Обложка
пщется

Обложка
ищется

XXXIX Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 461.

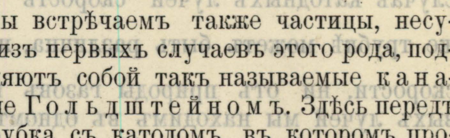
Корпускулярная теорія матеріи.

Дж. Дж. Томсона.

(*Продолженіе* *).

Носители положительнаго электричества.

Въ различныхъ явленіяхъ мы встрѣчаемъ также частицы, несущія положительные заряды. Одинъ изъ первыхъ случаевъ этого рода, подвергшихся изслѣдованію, представляютъ собой такъ называемые каналовые лучи (Kanalstrahlen), открытые Гольдштейномъ. Здѣсь передъ вами чрезвычайно разрѣженная трубка съ катодомъ, въ которомъ пробуравлено большое число отверстій (фиг. 6). Когда я пропускаю разрядъ сквозь эту трубку, то съ передней стороны катода, какъ вы видите, устремляются катодные лучи. Но помимо нихъ вы видите другіе лучи, которые устремляются сквозь отверстія черезъ газъ по другую сторону катода; эти лучи были названы каналовыми лучами. Вы замѣчаете, что и они подобно катоднымъ лучамъ, проходя черезъ газъ, заставляютъ его свѣтиться; но свѣченіе, вызываемое каналовыми лучами, имѣетъ не тотъ цвѣтъ, что при катодныхъ лучахъ. Это различіе особенно ясно выражается въ геліи, въ которомъ каналовые лучи вызываютъ



Фиг. 6.

*) См. № 460 „Вѣстника“.

свѣченіе темно-краснаго цвѣта, тогда какъ катодные лучи вызываютъ голубоватый цвѣтъ. Но и свѣченіе, вызываемое этими лучами, когда они падаютъ на твердое тѣло, имѣетъ совершенно иной характеръ. Это было особенно хорошо обнаружено тѣмъ, что освѣщали катодными и каналовыми лучами хлорнокислый литій; подъ дѣйствіемъ катодныхъ лучей соль испускаетъ свѣтъ голубовато-стального цвѣта со сплошнымъ спектромъ; подъ дѣйствіемъ каналовыхъ лучей соль испускаетъ ярко-красный свѣтъ, а спектръ показываетъ линію литія. Очень интересно отмѣтить тотъ фактъ, что спектральныя линіи щелочныхъ металловъ можно гораздо легче получить, когда каналовые лучи падаютъ на соли металла, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда они падаютъ на самые металлы; такъ, напримѣръ, когда каналовые лучи бомбардируютъ небольшое количество жидкаго раствора калія или натрія, крапинки окисловъ, находящіяся на поверхности, свѣтятся яркимъ желтымъ свѣтомъ, между тѣмъ какъ снизу поверхность совершенно темна.

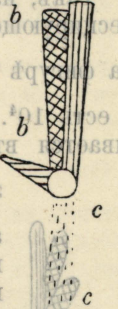
Каналовые лучи отклоняются магнитомъ, хотя далеко не въ такой мѣрѣ, какъ катодные лучи; ихъ отклоненіе имѣетъ, однако, противоположное направленіе, обнаруживая такимъ образомъ, что они несутъ положительные заряды.

Значеніе отношенія $\frac{e}{m}$ для частичекъ въ каналовыхъ лучахъ.

Винъ (Wien) воспользовался методами, описанными выше въ примѣненіи къ катоднымъ лучамъ, для опредѣленія значенія отношенія $\frac{e}{m}$ для частицъ въ каналовыхъ лучахъ. Контрастъ, обнаружившійся въ результатѣ для лучей одного и того же типа, весьма интересенъ. Въ случаѣ катодныхъ лучей скорость различныхъ лучей въ одной и той же трубкѣ можетъ быть различна, но отношеніе $\frac{e}{m}$ не зависитъ ни отъ скорости, ни отъ природы газовъ и электродовъ. Въ случаѣ каналовыхъ лучей мы находимъ въ одномъ и томъ же пучкѣ для различныхъ лучей не только различныя скорости, но и различныя отношенія $\frac{e}{m}$. Различіе въ значеніяхъ этого отношенія для катодныхъ лучей и для каналовыхъ лучей чрезвычайно замѣчательно; для катодныхъ лучей $\frac{e}{m}$ всегда равняется 1.7×10^7; между тѣмъ для каналовыхъ лучей наибольшее значеніе, какое наблюдалось, есть 10^4, что совпадаетъ со значеніемъ этого отношенія для іоновъ водорода при электролизѣ разбавленныхъ растворовъ. Если каналовые лучи проходятъ чрезъ водородъ, то отношеніе $\frac{e}{m}$ для большой части лучей равно 10^4; однако, водородъ даетъ также лучи, для которыхъ отношеніе $\frac{e}{m}$ гораздо меньше, нежели 10^4, и которые слабо отклоняются даже весьма сильнымъ магнитнымъ полемъ.

Когда каналовые лучи проходятъ чрезъ очень чистый кислородъ, то отношеніе $\frac{e}{m}$, какъ обнаружилъ Винъ, для наиболѣе отчетливыхъ лучей составляетъ около 750. Эта цифра мало отличается отъ той, которую мы получили бы, если бы зарядъ былъ тотъ же, что и для каналовыхъ лучей въ водородѣ, а масса была бы больше въ томъ же отношеніи, въ какомъ масса атома кислорода больше массы атома водорода. Но вмѣстѣ съ этими лучами водородъ даетъ другіе, для которыхъ отношеніе $\frac{e}{m}$ еще меньше, а также нѣкоторое количество такихъ лучей, для которыхъ это отношеніе равно 10^4.

Такъ какъ каналовые лучи, или лучи положительнаго электричества, представляютъ собой многообѣщающее поле для изслѣдованія природы положительнаго электричества, то я недавно произвелъ рядъ опытовъ надъ этими лучами въ различныхъ газахъ; именно, я измѣрялъ отклоненіе, которому они подвергаются подъ дѣйствіемъ электрическихъ и магнитныхъ силъ, и отсюда выводилъ значенія для $\frac{e}{m}$ и для v. Какъ оказалось, если давленіе газа не слишкомъ низко, яркое пятно, которое получается, когда эти лучи ударяются въ фосфоресцирующій экранъ, отклоняется электрическими и магнитными силами въ растянутую сплошную полосу, какъ показано на фигурѣ 7-й; эта полоса расположена по обѣ стороны неотклоненной части, но по одну сторону (cc); эта полоса гораздо темнѣе, чѣмъ по другую, и нѣсколько короче. Направленіе отклоненія полосы cc обнаруживаетъ, что она вызвана частицами, несущими о т р и ц а т е л ь н ы й зарядъ, между тѣмъ какъ болѣе яркая полоса bb обуславливается частицами, заряженными положительно. Частицы съ отрицательными зарядами, вызывающіе полосу cc, не суть корпускулы, какъ это обнаруживаетъ значеніе $\frac{e}{m}$, которое получается по ихъ отклоненію. Отношеніе это оказывается порядка 10^4; какъ мы видѣли, при этихъ условіяхъ масса носителя заряда приближается къ массѣ атома, и, слѣдовательно, она несравненно больше, чѣмъ масса корпускулы. Если давленіе очень слабо, часть фосфоресцирующаго пятна, отклоненная въ отрицательномъ направленіи, исчезаетъ; вмѣсто того, чтобы растянуться подъ дѣйствіемъ электрической и магнитной силъ въ непрерывную полосу, пятно расщепляется на два клочка, какъ показано на фигурахъ 8 и 9; фигура 8 соотвѣтствуетъ чрезвычайно слабому давленію, фигура 9 нѣсколько большему. Для одного изъ этихъ клочковъ наибольшее значеніе дроби $\frac{e}{m}$

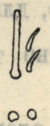


Фиг. 7.

Часть, заштрихованная на крестъ, представляетъ отклоненіе подъ совмѣстнымъ дѣйствіемъ электрической и магнитной силы; часть, заштрихованная вертикально, представляетъ отклоненіе, вызываемое одной магнитной силой; наконецъ, часть, заштрихованная горизонтально, представляетъ отклоненіе подъ дѣйствіемъ одной электрической силы.

составляетъ приблизительно 10^4, а для другого оно равно 5×10^3. Форма этихъ клочковъ и соотвѣтствующія значенія дроби $\frac{e}{m}$ остаются тѣ же, наполнена ли трубка вначалѣ воздухомъ, водородомъ или геліемъ.

