№ 493.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLII-го Семестра № 1-й.

...ЕССА.
...го О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1909.

Открытъ пріемъ подписки и объявленій

на 1909 годъ

ЕЖЕНЕДѢЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРНО-НАУЧНАЯ ГАЗЕТА

„Спутникъ Средней Школы и Экстерна"

Новый органъ ставитъ себѣ цѣлью обслуживать интересы и освѣщать жизнь средней школы въ самыхъ разнообразныхъ отношеніяхъ. Въ виду этого редакція приложитъ всѣ силы, чтобы онъ оказался дѣйствительнымъ другомъ-спутникомъ учащихъ, учащихся и общества, для котораго дороги интересы средней школы.

Съ особеннымъ вниманіемъ газета будетъ относиться къ облегченію тернистаго пути тѣхъ лицъ, которые по различнымъ причинамъ не могли попасть въ среднюю школу и очутились въ рядахъ **экстерновъ.** Избавить по мѣрѣ возможности отъ напрасной траты силъ, облегчить и уяснить наиболѣе трудное въ курсѣ средней школы, освѣтить часто мѣняющееся правовое положеніе экстерна—вотъ одна изъ главныхъ задачъ новой газеты.

ПРОГРАММА: 1) Руководящія статьи. 2) Общедоступное изложеніе наиболѣе трудныхъ отдѣловъ по предметамъ средне-учебныхъ заведеній. 3) Обозрѣніе письменныхъ работъ по словесности и математикѣ, предлагавшихся въ разныхъ гимназіяхъ въ теченіе года и на экзаменахъ — преимущественно выпускныхъ. 4) Опыты разработки наиболѣе важныхъ сочиненій и типичныхъ задачъ съ объясненіями сообразно требованіямъ средне-учебныхъ заведеній. 5) Критическіе отзывы о новостяхъ учебной литературы для экстерновъ и средней школы, а также библіографическій отдѣлъ вообще. 6) Хроника школьной жизни. 7) Очерки изъ жизни средней школы за-границей. 8) Физическое воспитаніе въ средней школѣ. 9) Статистическія свѣдѣнія о державшихъ и выдержавшихъ экстернахъ при разныхъ гимназіяхъ и испытательн. комит. учебн. окр. 10) Обзоръ русской и заграничной жизни. 11) Обзоръ русской и заграничной печати. 12) Очерки по новѣйшей русской и иностранной литературѣ. 13) Фельетоны. 14) Корреспонденціи. 15) Иллюстраціи и чертежи. 16) Почтовый ящикъ, гдѣ читатель найдетъ отвѣты на свои вопросы. 17) Наука и забава (игры, развлеченія, спортъ). 18) Объявленія. 19) Обширный справочный отдѣлъ.

Въ газетѣ принимаютъ участіе: А. К. Анохинъ, Ю. А. Бельке, И. М. Билликъ, Г. С. Бродскій, П. А. Виленскій, Л. Войтоловскій, Я. С. Гольденвейзеръ, Н. В. Валентиновъ, В. С. Григорьевъ, В. О. Гришманюкъ, Homunculus, Г. А. Девильковскій, проф. Н. Б. Делоне, Н. И. Драгановъ, И. Я. Дриллихъ, Д. О. Заславскій, В. А. Корвинъ-Красинскій, А. Козаринскій, худ. В. Г. Козловскій, проф. Т. В. Локоть, К. Ѳ. Лебединцевъ, В. И. Лорченко, Н. И. Лорченко, Д. М. Марголинъ, С. Г. Модржеевскій, А. Н. Мукаловъ, А. П. Налимовъ, О. А. Португаловъ, А. В. Португаловъ, И. М. Стешенко, А. Селихановичъ, К. Слонинъ, А. Слонинъ, Л. Фейгинъ, прив.-доц. В. А. Чаговецъ, И. З. Шендрикъ, Е. Г. Шольпъ, П. Шубинъ, худ. И. Уодъ и др.

Каждый № газеты будетъ содержать отъ 24 до 32 страницъ текста въ два столбца формата „Нивы". Редакція надѣется давать при газетѣ отдѣльныя приложенія по предметамъ учебной литературы.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: въ годъ **4** р. **40** к., полъ года **2** р. **30** к., 3 мѣс. **1** р. **20** к., 1 мѣсяцъ **50** к. Отдѣльный № **15** к. **Плата за объявленія:** впереди текста—строка петита 50 к.; послѣ текста—25 к. При многократн. печатаніи уступка по соглашенію. Объявленія лицъ, ищущихъ мѣста или занятій—по 10 коп. за объявленіе изъ 3-хъ строкъ позади текста. **ОТКРЫТЪ ПРІЕМЪ ПОДПИСКИ и ОБЪЯВЛЕНІЙ.**

Адресъ редакціи и конторы: Кіевъ, Большая Подвальная, 29, кв. 21.

Редакторъ-издатель О. А. ПОРТУГАЛОВЪ.

XLII Сем. № 1.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 493.

Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія.

М. Зимина.

Въ математикѣ для приближеннаго вычисленія корней уравненій съ числовыми коэффиціентами примѣняется иногда способъ такъ называемой итераціи. Сущность этого способа заключается въ слѣдующемъ.

Пусть дано уравненіе

$$f(x)=0,$$

имѣющее одинъ корень въ промежуткѣ отъ a до b. Преобразуютъ данное уравненіе въ уравненіе вида

$$x=\varphi(x),$$

при чемъ новое уравненіе можетъ быть и не тождественно данному, но должно имѣть тотъ же корень въ промежуткѣ отъ a до b, что и данное. Затѣмъ, имѣя приближенное значеніе корня x_1, вычисляютъ рядъ чиселъ x_2, x_3, ... по формуламъ

$$x_2=\varphi(x_1),\ x_3=\varphi(x_2),\ldots .$$

При соблюденіи нѣкоторыхъ условій рядъ чиселъ

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$$

будетъ имѣть предѣломъ именно тотъ корень даннаго уравненія, который мы отдѣлили отъ остальныхъ корней указаніемъ его предѣловъ a и b.

Въ предлагаемой статьѣ этотъ общій пріемъ прилагается къ простѣйшему случаю — приближенному вычисленію корней квадратнаго уравненія.

§ 1. Беремъ квадратное уравненіе въ видѣ

$$x^2 = \alpha x + \beta$$

и предположимъ, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Тогда одинъ корень уравненія будетъ положительный, другой — отрицательный. Положительный корень обозначимъ черезъ A. Представимъ уравненіе наше въ слѣдующей формѣ:

$$x = \alpha + \frac{\beta}{x}. \tag{1}$$

Возьмемъ какое-нибудь положительное число x_1. Если бы x_1 оказалось корнемъ уравненія (1), то подставляя въ выраженіе

$$\alpha + \frac{\beta}{x} \tag{2}$$

x_1 на мѣсто x, мы получили бы въ силу уравненія (1) въ результатѣ x_1. Но, вообще говоря, мы послѣ подстановки получимъ не x_1, а нѣкоторое другое положительное число x_2, такъ что

$$x_2 = \alpha + \frac{\beta}{x_1},$$

при чемъ, понятно, x_2 само не будетъ корнемъ уравненія (1). Подставляя въ то же выраженіе (2) x_2 на мѣсто x, получимъ число

$$x_3 = \alpha + \frac{\beta}{x_2},$$

которое будетъ положительно и отлично отъ корня уравненія (1). Поступая такимъ образомъ, получимъ неограниченный рядъ чиселъ:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1,\\
&x_2 = \alpha + \frac{\beta}{x_1},\\
&x_3 = \alpha + \frac{\beta}{x_2},\\
&\quad \ldots\ldots\ldots,\\
&x_{n-1} = \alpha + \frac{\beta}{x_{n-2}},\\
&x_n = \alpha + \frac{\beta}{x_{n-1}},\\
&x_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{x_n},\\
&\quad \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при чемъ всѣ эти числа x_1, x_2, $x_3, \ldots$ будутъ положительны и не равны положительному корню A уравненія (1). Докажемъ теперь, что всѣ эти числа имѣютъ предѣломъ число A.

