Обложка
ищется

Обложка
ищется

XL. Сем. № 1.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 469.

Новые треугольники.

Э. Лейнъка.

Въ XV сем. „Вѣстника Опытной Физики" (стр. 84) напечатана статья г. Пороховщикова подъ заглавіемъ „Новые многоугольники", въ которой онъ обращаетъ вниманіе читателей на аналогію между обыкновенными формулами плоской тригонометріи и формулами новыхъ многоугольниковъ. Мнѣ удалось получить нѣкоторыя интересныя соотношенія между элементами новыхъ треугольниковъ, которыя я рѣшаюсь предложить благосклонному вниманію читателей.

1. Назовемъ треугольникомъ фигуру, образованную тремя прямыми OM, ON, OP, исходящими изъ одной точки O и образующими между собою углы α, β, γ, которые мы назовемъ углами треугольника. За вершины примемъ круги равныхъ радіусовъ, касающіеся сторонъ угловъ α, β, γ, и условимся считать за стороны суммы $OA+OC_1$, $OB+OA_1$, $OC+OB_1$, гдѣ точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 суть соотвѣтственныя точки касанія окружностей радіуса R со сторонами угловъ α, β, γ.

Для такихъ треугольниковъ существуетъ соотношеніе, связывающее элементы ихъ, совершенно подобное теоремѣ sinus'овъ плоской тригонометріи. Чтобы вывести это соотношеніе, воспользуемся вышеуказаннымъ опредѣленіемъ сторонъ новыхъ треугольниковъ. Какъ легко видѣть изъ чертежа, имѣемъ:

$$OA + OC_1 = b = R \cot g \frac{\alpha}{2} + R \cot g \frac{\gamma}{2} = R\left(\cot g \frac{\alpha}{2} + \cot g \frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \frac{R \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}},$$

$$OB + OA_1 = c = R \cot g \frac{\beta}{2} + R \cot g \frac{\alpha}{2} = R\left(\cot g \frac{\beta}{2} + \cot g \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{R \sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$OC + OB_1 = a = R \cot g \frac{\gamma}{2} + R \cot g \frac{\beta}{2} = R\left(\cot g \frac{\gamma}{2} + \cot g \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{R \sin \frac{\gamma + \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.$$

Раздѣливъ почленно первую формулу на вторую, получимъ:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}};$$

но такъ какъ

$$\alpha + \gamma = 360^0 - \beta, \quad \beta + \alpha = 360^0 - \gamma,$$

то

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = 180^0 - \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\beta + \alpha}{2} = 180^0 - \frac{\gamma}{2}$$

и

$$\sin \frac{\alpha + \gamma}{2} = \sin \frac{\beta}{2}, \quad \sin \frac{\beta + \alpha}{2} = \sin \frac{\gamma}{2};$$

поэтому получимъ:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

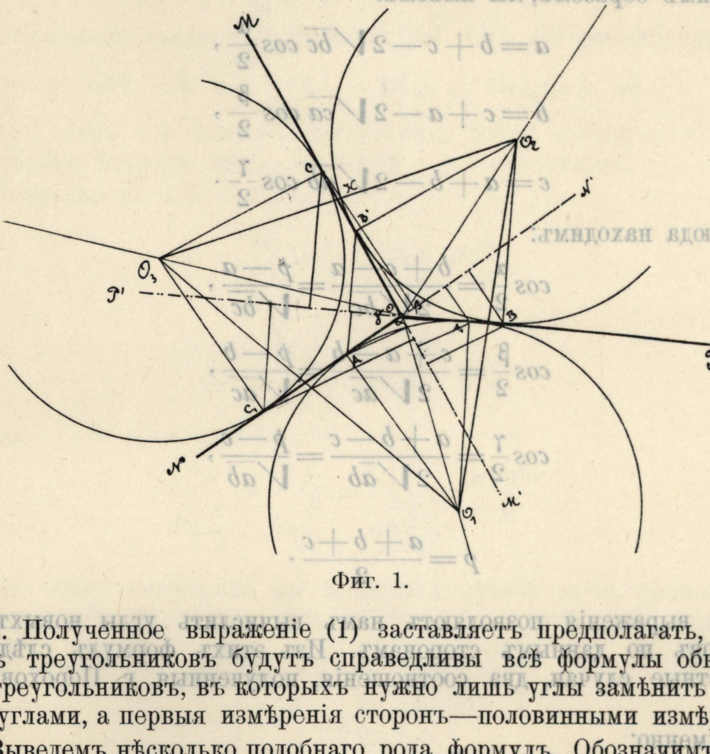
По аналогіи получимъ:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ и } \frac{a}{b} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Извлекая квадратный корень и соединяя всѣ отношенія вмѣстѣ, придадимъ найденнымъ формуламъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{c}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \qquad (1)$$

Это и есть искомое соотношеніе. Здѣсь сомнѣній относительно знака не должно быть, такъ какъ углы $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ не могутъ быть больше π, а потому sinus'ы ихъ положительны; мы принимаемъ, слѣдовательно, всѣ члены пропорціи положительными.



Фиг. 1.

2. Полученное выраженіе (1) заставляетъ предполагать, что для новыхъ треугольниковъ будутъ справедливы всѣ формулы обыкновенныхъ треугольниковъ, въ которыхъ нужно лишь углы замѣнить половинными углами, а первыя измѣренія сторонъ—половинными измѣреніями.

Выведемъ нѣсколько подобнаго рода формулъ. Обозначимъ каждое изъ равныхъ отношеній (1) одною буквою ρ, т. е. положимъ

$$\frac{\sqrt{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\rho;$$

отсюда

$$a=\rho^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\rho^2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}=$$

$$=\rho^2\left(\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\rho^2\left(\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\rho^2\sin^2\frac{\beta}{2}+\rho^2\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\rho^2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=b+c+2\sqrt{bc}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}=b+c-2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Эта формула совершенно аналогична извѣстному выраженію

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ:

$$a=b+c-2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$b=c+a-2\sqrt{ca}\cos\frac{\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$c=a+b-2\sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда находимъ:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}=\frac{p-a}{\sqrt{bc}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{c+a-b}{2\sqrt{ac}}=\frac{p-b}{\sqrt{ac}}, \qquad (3)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b-c}{2\sqrt{ab}}=\frac{p-c}{\sqrt{ab}},$$

гдѣ

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Эти выраженія позволяютъ намъ вычислить углы новыхъ треугольниковъ по даннымъ сторонамъ. Изъ этихъ формулъ слѣдуютъ, какъ частные случаи, два соотношенія, полученныя г. Пороховщиковымъ.

А именно:

при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\quad a=b+c-\sqrt{2bc}$, *)

а при $\alpha=\pi$ $\quad a=b+c$. *)

3. Пользуясь формулами (3) и чертежемъ, мы получимъ слѣдующія выраженія:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{OA}{OO_1}=\frac{p-a}{\sqrt{bc}};\ \cos\frac{\beta}{2}=\frac{OB}{OO_2}=\frac{p-b}{\sqrt{ac}};\ \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{OC}{OO_3}=\frac{p-c}{\sqrt{ab}}. \qquad (4)$$

*) См. „Вѣстн. Опытн. Физ.“, XV сем., 86 стр.

Но мы знаемъ, что

$$OA+OA_1+OB+OB_1+OC+OC_1=a+b+c,$$

или, такъ какъ

$$OA=OA_1,\quad OB=OB_1,\quad OC=OC_1,$$

то

$$2(OA+OB+OC)=a+b+c=2p,$$

откуда получаемъ:

$$OA=p-(OB+OC)=p-a;\quad OB=p-(OA+OC)=p-b;$$
$$OC=p-(OA+OB)=p-c. \tag{5}$$

Подставляя найденныя значенія OA, OB, OC въ (4), получаемъ:

$$OO_1=\sqrt{bc};\quad OO_2=\sqrt{ac};\quad OO_3=\sqrt{ab}. \tag{6}$$

4. Теперь мы можемъ представить наше основное соотношеніе (1) въ болѣе полномъ видѣ, замѣнивъ ρ его значеніемъ.