Другой опытъ, который я произвелъ, заключался въ слѣдующемъ: въ трубкѣ газъ былъ настолько разрѣженъ, что при этомъ давленіи разрядъ черезъ нее уже не проходилъ. Затѣмъ я вводилъ въ нее весьма малое количество газа; благодаря этому давленіе возрастало, и разрядъ могъ пройти чрезъ трубку. Въ трубку вводились слѣдующіе газы: воздухъ, углекислота, кислородъ, водородъ, гелій, аргонъ и неонъ, но при всѣхъ этихъ газахъ видъ фосфоресценціи былъ одинъ и тотъ же; всякій разъ получались два пятнышка, для одного изъ которыхъ отношеніе $\frac{e}{m}$ было равно 10^4 а для другого — 5×10^3. При этомъ весьма слабомъ давленіи напряженіе электрическаго поля при разрядѣ въ трубкѣ весьма велико.

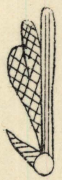


Фиг. 8.

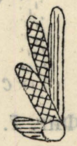
Кривыя клочки представляютъ отклоненіе подъ совмѣстнымъ дѣйствіемъ электрической и магнитной силы.

Если давленіе въ трубкѣ не слишкомъ низко, то характеръ положительныхъ лучей для весьма большого числа ихъ существенно зависитъ отъ свойствъ газа, наполняющаго трубку. Такъ, напримѣръ, въ воздухѣ при этомъ давленіи фосфоресцирующее пятно растягивается въ прямую полосу, какъ на фигурѣ 7-й; наибольшее значеніе дроби $\frac{e}{m}$ для этой полосы есть 10^4. Въ водородѣ при соотвѣтствующихъ давленіяхъ пятно растягивается въ двѣ полосы, какъ на фигурѣ 10-й; для одной изъ этихъ полосъ наибольшее значеніе дроби $\frac{e}{m}$ есть 10^4, а для другой оно составляетъ 5×10^3. Въ геліи мы также получаемъ двѣ полосы, какъ показано на фигурѣ 11-й; при этомъ въ одной изъ этихъ полосъ наибольшее значеніе дроби $\frac{e}{m}$, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, составляетъ 10^4, между тѣмъ какъ во второй полосѣ наибольшее значеніе дроби $\frac{e}{m}$ составляетъ только 2.5×10^3. Мы видимъ отсюда, что отношеніе массъ носителей зарядовъ во вторыхъ полосахъ равняется отношенію массъ атомовъ водорода и гелія.

Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

При тѣхъ же давленіяхъ въ геліи мы получаемъ три полосы, которымъ соотвѣтствуютъ значенія дроби $\frac{e}{m}$: 10^4, 5×10^3 и $2,5 \times 10^3$.

Непрерывная полоса, въ которую растягивается фосфоресцирующее пятно, когда давленіе не чрезмѣрно низко, можетъ быть объяснено слѣдующимъ образомъ.

На пути къ экрану лучи должны пройти черезъ газъ, который іонизированъ вслѣдствіе прохожденія черезъ него лучей; этотъ газъ содержитъ, слѣдовательно, свободные корпускулы. Частицы, которыя образуютъ лучи, сначала несутся съ зарядомъ положительнаго электричества; на пути черезъ газъ нѣкоторые изъ нихъ могутъ притянуть корпускулу, зарядъ которой нейтрализуетъ положительный зарядъ частицы. Въ этомъ нейтральномъ состояніи частицы могутъ вновь іонизироваться вслѣдствіе столкновенія и пріобрѣсти положительный зарядъ, могутъ также принять на себя новую корпускулу и такимъ образомъ пріобрѣсти отрицательный зарядъ; этотъ процессъ можетъ въ теченіе одного перелета къ экрану повториться нѣсколько разъ. Такимъ образомъ, нѣкоторыя частицы не будутъ имѣть положительнаго заряда все время, въ теченіе котораго онѣ находятся подъ дѣйствіемъ электрическихъ и магнитныхъ силъ, а будутъ часть этого времени въ нейтральномъ состояніи, а часть времени будутъ даже имѣть отрицательный зарядъ. Съ другой стороны, отклоненіе частицы должно быть пропорціонально среднему значенію ея заряда за весь тотъ промежутокъ времени, въ теченіе котораго она подверглась дѣйствію электрическихъ и магнитныхъ силъ; если частица нѣкоторое время находилась безъ заряда, то ея отклоненіе будетъ меньше, нежели для частицы, которая за время всего перелета сохраняла положительный зарядъ; что касается тѣхъ, сравнительно немногихъ частицъ, которыя несли отрицательный зарядъ въ теченіе большаго времени, чѣмъ положительный, то онѣ отклоняются въ противоположномъ направленіи и дадутъ слабую фосфоресцирующую полоску, направленную въ противоположную сторону отъ главной массы.

Весьма замѣчательно и поучительно, что даже тогда, когда приложено большое стараніе къ тому, чтобы совершенно удалить изъ трубки водородъ, мы при всевозможныхъ давленіяхъ получаемъ большое количество лучей, для которыхъ отношеніе $\frac{e}{m}$ равно 10^4, т. е. имѣетъ значеніе, соотвѣтствующее атому водорода; къ тому же во многихъ случаяхъ это есть единственное опредѣленное значеніе этой дроби, какое только наблюдалось, такъ какъ непрерывная полоса, въ которой мы находимъ всѣ значенія $\frac{e}{m}$, вызывается, какъ мы видѣли, не измѣненіемъ массы m, а измѣненіемъ средняго значенія заряда e.

Если присутствіе лучей, для которыхъ $\frac{e}{m}$ равняется 10^4, должно быть всецѣло объяснено водородомъ, нѣкоторое количество котораго всегда имѣется въ видѣ примѣси въ газѣ, наполняющемъ трубку, а положительныя частицы представляютъ собой водородъ, іонизируемый корпускулами, выбрасываемыми изъ катода (эта іонизація заключается въ томъ, что корпускула отрывается отъ молекулы), то мы должны были бы ожидать, что положительно заряженныя частицы представляютъ собой молекулы, а не атомы водорода.

Итакъ, какой бы газъ ни наполнялъ трубку, при очень слабомъ давленіи и при очень интенсивномъ электрическомъ полѣ, мы всегда получаемъ два типа носителей положительнаго электричества. Для одного изъ этихъ типовъ $\frac{e}{m} = 10^4$ и для другого $\frac{e}{m} = 5 \times 10^3$. Послѣднее значенiе соотвѣтствуетъ положительнымъ частицамъ, которыя испускаются радiоактивными веществами. Наиболѣе напрашивающееся истолкованiе этого результата заключается въ слѣдующемъ: при всѣхъ условiяхъ, какiя могутъ имѣть мѣсто, когда разрядъ проходитъ чрезъ трубку съ весьма слабымъ давленiемъ, газъ испускаетъ положительныя частички, которыя сходны съ корпускулами въ томъ отношенiи, что онѣ, какъ и послѣднiя, не зависятъ отъ природы извергающаго ихъ газа, но которыя, съ другой стороны, отличаются отъ корпускулъ въ томъ отношенiи, что онѣ имѣютъ массы, приближающiяся къ массѣ атома водорода; между тѣмъ корпускула имѣетъ массу приблизительно въ 1700 разъ меньшую. Положительныя частицы одного типа имѣютъ массу, равную массѣ атома водорода, а частицы второго типа имѣютъ вдвое большую массу. Опыты, которые я выше описалъ, указываютъ такимъ образомъ, что при весьма слабомъ давленiи и очень сильномъ электрическомъ полѣ, всѣ положительныя частицы принадлежатъ къ одному изъ этихъ двухъ типовъ. Какъ мы видѣли, для положительно заряженныхъ частицъ въ каналовыхъ лучахъ, если давленiе газа не падаетъ слишкомъ низко, то значенiе дроби $\frac{e}{m}$ зависитъ отъ природы газа, содержащагося въ трубкѣ, и при томъ такимъ образомъ, что наименьшее значенiе m сравнимо съ массой атома водорода; оно, такимъ образомъ, всегда несравненно больше, нежели въ носителяхъ отрицательныхъ зарядовъ катодныхъ лучей. Мы не знаемъ ни одного случая, когда массы частицъ, несущихъ положительный зарядъ, были бы меньше массы атома водорода.

Положительные iоны, испускаемые нагрѣтыми проволоками.