Прежде всего замѣтимъ, что число A заключено между каждыми двумя послѣдовательными членами ряда x_1, x_2, $x_3, \ldots$ Дѣйствительно, если какое-нибудь $x_k > A$, то замѣчая, что

$$A = a + \frac{\beta}{A},$$

$$x_{k+1} = a + \frac{\beta}{x_k},$$

заключаемъ, что при $\beta > 0$ (какъ это нами и принято) будетъ

$$a + \frac{\beta}{x_k} < a + \frac{\beta}{A},$$

т. е.

$$x_{k+1} < A.$$

Наоборотъ, если бы оказалось, что $x_k < A$, то x_{k+1} было бы больше A.

Далѣе, пользуясь выраженіями (3), составимъ разность $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\beta}{x_n} - \frac{\beta}{x_{n-1}} = -\beta \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}\, x_n},$$

откуда

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = -\frac{\beta}{x_{n-1}\, x_n}.$$

Полагая въ этомъ равенствѣ послѣдовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = -\frac{\beta}{x_1\, x_2},$$

$$\frac{x_4 - x_3}{x_3 - x_2} = -\frac{\beta}{x_2\, x_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = -\frac{\beta}{x_{n-1}\, x_n},$$

и перемножая почленно полученныя равенства, придемъ къ соотношенію

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_2 - x_1} = (-1)^{n-1} \frac{\beta^{n-1}}{x_1 x_2 \,.\, x_2 x_3 \,.\, \ldots \,.\, x_{n-1} x_n}. \tag{4}$$

Изъ соотношеній

$$x_{k+1} = \alpha + \frac{\beta}{x_k}, \quad x_k = \alpha + \frac{\beta}{x_{k-1}}$$

слѣдуетъ, что

$$x_k x_{k+1} = \alpha x_k + \beta,$$

и что при всякомъ $k > 1$

$$x_k > \alpha.$$

Предположимъ, что и начальное значеніе $x_1 \geqq \alpha$ (предположеніе вполнѣ законное, ибо положительный корень уравненія (1) больше α).

Тогда можемъ написать:

$$x_k x_{k+1} \geqq \alpha^2 + \beta \ (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

при чемъ знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто лишь при $k = 1$. Изъ соотношенія (4), замѣняя каждое изъ произведеній $x_1 x_2$, $x_2 x_3, \ldots$ меньшимъ числомъ $\alpha^2 + \beta$ и беря абсолютныя значенія разностей $x_{n+1} - x_n$ и $x_2 - x_1$, придемъ къ неравенству:

$$|x_{n+1} - x_n| < \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|,$$

разность же $|x_n - A|$ меньше разности $|x_{n+1} - x_n|$, такъ что

$$|x_n - A| < \left(\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|. \tag{5}$$

Такъ какъ при неограниченномъ возрастаніи n степени правильной дроби $\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta}$ будутъ стремиться къ 0, то разность $|x_n - A|$ также будетъ имѣть предѣломъ 0, и, слѣдовательно,

$$\lim_{n = \infty} x_n = A,$$

что мы и хотѣли показать.

Такимъ образомъ, исходя изъ произвольнаго положительнаго числа $x_1 \geqq \alpha$, мы по формуламъ (3) можемъ построить неограниченный рядъ чиселъ, имѣющій предѣломъ положительный корень уравненія (1), формула же (5) опредѣлитъ намъ погрѣшность каждаго приближенія.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе

$$x = 3 + \frac{1}{x},$$

положительный корень котораго $A = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Принявъ $x_1 = 3$, последовательно находимъ:

$$x_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3},$$

$$x_3 = 3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10},$$

$$x_4 = 3 + \frac{10}{33} = \frac{109}{33},$$

$$x_5 = 3 + \frac{33}{109} = \frac{360}{109},$$

$$x_6 = 3 + \frac{109}{360} = \frac{1189}{360}.$$

По формулѣ (5), въ которой слѣдуетъ принять $a = 3$, $\beta = 1$, $x_2 - x_1 = \frac{1}{3}$ и $n = 6$, опредѣлимъ погрѣшность послѣдняго приближенія

$$|x_6 - A| < \left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{300\,000}.$$

§ 2. Возьмемъ, далѣе, квадратное уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$x = a + \frac{\beta}{x + \gamma}, \tag{6}$$

которое иначе можетъ быть написано такъ:

$$x + \gamma = a + \gamma + \frac{\beta}{x + \gamma},$$

и, вводя новое неизвѣстное

$$z = x + \gamma, \tag{7}$$

приведемъ его къ виду:

$$z = a + \gamma + \frac{\beta}{z}. \tag{8}$$

Если примемъ, что въ этомъ уравненіи $a + \gamma > 0$ и $\beta > 0$, то къ нему можно приложить всѣ разсужденія предыдущаго параграфа. Уравненіе (8) имѣетъ одинъ корень положительный и одинъ отрицательный, а уравненіе (6), въ силу соотношенія (7), имѣетъ одинъ корень, для котораго $x + \gamma > 0$, $x > -\gamma$, и другой, для котораго $x + \gamma < 0$, $x < -\gamma$. Если, далѣе, исходя изъ числа $z_1 \geqq a + \gamma$, составимъ рядъ чиселъ:

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= a + \gamma + \frac{\beta}{z_1}, \\ z_3 &= a + \gamma + \frac{\beta}{z_2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_n &= a + \gamma + \frac{\beta}{z_{n-1}}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

то всѣ эти числа будутъ стремиться къ положительному корню уравненія (8), при чемъ погрѣшность приближенія z_n опредѣлится неравенствомъ

$$|z_n - A| < \left[\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2+\beta}\right]^{n-1} |z_2 - z_1|, \qquad (10)$$

гдѣ A обозначаетъ положительный корень уравненія (8). Но, съ другой стороны, если по z_1 найдемъ изъ уравненія (7) соотвѣтствующее значеніе x_1:

$$x_1 + \gamma = z_1,$$

при чемъ x_1 таково, что $x_1 + \gamma \geqq \alpha + \gamma$ или $x_1 \geqq \alpha$, и затѣмъ составимъ рядъ чиселъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = \alpha + \dfrac{\beta}{x_1+\gamma}, \\ x_3 = \alpha + \dfrac{\beta}{x_2+\gamma}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n + \dfrac{\beta}{x_{n-1}+\gamma}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right| \qquad (11)$$

то, сопоставляя эти числа съ числами (9), видимъ сейчасъ же, что

$$x_2 + \gamma = z_2,$$
$$x_3 + \gamma = z_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и вообще

$$x_n + \gamma = z_n,$$

при чемъ всѣ числа $x_2 + \gamma$, $x_3 + \gamma, \ldots$ будутъ положительны. Если черезъ B обозначимъ тотъ корень уравненія (6), который больше $-\gamma$, то на основаніи равенства (7) имѣемъ:

$$B + \gamma = A$$

и, слѣдовательно,

$$x_n - B = z_n - A.$$

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что, такъ какъ положительный корень A уравненія (8) заключается между каждыми двумя послѣдовательными числами ряда $z_1, z_2, \ldots$, то корень B уравненія (6), для котораго $B + \gamma > 0$, заключенъ между каждыми двумя послѣдовательными членами ряда $x_1, x_2, \ldots$. Замѣнивъ, далѣе, въ неравенствѣ (10) $z_n - A$ и $z_2 - z_1$ соотвѣтственно черезъ $x_n - B$ и $x_2 - x_1$, получимъ:

$$|x_n - B| < \left[\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2+\beta}\right]^{n-1} |x_2 - x_1|, \qquad (12)$$

и очевидно, что

$$\lim_{n=\infty} x_n = B.$$

Такимъ образомъ, мы доказали, что способъ послѣдовательныхъ приближеній, изложенный въ § 1, можетъ быть примѣняемъ и къ уравненію

$$x = a + \frac{\beta}{x+\gamma}, \tag{6}$$

относительно котораго предполагается, что

$$a + \gamma > 0 \text{ и } \beta > 0,$$

при чемъ начальное значеніе x_1 выбираемъ такъ, чтобы

$$x_1 \geqq a.$$

Составленный по формуламъ (11) рядъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots$ будетъ имѣть предѣломъ тотъ корень уравненія (6), который больше $-\gamma$. Погрѣшность каждаго приближенія опредѣляется формулой (12). Уравненіе (8) съ z_1 служило намъ только для доказательства, и само по себѣ для вычисленія приближенныхъ значеній корня уравненія (6) не нужно.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики.

П. В. Шепелева.