Нетрудно видѣть изъ чертежа, что

$$\frac{R}{OO_1}=\frac{R}{\sqrt{bc}}=\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{abc}}{R},$$

а потому

$$\frac{\sqrt{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{c}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sqrt{abc}}{R}. \tag{7}$$

Изъ этого выраженія мы можемъ получить очень симметричную формулу для R. Чтобы получить ее, возьмемъ сложную пропорцію:

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=\left(\frac{\sqrt{abc}}{R}\right)^3;$$

отсюда получимъ:

$$R^3=abc\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{8}$$

5. Формулу sinus'овъ мы можемъ представить еще въ другомъ видѣ, сдѣлавъ нѣкоторыя преобразованія. Въ такомъ видѣ она намъ пригодится ниже:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{a}\,(p-a)}{\sin\alpha.\sqrt{bc}}=\frac{2a(p-a)}{\sin\alpha.\sqrt{abc}};$$

по аналогіи напишемъ:

$$\frac{\sqrt{b}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{2b(p-b)}{\sin\beta\sqrt{abc}};\quad \frac{\sqrt{c}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{2c(p-c)}{\sin\gamma\sqrt{abc}}.$$

Принимая во вниманіе формулу (7), получимъ:

$$\frac{2a(p-a)}{\sin\alpha\sqrt{abc}}=\frac{2b(p-b)}{\sin\beta\sqrt{abc}}=\frac{2c(p-c)}{\sin\gamma\sqrt{abc}}=\frac{\sqrt{abc}}{R}$$

или

$$\frac{a(p-a)}{\sin\alpha}=\frac{b(p-b)}{\sin\beta}=\frac{c(p-c)}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2R}. \qquad (9)$$

6. Найдемъ выраженіе для R, зависящее отъ однѣхъ сторонъ. Для этого изъ чертежа составляемъ сумму:

$$\frac{R}{p-a}+\frac{R}{p-b}+\frac{R}{p-c}=tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{ибо}\quad \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\pi;$$

но на основаніи формулъ (3) и (8)

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{R^3}{abc}}{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}=\frac{R^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Поэтому получимъ:

$$\frac{R[(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)]}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{R^3}{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$R=\sqrt{(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)}\,^{*)}. \qquad (10)$$

7. Займемся теперь разсмотрѣніемъ площадей нашихъ треугольниковъ и посмотримъ, какъ выражается площадь фигуры $OO_1O_2O_3$, составленная изъ трехъ площадей четырехугольниковъ OAO_1A_1, OBO_2B_2, OCO_3C_3. Обозначимъ эту площадь черезъ $\triangle$; тогда

$$\triangle=2\cdot\frac{OA\,.\,OO_1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+2\cdot\frac{OB\,.\,OO_2}{2}\sin\frac{\beta}{2}+2\cdot\frac{OC\,.\,OO_3}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=$$

*) См. „Вѣстн. Опытн. Физ.“, XV сем., стр. 85.

$$=(p-a)\sqrt{bc}\,\sin\frac{\alpha}{2}+(p-b)\sqrt{ac}\,\sin\frac{\beta}{2}+(p-c)\sqrt{ab}\,\sin\frac{\gamma}{2}\cdot$$

Теперь преобразуемъ каждое слагаемое, входящее въ составъ этой суммы:

$$\sqrt{bc}\,(p-a)\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{bc}\,\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(p-a)}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{(p-a)\sqrt{bc}\,\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\,bc\sin\alpha.$$

По аналогіи найдемъ:

$$(p-b)\sqrt{ac}\,\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\,ac\sin\beta;\ (p-c)\sqrt{ab}\,\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,ab\sin\gamma,$$

а потому

$$\triangle=\frac{1}{2}(bc\sin\alpha+ca\sin\beta+ab\sin\gamma). \qquad (11)$$

Теперь мы обратимся къ отношеніямъ (9) и напишемъ ихъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{p-a}{bc\sin\alpha}=\frac{p-b}{ac\sin\beta}=\frac{p-c}{ab\sin\gamma}=\frac{1}{2R}, \qquad (11')$$

откуда, взявъ производную пропорцію, получимъ:

$$\frac{p-a+p-b+p-c}{bc\sin\alpha+ac\sin\beta+ab\sin\gamma}=\frac{p-a}{bc\sin\alpha},\ \text{или}\ \frac{p}{2\triangle}=\frac{p-a}{bc\sin\alpha}\cdot \qquad (12)$$

Замѣнивъ здѣсь $\sin\alpha$ черезъ $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, получимъ:

$$\frac{p-a}{2\,bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{p}{2\triangle};$$

но по формулѣ (4)

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{p-a}{\sqrt{bc}},$$

а потому

$$\frac{\sqrt{bc}}{bc\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{p}{\triangle}=\frac{1}{\sqrt{bc}\,\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\triangle=\sqrt{bc}\,\sin\frac{\alpha}{2}\cdot p.$$

Точно такъ же мы получили бы два другихъ выраженія:

$$\triangle = \sqrt{ac}\, sin \frac{\beta}{2} \cdot p \quad \text{и} \quad \triangle = \sqrt{ab}\, sin \frac{\gamma}{2} \cdot p.$$

Мы напишемъ все въ одинъ рядъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{bc}\, sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2p = \frac{1}{2}\sqrt{ac}\, sin \frac{\beta}{2} \cdot 2p = \frac{1}{2}\sqrt{ab}\, sin \frac{\gamma}{2} \cdot 2p. \quad (13)$$

Это выраженіе очень сильно походитъ на извѣстную формулу тригонометріи

$$\triangle = \frac{1}{2} bc\, sin\, \alpha = \frac{1}{2} ac\, sin\, \beta = \frac{1}{2} ab\, sin\, \gamma.$$

Вслѣдствіе этой аналогіи мы назовемъ площадь указанной фигуры площадью новаго треугольника.

8. Для этой же площади можно получить другія выраженія, исходя изъ слѣдующихъ соображеній. Изъ чертежа видно, что площадь $O_1O_2O_3$ равновелика нашей площади $\triangle$, ибо площ. $OO_3C +$ площ. $OB_1O_2 =$ площ. OO_2O_3 вслѣдствіе равенства треугольниковъ O_3CK и O_2B_1K. То же самое скажемъ относительно другихъ угловъ.

Такимъ образомъ, принявъ во вниманіе, что площ. $O_1O_2O_3 =$ $=$ площ. $O_1OO_2 +$ площ. $O_2OO_3 +$ площ. O_3OO_1, мы напишемъ:

$$\triangle = \frac{\sqrt{bc}\,.\,\sqrt{ac}\, sin \frac{\beta+\alpha}{2}}{2} + \frac{\sqrt{ac}\,.\,\sqrt{ab}\, sin \frac{\gamma+\beta}{2}}{2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{bc}\, sin \frac{\alpha+\gamma}{2}}{2}. \quad (14)$$

Отсюда получимъ:

$$\triangle = \frac{c\sqrt{ab}\, sin \frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{a\sqrt{bc}\, sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{b\sqrt{ac}\, sin \frac{\beta}{2}}{2}.$$

Подставляя же вмѣсто $sin\, \omega$ равное ему произведеніе $cos\, \omega\, .\, tg\, \omega$ и пользуясь соотношеніемъ (4), получимъ:

$$\triangle = \frac{c(p-c)\,.\,tg \frac{\gamma}{2}}{2} + \frac{a(p-a)\,.\,tg \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{b(p-b)\,.\,tg \frac{\beta}{2}}{2} \quad (15)$$

Но мы знаемъ, что, согласно пункту 6,

$$R = (p-a)\, tg \frac{\alpha}{2} = (p-b)\, tg \frac{\beta}{2} = (p-c)\, tg \frac{\gamma}{2},$$

а потому

$$\triangle = \frac{cR + aR + bR}{2} = R \frac{a+b+c}{2} = Rp. \quad (16)$$

отсюда имѣемъ:

$$R = \frac{\triangle}{p}. \qquad (17)$$

Эту же формулу мы имѣемъ и для обыкновенныхъ треугольниковъ (Киселевъ. Геометрія, § 302).