Если металлическую проволоку нагрѣть до краснаго каленiя, то она испускаетъ частицы, имѣющiя положительный электрическiй зарядъ. Я изслѣдовалъ значенiе дроби $\frac{e}{m}$ для этихъ частицъ и нашелъ, что онѣ обнаруживаютъ тѣ же особенности, что и положительныя частицы въ каналовыхъ лучахъ. Частицы, испускаемыя проволокой, не всѣ сходны между собой; однѣ изъ нихъ имѣютъ одно значенiе отношенiя $\frac{e}{m}$, другiя—другое; но наибольшее значенiе, которое мнѣ пришлось встрѣтить въ своихъ опытахъ, когда проволока была окружена разрѣженнымъ воздухомъ, было 720. Для весьма же многихъ частицъ это отношенiе было значительно меньше и, что особенно замѣчательно, даже при весьма сильномъ магнитномъ полѣ.

Положительные iоны, испускаемые радiоактивными веществами.

Различныя радiоактивныя вещества, какъ радiй, полонiй, уранiй и актинiй, извергаютъ съ большой быстротой положительно заряженныя частицы, которыя были названы X-лучами. Значенія дроби $\frac{e}{m}$ для этихъ частицъ были измѣрены Рётгерфордомъ (Rutherford), Де-Кудресомъ (Des Coudres), Макензи (Mackenzie) и Гуффомъ (Huff) и для всѣхъ веществъ, изслѣдованныхъ до настоящаго времени (радій и продукты его преобразованія, полоній и актиній), получилось одно и то же значеніе этого отношенія, а именно 5×10^3, т. е. то же самое, какъ для одного изъ типовъ, которые встрѣчаются въ разрѣженныхъ трубкахъ. Скорость, съ которой несутся частицы, значительно измѣняется отъ одного вещества къ другому. Такъ какъ всѣ эти вещества испускаютъ гелій, то становится, въ первую очередь, очевиднымъ, что частицы α представляютъ собой гелій. Для атома гелія съ однимъ зарядомъ $\frac{e}{m} = 2{,}5 \times 10^3$. Если, слѣдовательно, частицы α представляютъ собой атомы гелія, то онѣ должны нести двойной зарядъ. Большое значеніе дроби $\frac{e}{m}$ показываетъ, что носители положительнаго электричества должны быть атомами или молекулами нѣкотораго вещества съ малымъ атомнымъ вѣсомъ. Водородъ и гелій суть единственныя вещества, атомный вѣсъ которыхъ настолько малъ, что можетъ подходить подъ значеніе $\frac{e}{m} = 5000$; что касается этихъ двухъ веществъ, то мы знаемъ, что гелій испускается радіоактивными веществами; между тѣмъ относительно какой-либо эволюціи водорода мы не имѣемъ никакихъ данныхъ.

Какъ мы видѣли, положительныя частицы, имѣющія отношеніе $\frac{e}{m} = 5 \times 10^3$, были найдены во всѣхъ разрѣженныхъ трубкахъ, проводящихъ электрическій зарядъ, когда давленіе въ трубкѣ очень низко; скорость этихъ частицъ гораздо меньше, чѣмъ скорость частицъ α. Изъ изслѣдованій Брагга (Bragg), Клеемана (Kleemann) и Рётгерфорда слѣдуетъ, что частицы теряютъ свою способность производить іонизацію и фосфоресценцію, когда ихъ скорость, вслѣдствіе прохожденія черезъ абсорбирующее вещество, падаетъ ниже приблизительно 10^9 cm/sec. Интереснымъ пунктомъ въ этомъ результатѣ является то, что при разрядѣ въ трубкѣ положительныя частицы могутъ вызывать іонизацію и фосфоресценцію даже въ томъ случаѣ, когда скорость ихъ гораздо меньше этой.

Возможно, что это обусловливается частицами α, число которыхъ гораздо меньше, нежели число положительно заряженныхъ частицъ въ трубкѣ при разрядѣ. И такъ какъ частицъ α такъ мало и онѣ такъ далеки другъ отъ друга, то каждая частица въ своей попыткѣ производить іонизацію или фосфоресценцію не получаетъ поддержки со стороны своихъ коллегъ. Если, слѣдовательно, чтобы вызвать въ нѣкоторой системѣ іонизацію или фосфоресценцію, необходимо затратить на это извѣстное количество энергіи, то вся эта энергія должна исходить отъ одной частицы. Если же, какъ въ разрядной трубкѣ, потокъ частицъ гораздо болѣе концентрированъ, то энергія, требуемая системой, можетъ исходить не отъ одной частицы, а отъ большого количества ихъ; дѣло въ томъ, что въ этомъ случаѣ энергія, сообщенная системѣ одной частицей, не бываетъ еще вся затрачена, когда присоединяется дополнительная энергія другой частицы. Такимъ образомъ, дѣйствіе, вызываемое частицами, можетъ накопляться, и система можетъ, въ концѣ концовъ, получать требуемое количество энергіи отъ многихъ частицъ. Если, такимъ образомъ, той энергіи, какую даетъ только одна частица, можетъ быть и недостаточно, чтобы вызвать іонизацію или фосфоресценцію, то накопленный эффектъ нѣсколькихъ частицъ можетъ это дѣйствіе производить.

Внезапная потеря способности къ іонизаціи можетъ объясняться и иначе; именно, способность вызывать іонизацію можетъ зависѣть отъ наличности электрическаго заряда на частицѣ; когда скорость частицы падаетъ ниже нѣкотораго значенія, то она уже не имѣетъ болѣе возможности ускользать отъ отрицательно заряженной корпускулы, проходящей весьма близко отъ нея; она удерживаетъ корпускулу подлѣ себя, какъ спутника; оба тѣльца образуютъ электрически нейтральную систему; съ другой стороны, шансы на іонизацію, вслѣдствіе столкновенія, уменьшаются съ возрастаніемъ скорости; если поэтому скорость превосходитъ нѣкоторый предѣлъ, то такая нейтральная система не такъ легко можетъ быть іонизирована и не такъ легко можетъ пріобрѣсти электрическій зарядъ, какъ частицы въ разрядной трубкѣ, двигающіяся гораздо медленнѣе.

Всѣ эти изслѣдованія относительно свойствъ носителей положительнаго электричества доказываютъ слѣдующее: 1) въ то время, какъ въ весьма разрѣженныхъ газахъ носители отрицательнаго электричества имѣютъ чрезвычайно малую массу, составляющую только около $^1/_{1700}$ массы атома водорода, масса носителей положительнаго электричества никогда не бываетъ меньше атома водорода; 2) въ то время, какъ носители отрицательнаго электричества, корпускулы, имѣютъ одну и ту же массу, изъ какого бы источника онѣ ни происходили, носители положительнаго электричества имѣютъ перемѣнную массу: такъ, напримѣръ, въ водородѣ наименьшая изъ положительныхъ частицъ, повидимому, представляетъ собой атомъ водорода; между тѣмъ какъ въ геліи, при давленіи не слишкомъ низкомъ, носители положительнаго электричества частью, нужно думать, представляютъ собой атомы гелія. Все изложенное выше съ очевидностью обнаруживаетъ, что даже въ газахъ наиболѣе разрѣженныхъ носителями положительнаго электричества являются тѣла, по меньшей мѣрѣ, того же размѣра, что и атомы; напротивъ, отрицательное электричество имѣетъ носителями корпускулы тѣла съ постоянной и чрезвычайно малой массой.

Самое простое объясненіе такого результата заключается въ томъ, что положительные іоны представляютъ собой атомы или группы атомовъ различныхъ элементовъ, съ которыхъ сошли одна или нѣсколько корпускулъ. Такимъ образомъ, корпускулы являются передатчиками, посредствомъ которыхъ электричество переносится съ одного тѣла на другое. Положительно заряженное тѣло отличается отъ ненаэлектризованнаго тѣмъ, что оно потеряло нѣкоторое количество корпускулъ, между тѣмъ какъ отрицательно заряженное тѣло имѣетъ больше корпускулъ, нежели незаряженное тѣло.

По старой теоріи одной электрической жидкости положительная или отрицательная электризація объяснялась избыткомъ или недостаткомъ „электрической жидкости". Съ точки зрѣнія, изложенной нами, положительная или отрицательная электризація обусловливается недостаткомъ или избыткомъ корпускулъ. Эти двѣ точки зрѣнія пріобрѣтаютъ очень много общаго, если мы допустимъ, что „электрическая жидкость" состоитъ изъ корпускулъ.