Трудности, которыя встрѣчаетъ всякій преподаватель при прохожденіи механическаго отдѣла физики, общеизвѣстны. Въ настоящей статьѣ я позволю себѣ ознакомить своихъ коллегъ съ тѣмъ способомъ изложенія началъ механики, которымъ я пользовался въ теченіе двухъ послѣднихъ лѣтъ. Вырабатывая этотъ способъ, я стремился одновременно къ достиженію наибольшей возможной строгости и логичности и вмѣстѣ съ тѣмъ — наибольшей простоты и доступности. Самое прохожденіе началъ механики по этому способу дѣлалось по составленнымъ мною для этой цѣли литографированнымъ запискамъ. Я намѣчу здѣсь конспективно содержаніе послѣднихъ, излагая подробно лишь то, что у меня трактуется болѣе или менѣе самостоятельно. Обыкновенно, разсматриваемые здѣсь вопросы механики проходились или въ V-мъ или, что чаще, въ VI-мъ классѣ реальныхъ училищъ, при чемъ, какъ показалъ опытъ, въ VI-мъ классѣ этотъ отдѣлъ физики усваивался безъ труда.

1. Движенiе. Твердое тѣло. Поступательное движенiе твердаго тѣла. Движенiе точки. Движенiе прямолинейное и равномѣрное. Законъ инерцiи. Понятiе о силѣ.

При изложенiи этихъ вопросовъ обращалось вниманiе на сложность явленiя, называемаго движенiемъ.

На примѣрѣ движущейся жидкости показывалось, что при движенiи тѣла разстоянiе между его точками можетъ мѣняться. Устанавливалось понятiе о твердомъ тѣлѣ. Затѣмъ, на примѣрѣ колеса, вращающагося вокругъ оси, объяснялось, что различныя точки тѣла могутъ двигаться различно.

Отсюда усматривалась необходимость упростить задачу механики, разсматривая сначала только движенiе поступательное, опредѣляемое движенiемъ одной точки тѣла. Такимъ образомъ, не насилуя ума учениковъ непосильными имъ абстракцiями, мы сводимъ задачу движенiя тѣла къ задачѣ о движенiи точки. Послѣ этого изучалось обыкновеннымъ способомъ движенiе прямолинейное и равномѣрное и сейчасъ же шло ознакомленiе съ закономъ инерцiи и съ понятiемъ о силѣ, какъ причинѣ, переводящей тѣло изъ покоя въ движенiе или дѣлающей движенiе отличнымъ отъ прямолинейнаго и равномѣрнаго.

2. Движенiе прямолинейное и равномѣрно ускоренное. Скорость по истеченiи t секундъ. Ускоренiе.

Для изученiя движенiя прямолинейнаго и равномѣрно ускореннаго служитъ машина А т в у д а. Обыкновеннымъ способомъ находимъ, что грузы проходятъ, напримѣръ,

въ 1 секунду	. . . .	7 *см.*
„ 2 „	. . . .	28 „
„ 3 „	. . . .	63 „
„ 4 „	. . . .	112 „
„ 5 „	. . . .	175 „

На примѣрѣ этихъ чиселъ убѣждаемся, что понятiе о скорости, данное для случая равномѣрнаго и примолинейнаго движенiя, непримѣнимо къ изучаемому движенiю. Для этого достаточно дѣлить пути, пройденные въ нѣсколько секундъ, на число этихъ послѣднихъ,—всякiй разъ получаются при этомъ различныя частныя, и мы не можемъ сказать ничего опредѣленнаго о скорости движенiя. Вслѣдствiе этого выясняется необходимость дать новое опредѣленiе скорости, но такое, чтобы прежнее являлось частнымъ случаемъ новаго. Вводится понятiе о скорости по истеченiи нѣсколькихъ секундъ по слѣдующему опредѣленiю. Скорость по истеченiи t секундъ есть скорость, съ которою станетъ двигаться тѣло, если по истеченiи t секундъ оно начнетъ двигаться по инерціи. На основаніи этого опредѣленія, пользуясь машиной Атвуда, находимъ, что скорость, по истеченіи

1 секунды есть 14

2 „ „ 28

3 „ „ 42

4 „ „ . . . . 56.

При этомъ предварительно можно убѣдиться, что дѣйствительно, по задержаніи добавочнаго грузика, движеніе на машинѣ Атвуда происходитъ равномѣрно.

Приведенныя числа показываютъ, что скорость возрастаетъ въ одну секунду на 14 *см*. Отсюда опредѣленіе: величина, показывающая, насколько увеличивается скорость въ одну секунду, называется ускореніемъ.

Такимъ образомъ, просто и естественно мы приходимъ къ установленію понятія о скорости и объ ускореніи въ случаѣ равномѣрно ускореннаго движенія.

3. Понятіе о силѣ и массѣ.

Теперь уже можно перейти къ установленію понятій о силѣ и о массѣ и къ выясненію связи между силой, массой и ускореніемъ. Наиболѣе раціональнымъ мнѣ представляется слѣдующее изложеніе.

а) Сравненіе силъ по ускореніямъ, сообщаемымъ ими одному и тому же тѣлу. 1-ое положеніе.

Сдѣлаемъ слѣдующую серію опытовъ.

Закрѣпимъ колесо машины Атвуда и, смазавъ нить, уменьшимъ до возможныхъ предѣловъ треніе. Для контроля можетъ служить тотъ фактъ, что два равныхъ груза x и y, привѣшенныхъ на концахъ нити, движутся безъ добавочнаго груза равномѣрно, если имъ предварительно сообщить извѣстную скорость. Составляемъ грузъ x изъ 19, а грузъ y изъ 21 пластинки и изучаемъ движеніе. Двѣ добавочныя пластинки служатъ здѣсь источникомъ силы, производящей ускореніе. Пусть послѣднее равно 5 *см*. Наши двѣ добавочныя пластинки приводятъ въ движеніе всего 40 пластинокъ. Послѣднія представляютъ собою то тѣло, на которое дѣйствуетъ сила, происходящая отъ двухъ добавочныхъ пластинокъ. Назовемъ эту силу черезъ f_1. Теперь устроимъ такъ, чтобы грузъ x состоялъ изъ 18, а грузъ y изъ 22 пластинокъ. Тѣло, на которое дѣйствуетъ сила, осталось прежнее, а сила измѣнилась. Назовемъ эту новую силу черезъ f_2. Мы наблюдаемъ на машинѣ Атвуда ускореніе, положимъ, въ 10 *см*.

Въ этихъ двухъ примѣрахъ тѣло, на которое дѣйствуютъ силы, одинаково, а силы различны.

Поведемъ опытъ такъ, чтобы тѣ же самыя двѣ силы f_1 и f_2 дѣйствовали на разныя тѣла. Для этого поступимъ такъ. Составимъ грузъ x изъ 9, грузъ y изъ 11 пластинокъ, — дѣйствуетъ сила f_1 на тѣло въ 20 пластинокъ и сообщаетъ ускореніе 10 *см*. Составимъ грузъ x изъ 8, грузъ y изъ 12 пластинокъ,—дѣйствуетъ сила f_2 на тѣло въ 20 пластинокъ и сообщаетъ ускореніе въ 20 *см*. Нижеслѣдующая таблица показываетъ, какъ надо комбинировать пластинки, и какія получаются результаты.

Силы	въ грузѣ x	въ грузѣ y	тѣло	ускоренія
	число пластинокъ			
f_1	9	11	20	10
f_2	8	12		20
f_1	19	21	40	5
f_2	18	22		10
f_1	14	16	30	$7^1/_2$
f_2	13	17		15
f_1	24	26	50	4
f_2	23	27		8

и т. д.

Въ этихъ опытахъ мы всякій разъ изучаемъ дѣйствіе однѣхъ и тѣхъ же силъ f_1 и f_2, но на различныя тѣла. Численныя значенія ускореній получаются различныя, но отношеніе ускореній, полученныхъ различными тѣлами отъ дѣйствія силъ f_1 и f_2, остается одно и то же, именно въ данномъ случаѣ оно равно 2. Такъ какъ тѣла были различны, а одинаковыми оставались сравниваемыя силы f_1 и f_2, то замѣченное постоянство отношенія ускореній должно характеризовать самыя силы. Обобщая полученный результатъ, мы приходимъ къ выводу, который назовемъ *первымъ положеніемъ*. *На какія бы тѣла ни дѣйствовали двѣ данныя силы, отношеніе ускореній, получаемыхъ этими тѣлами отъ данныхъ силъ, есть величина постоянная*. Это даетъ намъ возможность принять отношеніе ускореній за отношеніе самыхъ силъ. Такимъ образомъ, мы обладаемъ способомъ сравненія силъ.

b) Понятіе о массѣ тѣлъ.

