квадратъ, что

$$x^2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}\pm 2\sqrt{1^2-i^2(\sqrt{3})^2}=2\pm 2\sqrt{4}=2\pm 4,$$

откуда $x^2=6$ или $x^2=-2$, а потому $x=\pm\sqrt{6}$ или $x=\pm i\sqrt{2}$.

*М. Бабинъ* (Петроградъ); *В. Комаровъ* (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *М. Быкъ* (Кіевъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *N. N.* (Тифлисъ); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *Н. Кунаховичъ* (Вятка); *Л. Горовицъ* (Одесса); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Г. Юньевъ* (Вологда); *В. Ковanько* (Вышній Волочекъ).

**№ 198** (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{x+11}{2}-\frac{3x+1}{\sqrt{x-1}}=0.$$

Полагая (1) $\sqrt{x-1}=y$, находимъ, по возвышеніи въ квадратъ, что $x-1=y^2$, откуда (2) $x=1+y^2$. При помощи равенствъ (1) и (2) данное уравненіе приводится къ виду $\frac{12+y^2}{2}-\frac{4+3y^2}{y}=0$, или, послѣ обычныхъ преобразованій, къ виду $y^3-6y^2+12y-8=0$, т. е. $(y-2)^3=0$, откуда $y=2$, [см. (2)] $x=5$.

*М. Быкъ* (Кіевъ); *В. Комаровъ* (Петроградъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *С. Дрожжинъ* (Балта); *В. Ревзинъ* (Сумы); *А. Сердобинскій* (Петроградъ); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *К. Зрене* (Москва); *N. N.* (Тифлисъ); *А. Ильинъ* (Кіевъ); *А. Кованько* (Вышній Волочекъ); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *Л. Горовицъ* (Одесса); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Г. Юньевъ* (Вологда); *А. Бронштейнъ* (Одесса).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
ищется