Въ корпускулярной теоріи вещества мы предполагаемъ, что атомы элементовъ составлены изъ положительнаго и отрицательнаго электричества, при чемъ отрицательное электричество входитъ въ формѣ корпускулъ. Въ незаряженномъ атомѣ имѣется столько же единицъ положительнаго электричества, сколько и отрицательнаго. Атомъ, несущій одну единицу положительнаго заряда, есть нейтральный атомъ, потерявшій одну корпускулу, между тѣмъ какъ атомъ, содержащій единицу отрицательнаго заряда, есть нейтральный атомъ, принявшій на себя лишнюю корпускулу.

До сихъ поръ не было найдено ни одного положительно наэлектризованнаго тѣла, масса котораго была бы меньше, нежели масса атома водорода. Однако, мы не можемъ еще отсюда безъ дальнѣйшаго изслѣдованія заключить, что масса единицы положительнаго электричества равна массѣ атома водорода, ибо все, что мы знаемъ, сводится только къ тому, что заряженная система имѣетъ положительнаго электричества на одну единицу больше, нежели отрицательнаго; всякая система, содержащая n единицъ положительнаго электричества и $n-1$ корпускулъ, удовлетворяетъ этому условію, каково бы ни было значеніе числа n. Прежде, чѣмъ сдѣлать какія-нибудь заключенія относительно массы положительнаго электричества, мы должны что-либо знать относительно числа корпускулъ въ системѣ. Ниже мы сообщимъ методы, при помощи которыхъ можно получить эти свѣдѣнія; здѣсь же мы только укажемъ слѣдующій фактъ: эти методы обнаруживаютъ, что число корпускулъ въ атомѣ элемента пропорціонально его атомному вѣсу; оно представляетъ собой кратное, и при томъ не высокое кратное, атомнаго вѣса элемента. Если это правило вѣрно, то въ атомѣ водорода не можетъ быть большого числа корпускулъ и, слѣдовательно, единицъ положительнаго электричества. А такъ какъ масса корпускулы чрезвычайно мала по сравненію съ атомомъ водорода, то отсюда слѣдуетъ, что лишь небольшая часть массы атома можетъ обусловливаться корпускулами. Остовъ массы долженъ, такимъ образомъ, обусловливаться положительнымъ электричествомъ, и, слѣдовательно, единица положительнаго заряда должна имѣть массу большую по сравненію съ корпускулой—единицей отрицательнаго электричества.

Изъ опытовъ, описанныхъ на страницѣ 99, мы заключаемъ, что положительное электричество составлено изъ единицъ, которыя не зависятъ отъ вещества, несущаго зарядъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Къ вопросу о несуществованіи нечетныхъ совершенныхъ чиселъ.

А. Турчанинова.

Число, какъ извѣстно, называется совершеннымъ, если оно равно суммѣ своихъ правильныхъ дѣлителей *). Разысканіемъ такихъ чиселъ много занимались въ древности — у Евклида (Elementa, IX) мы находимъ теорему, которая содержитъ въ себѣ почти все, что мы и теперь знаемъ объ этихъ числахъ. Эта теорема касается лишь четныхъ совершенныхъ чиселъ, и съ теоретической точки зрѣнія она вполнѣ исчерпываетъ вопросъ **).

Что касается нечетныхъ совершенныхъ чиселъ, то таковыхъ мы не знаемъ ни одного. Но въ то же время и не дано доказательства, что такихъ чиселъ нѣтъ. Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ только изложить тѣ найденныя мною свойства, которыми должны были бы обладать нечетныя совершенныя числа, если бы таковыя существовали. Затѣмъ я покажу, что до извѣстнаго опредѣленнаго предѣла нѣтъ ни одного нечетнаго совершеннаго числа, т. е. что такими свойствами могутъ обладать только числа, лежащія выше этого предѣла ***).

Если N есть число совершенное, то $N = S(N) - N$, гдѣ $S(N)$ есть сумма всѣхъ дѣлителей числа N. Отсюда получаемъ уравненіе совершенныхъ чиселъ: $2N = S(N)$. Если N разложеніемъ на простые множители приводится къ виду $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots . l^\lambda$, то ариѳметическая функція $S(N)$ равна $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$, и названное уравненіе принимаетъ видъ:

$$2a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}.$$

Послѣднимъ-то мы и будемъ все время пользоваться.

Теорема I. Если $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ есть совершенное нечетное число, то одно изъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ непремѣнно нечетное, всѣ же остальныя непремѣнно четныя.

Здѣсь намъ удобнѣе наше уравненіе написать нѣсколько иначе, а именно въ такомъ видѣ:

$$2a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda = \sum_{m=0}^{m=\alpha} a^m \cdot \sum_{n=0}^{n=\beta} b^n \cdot \sum_{p=0}^{p=\gamma} c^p \ldots \sum_{k=0}^{k=\lambda} l^k .$$

*) Подъ правильнымъ дѣлителемъ числа разумѣютъ любого его дѣлителя, отличнаго отъ самого числа.

**) Интересующіеся четными совершенными числами могутъ найти изложеніе этой теоремы, напримѣръ, въ сочиненіи: „Веберъ и Вельштейнъ. Энциклопедія элементарной математики“. I, стр. 299.

***) Почти всѣ изложенные здѣсь авторомъ результаты уже извѣстны. Сводку ихъ можно найти, напримѣръ, въ книгѣ W. Rouse Ball „Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes“. (Приложеніе въ указываемомъ французскомъ изданіи). Такъ какъ авторомъ, однако, найдены эти результаты совершенно независимо и оригинально, то мы все же сочли нужнымъ удѣлить мѣсто этой статьѣ на страницахъ „Вѣстника“. Ред.

Отсюда мы усматриваемъ, что одно изъ чиселъ

$$\sum_{m=0}^{m=a} a^m, \quad \sum_{n=0}^{n=\beta} b^n, \ldots, \sum_{k=0}^{k=\lambda} l^k$$

непремѣнно четное, между тѣмъ какъ остальныя непремѣнно нечетныя. Но каждое изъ этихъ чиселъ есть сумма нечетныхъ слагаемыхъ. Сумма же нечетныхъ слагаемыхъ будетъ четнымъ или нечетнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли число ихъ четное или нечетное. Числа же слагаемыхъ нашихъ суммъ суть соотвѣтственно $\alpha+1$, $\beta+1, \ldots, \lambda+1$. Итакъ, одно изъ чиселъ $\alpha+1$, $\beta+1, \ldots, \lambda+1$ непремѣнно четное, всѣ же остальныя непремѣнно нечетныя, а это и доказываетъ нашу теорему.

Итакъ, нечетное совершенное число по разложенiи на простые множители приводится только къ виду $a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$.

Слѣдствiе. Нечетное совершенное число не можетъ быть полнымъ квадратомъ, ибо необходимое и достаточное условiе того, чтобы число было полнымъ квадратомъ, заключается въ томъ, чтобы показатели всѣхъ его простыхъ множителей были четными.

Это слѣдствiе можно доказать и независимо отъ приведенной теоремы. Дѣйствительно, какъ извѣстно, число всѣхъ дѣлителей полнаго квадрата всегда есть нечетное число, а слѣдовательно, число правильныхъ дѣлителей всегда четное. Если нашъ квадратъ есть число нечетное, то каждый дѣлитель его также представляетъ собой нечетное число. Сумма же четнаго числа нечетныхъ слагаемыхъ всегда есть число четное. Итакъ, сумма правильныхъ дѣлителей нечетнаго квадрата всегда есть число четное. Отсюда ясно, что такое число никогда не будетъ совершеннымъ.

Теорема II. Если нечетное число $N = a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$ есть число совершенное, то a непремѣнно есть простое число вида $4n+1$.

Имѣемъ:

$$2a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda} = \frac{a^{2\alpha}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}.$$

Какъ извѣстно, квадратъ всякаго нечетнаго числа имѣетъ видъ $8n+1$. Слѣдовательно, $a^{2\alpha}-1$ дѣлится на 8. Поэтому, если бы $a-1$ не дѣлилось на $2^2=4$, то $\dfrac{a^{2\alpha}-1}{a-1}$ раздѣлилось бы на 4, и у насъ, такимъ образомъ, получилось бы, что $2a^{2\alpha-1} b^{2\beta} \ldots l^{2\lambda}$ кратно 4, что невозможно, ибо N есть число нечетное. Итакъ, $a-1$ непремѣнно раздѣлится на 4, т. е. a будетъ имѣть видъ $4n+1$.

Слѣдствіе. Нечетныхъ совершенныхъ чиселъ вида $4n+3$ нѣтъ.