Для выясненія понятія о массѣ поступаемъ такъ. Заставляемъ одну и ту же силу f_1 дѣйствовать на разныя тѣла, состоящія, напримѣръ, изъ 10, 20, 30 и т. д. пластинокъ. Какъ это сдѣлать на машинѣ Атвуда, очевидно изъ предыдущаго. Мы увидимъ, что различныя тѣла получаютъ отъ дѣйствія той же самой силы разныя ускоренія. Отсюда мы заключаемъ, что разныя тѣла обладаютъ различною способностью воспринимать дѣйствіе на нихъ силъ. По закону инерціи всякое тѣло стремится сохранить свое состояніе покоя или движенія. Получая отъ дѣйствія одной и той же силы разныя ускоренія, тѣла, каждое по своему, противодѣйствуютъ причинѣ, стремящейся измѣнить состояніе его движенія. Эту способность тѣлъ мы называемъ массою тѣлъ. Изъ самаго опредѣленія массы слѣдуетъ, что изъ двухъ тѣлъ бо́льшую массу имѣетъ то, которое отъ дѣйствія одной и той же силы получаетъ меньшее ускореніе.

c) Сравненіе массъ тѣлъ. 2-е положеніе.

Установивъ понятіе о массѣ, мы должны выяснить возможность сравнивать массы тѣлъ. Для этой цѣли служитъ слѣдующее разсужденіе. Пусть на два тѣла A и B дѣйствуетъ сначала сила f_1, потомъ силы f_2, f_3 и т. д. Отъ дѣйствія этихъ силъ тѣла получаютъ соотвѣтственно ускоренія: a_1 и b_1, a_2 и b_2, a_3 и b_3 и т. д. По 1-му положенію имѣемъ:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1},$$

какъ результатъ сравненія силъ f_2 и f_1, и

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{b_3}{b_1},$$

какъ результатъ сравненія силъ f_3 и f_1, и т. д.

Отсюда имѣемъ, переставивъ средніе члены:

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1}{b_1} \quad \text{и} \quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}$$

и т. д., т. е. получаемъ рядъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots$$

Обратимъ вниманіе на физическій смыслъ этого ряда. a_1 и b_1, a_2 и b_2, a_3 и b_3 и т. д. суть ускоренія, полученныя данною парою тѣлъ отъ разныхъ силъ f_1, f_2, f_3 и т. д. Это приводятъ насъ къ слѣдующему выводу, который назовемъ вторымъ положеніемъ. Какая бы сила ни дѣйствовала на 2 данныхъ тѣла, отношеніе ускореній, получаемыхъ этими тѣлами отъ данныхъ силъ, сохраняетъ постоянное значеніе, хотя сами ускоренія, конечно, мѣняются. Это постоянство отношеній ускореній для данной пары тѣлъ при различныхъ силахъ должно характеризовать данныя тѣла и можетъ служить для сравненія массъ тѣлъ. Примемъ обратную величину отношенія ускореній за отношеніе массъ тѣлъ. Почему принимаемъ обратную величину, было выяснено выше. Принимая массу нѣкотораго тѣла за единицу, мы можемъ затѣмъ сравнить съ нею массы другихъ тѣлъ. Для однородныхъ тѣлъ здѣсь же вводится понятіе о плотности.

d) Сравненіе двухъ силъ, сообщающихъ тѣламъ разныхъ массъ одинаковое ускореніе. 3-е положеніе.

Найдемъ отношеніе двухъ силъ, которыя сообщаютъ тѣламъ разныхъ массъ одинаковыя ускоренія. Пусть сила f_1 сообщаетъ массѣ m_1, а сила f_2 — массѣ m_2 одно и то же ускореніе a.

Пусть

$$\frac{m_1}{m_2}=k; \qquad (1)$$

въ такомъ случаѣ, по 2-му положенію, сила f_1, дѣйствуя на массу m_2, сообщитъ ей ускореніе $a.k$. Итакъ, имѣемъ двѣ силы f_1 и f_2, дѣйствующія на одно тѣло m_2 и сообщающія ускоренія a и $a.k$. По первому положенію имѣемъ:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{a.k}{a}=k. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имѣемъ:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{m_1}{m_2}. \qquad (3)$$

Не трудно дать этой формулѣ словесное выраженіе, которое мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть **третьимъ положеніемъ**.

e) Сравненіе двухъ силъ f и f_1 въ общемъ случаѣ.

Пусть теперь сила f, дѣйствуя на массу m, сообщаетъ ей ускореніе a, и сила f_1, дѣйствуя на массу m_1, сообщаетъ ей ускореніе a_1. Надобно сравнить силы f и f_1. Вводимъ въ разсмотрѣніе силу f_2, которая массѣ m сообщаетъ ускореніе a_1. Сравнивая f и f_2 пишемъ, на основаніи 1-го положенія:

$$\frac{f}{f_2}=\frac{a}{a_1}.$$

Сравнивая f_1 и f_2, получаемъ, на основаніи 3-го положенія:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{m}{m_1}.$$

Перемножая эти пропорціи, найдемъ:

$$\frac{f}{f_1}=\frac{am}{a_1m_1}. \qquad (4)$$

Конечно, надо дать этому отношенію словесное выраженіе.

f) Связь между силою, массою и ускореніемъ.

Пусть теперь $a_1=1$ *см.* въ секунду и $m_1=1$ *гр.* Въ такомъ случаѣ a и m должны быть, конечно, измѣрены въ тѣхъ же единицахъ. Силу f_1 принимаемъ за единицу и называемъ **диною**. При данныхъ значеніяхъ a_1 и m_1 получаемъ:

$$\frac{f}{f_1}=ma. \qquad (5)$$

Отношеніе $\frac{f}{f_1}$ показываетъ, сколько разъ f_1, т. е. дина, заключается въ данной силѣ f, или, иначе, оно выражаетъ данную силу f въ динахъ.

Обозначимъ это число черезъ p. Оно равно произведенію массы тѣла, выраженной въ граммахъ, на ускореніе, выраженное въ сантиметрахъ въ секунду. Итакъ, формула (3) даетъ:

$$p = ma,$$

что и служитъ окончательнымъ выраженіемъ связи между силой, массой и ускореніемъ.

4. Сила тяжести. Вѣсовая единица силы.

Теперь надлежитъ ознакомиться съ силою тяжести, какъ причиною паденія тѣлъ на землю. Наблюденіе показываетъ, что почти всѣ тѣла, пущенныя въ одно время и съ одинаковой высоты на землю, во всякій моментъ паденія находятся на одной высотѣ*). Нельзя замѣтить, чтобы одно изъ нихъ обгоняло другое. Изъ этого слѣдуетъ, что тѣла, падающія при указанныхъ условіяхъ на землю, движутся съ одинаковыми скоростями. Въ такомъ случаѣ измѣненія скоростей у этихъ тѣлъ одинаковы. Выходитъ, что всѣ тѣла падаютъ съ одинаковымъ ускореніемъ. Силы, съ которыми земля притягиваетъ къ себѣ тѣла, называются вѣсами тѣлъ. Такъ какъ эти силы сообщаютъ тѣламъ различныхъ массъ одинаковое ускореніе, то онѣ должны быть, по 3-му положенію, пропорціональны массамъ тѣлъ. Такимъ образомъ, приходимъ къ открытію замѣчательнѣйшаго свойства вѣса тѣлъ: вѣсъ тѣлъ пропорціоналенъ его массѣ. Это даетъ возможность установить вѣсовую единицу силъ: вѣсъ единицы массы — 1-го грамма — принимаемъ за единицу силы: граммъ-вѣсъ. Понятно, что въ этомъ случаѣ вѣсъ и масса тѣла выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ.

5. Опредѣленіе ускоренія силы тяжести на машинѣ Атвуда.

Это дѣлается извѣстнымъ образомъ по формулѣ

$$g = \frac{2M + m}{m} a,$$

гдѣ g есть ускореніе свободно падающаго тѣла, M — масса грузовъ x и y, m — масса добавочнаго грузика и a — наблюдаемое на машинѣ Атвуда ускореніе.

6. Направленіе и точка приложенія силы. Графическое изображеніе силы.