Этотъ же результатъ мы можемъ получить проще такимъ образомъ:

$$\text{площ. } OAO_1A_1 = 2 \text{ площ. } OAO_1 = (p-a)R,$$
$$\text{площ. } OBO_2B_1 = 2 \text{ площ. } OBO_2 = (p-b)R,$$
$$\text{площ. } OCO_3C_1 = 2 \text{ площ. } OCO_3 = (p-c)R;$$

отсюда

$$\triangle = R(3p - 2p) = Rp.$$

Сдѣланный выводъ вновь подтверждаетъ правильность нашихъ разсужденій. Замѣтимъ, наконецъ, что мы могли бы, пользуясь формулою (11), получить этотъ результатъ еще скорѣе.

9. Посмотримъ, что мы можемъ принять за высоты въ новыхъ треугольникахъ. Вычислимъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ C и B_1 на продолженіе OB. Мы назовемъ сумму ихъ h_c. Имѣемъ:

$$h_c = (p-c)\sin\beta + (p-b)\sin\beta = (2p-c-b)\sin\beta = a\sin\beta. \quad (17)$$

Сумму перпендикуляровъ изъ C_1 и A назовемъ h'_c; тогда

$$h'_c = (p-c)\sin\alpha + (p-a)\sin\alpha = (2p-a-c)\sin\alpha = b\sin\alpha. \quad (18)$$

Подобнымъ же образомъ и для другихъ высотъ получимъ:

$$\left.\begin{aligned} h_a &= b\sin\gamma, \\ h'_a &= c\sin\beta; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} h_b &= c\sin\alpha, \\ h'_b &= a\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Если воспользоваться этими выраженіями для вычисленія площади по формулѣ, аналогичной формулѣ $\triangle = \frac{ah_a}{2}$, то получаются формулы очень сложныя и мало похожія на упомянутую. Но мы выведемъ нѣкоторыя интересныя соотношенія между нашими высотами. Перемноживъ выраженія для h и h', получимъ:

$$h_a \cdot h_b \cdot h_c = h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c. \qquad (21)$$

10. Теперь докажемъ, что суммы $h_a + h'_a$, $h_b + h'_b$, $h_c + h'_c$ имѣютъ постоянную величину, не зависящую отъ угловъ α, β, γ, а лишь отъ радіуса R. Для этого поступимъ такъ:

$$\triangle = \frac{\sqrt{bc}\,\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2p}{2} = \frac{\sqrt{bc}\,\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}p = \frac{\sqrt{b}\,\sin\alpha\,.\,cp}{2\sqrt{c}\,\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{b}\,h_b\,p}{2\sqrt{c}\,\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\triangle = \frac{\sqrt{ab}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2p}{2} = \frac{\sqrt{ab}\sin\gamma}{2\cos\frac{\gamma}{2}}p = \frac{\sqrt{b}\sin\gamma\,.\,ap}{2\sqrt{a}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{b}\,.\,h'_b\,.\,p}{2\sqrt{a}\ \ os\frac{\gamma}{2}}\,.$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{h_b + h'_b}{\triangle} = \frac{2\sqrt{c}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{a}\cos\frac{\gamma}{2}}{p\sqrt{b}} = \frac{2\left(\sqrt{c}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{a}\cos\frac{\gamma}{2}\right)}{p\sqrt{b}}\,. \quad (22)$$

Но изъ формулъ (3) можно получить слѣдующія:

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}\cos\frac{\gamma}{2} + \sqrt{c}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{c}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{a}\cos\frac{\gamma}{2}, \quad (23)$$

$$\sqrt{c} = \sqrt{a}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{b}\cos\frac{\alpha}{2},$$

напоминающія

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Воспользовавшись этими формулами, имѣемъ:

$$\frac{h_b + h'_b}{\triangle} = \frac{2\sqrt{b}}{p\sqrt{b}} = \frac{2}{p};$$

откуда

$$h_b + h'_b = 2\frac{\triangle}{p},$$

а это, согласно формулѣ (17), есть $2R$.

Такія же выраженія получимъ и для другихъ высотъ, а потому

$$h_a + h'_a = h_b + h'_b = h_c + h'_c = 2R. \quad (24)$$

При помощи соотношенія (24) получимъ, взявъ формулы (19) и (21), слѣдующее:

$$h_a + h'_a = b\sin\gamma + c\sin\beta,$$

$$h_b + h'_b = c\sin\alpha + a\sin\gamma,$$

или

$$c\sin\beta + b\sin\gamma = c\sin\alpha + a\sin\gamma,$$

откуда

$$(a - b)\sin\gamma = -c(\sin\alpha - \sin\beta),$$

т. е.

$$\frac{a-b}{c} = -\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}\,. \quad (25)$$

Но если воспользоваться основнымъ соотношенiемъ (1), то, взявъ производную пропорцiю, имѣемъ:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{26}$$

Итакъ, одновременно справедливы соотношенiя (25) и (26). Формула (25) отличается только знакомъ отъ подобной же формулы обыкновенныхъ треугольниковъ.

11. Наконецъ, выведемъ еще послѣднее соотношенiе между углами новаго треугольника и углами обыкновеннаго треугольника, имѣющаго стороны a, b, c. Чтобы получить это соотношенiе. воспользуемся извѣстною формулой тригонометрiи:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{p}\cdot\sqrt{\frac{p-a}{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc}}}=\sqrt{p}\cdot\sqrt{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{bc}}};$$

возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p}{\sqrt{bc}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

отсюда

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{p}{\sqrt{bc}}.$$

Умноживъ обѣ части на $\frac{1}{\sqrt{a}}$, получимъ:

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{p}{\sqrt{abc}}.$$

Подобныя выраженiя получимъ и для другихъ угловъ:

$$\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{p}{\sqrt{abc}} \quad \text{и} \quad \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{p}{\sqrt{abc}}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{p}{\sqrt{abc}}. \tag{27}$$

Таково искомое соотношеніе. При помощи формулы (7) представимъ его въ болѣе простомъ видѣ. Имѣемъ:

$$\sqrt{a}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R},\ \sqrt{b}=\sin\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R},\ \sqrt{c}=\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R}.$$

Подставивъ въ формулу (27), получимъ:

$$\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R}}=\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R}}=\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sqrt{abc}}{R}}=$$

$$=\frac{p}{\sqrt{abc}},$$

или

$$\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{\sin\beta}=\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\gamma}=\frac{p}{R}=\frac{p^2}{\triangle},$$

откуда окончательно

$$\frac{1+\cos A}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos B}{\sin\beta}=\frac{1+\cos C}{\sin\gamma}=\frac{p^2}{\triangle}. \qquad (28)$$

Здѣсь A, B, C суть углы обыкновеннаго треугольника со сторонами a, b, c.

Нѣкоторыя свойства цѣлаго алгебраическаго многочлена 4-й степени.

Дм. Ефремова

(преподавателя Школы Колористовъ въ г. Иваново-Вознесенскѣ).

(*Продолженіе* *).

17. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ суть цѣлые алгебраическіе многочлены 4-й степени отъ x. Положимъ

$$F(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

и

$$G(x)=b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$$

и найдемъ условія, при которыхъ сумма

$$F(x)+\rho G(x)=X(x) \qquad (29)$$

*) См. „Вѣстникъ", № 464.

обращается въ полный квадратъ при одномъ или нѣсколькихъ постоянныхъ значеніяхъ множителя ρ.

Обозначимъ чрезъ $T(x)$ остатокъ отъ дѣленія квадрата производной $[X'(x)]^2$ на $X(x)$. Такъ какъ $X(x)$ — многочленъ 4-й степени отъ x, именно:

$$X(x) = (a_0 + \rho b_0)x^4 + (a_1 + \rho b_1)x^3 + (a_2 + \rho b_2)x^2 + \\ + (a_3 + \rho b_3)x + (a_4 + \rho b_4),$$

то остатокъ $T(x)$ въ общемъ случаѣ будетъ 3-й степени (n^0 1), такъ что можно положить

$$T(x) = m_0 x^3 + m_1 x^2 + m_2 x + m_3, \tag{30}$$

гдѣ, по формуламъ (7),

$$m_0 = 4(a_1 + \rho b_1)(a_2 + \rho b_2) - 8(a_0 + \rho b_0)(a_3 + \rho b_3) - \frac{(a_1 + \rho b_1)^3}{a_0 + \rho b_0},$$

$$m_1 = 4(a_2 + \rho b_2)^2 - 2(a_1 + \rho b_1)(a_3 + \rho b_3) - 16(a_0 + \rho b_0)(a_4 + \rho b_4) - \\ - \frac{(a_1 + \rho b_1)^2 (a_2 + \rho b_2)}{a_0 + \rho b_0},$$

$$m_2 = 4(a_2 + \rho b_2)(a_3 + \rho b_3) - 8(a_1 + \rho b_1)(a_4 + \rho b_4) - \frac{(a_1 + \rho b_1)^2 (a_3 + \rho b_3)}{a_0 + \rho b_0},$$

$$m_3 = (a_3 + \rho b_3)^2 - \frac{(a_1 + \rho b_1)^2 (a_4 + \rho b_4)}{a_0 + \rho b_0},$$

или

$$\begin{gathered}
m_0 = \frac{1}{a_0 + \rho b_0}\Bigg[b_0\left(4b_1 b_2 - 8b_0 b_3 - \frac{b_1^3}{b_0}\right)\rho^3 + \\
+ (4a_0 b_1 b_2 + 4a_1 b_0 b_2 + 4a_2 b_0 b_1 - 3a_1 b_1^2 - 8a_3 b_0^2 - 16a_0 b_0 b_3)\rho^2 + \\
+ (4a_0 a_2 b_1 + 4a_0 a_1 b_2 + 4a_1 a_2 b_0 - 3a_1^2 b_1 - 8a_0^2 b_3 - 16a_0 a_3 b_0)\rho + \\
+ a_0\left(4a_1 a_2 - 8a_0 a_3 - \frac{a_1^3}{a_0}\right)\Bigg],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
m_1 = \frac{1}{a_0 + \rho b_0}\Bigg[b_0\left(4b_2^2 - 2b_1 b_3 - 16b_0 b_4 - \frac{b_1^2 b_2}{b_0}\right)\rho^3 + \\
+ (8a_2 b_0 b_2 + 4a_0 b_2^2 - 16a_4 b_0^2 - 32a_0 b_0 b_4 - a_2 b_1^2 - \\
- 2a_1 b_1 b_2 - 2a_3 b_0 b_1 - 2a_1 b_0 b_3 - 2a_0 b_1 b_3)\rho^2 + \\
+ (8a_0 a_2 b_2 + 4a_2^2 b_0 - 16a_0^2 b_4 - 32a_0 a_4 b_0 - a_1^2 b_2 - \\
- 2a_1 a_2 b_1 - 2a_1 a_3 b_0 - 2a_0 a_3 b_1 - 2a_0 a_1 b_3)\rho + \\
+ a_0\left(4a_2^2 - 2a_1 a_3 - 16a_0 a_4 - \frac{a_1^2 a_2}{a_0}\right)\Bigg],
\end{gathered} \tag{31}$$

$$m_2=\frac{1}{a_0+\rho b_0}\left[b_0\left(4b_2b_3-8b_1b_4-\frac{b_1^2b_3}{b_0}\right)\rho^3+\right.$$

$$+(4a_0b_2b_3+4a_3b_0b_2+$$

$$+4a_2b_0b_3-8a_0b_1b_4-8a_1b_0b_4-8a_4b_0b_1-a_3b_1^2-2a_1b_1b_3)\rho^2+$$

$$+(4a_0a_3b_2+4a_0a_2b_3+$$

$$+4a_2a_3b_0-8a_0a_1b_4-8a_0a_4b_1-8a_1a_4b_0-a_1^2b_3-2a_1a_3b_1)\rho+$$

$$\left.+a_0\left(4a_2a_3-8a_1a_4-\frac{a_1^2a_3}{a_0}\right)\right], \tag{31}$$

$$m_3=\frac{1}{a_0+\rho b_0}\left[b_0\left(b_3^2-\frac{b_1^2b_4}{b_0}\right)\rho^3+\right.$$

$$+(a_0b_3^2+2a_3b_0b_3-a_4b_1^2-2a_1b_1b_4)\rho^2+$$

$$+(a_3^2b_0+2a_0a_3b_3-a_1^2b_4-2a_1a_4b_1)\rho+$$

$$\left.+a_0\left(a_3^2-\frac{a_1^2a_4}{a_0}\right)\right].$$

18. Обозначивъ чрезъ $S(x)$ остатокъ отъ дѣленія $[G'(x)]^2$ на $G(x)$ и положивъ

$$S(x)=l_0x^3+l_1x^2+l_2x+l_3, \tag{32}$$

по формуламъ (7) найдемъ, что

$$l_0=4b_1b_2-8b_0b_3-\frac{b_1^3}{b_0},$$

$$l_1=4b_2^2-2b_1b_3-16b_0b_4-\frac{b_1^2b_2}{b_0},$$

$$l_2=4b_2b_3-8b_1b_4-\frac{b_1^2b_3}{b_0}, \tag{33}$$

$$l_3=b_3^2-\frac{b_1^2b_4}{b_0}.$$

Поэтому, обозначивъ коэффиціенты при ρ^2 и ρ въ первой изъ формулъ (31) чрезъ p_0 и q_0, во второй—чрезъ p_1 и q_1 и т. д., получимъ

$$m_0=\frac{1}{a_0+\rho b_0}(b_0l_0\rho^3+p_0\rho^2+q_0\rho+a_0k_0),$$

$$m_1=\frac{1}{a_0+\rho b_0}(b_0l_1\rho^3+p_1\rho^2+q_1\rho+a_0k_1),$$

$$m_2=\frac{1}{a_0+\rho b_0}(b_0l_2\rho^3+p_2\rho^2+q_2\rho+a_0k_2), \tag{34}$$

$$m_3=\frac{1}{a_0+\rho b_0}(b_0l_3\rho^3+p_3\rho^2+q_3\rho+a_0k_3).$$

19. Чтобы многочленъ $X(x)$ былъ полнымъ квадратомъ, необходимо и достаточно, чтобы многочленъ $T(x)$ тождественно равнялся нулю, т. е. чтобы (30)