Имѣемъ:

$$N = a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda} = aP^2,$$

гдѣ P есть число нечетное, а слѣдовательно, вычетъ числа P^2 по модулю 4 есть 1*). Число же a, по доказанному, имѣетъ вычетомъ по модулю 4 единицу. Слѣдовательно, $N = aP^2$ непремѣнно имѣетъ видъ $4n+1$ и вида $4n+3$ имѣть не можетъ.

Теорема III. Если нечетное число $N = a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$ таково, что a есть простое число вида 2^n+1, и при этомъ ни одно изъ чиселъ $b-1, c-1, \ldots, l-1$ на a не дѣлится, то это число не можетъ быть совершеннымъ.

Имѣемъ:

$$2a^{2\alpha-1} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda} = \frac{a^{2\alpha}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{2\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{2\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{2\lambda+1}-1}{l-1}.$$

Отсюда видно, что должно удовлетвориться одно изъ сравненій:

$$b^{2\beta+1} \equiv 1 \text{ (мод. } a); \ c^{2\gamma+1} \equiv 1 \text{ (мод. } a); \ldots; \ l^{2\lambda+1} \equiv 1 \text{ (мод. } a).$$

Не нарушая общности, можемъ предположить, что удовлетворилось сравненіе $b^{2\beta+1} \equiv 1$ (мод. a). Разсмотримъ сравненіе $b^x \equiv 1$ (мод. a). Здѣсь, какъ извѣстно, число x должно быть кратно показателя, которому принадлежитъ b по модулю a. Но этотъ показатель есть дѣлитель числа $a-1 = 2^n$, т. е. есть либо 1, либо число четное. А такъ какъ онъ не можетъ быть 1, ибо $b-1$, по условію, на a не дѣлится, то, значитъ, $2\beta+1$ кратно четнаго числа, что не можетъ имѣть мѣста.

Теорема IV. Если $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ есть число совершенное, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{l}\right) < \frac{1}{2}.$$

Имѣемъ:

$$S(N) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1} <$$

$$< \frac{a^{\alpha+1}}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}}{c-1} \cdots \frac{l^{\lambda+1}}{l-1} =$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda}{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{l}\right)} =$$

*) Т. е. остатокъ отъ дѣленія числа на 4 равенъ 1.

$$=\frac{N}{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right)}.$$

Но у насъ $S(N)=2N$; значитъ:

$$2N<\frac{N}{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right)},$$

откуда $\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right)<\frac{1}{2}$.

Слѣдствіе. Если N есть число совершенное, то $N>2\varphi(N)$.

Помножая на N обѣ части неравенства

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right)<\frac{1}{2},$$

получимъ:

$$\varphi(N)<\frac{N}{2}, \text{ т. е. } N>2\varphi(N).$$

Эта теорема и это слѣдствіе относятся какъ къ нечетнымъ совершеннымъ числамъ, такъ и къ четнымъ.

Теорема V. Нечетное совершенное число должно состоять, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ различныхъ простыхъ множителей.

Для доказательства этой теоремы достаточно обнаружить, что: 1) оно не можетъ представлять собой степени одного простого числа и 2) не можетъ содержать только два простыхъ множителя.

1) Если совершенное число есть степень простого числа a, то

$1-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$ и $a<2$,—что, очевидно, не можетъ имѣть мѣста.

2) Если совершенное число содержитъ только два различныхъ простыхъ множителя a и b, то

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{2}.$$

Мы всегда имѣемъ право предположить $a<b$. Тогда и

$$1-\frac{1}{a}<1-\frac{1}{b},$$

и мы получимъ:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^2<\frac{1}{2},$$

откуда $2(a-1)^2<a^2$. Но при $a=5$ выполняется обратное неравенство, ибо $2.4^2>5^2$, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^2>\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ $1-\frac{1}{a}$ возрастаетъ вмѣстѣ съ a, то при $a>5$ тѣмъ болѣе будетъ $\left(1-\frac{1}{a}\right)^2>\frac{1}{2}$. Значитъ, необходимо предположить $a<5$, и, слѣдовательно, $a=3$. Тогда

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}.$$

и, слѣдовательно, $\frac{1}{b}>\frac{1}{4}$, откуда $b<4$, что можетъ быть только при $b=3$.

Но это невозможно, ибо по условію $b>a$.

Теорема VI. Нечетное совершенное число, состоящее изъ трехъ различныхъ простыхъ множителей, необходимо приводится только къ одному изъ слѣдующихъ двухъ видовъ: $3^\alpha.5^\beta.11^\gamma$, либо $3^\alpha.5^\beta.13^\gamma$.

Имѣемъ:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2}.$$

Положимъ $a<b<c$. Тогда $\left(1-\frac{1}{a}\right)^3<\frac{1}{2}$, т. е. $2(a-1)^3<a^3$. Но $2.4^3=128>5^3=125$, т. е. при $a\geqslant5$ выполняется обратное неравенство. Необходимо, стало-быть, предположить $a<5$, т. е. $a=3$. Тогда

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4},$$

или $\left(1-\frac{1}{b}\right)^2<\frac{3}{4}$, откуда $4(b-1)^2<3b^2$. Но $4.10^2>3.11^2$; значитъ, при $b\geqslant11$ выполняется обратное неравенство. Отсюда $b<11$, т. е. b равно либо 5, либо 7. Но легко видѣть, что b не можетъ быть равно 7, ибо тогда

$$1-\frac{1}{c}<\frac{3}{4\left(1-\frac{1}{7}\right)}=\frac{3}{4\cdot\frac{6}{7}}=\frac{7}{8} \text{ и } \frac{1}{c}>\frac{1}{8}, \text{ или } c<8.$$

Значитъ, $b=5$. Тогда

$$1-\frac{1}{c}<\frac{3}{4\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{15}{16},$$

откуда $c<16$, т. е. c равно либо 7, либо 11, либо 13. Итакъ, нечетное совершенное число, состоящее изъ трехъ различныхъ простыхъ множителей, можетъ быть только одного изъ трехъ видовъ: $3^\alpha\cdot5^\beta\cdot7^\gamma$, либо $3^\alpha\cdot5^\beta\cdot11^\gamma$, либо $3^\alpha\cdot5^\beta\cdot13^\gamma$.

Но нетрудно обнаружить, что совершенныхъ чиселъ вида $3^\alpha.5^\beta.7^\gamma$ быть не можетъ.

Дѣйствительно, здѣсь только 5 есть число вида $4n+1$; слѣдовательно, только оно можетъ входить въ нечетной степени. Но 5 есть простое число вида 2^2+1, при чемъ ни $3-1=2$ ни $7-1=6$ на 5 не дѣлятся. Значитъ, чиселъ этого вида быть не можетъ (теор. III).

Разсматривая числа вида $3^\alpha\cdot5^\beta\cdot11^\gamma$, видимъ, что здѣсь также только 5 имѣетъ форму $4n+1$, т. е. только 5 здѣсь можетъ входить въ нечетной степени. Итакъ, эти числа приводятся къ виду

$$5^{2n-1}\cdot3^{2m}\cdot11^{2p}.$$

Разсматривая, наконецъ, числа вида $3^\alpha\cdot5^\beta\cdot13^\gamma$, видимъ, что тутъ и 5 и 13 имѣютъ формы $4n+1$. Но 5 не можетъ входить здѣсь въ нечетной степени, ибо ни $3-1=2$ ни $13-1=12$ на 5 не дѣлятся. Значитъ, числа этого вида имѣютъ форму $13^{2n-1}\cdot3^{2m}\cdot5^{2p}$.

Теорема VII. Если нечетное совершенное число имѣетъ видъ $5^{2n-1}\cdot3^{2m}\cdot11^{2p}$, то либо n, либо $m+3$ дѣлятся на 5. Если же оно имѣетъ видъ $13^{2n-1}\cdot3^{2m}\cdot5^{2p}$, то n непремѣнно дѣлится на 2, а $m+2$ на 3.

1) Согласно основному равенству, имѣемъ:

$$2\cdot5^{2n-1}\cdot3^{2m}\cdot11^{2p}=\frac{5^{2n}-1}{5-1}\cdot\frac{3^{2m+1}-1}{3-1}\cdot\frac{11^{2p+1}-1}{11-1}.$$

Отсюда усматриваемъ, что должно удовлетвориться одно изъ сравненій:

$$\text{либо } 5^{2n}\equiv1 \text{ (мод. 11), либо } 3^{2m+1}\equiv1 \text{ (мод. 11).}$$

Показатели, которымъ принадлежатъ числа 5 и 3 по модулю 11, суть соотвѣтственно 5 и 5. Значитъ, либо $n\equiv0$ (мод. 5), либо $2m+1\equiv0$ (мод. 5), откуда $m+3\equiv0$ (мод. 5).