За направленіе силы мы принимаемъ пока направленіе того движенія, которое принимаетъ подъ дѣйствіемъ этой силы тѣло, бывшее ранѣе въ покоѣ.

*) Это положеніе требуетъ настолько существенныхъ оговорокъ, что мы считали бы весьма нежелательнымъ сообщать его учащимся въ такой формѣ

Ред.

7. Одновременное дѣйствіе нѣсколькихъ силъ на точку. Законъ параллелограмма силъ. Равнодѣйствующая.

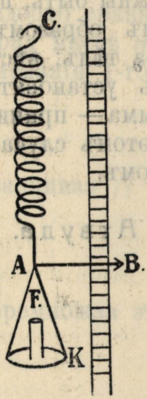
Этотъ законъ излагается, какъ предположеніе, всѣ слѣдствія котораго повѣряются на опытѣ. Правила для сложенія силъ, дѣйствующихъ въ одну и въ прямопротивоположныя стороны, разсматриваются, какъ частные случаи закона параллелограмма силъ.

8. Равновѣсіе силъ.

Пусть нѣсколько силъ имѣютъ равнодѣйствующую, равную нулю. Въ такомъ случаѣ, по основной связи между силою и ускореніемъ, послѣднее тоже равно нулю. А потому, если скорость тѣла была равна нулю, т. е. если тѣло было въ покоѣ, то оно и останется въ покоѣ. Говорятъ, что тѣло находится въ равновѣсіи. Обратно, если тѣло останется въ покоѣ, то равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ равняется нулю. Доказательство основывается на сравненіи силъ и массъ при помощи пружинныхъ вѣсовъ.

9. Сравненіе силъ и массъ при помощи пружинныхъ вѣсовъ.

а) Законъ расширенія пружины.



Привяжемъ къ стальной спирали, подвѣшенной въ точкѣ C, чашку K съ мѣрнымъ цилиндромъ F. Въ точкѣ A къ спирали прикрѣпленъ указатель AB, который можетъ перемѣщаться вдоль шкалы. Разсмотримъ точку A. На нее дѣйствуетъ по вертикали внизъ вѣсъ чашки K и цилиндра F. Несмотря на это, точка A остается въ покоѣ. Значитъ, по пункту 8, одновременно съ силою P (вѣсъ чашки съ цилиндромъ) на точку A дѣйствуетъ другая сила, равная ей, но противоположно направленная. Эта послѣдняя сила называется силою упругости пружины и происходитъ отъ измѣненія формы и длины пружины. Нальемъ въ мѣрный цилиндръ 1 *кб. см.* воды при 4°C. Къ прежней силѣ P прибавляется вѣсъ 1 *гр.* воды, дѣйствующаго по одному направленію съ силою P. Слѣдовательно, на точку A теперь дѣйствуетъ сила P_1, бóльшая, чѣмъ P на 1 *гр.* Точка A и указатель AB опустятся, положимъ, на 3 дѣленія и остановятся. Значитъ, при такомъ разстояніи пружины и ея упругость увеличилась на 1 *гр.* (конечно, 1 гр.-вѣсъ). Подобнымъ образомъ найдемъ, что, если мы будемъ приливать въ мѣрный цилиндръ всякій разъ по одному грамму воды, указатель при каждомъ такомъ приливаніи опускается на 3 дѣленія. Такимъ образомъ, мы устанавливаемъ законъ растяженія пружины.

b) Опредѣленіе массы и вѣса тѣлъ на пружинныхъ вѣсахъ.

Выше изложенный способъ (см. пунктъ 3, c) сравненія массъ тѣлъ крайне неудобенъ по своей громоздкости. Пружинные вѣсы позволяютъ быстро и удобно опредѣлить массу и вѣсъ тѣла. Положимъ испытуемое тѣло на чашку пружинныхъ вѣсовъ, и пусть пружина растянулась на 40 дѣленій. Значитъ, вѣсъ и масса тѣла выражаются числомъ $\frac{40}{3} = 13^1/_3$ *гр.**).

c) Выраженіе всякихъ силъ въ вѣсовыхъ единицахъ.

Какъ это дѣлается, объяснимъ на примѣрѣ. Къ пружиннымъ вѣсамъ подвѣшенъ магнитъ. Подносимъ другой магнитъ. Указатель опустился на 10 дѣленій; значитъ, сила притяженія магнита равна $\frac{10}{3} = 3^1/_3$ *гр*.

10. Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.

Этотъ законъ истолковывается въ духѣ идей, развитыхъ въ механикѣ проф. Суслова. Источникъ всякой силы мы должны искать въ нѣкоторомъ тѣлѣ, при чемъ, если одно тѣло A дѣйствуетъ на другое B съ силою f, то и B дѣйствуетъ на A съ силою, равною f, но противоположно направленной.

11. Реакція опоры и давленія тѣла на опору.

Пусть тѣло A лежитъ на нѣкоторой поверхности. На тѣло, несомнѣнно, дѣйствуетъ сила тяжести. Если, тѣмъ не менѣе, тѣло не падаетъ, то значитъ, одновременно съ вѣсомъ тѣла на него дѣйствуетъ другая сила, равная вѣсу тѣла, но противоположно направленная. Источникомъ этой силы служитъ опорная поверхность; сама сила называется реакціей поверхности. Здѣсь же говорится о разложеніи реакціи на нормальную реакцію и треніе и излагаются законы тренія. По закону равенства дѣйствія и противодѣйствія тѣло также должно дѣйствовать на поверхность съ силою, которую называютъ давленіемъ тѣла на опору.

12. Натяженіе нитей трактуется такъ же, какъ и реакція опоры.

13. Повѣрка закона параллелограмма силъ при помощи трехъ динамометровъ.

14. Переносъ силъ по направленію ихъ дѣйствія въ твердомъ тѣлѣ.

15. Сложеніе и разложеніе параллельныхъ силъ.

16. Рычаги и, вообще, простыя машины.

17. Вѣсы. Показать, что на вѣсахъ мы можемъ сравнивать массы тѣлъ.

Замѣчаніе. При опытной повѣркѣ правилъ сложенія параллельныхъ силъ, рычага, наклонной плоскости и машинъ, надобно обращать вниманіе на то, что одновременно съ этимъ косвеннымъ образомъ провѣряется и правило параллелограмма силъ, такъ какъ все ученіе о простыхъ машинахъ цѣликомъ основано на законѣ параллелограмма силъ.

---

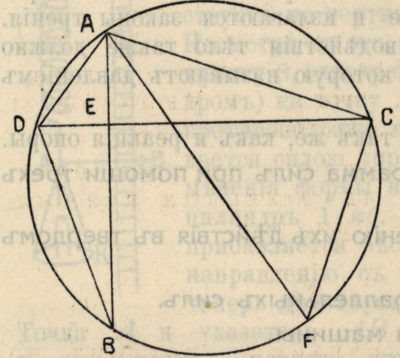
*) Полагаемъ, что ученикамъ выясняются и слабыя стороны этого способа; иначе у нихъ можетъ составиться совершено неправильное представленіе, будто пружинные вѣсы даютъ наиболѣе научный способъ для опредѣленія вѣса и массы. *Ред.*

По поводу „Новаго предложенія о кругѣ“.

Въ № 488 „Вѣстника“ подъ заглавіемъ „Новое предложеніе о кругѣ“ была помѣщена—заимствованная нами изъ журнала „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ за текущій годъ,— статья Мюллера, въ которой онъ приписываетъ это предложеніе извѣстному ученому — Лейпцигскому профессору Карлу Нейману. По поводу этой статьи редакціей полученъ цѣлый рядъ писемъ; одни указываютъ, что предложеніе не ново, а другіе предлагаютъ иныя доказательства этого предложенія. Изъ этихъ писемъ, число которыхъ достигло десяти, мы помѣщаемъ здѣсь четыре.

I.

Прочтя въ № 488 „Вѣстника“ статью г. А. Мюллера подъ заглавіемъ „Новое предложеніе о кругѣ“, честь имѣю сообщить, что указанное авторомъ предложеніе профессора Карла Неймана на самомъ дѣлѣ не ново и было доказано болѣе 2000 лѣтъ тому назадъ. Оно составляетъ одиннадцатую изъ извѣстныхъ леммъ Архимеда. Такъ какъ доказательство Архимеда крайне просто, то я считаю небезполезнымъ воспроизвести его здѣсь, пользуясь сочиненіемъ: „Oeuvres d'Archimède traduites littéralement par F. Peyrard, Paris, 1807“.