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0; \tag{35}$$

эти равенства, вслѣдствіе формулъ (34), принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} b_0 l_0 \rho^3 + p_0 \rho^2 + q_0 \rho + a_0 k_0 &= 0, \\ b_0 l_1 \rho^3 + p_1 \rho^2 + q_1 \rho + a_0 k_1 &= 0, \\ b_0 l_2 \rho^3 + p_2 \rho^2 + q_2 \rho + a_0 k_2 &= 0, \\ b_0 l_3 \rho^3 + p_3 \rho^2 + q_3 \rho + a_0 k_3 &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Уравненія эти должны быть совмѣстны, т. е. должны удовлетворяться при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ ρ; поэтому коэффиціенты ихъ при ρ должны удовлетворять условіямъ:

$$\frac{b_0 l_0}{b_0 l_1} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = \frac{a_0 k_0}{a_0 k_1},$$

$$\frac{b_0 l_0}{b_0 l_2} = \frac{p_0}{p_2} = \frac{q_0}{q_2} = \frac{a_0 k_0}{a_0 k_2},$$

$$\frac{b_0 l_0}{b_0 l_3} = \frac{p_0}{p_3} = \frac{q_0}{q_3} = \frac{a_0 k_0}{a_0 k_3};$$

отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что

$$\frac{l_0}{k_0} = \frac{l_1}{k_1} = \frac{l_2}{k_2} = \frac{l_3}{k_3}, \tag{37}$$

т. е. что коэффиціенты остатковъ $R(x)$ и $S(x)$ пропорціональны, такъ что, обозначивъ чрезъ C нѣкоторую постоянную, получимъ:

$$S(x) = C \, . \, R(x). \tag{38}$$

Итакъ, многочленъ

$$X(x) = F(x) + \rho G(x)$$

можетъ быть полнымъ квадратомъ лишь въ томъ случаѣ, когда остатки $R(x)$ и $S(x)$ отличаются только постояннымъ множителемъ.

20. Подставивъ въ равенства (37) вмѣсто $l_0, l_1, \ldots$ ихъ значенія (33), получимъ:

$$\begin{aligned} 4b_1 b_2 - 8b_0 b_3 - \frac{b_1^{\,3}}{b_0} &= Ck_0, \\ 4b_2^{\,2} - 2b_1 b_3 - 16 b_0 b_4 - \frac{b_1^{\,2} b_2}{b_0} &= Ck_1, \end{aligned} \tag{39}$$

$$4b_2b_3 - 8b_1b_4 - \frac{b_1^2 b_3}{b_0} = Ck_2,$$
$$b_3^2 - \frac{b_1^2 b_4}{b_0} = Ck_3, \tag{39}$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная.

Такъ какъ, согласно формуламъ (8),

$$l_2 = \frac{b_1 l_1 - b_2 l_0}{2b_0} \text{ и } l_3 = \frac{b_1 l_2 - b_3 l_0}{8b_0},$$

то, замѣнивъ здѣсь $l_0, l_1, l_2, \ldots$ ихъ выраженіями чрезъ $k_0, k_1, k_2, \ldots$, —именно:

$$l_0 = Ck_0, l_1 = Ck_1, l_2 = Ck_2, l_3 = Ck_3,$$

—получимъ еще слѣдующія два равенства:

$$k_2 = \frac{b_1 k_1 - b_2 k_0}{2b_0} \text{ и } k_3 = \frac{b_1 k_2 - b_3 k_0}{8b_0}, \tag{40}$$

которыя суть слѣдствія равенствъ (39); такимъ образомъ изъ шести равенствъ (39) и (40) независимыми являются только четыре, которыя и можно разсматривать, какъ уравненія, служащія для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, вслѣдствіе чего одно изъ этихъ неизвѣстныхъ остается неопредѣленнымъ.

21. Обозначимъ чрезъ a нѣкоторую постоянную, независящую отъ C, и положимъ

$$\frac{b_1}{b_0} = a; \tag{41}$$

представивъ уравненія (40) въ видѣ:

$$2k_2 = \frac{b_1}{b_0} k_1 - \frac{b_2}{b_0} k_0 \text{ и } 8k_3 = \frac{b_1}{b_0} k_2 - \frac{b_3}{b_0} k_0$$

и введя въ нихъ a, найдемъ, что

$$\frac{b_2}{b_0} = \frac{ak_1 - 2k_2}{k_0}$$

и (42)

$$\frac{b_3}{b_0} = \frac{ak_2 - 8k_3}{k_0}.$$

Первое и послѣднее изъ уравненій (39), при помощи равенства (41), приводятся къ виду

$$b_0^2 \left(4a \frac{b_2}{b_0} - 8 \frac{b_3}{b_0} - a^3\right) = Ck_0$$

и

$$b_0^2 \left[\left(\frac{b_3}{b_0}\right)^2 - a^2 \frac{b_4}{b_0}\right] = Ck_3;$$

исключивъ изъ этихъ уравненій C, получимъ:

$$k_0\left[\left(\frac{b_3}{b_0}\right)^2 - a^2\cdot\frac{b_4}{b_0}\right] = k_3\left(4a\frac{b_2}{b_0} - 8\frac{b_3}{b_0} - a^3\right);$$

откуда

$$a^2 k_0\frac{b_4}{b_0} = k_0\left(\frac{b_3}{b_0}\right)^2 - k_3\left(4a\frac{b_2}{b_0} - 8\frac{b_3}{b_0} - a^3\right);$$

изъ этого уравненія, пользуясь равенствами (42), находимъ, что

$$\frac{b_4}{b_0} = \frac{k_2^2 - 4k_1k_3 + ak_0k_3}{k_0^2}. \qquad (43)$$

22. Изъ равенствъ (41), (42) и (43) слѣдуетъ, что

$$b_1 = ab_0 = \frac{b_0}{k_0^2}ak_0^2,$$

$$b_2 = \frac{b_0(ak_1 - 2k_2)}{k_0} = \frac{b_0}{k_0^2}k_0(ak_1 - 2k_2),$$

$$b_3 = \frac{b_0(ak_2 - 8k_3)}{k_0} = \frac{b_0}{k_0^2}k_0(ak_2 - 8k_3),$$

и

$$b_4 = \frac{b_0}{k_0^2}(k_2^2 - 4k_1k_3 + ak_0k_3);$$

положивъ здѣсь

$$\frac{b_0}{k_0^2} = \beta,$$

получимъ:

$$b_0 = \beta k_0^2,\ b_1 = a\beta k_0^2,\ b_2 = \beta k_0(ak_1 - 2k_2),$$
$$b_3 = \beta k_0(ak_2 - 8k_3) \text{ и } b_4 = \beta(k_2^2 - 4k_1k_3 + ak_0k_3); \qquad (44)$$

поэтому

$$G(x) = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 =$$
$$= \beta[k_0^2x^4 + ak_0^2x^3 + k_0(ak_1 - 2k_2)x^2 +$$
$$+ k_0(ak_2 - 8k_3)x + k_2^2 - 4k_1k_3 + ak_0k_3].$$

Отобравъ въ этомъ выраженіи члены, содержащіе a, въ особую группу, получимъ:

$$G(x) = \beta[k_0^2x^4 - 2k_0k_2x^2 - 8k_0k_3x + (k_2^2 - 4k_1k_3)] +$$
$$+ a\beta k_0(k_0x^3 + k_1x^2 + k_2x + k_3),$$

или, вслѣдствіе равенства (6),

$$G(x) = \beta[k_0^2x^4 - 2k_0k_2x^2 - 8k_0k_3x + (k_2^2 - 4k_1k_3)] + a\beta k_0R(x). \quad (45)$$

Такимъ образомъ, многочленъ $G(x)$ найденъ. Изъ полученнаго для него выраженія (45) видно, что онъ содержитъ двѣ неопредѣленныя постоянныя α и β, значенія которыхъ находятся въ зависимости отъ неопредѣленнаго коэффиціэнта b_0.