2) Теперь, по основному равенству, имѣемъ:

$$2 \cdot 13^{2n-1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2p} = \frac{13^{2n}-1}{13-1} \cdot \frac{3^{2m+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{2p+1}-1}{5-1}.$$

Отсюда видимъ, что непремѣнно должно удовлетвориться одно изъ сравненій:

$$\text{либо } 13^{2n} \equiv 1 \text{ (мод. 5), либо } 3^{2m+1} \equiv 1 \text{ (мод. 5).}$$

Но 3 есть первообразный корень 5, значитъ, второе сравненіе удовлетвориться не можетъ.

Но $13 \equiv 3$ (мод. 5); значитъ, $2n \equiv 0$ (мод. 4), т. е. n непремѣнно должно быть кратно 2.

Далѣе, видимъ, что непремѣнно удовлетворится одно изъ сравненій:

$$\text{либо } 3^{2m+1} \equiv 1 \text{ (мод. 13), либо } 5^{2p+1} \equiv 1 \text{ (мод. 13).}$$

Но показатель, которому принадлежитъ 5 по модулю 13, есть 4; значитъ, второе сравненіе не можетъ удовлетвориться. Показатель же, которому принадлежитъ 3 по модулю 13, есть 3; значитъ, непремѣнно

$$2m + 1 \equiv 0 \text{ (мод. 3), откуда } m + 2 \equiv 0 \text{ (мод. 3).}$$

Теорема VIII. Низшій предѣлъ для нечетныхъ совершенныхъ чиселъ, состоящихъ изъ k различныхъ простыхъ множителей, есть

$$p_k \cdot p^2_{k-1} \cdot p^2_{k-2} \ldots p^2_2 \cdot p^2_1,$$

гдѣ $p_1, p_2, \ldots p_{k-1}, p_k$ суть первыя k простыхъ чиселъ.

Мы найдемъ этотъ низшій предѣлъ, найдя наименьшее возможное число вида $a^{2\alpha-1}b^{2\beta}c^{2\gamma} \ldots l^{2\lambda}$. Для этого мы должны дать какъ числамъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, такъ и числамъ $a, b, c, \ldots, l$, наименьшія возможныя для нихъ значенія. Но наименьшія значенія для первыхъ суть 1, а для вторыхъ наименьшія значенія суть первыя k простыхъ числа $p_1, p_2, \ldots p_{k-1}, p_k$. Вопросъ только въ томъ, какъ распредѣлить эти значенія между числами $a, b, c, \ldots, l$. Но это будетъ ясно, если представимъ наше число въ видѣ:

$$\frac{a^2b^2 \ldots l^2}{a} = \frac{(p_1 \cdot p_2 \ldots p_k)^2}{a}.$$

Это число будетъ наименьшимъ, когда a будетъ наибольшимъ, т. е. будетъ равно p_k. Тогда наше число будетъ $p_k \cdot p^2_{k-1} \ldots p^2_2 \cdot p^2_1$.

Теорема IX. Въ предѣлѣ до 100000 нѣтъ ни одного нечетнаго совершеннаго числа.

По только-что доказанной теоремѣ низшій предѣлъ для нечетныхъ совершенныхъ чиселъ, состоящихъ изъ четырехъ простыхъ множителей, есть $11 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 121275 > 100000$.

Низшіе же предѣлы для нечетныхъ совершенныхъ чиселъ, состоящихъ изъ большаго числа множителей, будутъ $13 \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$ и $17 \cdot 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, т. е., во всякомъ случаѣ, еще больше, нежели $11 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$.

Отсюда ясно, что до 100000 могутъ быть нечетныя совершенныя числа только лишь изъ трехъ простыхъ множителей. Таковыя-же бываютъ только двухъ видовъ: $5^{2n-1} \cdot 3^{2m} \cdot 11^{2p}$ и $13^{2n-1} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2p}$. Наименьшее число второго вида есть $13^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 494325 > 100000$. Значитъ, надо искать только числа перваго вида. Наименьшее число этого вида есть $5 \cdot 3^4 \cdot 11^2 = 49005$. Слѣдующее же $5 \cdot 3^6 \cdot 11^2 = 5929605$, что гораздо болѣе 100000 (при разысканіи наименьшихъ чиселъ мы пользуемся теоремой VII).

Но число $5 \cdot 3^4 \cdot 11^2 = 49005$ не есть совершенное, ибо

$$S(49005) = \frac{5^2-1}{5-1} \cdot \frac{3^5-1}{3-1} \cdot \frac{11^3-1}{11-1} = 6 \cdot (1+3+3^2+3^3+3^4) \cdot$$

$$\cdot (1+11+11^2) = 6 \cdot 121 \cdot 133$$

и

$$\frac{S(49005)}{2} = 3 \cdot 121 \cdot 133 = 48279.$$

А такъ какъ нечетное совершенное число должно состоять, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ простыхъ чиселъ, то отсюда намъ ясно, что до 100000 нѣтъ ни одного нечетнаго совершеннаго числа.

(Продолженіе слѣдуетъ).

РЕЦЕНЗІИ.

Г. М. Голодецъ. *Методы рѣшеній задачъ на построеніе въ пространствѣ.* (Съ приложеніемъ чертежей). Кіевъ. Цѣна 75 к. О содержаніи этой небольшой книги (67 страницъ, кромѣ чертежей) можно судить по слѣдующему оглавленію ея: Глава I. Нѣкоторые теоремы и вопросы, имѣющіе примѣненіе въ задачахъ на построеніе (стр. 5—12). Глава II. Элементарныя задачи на построеніе (стр. 12—16). Глава III. Методъ геометрическихъ мѣстъ (стр. 16—50). Глава IV. Методъ необходимыхъ и достаточныхъ условій (стр. 50—62). Глава V. Методъ приложенія тригонометріи къ геометріи (стр. 62—67). Въ предисловіи авторъ заявляетъ, что „всѣ задачи расположены по методамъ ихъ рѣшенія, при чемъ впереди каждаго отдѣла дѣлается соотвѣтствующая характеристика метода и излагается способъ его примѣненія. Большая часть помѣщенныхъ задачъ (223 зад.) рѣшена въ текстѣ подробно. При остальныхъ же сдѣланы соотвѣтствующія указанія, дающія извѣстное направляющее начало рѣшающему“.

Въ первыхъ двухъ главахъ (48 задачъ) предлагаются для доказательства и рѣшенія теоремы и задачи, по большей части, настолько простыя, что рѣшенія или указанія при нихъ намъ кажутся совершенно лишними.

Въ наиболѣе обширной главѣ III задачамъ предшествуетъ разъясненіе примѣненія метода геометрическихъ мѣстъ и приводятся 14 геометрическихъ мѣстъ точекъ и прямыхъ въ пространствѣ. Далѣе слѣдуютъ задачи (49—161).

Въ главѣ IV излагается *методъ необходимыхъ и достаточныхъ условій*. Какъ видно изъ объясненій автора, этотъ *методъ* примѣняется тогда, когда приходится пользоваться не непосредственно опредѣленіемъ того или другого геометрическаго элемента, а такими свойствами его, которыя вытекаютъ какъ слѣдствія изъ опредѣленія и составляютъ *необходимыя и достаточныя условія* существованія даннаго элемента.

Такой пріемъ нельзя назвать особымъ *методомъ*, ибо имъ приходится пользоваться при рѣшеніи всякой сколько-нибудь сложной и трудной задачи; это, скорѣе, *принципъ*, которымъ необходимо руководствоваться при отысканіи метода, приводящаго къ цѣли, напримѣръ, метода *подобія*, метода *перемѣщенія* и т. п., о которыхъ, къ сожалѣнію, въ разбираемой книгѣ совсѣмъ не упоминается. Изъ задачъ главы IV (162—203) и предшествующей главы III нѣкоторыя слѣдуетъ отнести къ труднымъ и сложнымъ.

Въ послѣдней V главѣ объясняется примѣненіе тригонометрическихъ зависимостей между сторонами и углами треугольниковъ, главнымъ образомъ—прямоугольныхъ, къ рѣшенію геометрическихъ задачъ въ пространствѣ. Объясненіе сопровождается задачами (204—223).

Изъ промаховъ автора обращаетъ на себя вниманіе часто встрѣчающіяся выраженія *„шаровая сфера“* и *„поверхность шаровой сферы“*. Развѣ *шаръ* и *сфера* не одно и тоже?