Теорема XI. „Если въ кругѣ двѣ хорды AB, CD пересѣкаются взаимно перпендикулярно въ точкѣ E, не лежащей въ центрѣ круга, то сумма квадратовъ отрѣзковъ AE, BE, CE, и DE будетъ равна квадрату діаметра“.

„Проведемъ діаметръ AF и хорды AC, AD, CF, BD; такъ какъ уголъ AED прямой, то онъ равенъ углу ACF. Но уголъ ADC равенъ углу AFC, потому что оба они опираются на одну и ту же дугу; слѣдовательно, въ треугольникахъ ADE и AFC остальные углы CAF и DAE также равны другъ другу. Поэтому двѣ дуги CF и BD равны, а также равны и ихъ хорды. Но сумма квадратовъ отрѣзковъ BE и DE равна квадрату хорды BD и, слѣдовательно, равна квадрату хорды CF. Далѣе, сумма двухъ квадратовъ отрѣзковъ AE и CE равняется квадрату хорды AC, а сумма квадратовъ хордъ CF и AC равняется квадрату діаметра. Итакъ, сумма квадратовъ отрѣзковъ AE, BE, CE, DE равна квадрату діаметра. Что и слѣдовало доказать“.

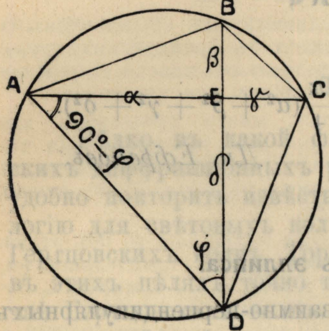
Если замѣтка моя не слишкомъ запоздала и не излишня, то я буду весьма радъ, если уважаемая редакція захочетъ ею воспользоваться.

В. Смосарскій.

II.

„Новое предложеніе о кругѣ“ г. А. Мюллера, помѣщенное въ № 488, „Вѣстника Опытной Физики“, въ дѣйствительности не является новымъ, а нерѣдко помѣщается въ учебникахъ и задачникахъ по геометріи въ качествѣ задачи на доказательство. Укажу, напримѣръ, что оно помѣщено въ геометріи К. К. Мазинга (1886 г., стр. 205, № 614). Доказать его можно и проще, чѣмъ приведено въ № 488 „Вѣстника“,—напримѣръ, такъ:

$$AB^2 = \alpha^2 + \beta^2; \; CD^2 = \gamma^2 + \delta^2,$$



но

$$AB = 2R \,.\, \sin\varphi;$$

$$CD = 2R \,.\, \sin(90^0 - \varphi) = 2R \,.\, \cos\varphi;$$

отсюда

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2,$$

или

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4R^2.$$

По этой теоремѣ можно дѣлать расчетъ эксцентрика.

І. Чистяковъ.

III.

Въ № 488 „Вѣстника“ помѣщена статья г. А. Мюллера, въ которой сообщается слѣдующая теорема о кругѣ:

„Если черезъ точку, находящуюся внутри круга, проведены двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, то площадь круга выражается формулой:

$$I = \frac{\pi}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

гдѣ α, β, γ, δ суть отрѣзки, отсѣкаемые кругомъ на проведенныхъ прямыхъ“.

Въ дополненіе къ тѣмъ двумъ доказательствамъ этой теоремы, которыя приведены г. А. Мюллеромъ, я позволю себѣ замѣтить, что теорема эта можетъ быть получена, какъ слѣдствіе слѣдующей теоремы, доказанной въ моей статьѣ „О четырехугольникахъ“ *):

Сумма квадратовъ противоположныхъ сторонъ вписаннаго ортодіагональнаго четырехугольника равна квадрату діаметра описаннаго круга.

*) См. „Вѣстникъ“, № 448—449.

По этой теоремѣ, если a и c, b и d суть противоположныя стороны ортодіагональнаго четырехугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R, то

$$a^2+c^2=b^2+d^2=4R^2;$$

но очевидно, что

$$a^2+c^2=b^2+d^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

гдѣ α, β, γ, δ суть отрѣзки діагоналей четырехугольника; слѣдовательно,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4R^2;$$

отсюда площадь круга

$$I=\pi R^2=\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)=\frac{\pi}{4}(b^2+d^2)=\frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$$

Дм. Ефремовъ.

IV.

О нѣкоторыхъ свойствахъ эллипса.

1. Если α, β, γ, δ — отрѣзки двухъ взаимно-перпендикулярныхъ хордъ круга, то, кромѣ соотношенія

$$\alpha\gamma=\beta\delta, \tag{1}$$

имѣемъ еще соотношеніе:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4a^2 \text{*)}, \tag{2}$$

гдѣ a — радіусъ круга.

2. Предложенія (1) и (2) могутъ быть обобщены. Пусть a и b полуоси эллипса, при чемъ $a>b$. Пусть α, β, γ, δ — отрѣзки хордъ, параллельныхъ осямъ. Данный эллипсъ можно разсматривать, какъ проекцію круга радіуса a, при чемъ полуось b будетъ проекціей одного изъ радіусовъ. Отрѣзки α, β, γ, δ хордъ эллипса будутъ проекціями отрѣзковъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ хордъ круга, при чемъ эти послѣдніе отрѣзки будутъ соотвѣтственно равны:

$$\alpha,\ \frac{a}{b}\beta,\ \gamma,\ \frac{a}{b}\delta.$$

Поэтому, примѣняя къ кругу формулу (1), найдемъ:

$$\alpha\gamma=\frac{a}{b}\beta\cdot\frac{a}{b}\delta,$$

т. е.

$$b^2\alpha\gamma=a^2\beta\delta.$$

---

*) См. „Новое предложеніе о кругѣ“ въ № 488 „Вѣстника“.

Примѣняя же формулу (2), получимъ:

$$a^2+\frac{a^2\beta^2}{b^2}+\gamma^2+\frac{a^2\delta^2}{b^2}=4a^2.$$

или

$$(ba)^2+(a\beta)^2+(b\gamma)^2+(a\delta)^2=4\,(ab)^2.$$

И. С.

Опыты и приборы.

Торповскія рѣшетки.

Рѣдко въ какой физической лабораторіи теперь нѣтъ Торповскихъ диффракціонныхъ рѣшетокъ. Пользуясь этими рѣшетками, можно удобно повторить извѣстные опыты Гарбассо, представляющіе аналогію для свѣтовыхъ колебаній свойствъ проволочныхъ рѣшетокъ для Герцовскихъ волнъ. Торповская рѣшетка можетъ быть употребленной въ этихъ цѣляхъ точно такъ же, какъ и проволочная рѣшетка въ случаѣ Гертцовскихъ волнъ. Опытъ лучше удается, если падающій поляризованный свѣтъ не очень ярокъ. Конечно, если имѣется какой-нибудь поляризаціонный микроскопъ, то явленіе получается вполнѣ отчетливо. Легко понять, что накладываніе Торповскихъ рѣшетокъ одна на другую — усиливаетъ эффектъ. Понятно также, что вмѣсто Торповскихъ рѣшетокъ могутъ служить фотографическіе снимки, какими пользуются для устройства фотографическихъ диффракціонныхъ рѣшетокъ; или же, если имѣется металлическая диффракціонная рѣшетка, то можно снять отпечатокъ съ нея, напримѣръ, коллодіонный или желатиновый. Коллодіонные отпечатки съ Роландовскихъ рѣшетокъ очень пригодны для описываемаго опыта.

К. Пеніонжкевичъ.

РЕЦЕНЗІИ.

А. Воиновъ, директоръ Павловскаго реальнаго училища. *Сборникъ ариѳметическихъ задачъ съ приложеніемъ краткихъ свѣдѣній изъ ариѳметики.* Курсъ младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Часть I. Цѣлыя числа (3 изд. 1909). Часть II. Дробныя числа (2 изд. 1909).