23. Значенія множителя ρ, при которыхъ сумма

$$F(x) + \rho \, . \, G(x)$$

обращается въ полный квадратъ, суть корни одного изъ тождественныхъ (n^0 19) уравненій (36), коэффиціэнты которыхъ при ρ, ρ^2, ρ^3 суть извѣстныя функціи отъ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ и могутъ быть выражены при помощи формулъ (44) чрезъ k_0, k_1, k_2, k_3, (а слѣдовательно и чрезъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$) и неопредѣленныя постоянныя α и β. Такъ какъ уравненія (36)—3-й степени относительно ρ, то, на основаніи сказаннаго, заключаемъ, что сумма

$$F(x) + \rho \, . \, G(x)$$

для даннаго многочлена $F(x)$ и найденнаго значенія $G(x)$ обращается въ полный квадратъ при трехъ постоянныхъ значеніяхъ ρ, содержащихъ неопредѣленныя постоянныя α и β, входящія въ составъ многочлена $G(x)$.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Превращеніе элементовъ (труды W. Ramsay'я). (Revue Scientifique, № 15). Открытіе радіоактивныхъ тѣлъ и ихъ свойствъ привело насъ впервые къ знакомству съ переходомъ одного простого тѣла въ другое (замѣна элементовъ) *). Переходъ радія въ эманацію, а затѣмъ въ гелій, это измѣненіе простыхъ элементовъ должно было произвести брешь въ той теоріи, которая ставитъ своимъ девизомъ „неизмѣняемость матерій" и ведетъ свое начало со времени Лавуазье.

Рётгерфордъ (Rutherford) пришелъ къ предположенію (1900 г.), что радій и торій выдѣляютъ изъ себя продуктъ—газообразную эманацію; только этой гипотезой и можно было объяснить свойства атмосферы, окружающей эти тѣла. Опыты Кюри (1903 г.) подтвердили эту гипотезу и показали намъ, что мы имѣемъ дѣло дѣйствительно съ газомъ: двѣ вертикальныхъ трубки, одна съ растворомъ бромистаго радія, другая съ находившимся въ ней флуоресцирующимъ экраномъ изъ сѣрнистаго цинка, соединялись наверху трубкой съ краномъ. Экранъ оставался темнымъ до тѣхъ поръ, пока не открывали крана; какъ только этотъ послѣдній былъ открытъ и такимъ образомъ эманація бромистаго радія имѣла возможность распространиться, тотчасъ же экранъ начиналъ свѣтиться. Вслѣдъ затѣмъ Рётгерфордъ и Содди показали, что эманація можетъ быть сжижаема при—150°. Затѣмъ Рамсай и Содди достигли возможности уединить эманацію радія при помощи ожиженія (температура жидкаго воздуха—185°). Полученное тѣло отличается особымъ спектромъ, не похожимъ на извѣстные намъ спектры различныхъ тѣлъ. По истеченіи нѣсколькихъ дней эманація эта исчезала и вмѣстѣ съ тѣмъ и ея спектръ, давая мѣсто спектру гелія.

*) См. „Вѣстникъ" № 438.

Произведенныя въ дальнѣйшемъ изслѣдованія убѣдили насъ, что всѣ остальныя радіоактивныя тѣла претерпѣваютъ то же измѣненіе, переходя въ рядъ другихъ тѣлъ.

Методъ, употребленный Рамсаемъ и Содди для полученія чистой эманаціи радія, состоитъ въ полученіи газообразнаго продукта изъ раствора бромистаго радія, содержащагося въ замкнутомъ пространствѣ. Получаемая при этомъ смѣсь содержитъ въ себѣ, кромѣ эманаціи, еще гремучій газъ съ небольшимъ избыткомъ водорода, гелій и, вѣроятно, неонъ. Гремучій газъ удаляется помощью кислорода и послѣ высушиванія оставшагося состава въ фосфорномъ ангидридѣ газъ подвергается охлажденію до —185° помощью жидкаго воздуха. Здѣсь эманація конденсируется, причемъ изъ 20 граммовъ радія получается 1 кб. миллиметръ эманаціи. Атомный вѣсъ эманаціи, опредѣленный по скорости ея разсѣянія, давалъ цифру, близкую къ 200, причемъ въ теченіе одного дня изъ грамма радія имѣемъ

$$\frac{1.20}{22.320.000} \text{ атомъ-граммовъ эманаціи.}$$

Атомъ-граммъ радія вѣситъ 225 граммовъ, даетъ въ 225 разъ больше эманаціи. Предполагая массу его постоянной, атомъ-граммъ радія для произведенія атома-грамма эманаціи потребуетъ

$$\frac{22.320.000}{1.20.225}$$

лѣтъ, т. е. приблизительно 236 лѣтъ. Это и есть средняя цифра жизни радія, данная Рамсаемъ. Здѣсь нужно указать, что другіе методы давали гораздо бо́льшую цифру (до 3.600 лѣтъ); причина этого разногласія еще не выяснена.

Законъ измѣняемости радіоактивныхъ тѣлъ даетъ эту зависимость по отношенію къ массѣ и времени. Количество q радіоактивнаго тѣла въ теченіе времени dt теряетъ $-dq$; принимая за коэффиціентъ $\frac{1}{T}$, получимъ:

$$-dq = \frac{1}{T}\, q\, dt$$

и, интегрируя,

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

гдѣ q есть остатокъ первоначальнаго количества q_0, получившійся за время t; T есть цифра средней жизни радія. Остаточныя количества радія, по этому закону, слѣдуютъ закону убывающей геометрической прогрессіи, откуда уже, какъ слѣдствіе, является утвержденіе, что жизнь простого тѣла почти безконечна; количество же его постоянно уменьшается. Работы Рамсая и Содди даютъ намъ указанія на то, что полученные газы одноатомны, и что атомъ эманаціи даетъ три атома гелія.

Геологическая роль этихъ дѣйствующихъ тѣлъ состоитъ, какъ можно предположить, въ измѣненіи тѣлъ отъ болѣе сложныхъ къ простѣйшимъ.

А. Л.

РЕЦЕНЗІИ.

„Основанія аналитической геометріи на плоскости. Учебникъ для дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Составилъ **В. Александровъ**, инспектирующій Костромского реальнаго училища. Москва. 1908 г.“ Стр. 128.

Новыя программы дополнительнаго класса реальныхъ училищъ, изданныя Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія, вызвали, какъ и слѣдовало ожидать, оживленіе учебнаго книжнаго рынка появленіемъ руководствъ по вновь введеннымъ отдѣламъ. Къ числу подобнаго рода произведеній принадлежитъ и эта книжка, авторъ которой сообщаетъ въ предисловіи, что онъ