Въ заключеніе можно выразить увѣренность, что сборникъ г. Голодеца будетъ особенно полезенъ учащимся при рѣшеніи стереометрическихъ задачъ, предлагаемыхъ въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ для исполненія эпюръ по начертательной геометріи.

Дм. Ефремовъ.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый Государь,
Господинъ Редакторъ!

Не откажите помѣстить въ Вашемъ уважаемомъ журналѣ нѣсколько замѣчаній, вызванныхъ статьею Н. Агрономова „Задача Мальфатти“. Можетъ быть, они будутъ не безынтересны для читателей „Вѣстника“, или, въ свою очередь, вызовутъ поясненія автора статьи.

Во-первыхъ, въ формулахъ Мальфатти, очевидно, должно быть въ знаменателѣ AC', BC' и CB', т. е. $(p-a)$, $(p-b)$ и $(p-c)$ вмѣсто стоящихъ тамъ AC_x, BA_y и CB_z, что совершенно несогласно съ принятыми въ статьѣ обозначеніями.

Во-вторыхъ, въ формулахъ Жергона въ числителѣ x'а должно быть:

$$[bc-(d_1-d_2)(d_1-d_3)]^2$$

вмѣсто того же выраженія въ первой степени, что и было получено мною путемъ указанныхъ въ статьѣ преобразованій; то же относится и къ y-у и z-у.

Въ третьихъ, въ способѣ Лехмютца положеніе $r=1$ совершенно излишне и только даетъ поводъ думать, что окончательный результатъ не распространяется на случай $r \neq 1$. Кромѣ того, въ этомъ же способѣ я не могъ выполнить „рядъ простыхъ преобразованій“, о которыхъ говорится на стр. 210, а также не могъ получить тождества

$$cAB+C(A+B-C)=2c(1-c+\sqrt{1+c^2}),$$

приведеннаго на стр. 211. На той же страницѣ безъ всякой оговорки принято $\operatorname{tg} \gamma = c$.

Въ четвертыхъ, въ формулу (26а) на стр. 234 вкралась опечатка: должно быть $AO - AB_x = BO - BC_y = CO - CA_z = \frac{1}{2}(AO + BO + CO - p + r) = p$.

Въ пятыхъ, символы различныхъ случаевъ для меня совершенно непонятны. Напримѣръ, 1-й случай I группы помѣченъ символомъ $\begin{matrix} A \\ C\ B \end{matrix}$, который будто бы „ясно указываетъ, какъ (?) и въ какихъ углахъ расположены окружности Мальфатти“.

Въ шестыхъ, въ 5-й группѣ въ формулы входятъ $\left(1 \pm \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}\right)$ и пр., что при нижнемъ знакѣ даетъ *отрицательную* величину, такъ какъ $\beta < 90^0$ и, слѣдовательно, $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} > 1$.

Въ седьмыхъ, задача Мальфатти мною рѣшена вычисленіемъ для равносторонняго треугольника и для раціональнаго треугольника 15, 13, 14, но при вычерчиваніи встрѣтились такія затрудненія, которыя я не могъ преодолѣть, такъ какъ чертежъ совершенно не сходился съ вычисленіями (исключая 2 первыя группы). Особенныя затрудненія встрѣтились въ V и VI группѣ, гдѣ даже для равносторонняго треугольника получаются всѣ три различныя окружности.

Кромѣ того, мною изслѣдованы условія раціональности окружностей Мальфатти — они оказались тождественными съ условіемъ раціональности биссектрисъ.

В. Добровольскій (Брянскъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 25 (5 сер.). Въ кругъ радіуса R вписанъ ортодіагональный четыреугольникъ $ABCD$; проекціи срединъ его сторонъ на противоположныя стороны суть K, L, M, N. Доказать, что

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } KLMN} = \frac{R}{\varrho},$$

гдѣ ϱ—радіусъ круга, вписаннаго въ четыреугольникъ $KLMN$.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

№ 26 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$x(y+1) + y(z-1) - z(x-1) = a,$$
$$y(z+1) + z(x-1) - x(y-1) = b,$$
$$z(x+1) + x(y-1) - y(z-1) = c.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 27 (5 сер.). Въ плоскости даны четыреугольникъ $ABCD$ и точка E. Построить прямую, проходящую черезъ точку E и дѣлящую площадь $ABCD$ въ данномъ отношеніи $m : n$.

П. Х.

№ 28 (5 сер.). Доказать, что выраженіе

$$\frac{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)(x^{n+2} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)},$$

гдѣ n—цѣлое положительное число, тожественно равно цѣлому относительно x многочлену съ цѣлыми числовыми коэффиціентами.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 29 (5 сер.). Пусть a, b, c, d, x, y суть цѣлыя числа, при чемъ x и y суть числа взаимно простыя. Доказать, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ $ax + by$ и $cx + dy$ есть дѣлитель числа $ad - bc$.

(Заимств.).

№ 30 (5 сер.). Если длины сторонъ a, b, c треугольника представляютъ ариѳметическую прогрессію, то произведеніе крайнихъ членовъ этой прогрессіи равно учетверенному произведенію радіусовъ круговъ описаннаго и вписаннаго.

(Заимств.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 828 (4 сер.). *Найти многочленъ седьмой степени* f(x), *если извѣстно, что* f(x) + 1 *дѣлится на* $(x - 1)^4$, *а* f(x) − 1 *дѣлится на* $(x + 1)^4$.

Согласно съ условіемъ, $f(x) + 1 = (x - 1)^4(ax^3 + bx^2 + cx + d)$, $f(x) - 1 = (x + 1)^4(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)$, гдѣ a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, откуда

$$f(x) = (x - 1)^4(ax^3 + bx^2 + cx + d) - 1, \tag{1}$$

$$f(x) = (x + 1)^4(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) + 1, \tag{2}$$

$$(x - 1)^4(ax^3 + bx^2 + cx + d) - 1 = (x + 1)^4(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) + 1. \tag{3}$$

Приравнивая въ тожествѣ (3) коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, получимъ восемь линейныхъ уравненій съ восемью неизвѣстными a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1. Рѣшая эту систему (если это возможно) и подставляя найденныя значенія коэффиціентовъ въ одно изъ уравненій (1), (2), получимъ искомое выраженіе для многочлена $f(x)$. Вычисленіе можно упростить съ помощью слѣдующихъ соображеній. Подставляя въ тожество (1) $(-x)$ вмѣсто x и складывая полученное равенство съ (2), находимъ:

$$f(x) + f(-x) = (x + 1)^4[(-ax^3 + bx^2 - cx + d) + (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d)].$$

Подобнымъ же образомъ, замѣняя въ (2) x черезъ $(-x)$ и складывая съ (1), получимъ:

$$f(x) + f(-x) = (x - 1)^4[(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (-a_1x^3 + b_1x^2 - c_1x + d_1)].$$

Такимъ образомъ, многочленъ $f(x) + f(-x)$, степень котораго не выше *семи*, дѣлится на $(x + 1)^4$ и на $(x - 1)^4$, а потому дѣлится и на многочленъ *восьмой* степени $(x + 1)^4(x - 1)^4$, откуда вытекаетъ тожество

$$f(x) + f(-x) = 0, \tag{4}$$

равносильное требованію, чтобы многочленъ $f(x)$ содержалъ лишь члены съ нечетными степенями x. Наоборотъ, если условіе (4) соблюдено, то изъ равенства (1), замѣняя x черезъ $(-x)$, имѣемъ:

$$-f(-x)=f(x)=(x+1)^4(ax^3-bx^2+cx-d)+1,$$

т. е. приходимъ къ тожеству вида (2). Итакъ, задача приводится къ отысканію коэффиціентовъ a, b, c, d въ равенствѣ (1) при условіи, чтобы имѣло мѣсто тожество (4), т. е. чтобы многочленъ $f(x)$ содержалъ лишь нечетныя степени x. Изъ равенства (1) находимъ:

$$f(x)=(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)(ax^3+bx^2+cx+d)-1=$$
$$=ax^7-(4a-b)x^6+(6a-4b+c)x^5-(4a-6b+4c-d)x^4+$$
$$+(a-4b+6c-4d)x^3+(b-4c+6d)x^2+(c-4d)x+(d-1). \qquad (5)$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при четныхъ степеняхъ x и свободный членъ, получимъ:

$$d-1=0,\ b-4c+6d=0,$$
$$4a-6b+4c-d=0,\ 4a-b=0.$$

Рѣшая эту систему, находимъ: $d=1$, $b=\frac{5}{4}$, $c=\frac{29}{16}$, $a=\frac{5}{16}$. Подставивъ эти значенія a, b, c, d во вторую часть формулы (5), имѣемъ:

$$f(x)=\frac{5x^7-21x^5+35x^3-35x}{16}. \qquad (6)$$

Съ помощью элементовъ высшаго анализа задача рѣшается еще проще. Изъ равенствъ (1) и (2) видно, что производная $f'(x)$, будучи 6-й степени, должна дѣлиться на $(x-1)^3$ и на $(x+1)^3$, т. е. на $(x^2-1)^3$. Поэтому

$$f'(x)=c(x^2-1)^3=c(x^6-3x^4+3x^2-1),$$

гдѣ c—нѣкоторая постоянная, откуда

$$f(x)=c\int(x^6-3x^4+3x^2-1)dx=c\left(\frac{x^7}{7}-\frac{3x^5}{5}+x^3-x\right)+c', \qquad (7)$$

геѣ c' также величина постоянная. Такъ какъ $f(x)+1$ и $f(x)-1$ кратны соотвѣтственно $x-1$ и $x+1$, то $f(1)+1=0$ и $f(-1)-1=0$ (по теоремѣ Безу).

Итакъ [см. (7)],

$$c\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+1-1\right)+c'+1=0,$$

$$c\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}-1+1\right)+c'-1=0,$$

откуда $c=\frac{35}{16}$, $c'=0$, а потому формула (7) опять даетъ равенство (6).

Г. Лебедевъ (Обоянь); *Н. С.* (Одесса).

№ 851 (4 сер.). *Найти истинное значеніе выраженія*

$$\frac{\cos ax^2-\cos an^2}{x-n}.$$

Преобразуемъ данное выраженіе къ виду:

$$\frac{\cos ax^2-\cos an^2}{x-n}=\frac{\cos ax^2-\cos an^2}{ax^2-an^2}\cdot\frac{ax^2-an^2}{x-n}=\frac{2\sin\frac{ax^2+an^2}{2}\sin\frac{an^2-ax^2}{2}}{ax^2-an^2}\cdot$$

$$\frac{ax^2 - an^2}{x-n} = -\sin\frac{ax^2 - an^2}{2} \cdot \frac{\sin\dfrac{an^2 - ax^2}{2}}{\left(\dfrac{an^2 - ax^2}{2}\right)} \cdot a \cdot \frac{x^2 - n^2}{x-n}.$$

Полагая $x = n + \varepsilon$, имѣемъ:

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} \sin\frac{a(n+\varepsilon)^2 + an^2}{2} = \sin an^2, \quad \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} \frac{\sin\dfrac{an^2 - a(n+\varepsilon)^2}{2}}{\left(\dfrac{an^2 - a(n+\varepsilon)^2}{2}\right)} = 1,$$

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} \frac{(n+\varepsilon)^2 - n^2}{(n+\varepsilon) - n} = \underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} [(n+\varepsilon) + n] = 2n.$$

Поэтому

$$\underset{\varepsilon=0}{\text{пред.}} \frac{\cos a(n+\varepsilon)^2 - \cos an^2}{(n+\varepsilon) - n} = -\sin an^2 \,.\, 1 \,.\, a \,.\, 2n = -2\, an \sin an^2.$$

С. Розенблатъ (Саратовъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Н. Агрономовъ* (Ревель); *Г. Лебедевъ* (Обоянь); *М. Субботинъ* (Сувор. корпусъ).

№ 857 (4 сер.). *Квадратъ нѣкотораго числа* N, *въ составъ котораго входятъ два различныхъ простыхъ множителя, имѣетъ* 15 *различныхъ дѣлителей. Найти, сколько дѣлителей имѣетъ число* N^3.

По условію, $N = p^\alpha q^\beta$, гдѣ p, q—два простыхъ числа и α и β—цѣлыя положительныя числа. Число $N^2 = p^{2\alpha} q^{2\beta}$ имѣетъ $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ дѣлителей, откуда, согласно съ условіемъ,

$$(2\alpha+1)(2\beta+1) = 15.$$

Изъ этого равенства, такъ какъ $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, вытекаетъ:

$$2\alpha+1 = 3,\ 2\beta+1 = 5 \ \text{или}\ 2\alpha+1 = 5,\ 2\beta+1 = 3.$$

Такимъ образомъ, показатели α, β равны (въ любомъ соотвѣтствіи) числамъ 1, 2, а потому число $N^3 = p^{3\alpha} q^{3\beta}$ имѣетъ

$$(3\alpha+1)(3\beta+1) = (3\,.\,1+1)(3\,.\,2+1) = 28$$

дѣлителей.

С. Розенблатъ (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

№ 860 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\cos^2\alpha + \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) = 1 + 2\cos\alpha\cos(\alpha + x).$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$\cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos(\alpha + x) + \cos^2\alpha = 1 - \cos^2 x,$$

$$\text{или}\ [\cos(\alpha + x) - \cos\alpha]^2 = \sin^2 x,$$

находимъ послѣдовательно:

$$\left[2\sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}\right]^2 = \left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left[\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\pm\cos\frac{x}{2}\right]=0.$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе распадается на три:

$$\sin\frac{x}{2}=0, \tag{1}$$

$$\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{x}{2}=\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=0, \tag{2}$$

$$\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0. \tag{3}$$

Изъ уравненія (1) находимъ $x=2k\pi$, гдѣ k—произвольное цѣлое число. Уравненіе (2) даетъ:

$$a+\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+2k\pi \text{ или } a+\frac{x}{2}=(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2},$$

откуда $x=(4k-1)\dfrac{\pi}{2}-a$ или $a=(4k-1)\dfrac{\pi}{2}$.

Уравненіе (3) даетъ:

$$a+\frac{x}{2}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \text{ или } a+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}+2k\pi,$$

откуда $x=(4k+1)\dfrac{\pi}{2}-a$ или $a=(4k+1)\dfrac{\pi}{2}$.

Итакъ, рѣшенія даннаго уравненія суть:

$$x=2k\pi,\ x=(4k-1)\frac{\pi}{2}-a,\ x=(4k+1)\frac{\pi}{2}-a,$$

гдѣ k—произвольное цѣлое число. Кромѣ того, уравненіе обращается въ тожество при $a=(4k\pm 1)\dfrac{\pi}{2}$, гдѣ k—произвольное цѣлое число.

Розенблатъ (Кіевъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Н. Агрономовъ* (Ревель).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Н. Соколовъ, Директоръ Ярославскаго реальнаго училища. *Элементарная Физика.* Курсъ женскихъ гимназій. Со многими систематически расположенными вопросами и задачами (болѣе 750 задачъ). Москва. 1907. 416 стр. Цѣна 1 р. 30 коп.

Книги для современной школы. „Основные вопросы физики въ элементарномъ изложеніи". Сборникъ статей, составленныхъ кружкомъ преподавателей средней и высшей школы. Книга первая, съ 178 рисунками и 3 портретами. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. 566 стр. Цѣна 2 р.

А. Риги. Профессоръ. *Современная теорія физическихъ явленій* (радіоактивность, іоны, электроны). Переводъ съ III итальянскаго (1907) изданія Съ 21 рисункомъ. Изданіе книгоиздательства „Mathesis". Одесса. 1908. 156 стр. Цѣна 1 руб.

А. В. Клоссовскій. Заслуженный профессоръ. *Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.* Второе исправленное и дополненное изданіе. Издано книгоиздательствомъ „Mathesis". Одесса. 1908. 43 стр. Цѣна 40 коп.

Р. Джудъ. *Электричество и магнетизмъ.* Элементарное руководство къ изученію электрическихъ и магнитныхъ явленій. Въ основу изложенія электрическихъ явленій положено элементарное понятіе объ электрическомъ потенціалѣ. Съ разрѣшенія автора перевелъ съ англійскаго К. Гудевичъ. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. 366 стр. Цѣна 1 р.

Мультонъ. Профессоръ. *Эволюція солнечной системы.* Переводъ съ англійскаго. Съ 12 рисунками. Одесса. 1908. 82 стр. Цѣна 50 коп.

(Продолженіе слѣдуетъ).

4-го Мая с. г. скончался отъ нефрита наборщикъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементар. Математики"

Иванъ Алексѣевичъ Ерденевъ.

Покойный 16 лѣтъ набиралъ нашъ журналъ; при своей аккуратности и исполнительности онъ былъ по истинѣ помощникомъ редактора и по своему жилъ интересами „Физики", какъ онъ называлъ журналъ.

Миръ праху честнаго труженника.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
пщется