Систематическое изученіе ариѳметики по руководству въ младшихъ, въ особенности же въ двухъ первыхъ классахъ совершенно невозможно. Это хорошо извѣстно всякому преподавателю, и, если въ спискѣ книгъ, которыя обязанъ пріобрѣсти каждый ученикъ перваго класса, значится тотъ или иной „курсъ ариѳметики", то лишь для того, чтобы заимствовать изъ него нѣсколько опредѣленій и правилъ. Лишь въ 8-мъ классѣ ученикъ вчитывается въ этотъ учебникъ болѣе или менѣе серьезно. Въ младшихъ же классахъ нуженъ задачникъ и хорошій конспектикъ, содержащій квинтъ-эссенцію объясненія учителя,— то, что ученику нужно не только понять, но и заучить. Задачникъ съ присоединеніемъ такого рода конспекта и составленъ г. Воиновымъ. Конспектъ составленъ сжато, но содержитъ, на нашъ взглядъ, все, дѣйствительно необходимое для первоначальнаго обученія. Всѣ опредѣленія и правила выражены вообще ясно и хорошо. Не нравится намъ только § 22, въ которомъ жирнымъ шрифтомъ напечатано: „частное не зависитъ отъ того, какой смыслъ имѣетъ дѣленіе“. Въ подтвержденіе приведенъ примѣръ:

20 арш. : 5 арш. = 4; 20 арш. : 5 = 4 *арш.*

Не противорѣчитъ ли самый примѣръ точному смыслу высказаннаго предложенія: въ первомъ случаѣ получаемъ 4, во второмъ 4 арш.

Въ ученіи о дробяхъ десятичныя дроби предшествуютъ обыкновеннымъ дробямъ. Эта система, довольно часто встрѣчающаяся въ французскихъ руководствахъ, имѣетъ многое за себя. Даже въ курсѣ третьяго класса теоретическій конспектъ содержитъ вполнѣ достаточный матеріалъ для учащихся.

Что касается самыхъ задачъ, то ихъ много; много примѣровъ для устнаго вычисленія, на которые авторъ обращаетъ особенное вниманіе, и на числовыя передѣлки. Задачи составлены разнообразно и послѣдовательно въ смыслѣ трудности и примѣненія различныхъ пріемовъ рѣшенія. Очень важно, что почти всѣ задачи доступны хорошему ученику.

Что касается правильной разработки числового матеріала, то объ этомъ рецензенту всегда трудно судить, не выполняя большой и утомительной работы. Мы продѣлали около сотни задачъ наудачу и нашли, къ сожалѣнію, порядочно погрѣшностей. Такъ, въ I-ой части въ задачѣ № 1503 правильный отвѣтъ 210, а въ задачникѣ указано 420; въ задачѣ № 1510 правильный отвѣтъ 6816, а въ задачникѣ указано 5816; въ задачѣ № 1508 правильный отвѣтъ 172, а указано 192; въ задачѣ № 1528 правильный отвѣтъ 240, а указано 225. Въ задачѣ № 1514 ошибка въ условіи: должна быть дана стоимость сукна въ 102 р. 90 к. а не въ 102 р. 10 к., такъ какъ при послѣднемъ заданіи задача не рѣшается въ цѣлыхъ числахъ. Мы охотно допускаемъ, что намъ не повезло, и что это накопленіе корректурныхъ погрѣшностей въ небольшомъ интервалѣ случайное; но мы все же совѣтовали бы автору тщательнѣе прокорректировать задачникъ въ дальнѣйшихъ изданіяхъ. Безъ этого недостатка книга можетъ служить очень хорошимъ руководствомъ для средней школы.

Н. Р.

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 186 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\frac{a^2}{r_b r_c}+\frac{b^2}{r_a r_c}+\frac{c^2}{r_a r_b}=4\left(\frac{R}{r}-1\right),$$

гдѣ a, b, c — стороны, R, r, r_a, r_b, r_c — радіусы описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ.

Ат. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 187 (5 сер.). Найти maximum и minimum выраженія

$$y - 2x$$

при условіи

$$16y^2 + 36x^2 = 9.$$

С. Адамовичъ (Варшава).

№ 188 (5 сер.). Найти внутри треугольника ABC точку O, для которой произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на стороны треугольника, достигаетъ maximum'а.

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 189 (5 сер.). Даны двѣ пересѣкающіяся окружности; построить прямую, проходящую черезъ одну изъ точекъ ихъ пересѣченія и отсѣкающую въ каждой изъ данныхъ окружностей дуги одинаковаго числа градусовъ.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 190 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 36x^3 + 32x^2 - 72x + 48 = 0.$$

Б. Щиголевъ (Варшава).

№ 191 (5 сер.). Рѣшить треугольникъ по даннымъ радіусамъ внѣвписанныхъ круговъ r_a, r_b, r_c.

С. Слугиновъ (Казань).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 884 (4 сер.). *Найдены суммы кубовъ, пятыхъ и седьмыхъ степеней* n *первыхъ чиселъ натуральнаго ряда; затѣмъ найденныя суммы сложены, и въ результатѣ получено число* a. *Вычислить* n, *если дано* a. *Рѣшить задачу въ частномъ случаѣ, полагая* a $= 2628$.

Полагая въ тожествѣ

$$(N+1)^{m+1} = N^{m+1} + C^1_{m+1} N^m + C^2_{m+1} N^{m-1} + \ldots + C^m_{m+1} N + 1$$

N соотвѣтственно равнымъ 1, 2, 3, ..., n, получимъ рядъ тожествъ

$$\left.\begin{aligned} 2^{m+1} &= 1^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot 1^m + C^2_{m+1}\cdot 1^{m-1} + \ldots + C^m_{m+1}\cdot 1 + 1, \\ 3^{m+1} &= 2^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot 2^m + C^2_{m+1}\cdot 2^{m-1} + \ldots + C^m_{m+1}\cdot 2 + 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)^{m+1} &= n^{m+1} + C^1_{m+1}\cdot n^m + C^2_{m+1}\cdot n^{m-1} + \ldots + C^m_{m+1}\cdot n + 1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Складывая тожества (1), отнимая отъ обѣихъ частей по

$$2^{m+1} + 3^{m+1} + \ldots + n^{m+1}$$

и обозначая вообще сумму $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ черезъ S_k, находимъ формулу:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + C^1_{m+1} S_m + C^2_{m+1} S_{m-1} + \ldots + C^m_{m+1} S_1 + n, \quad (2)$$

дающую возможность вычислить S_m, если извѣстны $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$. Такъ, замѣчая, что $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ и полагая въ равенствѣ (2) $m = 2$, находимъ:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

откуда, послѣ элементарныхъ преобразованій, имѣемъ:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вычисляя затѣмъ съ помощью той же формулы (2) послѣдовательно S_3, $S_4, \ldots, S_7$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \\ S_5 &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}, \\ S_7 &= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Складывая равенства (3) и выводя $\frac{n^2(n+1)^2}{24}$ за скобку, получимъ:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{24}(6 + 4n^2 + 4n - 2 + 3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2) = a,$$

или

$$\frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 6) = \frac{n^2(n+1)^2}{8}(n^4 + 2n^3 + n^2 + 2) =$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{8}[n^2(n+1)^2 + 2] = a,$$

откуда

$$n^2(n+1)^2[n^2(n+1)^2 + 2] = 8a. \quad (4)$$

Полагая

$$n^2(n+1)^2 = x, \quad (5)$$

имѣемъ [см. (4)]:

$$x(x+2) = 8a,$$

откуда, опредѣляя положительный корень, находимъ:

$$x = -1 + \sqrt{1+8a},$$

а потому [см. (5)]

$$n(n+1) = \sqrt{-1 + \sqrt{1+8a}}, \quad (6)$$

гдѣ въ правой части оба корня имѣютъ положительное значеніе.

Опредѣляя изъ равенства (6) снова положительное значенiе n, получимъ:

$$n=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{-1+\sqrt{1+8a}}}}{2}.$$

Полагая $a=2628$, находимъ:

$$n=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{-1+\sqrt{21025}}}}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{-1+145}}}{2}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{144}}}{2}=3.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 77 (5 сер.). *Построить помощью циркуля и линейки треугольникъ* ABC, *зная положенiе вершины* A, *положенiе точекъ* P *и* P′, *въ которыхъ перпендикуляры, возставленные къ сторонамъ* AB *и* AC *въ ихъ срединахъ, встрѣчаютъ соотвѣтственно перпендикуляры, возставленные къ* BC *въ вершинахъ* B *и* C, *а также разстоянiе центра* O *круга описаннаго отъ прямой* PP′.

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Назовемъ соотвѣтственно черезъ M и N середины сторонъ AB и AC. Предположимъ раньше, что углы B и C острые. Тогда, замѣчая, что треугольники PAB и $P'AC$ равнобедренные (а именно $PA=PB$, $P'A=P'C$), имѣемъ:

$$\angle PAB+\angle BAC+\angle P'AC=\angle PAP'=\angle PBA+\angle BAC+\angle P'CA,$$

или же, называя углы треугольника ABC для краткости черезъ A, B, C и замѣчая, что углы PBC и $P'CB$, по условiю, прямые,

$$\angle PAP'=\frac{\pi}{2}-B+A+\frac{\pi}{2}-C=A+[\pi-(B+C)]=2A,$$

откуда

$$A=\frac{1}{2}\angle PAP'. \tag{1}$$

Въ четырехугольникѣ $AMON$ углы при вершинахъ M и N прямые, а потому [см. (1)]

$$\angle POP'=\angle MON=\pi-\angle MAN=\pi-A=\pi-\frac{1}{2}PAP'. \tag{2}$$

Если уголъ A острый или прямой, то [см. (1)] уголъ PAP' не превосходитъ π, если же уголъ A тупой, то уголъ PAP' болѣе π; въ первомъ случаѣ точка O лежитъ на дугѣ сегмента, опирающагося на прямую PP', вмѣщающаго уголъ $\pi-\frac{1}{2}\angle PAP'$ и лежащаго по другую сторону точки A, а во второмъ случаѣ точка O лежитъ на дугѣ такого же сегмента, но лежащаго по одну сторону съ точкой A относительно прямой PP'. Отсюда вытекаетъ построенiе. Пусть не большiй π уголъ изъ двухъ угловъ PAP' есть ϑ. Тогда, полагая, что уголъ A острый, описываемъ на PP' сегментъ, лежащiй по другую сторону точки A и вмѣщающiй [см. (2)] уголъ $\pi-\frac{\vartheta}{2}$; если предположить, что A тупой уголъ, то строимъ на PP' сегментъ, вмѣщающiй уголъ $\pi-\frac{2\pi-\vartheta}{2}$, т. е. $\frac{\vartheta}{2}$, и лежащiй по ту же сторону точки A относительно прямой PP'. Легко видѣть, что оба построенные нами сегмента образуютъ одну окружность. Теперь пересѣкаемъ эту окружность прямыми, параллельными прямой PP' и отстоящими отъ нея по обѣ ея стороны на разстояніе δ, гдѣ δ—заданное разстояніе отъ O до PP'. Соединяемъ одну изъ точекъ O пересѣченія этихъ прямыхъ съ построенной выше окружностью съ P и P' прямыми, опускаемъ изъ A соотвѣтственно перпендикуляры AM и AN на PO и $P'O$ и откладываемъ на продолженіи AM и AN соотвѣтственно $MB = AM$ и $NC = AN$. Треугольникъ ABC есть искомый. Пусть теперь одинъ изъ угловъ B и C, — напримѣръ, C,— тупой. Приведенное выше построеніе сохраняетъ силу и въ этомъ случаѣ, такъ какъ тогда имѣемъ:

$$\angle PAB + \angle BAC - \angle P'A = \angle A' = \angle PBA + [illegible]$$

$$= \frac{\pi}{2} - B + A - \left(C - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - B + A - C + \frac{\pi}{2} = A + \pi - B - C = 2A\,,$$

а потому формула (1) и всѣ дальнѣйшія разсужденія сохраняютъ свою силу.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 122 (5 сер.). *Упростить выраженіе*

$$\sqrt[3]{52 + 47i}.$$

Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$\sqrt[3]{52 + 47i} = \sqrt[3]{64 - 12 + 48i - i} = \sqrt[3]{4^3 + 3\,.\,4i^2 + 3\,.\,4^2 i + i^3} =$$

$$= \sqrt[3]{(4 + i)^3} = (4 + i)\,\alpha,$$

гдѣ α, будучи равно корню третьей степени изъ единицы, можетъ принимать одно изъ трехъ значеній:

$$1,\ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Богдановичъ (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *N. N.*

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

ЗАПИСКИ МОСКОВСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Императорскаго Русскаго Техническаго Об-ва.

(Десять выпусковъ въ годъ).

За годъ съ пересылкой и доставкой 5 р., за полгода 3 р., безъ пересылки и доставки за годъ 4 р. 50 к., за полгода 2 р. 50.

СОДЕРЖАНІЕ: Нечетные №№ — оргинальныя работы и изслѣдованія по вопросамъ техническимъ и соціально-экономическимъ на почвѣ русской дѣйствительности, обзоры, библіографія (переводныя статьи не печатаются).

Четные №№ — изъ внутренней жизни Общества, протоколы засѣданій, отчеты о дѣятельности Отдѣленія и отдѣловъ; приложенія, состоящія изъ законченныхъ трудовъ членовъ Общества или отдѣловъ его.

Въ настоящее время занятія Московскаго отдѣленія И. Р. Т. О. распредѣляются по слѣдующимъ отдѣламъ:

I. Химико-технологическій отдѣлъ. II. Механическій отдѣлъ. III. Строительно-желѣзнодорожный отдѣлъ. IV. Отдѣлъ физики и фотографіи. V. Электро-техническій отдѣлъ. VI. Постоянная Комиссія по техническому образованію. VII. Комиссія опытной станціи по огнеупорнымъ постройкамъ. VIII. Санитарный отдѣлъ. IX. Постоянная Комиссія Музея содѣйствія труду. X. Отдѣлъ Городского и Земскаго Самоуправленія.

Подписка принимается: 1) въ книжномъ магазинѣ Н. Лидертъ, Москва, Петровскія линіи, и 2) въ редакціи „Записокъ", Знаменка, М. Знаменскій пер., д. К. К. Мазинга.

Объявленія принимаются у С. С. Кальмансона, Москва, Мясницкая, 29, кв. 9, телеф. 109-12.

Редакціонный комитетъ: Я. Ф. Каганъ-Шабшай. П. И. Кедровъ. И. Я. Перельманъ.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается БЕЗПЛАТНО по первому требованію.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1908-9 г.

40-ый семестръ.

Проф. *А. Клоссовскій.* Магнитная съемка Россіи.—*Анри Пуанкарэ.* Будущее математики.—*Дж. Томсонъ.* Корпускулярная теорія матеріи.—*К. Щербина.* Математика въ русской средней школѣ. Проф. *А. Слаби.* Резонансъ и угасаніе электрическихъ волнъ.—*Б. Цомакіонъ.* Опредѣленіе поверхности и объема шара, какъ предѣловъ поверхностей и объемовъ многогранниковъ.—Проф. *Г. Бруни.* Твердые растворы—*Дм. Ефремовъ.* Нѣкоторыя свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени.—*А. Турчаниновъ.* Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.—*А. Филипповъ.* По поводу „дѣленія безъ дѣленія и вычитанія"—*Л. Гюнтеръ.* Опредѣленіе разстояній солнца и луны отъ земли и ихъ параллаксовъ въ прежнія времена и теперь.—Прив.-доц. *В. Лермантовъ.* Постановка приготовленія учителей физики въ Германіи.—*И. Точидловскій.* Новѣйшіе успѣхи наблюдательной актинометріи.—*І. Лемуанъ.* Простое изложеніе ученія о всемірномъ тяготѣніи и о вычисленіи массъ въ солнечной системѣ.

41-ый семестръ.

Проф. *Ф. Клейнъ.* Лекціи по ариѳметикѣ для учителей.—Проф. *В. Рамзай.* Благородные и радіоактивные газы.—Прив.-доц. *В. Каганъ.* О безконечно удаленныхъ элементахъ въ геометріи.—Проф. *А. Слаби.* Безпроволочный телефонъ —*А. Филипповъ.* О періодическихъ дробяхъ.—*А. Мюллеръ.* Новое предложеніе о кругѣ.—*Анри Пуанкарэ.* Математическое творчество.—*П. Зееманъ.* Происхожденіе цвѣтовъ спектра.—*В. Гернетъ.* Объ единствѣ вещества.—*С. Ньюкомъ.* Теорія движенія луны.—*В. Ритцъ.* Линейные спектры и строеніе атомовъ —*А. Кирилловъ.* Къ геометріи треугольника.—Проф. *Дж. Перри.* Преподаваніе математики въ связи съ преподаваніемъ естественныхъ наукъ.—*Э. Наннэи.* О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.—*Э. Борель.* Методъ работы Пуанкарэ.—Литература великой теоремы Фермата.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики".**