„почти буквально слѣдовалъ программѣ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ, утвержденныхъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія“. Но за то изложеніе уже всецѣло должно быть отнесено на счетъ автора, говорящаго въ своемъ предисловіи: „такъ какъ я убѣжденъ, что безполезно въ отношеніи умственнаго развитія сообщать ученикамъ математическія понятія и факты безъ вывода и доказательства, то всѣ сообщаемыя мною положенія возможно строго обоснованы“. Отмѣтимъ прежде всего, что въ учебникѣ, назначенномъ для средней школы, какъ и во всякомъ, надо связывать новое со старымъ, ранѣе извѣстнымъ. И аналитическую геометрію необходимо связывать съ „приложеніемъ алгебры къ геометріи“, какъ и называлась сама „аналитическая геометрія“ вплоть до начала XIX вѣка. Такъ и дѣлается въ такихъ учебникахъ, какъ •Фролова и другихъ, разсчитанныхъ на кадетскія корпуса. Нашъ авторъ этого не сдѣлалъ, и объ этомъ можно только пожалѣть. Онъ дебютируетъ такимъ опредѣленіемъ: „аналитическая геометрія занимается изученіемъ протяженій, при чемъ протяженіе разсматривается, какъ совокупность точекъ, или геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ общимъ всѣмъ имъ свойствомъ.—Это свойство выражается уравненіемъ; изслѣдуя корни этого уравненія, тѣмъ самымъ изслѣдуемъ и свойства соотвѣтствующаго ему протяженія“. Тотъ, кто уже знакомъ съ аналитической геометріей, пойметъ, что означаютъ эти фразы, сами по себѣ неточныя. Но для новичка онѣ могутъ стать понятными только послѣ усвоенія второй главы, гдѣ дается „общая идея геометрическаго мѣста“ и понятіе о его уравненіи. Совершенно непедагогично выставлять въ видѣ опредѣленія то, объясненіе чего приходится получить только изъ дальнѣйшаго. При этомъ и форма совершенно неподходящая, начиная съ неуклюжаго слова „протяженіе“ и кончая невѣрнымъ общимъ утвержденіемъ, что изслѣдуя корни (какого уравненія?), мы изслѣдуемъ и свойства протяженія. Я позволилъ себѣ остановиться на этомъ первомъ абзацѣ, потому что онъ характеренъ и для всего дальнѣйшаго изложенія. Глава II начинается снова фразой, сразу повергающей въ недоумѣніе: „всякое свойство точки, взятой въ плоскости координатъ, устанавливаетъ опредѣленную зависимость между ея координатами“. Прочитавъ эту фразу, становишься въ тупикъ: какія свойства могъ найти авторъ у точки, взятой самой по себѣ. Къ счастію, онъ дѣлаетъ сейчасъ примѣчаніе: „такъ, напримѣръ, если точка находится на линіи, дѣлящей уголъ xOy пополамъ, то $x = y$“. Онъ, такимъ образомъ, свойства точки, принадлежащей нѣкоторой линіи, считаетъ свойствомъ самой точки, не замѣчая, что черезъ каждую точку плоскости можно провести безчисленное множество линій, самыхъ разнообразныхъ, и, слѣдовательно, по мнѣнію автора, выходитъ, что каждая точка обладаетъ безчисленнымъ множествомъ свойствъ. Невѣрна, конечно, и дальнѣйшая фраза: „если заданы два свойства точки, то получаемъ систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными“, за которой слѣдуетъ странное выраженіе: „два уравненія съ двумя неизвѣстными опредѣляютъ положеніе, вообще говоря, одной (?) точки на плоскости“. Очень трудно, однако, указать всѣ невѣрности изложенія автора,—ихъ слишкомъ много. Укажу еще § 31, гдѣ понятіе о непрерывной функціи связывается непремѣнно съ уравненіемъ нерѣшеннымъ и тѣмъ совершенно безцѣльно запутывается опредѣленіе. Не могу, наконецъ, не обратить вниманія на § 36, въ которомъ г. Александровъ разсматриваетъ „предѣльныя значенія коэффиціентовъ въ общемъ уравненіи прямой“ $Ax + By + C = 0$, каковыми являются равныя нулю или безконечности. „Но,—заявляетъ авторъ,—надо исключить тѣ случаи, когда всѣ 3 коэффиціента заразъ равны либо нулю, либо безконечности; такъ какъ въ первомъ случаѣ уравненіе перестаетъ существовать, а во второмъ случаѣ уравненію будутъ удовлетворять координаты всякой точки плоскости, въ чемъ легко убѣдиться, взявъ допредѣльное (!) значеніе коэффиціентовъ и раздѣливъ всѣ члены на произведеніе этихъ коэффиціентовъ“. Итакъ, раздѣливъ $Ax+By+C=0$ на ABC получимъ $\frac{x}{BC} + \frac{y}{CA} + \frac{1}{AB} = 0$. Оба уравненія признаемъ эквивалентными и полагаемъ $A = B = C = \infty$,—второй случай свелся на первый. Но г. Александровъ этого не замѣчаетъ. Дальше у него не лучше: не могутъ быть сразу $A = B = 0$, ибо „третій коэффиціентъ, очевидно, также равенъ нулю“. Между тѣмъ, именно этотъ случай соотвѣтствуетъ безконечно-удаленной прямой и весьма поучителенъ, хотя и не на первыхъ шагахъ. Мнѣ кажется, на неправильныя заявленія автора я указалъ достаточно. Если присоединить къ этому, что, забывая, какъ проходилось приложеніе алгебры къ геометріи, авторъ вездѣ беретъ численныя уравненія и совершенно не считается съ однородностью (онъ пишетъ не только $x^2 + y^2 = 10$, но и $y = Sn\, x$ *), то позволительно будетъ прійти къ заключенію, что настоящее руководство безъ основательнаго исправленія совершенно непригодно къ употребленію. Въ книгѣ не мало опечатокъ, изъ которыхъ оговорены только 5. Вкралась опечатка и въ цѣну: на имѣющемся у меня экземплярѣ 60 к. исправлено на обложкѣ на 70 к.

Проф. Д. Синцовъ.

К. Ноакъ. *Сборникъ задачъ для практическихъ работъ по физикѣ въ средней школѣ.* Переводъ М. А. Савича подъ редакціей С. О. Майзеля.

Въ послѣдніе годы среди преподавателей физики въ средней школѣ замѣчается стремленіе углубить преподаваніе своего предмета въ двухъ направленіяхъ: съ одной стороны, все болѣе наблюдается систематическое рѣшеніе задачъ, съ другой — стремятся къ веденію практическихъ занятій по физикѣ съ учениками. Нѣтъ сомнѣнія, что и рѣшеніе задачъ и практическія работы въ высшей степени желательны. Но, если первое всегда осуществимо, то, къ сожалѣнію, нельзя того же сказать относительно практическихъ работъ. Если и не говорить даже о помѣщеніи и затратахъ, — въ высшей степени трудно вести занятія съ большимъ количествомъ учениковъ при томъ незначительномъ времени, которое можетъ оставаться свободнымъ у учениковъ средней школы. Большимъ подспорьемъ въ случаѣ веденія практическихъ занятій можетъ послужить разсматриваемая книга проф. Ноака. Авторъ приводитъ 146 задачъ, относящихся къ механикѣ, звуку, теплотѣ, свѣту и электричеству. Работы, касающіяся отдѣловъ о жидкостяхъ и газахъ, отсутствуютъ. Самому опыту предшествуетъ списокъ необходимыхъ приборовъ, а также „объясненіе“, въ которомъ авторъ сжато излагаетъ изслѣдуемое физическое явленіе и приводитъ, а иногда и выводитъ относящіяся сюда формулы. Очень цѣнными представляются указанія на способы записать, а также графически изобразить результаты опыта, сопровождающія почти всякую задачу.

Слѣдуетъ отмѣтить, однако, что хотя авторъ и считаетъ свои задачи относящимися къ средней школѣ, тѣмъ не менѣе многія изъ нихъ недоступны для нашихъ учениковъ (каковы, напр., многія задачи по механикѣ и свѣту). Онѣ скорѣе должны были бы быть продѣланы студентами физико-математическаго факультета. Тѣмъ не менѣе преподаватель можетъ выбрать вполнѣ достаточное количество задачъ, доступныхъ и для учениковъ нашей средней школы. Только относительно задачъ по электричеству можно сдѣлать болѣе существенное замѣчаніе. Почти всѣ онѣ трудны и уже заранѣе предполагаютъ довольно хорошее знакомство съ электрическими явленіями. Между тѣмъ желательно было бы имѣть рядъ простыхъ задачъ, выясняющихъ значеніе потенціала и емкости въ электростатикѣ и вольта, ома и ампера въ электродинамикѣ.

Въ частности, можно указать на слѣдующее: въ задачѣ 38 (стр. 47) слѣдуетъ упомянуть также объ употребленіи закопченной бумаги для записей на вращающемся барабанѣ, въ зад. 44 (стр. 55) неясно объясненіе, такъ какъ сначала говорится объ одномъ поршнѣ, а затѣмъ о двухъ, въ зад. 54 (стр. 68) приводится остроумный и точный способъ повѣрки закона Бойля-Маріотта посредствомъ капиллярныхъ трубокъ Мельде; слѣдуетъ, однако, упомянуть и объ обыкновенномъ приборѣ изъ двухъ стеклянныхъ трубокъ, соединенныхъ каучуковой трубкой. Переводъ, за исключеніемъ нѣсколькихъ неудачныхъ выраженій, въ родѣ „волновое уравненіе“ (стр. 53) или „воздухъ можетъ воспринять больше влажности“ (стр. 73), сдѣланъ гладко и читается легко.

М. Л.

---

*) Очень жаль, что авторъ постоянно искажаетъ изображеніе синуса и пишетъ $Sn\, x$ вм. $Sin\, x$. Въ высшей математикѣ $Sn\, x$ имѣетъ свое значеніе: эллиптическая функція „синусъ амплитуды“ (по Гудерманну).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 61 (5 сер.). Даны на плоскости двѣ концентрическія окружности, центръ которыхъ лежитъ въ точкѣ O, и нѣкоторая точка A. Между этими окружностями, упираясь въ нихъ своими концами, помѣщенъ отрѣзокъ MN такъ, что площади треугольниковъ MON и MAN имѣютъ наибольшую величину. Построить положеніе этого отрѣзка.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 62 (5 сер.). Разложить на множители выраженіе

$$a^{5x}+a^x+1.$$

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 63 (5 сер.). Доказать, что при p цѣломъ и положительномъ выраженіе

$$4^{2p}-3^{2p}-7$$

кратно 84.

(Заимств.).

№ 64 (5 сер.). Зная, что

$$a+b+c=0,$$

вычислить числовую величину выраженія

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{(a^5+b^5+c^5)}$$

(Заимств.).

№ 65 Рѣшить систему уравненій

$$x^3+x^2y-xy^2-y^3=3,$$

$$2x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3=36.$$

(Заимств.).

№ 66 (5 сер.). Нѣкто, проѣзжая въ вагонѣ трамвая, замѣтилъ своего знакомаго, направлявшагося пѣшкомъ по дорогѣ вдоль линіи трамвая въ противоположную сторону. Спустя 8 секундъ онъ успѣлъ соскочить съ вагона и направиться вдогонку за знакомымъ. Опредѣлить, черезъ сколько времени онъ нагонитъ знакомаго, если скорость его движенія при ходьбѣ вдвое быстрѣе скорости его знакомаго и впятеро медленнѣе скорости вагона (движенія обоихъ лицъ, упоминаемыхъ въ задачѣ, и движеніе вагона предполагаются равномѣрными).

Л. Ямпольскій (Петербургъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Н. В.

№ 862 (4 сер.). *Найти необходимое и достаточное условіе для того, чтобы корни уравненія*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

образовали 1) *ариѳметическую,* 2) *геометрическую или* 3) *гармоническую прогрессію.*

(Заимств. изъ *Supplemento al periodico di matematica*).

Пусть α, β, γ суть корни уравненія $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Для того, чтобы корни α, β, γ представляли ариѳметическую прогрессію, необходимо и достаточно соблюсти условіе $2\beta = \alpha + \gamma$, которое, при помощи соотношенія $\alpha + \beta + \gamma = -a$, можно записать въ видѣ $3\beta = -a$, откуда $\beta = -\frac{a}{3}$. Итакъ $\left(-\frac{a}{3}\right)$ есть корень уравненія $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, а потому равенство

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

или

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0, \tag{1}$$

даетъ необходимое и достаточное условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія третьей степени для того, чтобы его корни представляли ариѳметическую прогрессію. Подобнымъ же образомъ въ случаѣ геометрической прогрессіи послѣдовательно находимъ:

$$\beta^2 = \alpha\gamma, \tag{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -c, \tag{3}$$

$$\beta^3 = -c, \tag{4}$$

откуда

$$\beta = -\sqrt[3]{c}, \quad (-\sqrt[3]{c})^3 + a(-\sqrt[3]{c})^2 + b(-\sqrt[3]{c}) + c = 0,$$

$$\text{или} \quad a\sqrt[3]{c^2} - b\sqrt[3]{c} = 0. \tag{5}$$

Если ни одинъ изъ корней не равенъ нулю, т. е. $c \neq 0$, то условіе (5) даетъ:

$$a\sqrt[3]{c} - b = 0,$$

т. е.

$$a^3c - b^3 = 0. \tag{6}$$

Если же $c = 0$ и корни образуютъ геометрическую прогрессію, то два корня навѣрно обращаются въ нуль (такъ какъ либо первый членъ прогрессіи, либо знаменатель равенъ нулю), и при томъ средній членъ β всегда равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ общій методъ разсужденія не годится, такъ какъ изъ (3) и (4) при $\beta = 0$ не вытекаетъ (2); въ этомъ случаѣ искомое условіе дается равенствами $b = c = 0$, такъ какъ два корня обращаются въ нуль. Но при $c = 0$ эти условія равносильны равенству (6). Итакъ, равенство (6) даетъ во всѣхъ случаяхъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы корни представляли геометрическую прогрессію. Корни α, β, γ образуютъ, по опредѣленію, гармоническую прогрессію, если выполняется равенство $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$. Это условіе имѣетъ смыслъ лишь тогда, если каждый изъ корней отличенъ отъ нуля, т. е. если $c \neq 0$. Равенство $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ выражаетъ, что величины

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, обратныя корнямъ разсматриваемаго уравненія третьей степени, т. е. корни уравненія $\frac{1}{y^3}+\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0$,

$$\text{или } y^3+\frac{b}{c}y^2+\frac{a}{c}y+\frac{1}{c}=0, \tag{7}$$

получаемаго изъ первоначальнаго уравненія замѣной x черезъ $\frac{1}{y}$,— образуютъ ариѳметическую прогрессію. Примѣняя къ уравненію (7) формулу (1), мы видимъ, что равенство $2\left(\frac{b}{c}\right)^3-9\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}+\frac{27}{c}=0$, или $2b^3-9abc+27c^3=0$ ($c\neq 0$) даетъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы корни уравненія $x^3+ax^2+bx+c=0$ представляли гармоническую прогрессію.

Ф. Доброхотовъ (Петербургъ); *С. Розенблатъ* (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Н. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 904 (4 сер.). *Дано, что*

$$r_a(r_a-r_b)=r_c(r_a+r_b),$$

гдѣ r_a, r_b, r_c*—радіусы внѣвписанныхъ круговъ треугольника. Доказать, что этотъ треугольникъ прямоугольный.*

Пользуясь формулами

$$r_a=\frac{s}{p-a},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\quad r_c=\frac{s}{p-c},$$

гдѣ s есть площадь, p—полупериметръ, a, b, c—стороны треугольника, находимъ, согласно съ условіемъ:

$$\frac{s}{p-a}\left(\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p-b}\right)=\frac{s}{p-c}\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}\right).$$

Помноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{(p-a)(p-b)}{s^2}$, получимъ:

$$\frac{a-b}{p-a}=\frac{2p-a-b}{p-c}=\frac{c}{p-c},$$

откуда, послѣ освобожденія отъ знаменателей и перенесенія всѣхъ членовъ въ лѣвую часть, находимъ:

$$p(a-b-c)+bc=0,$$

$$(a+b+c)(a-b-c)+2bc=0,$$

$$a^2-(b+c)^2+2bc=a^2-b^2-c^2=0.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ треугольникѣ

$$a^2=b^2+c^2,$$

а потому онъ прямоугольный.

Н. Агрономовъ (Ревель).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется