№№ 446—447.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXVIII-го Семестра №№ 2—3-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. **Г. АБРАГАМЪ**, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. **С. АРРЕНІУСЪ**, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*. Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*. Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5 **Ф. АУЭРБАХЪ**, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. **С. НЬЮКОМЪ**, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*.

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей. Цѣна 1 р 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр, библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. **Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана*. Книга I, **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**. гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. 1 р. 50 к., вып. II окончаніе, ц. 2 р.

8. **Дж. ПЕРРИ**, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. **Р. ДЕДЕКИНДЪ**, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

учебн.Учен. Ком. М. Н. Пр. признана залуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній..

10. **К. ШЕЙДЪ**, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова*. 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. **Э. ВИХЕРТЪ**, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

Одесса, Типографія М. Шпенцера, Новосельская 66.

XXXVIII Сем. №№ 2—3.

Вѣстникъ Опытной Физики и элементарной математики.

№№ 446—447.

Температура и давленіе въ болѣе высокихъ слояхъ атмосферы.

Профессора А. В. Клоссовскаго.

*(Продолженіе *).*

Новѣйшія наблюденія на станціяхъ Lindenberg и Uccle. Приведенныя выше числа представляютъ средніе результаты. Разсмотримъ теперь ближе различныя детали въ ходѣ вертикальнаго паденія температуры, основываясь на наблюденіяхъ, произведенныхъ на станціяхъ Lindenberg и Uccle (въ Бельгіи) въ теченіе 1895—1897 годовъ. 11-го апрѣля 1905 года шаръ-зондъ, выпущенный изъ Lindenberg'а, отмѣтилъ:

высота въ килом.	температура	высота въ килом.	температура
0.5	12°.4	6.0	—13°.4
1.0	10.6	7.0	—19.1
1.5	8.6	8.0	—24.5
2.0	6.7	9.0	—32.8
2.5	4.1	10.0	—40.9
3.0	1.8	11.0	—47.7
4.0	—3.1	12.0	—55.8
5.0	—8.1	13.0	—60.0.

*) См. № 445 „Вѣстника".

Но далеко не всегда температура падаетъ такъ плавно и непрерывно; часто замѣчается обращеніе температуры и даже перемежаемость болѣе высокихъ и болѣе низкихъ температуръ. Другими словами, атмосфера имѣетъ какъ будто „пластинчатое" строеніе. Поднятіе змѣевъ въ Blue Hill показало, что до высоты трехъ километровъ можно встрѣтить отъ двухъ до трехъ такихъ пластинокъ. Это чередованіе пластовъ замѣтилъ еще Глешеръ. Подобное чередованіе объясняется одновременнымъ существованіемъ на различныхъ высотахъ нѣсколькихъ теченій, обладающихъ различными метеорологическими особенностями.

Всѣ почти новѣйшія наблюденія обнаружили существованіе изотермической зоны, или, вѣрнѣе, зоны, въ которой вертикальный температурный градіентъ мѣняетъ знакъ. Наблюденія показали, что зона инверсіи начинается среднимъ числомъ на высотѣ около 11 километровъ. Въ отдѣльныхъ случаяхъ она колебалась:

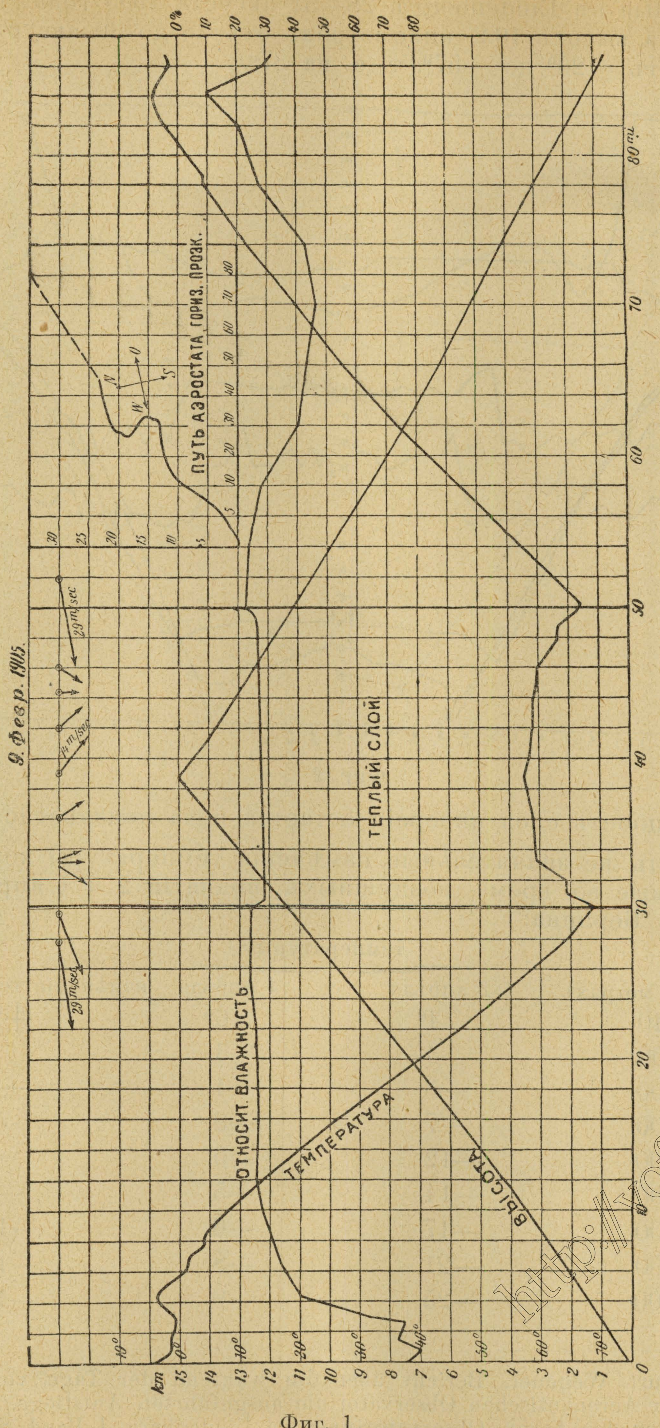
по наблюденіямъ станціи Lindenberg между 8500 и 14300 м.

" " " Uccle " 8176 " 15346 "

На фиг. 1 графически представлены результаты наблюденій во время поднятія изъ Страсбурга 9 февраля 1905 года. На этомъ чертежѣ показана высота поднятія (до 15 километровъ), паденіе температуры, ходъ относительной влажности, направленіе и сила вѣтра на различныхъ высотахъ. Особенно наглядно выражена здѣсь инверсія. Она началась на высотѣ около 11.4 километра, при температурѣ около —68°. Въ наивысшей точкѣ поднятія (15 килом.) термометръ поднялся до —57°.5. Относительная влажность въ зонѣ инверсіи упала до 28% Замѣчательно, что при вступленіи шара въ изотермическую область, какъ видно изъ чертежа, влажность рѣзко уменьшилась на нѣсколько процентовъ, а вѣтеръ измѣнилъ направленіе и скорость. Такимъ образомъ, теплый слой нарушилъ не только правильное теченіе температуры и влажности, но измѣнилъ характеръ воздушныхъ теченій; направленіе верхняго теченія отличалось отъ нижняго на 130°, а скорость изъ 30 метровъ перешла въ 14 метровъ въ секунду.

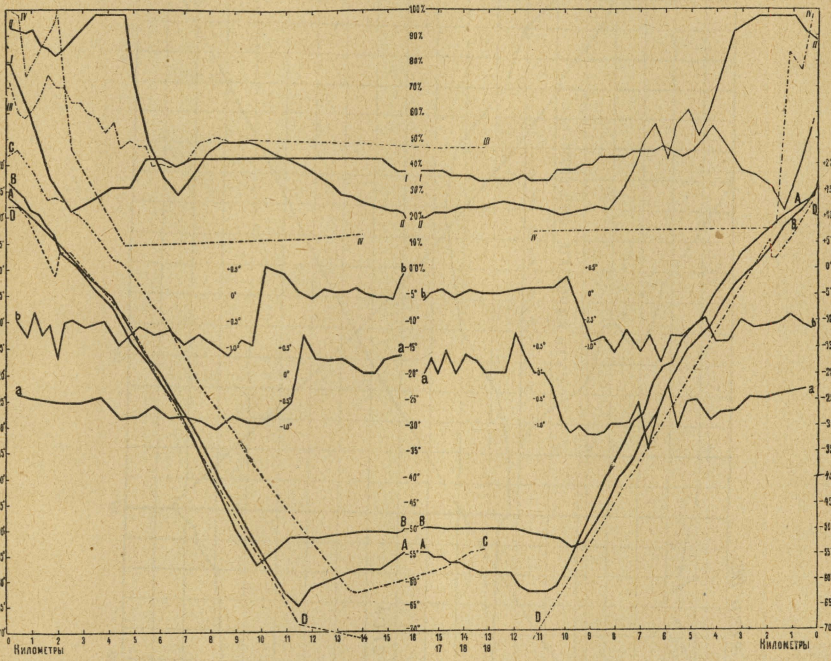
На фиг. 2 графически представлены результаты четырехъ поднятій 1906 года со станціи Uccle: 7 іюня (кривая *AA*), 5 іюля (кривая *BB*), 2 августа (кривая *CC*) и 4 октября (кривая *DD*). Всѣ эти поднятія рѣзко обнаружили инверсію на высотѣ отъ 10 до 14 километровъ. Кривыя I, II, III и IV представляютъ ходъ относительной влажности для тѣхъ же поднятій, а кривыя *aa* и *bb*— ходъ вертикальнаго градіента температуры на различныхъ высотахъ.

Наблюденія обнаружили, что въ болѣе высокихъ слояхъ возможны въ короткое время, при переходѣ отъ одного дня къ другому, такія колебанія температуры, которыя совершенно не встрѣчаются въ нижнихъ слояхъ земной атмосферы. Таковы колебанія,


9 Февр. 1905.
Путь аэростата гориз. прозк.
Теплый слой
Относит. влажность
Температура
Высота
29 m/sec
4 m/sec
km

Фиг. 1.

отмѣченныя въ Lindenberg'ѣ 28—31 августа 1905 года [1]). Температура на высотѣ 10.2 километровъ отъ 28 до 30 августа измѣнилась отъ —20° до —57°, т. е. на 37°.



Фиг. 2

Мощность слоя инверсіи остается пока неизвѣстной.

Столь же значительныя измѣненія температуры констатированы также во время воздушныхъ поднятій 2 и 4 апрѣля 1905 года изъ Берлина:

высота въ метрахъ	температуры 2 апрѣля	4 апрѣля	измѣненіе температуры
40	4°	6°	+2°
500	3	3	0
1000	—3	—1	—2
1500	—7	—3	—4
2000	—12	—5	—7
2500	—14	—5	—9
3000	—17	—6	—11
3500	—21	—8	—13
4000	—25	—9	—16

[1]) Kurt Wegener. Bericht über die während der Tage vom 28 bis 31 August am Aeronautischen Observatorium ausgeführten Aufstiege. Ergebnisse der Arbeiten des Aeron, Observatoriums bei Lindenberg. I Band, S. 116.

3 августа 1905 года резиновый шаръ, выпущенный изъ Страсбурга, достигъ огромной высоты 25800 метровъ. Минимумъ температуры (—62°.7) отмѣченъ на высотѣ 14490 метровъ; далѣе началась инверсія, и на высотѣ 25800 метровъ термометръ повысился до —40°, т. е. термометрическій градіентъ равнялся, среднимъ числомъ, 0°.16 на каждые 100 метровъ вертикальнаго поднятія.

Наиболѣе низкія температуры въ высокихъ, доступныхъ наблюденію, слояхъ атмосферы. Различные подъемы Trappes'а дали —69°.0, —71°.4, —72°.9 и —73°.8 (послѣднее слово на высотѣ 14300 м.). На станціи Ucclеполучено —72°.0 (на высотѣ 11252 м.). Въ обсерваторіи Lindenberg отмѣчено—73°.0 (3 августа 1905 г., на высотѣ 10200 м.) и —76°.0(4 апрѣля 1905 г., на высотѣ 15600 м.). Въ настоящее время найдены еще болѣе низкія температуры: Rotch въ St.-Louis получилъ 25 декабря 1905 года, на высотѣ 14800 метровъ, температуру —85°.6; въ Вѣнѣ отмѣчено въ 1905 году:

2 марта	на высотѣ 9717	метровъ	—85°.4
4 апрѣля „	„ 11010	„	—79.6

Такимъ образомъ, инструментально измѣренныя температуры на земной поверхности колеблятся отъ +70° (на днѣ буровой скважины въ Paruschowitz'ѣ) и —85°.6, т. е. въ предѣлахъ 155°.6.

Распредѣленіе давленія въ болѣе высокихъ слояхъ атмосферы. Въ главѣ II была приведена формула, дающая возможность вычислить давленіе на различныхъ высотахъ. По вычисленію Hann'а:

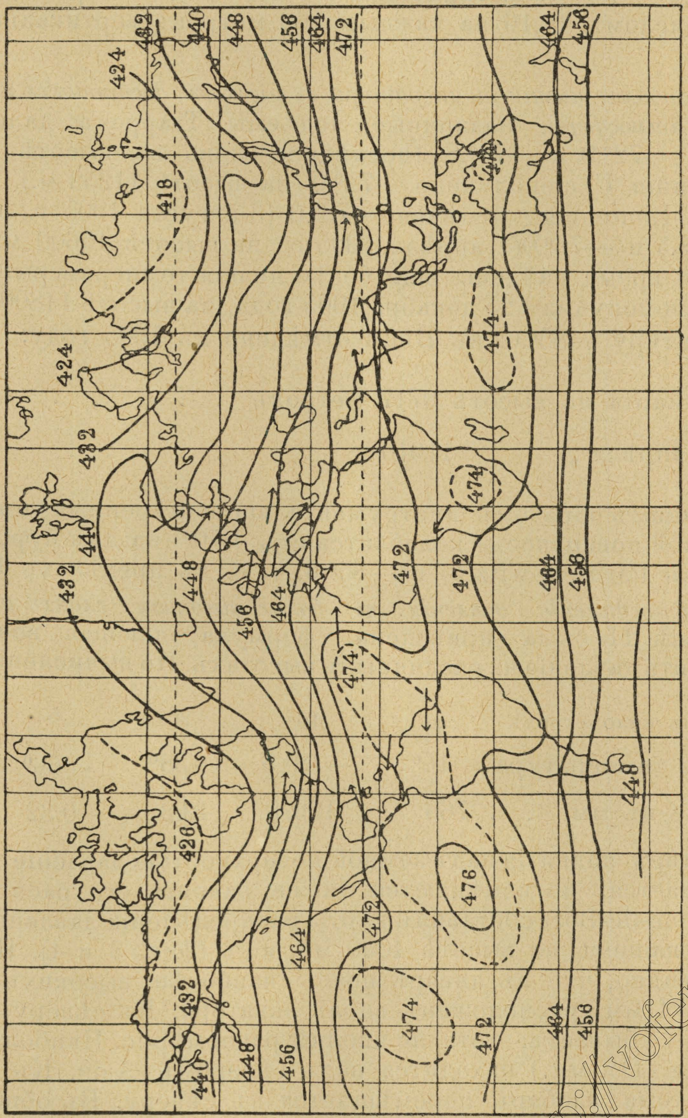
высота въ километрахъ	0	10	20	5	100
средняя температура	10°	—18°.5	—38°	—60°	—80°
давленіе въ мм. . .	766	199.4	42.2	0.32	0.0012.

По мѣрѣ поднятія надъ земной поверхностью давленіе не только уменьшается, но измѣняются также законы его распредѣленія. Teisserenc-de-Bort составилъ карты распредѣленія давленія на уровнѣ, лежащемъ на высотѣ 4000 метровъ (фиг. 3 и 4). Изъ этихъ картъ видно, что въ январѣ поясъ наиболѣе высокихъ давленій (472—474 мм.) расположенъ вдоль экватора. Къ сѣверу и къ югу давленіе убываетъ, хотя не вполнѣ равномѣрно. Наиболѣе низкое давленіе (418 мм.) находится надъ сѣверомъ Азіи. Къ іюлю вся эта система изобаръ перемѣщается къ сѣверу. Въ общемъ, распредѣленіе давленія на высотѣ 4000 метровъ гораздо равномѣрнѣе и проще, чѣмъ на земной поверхности.

Общіе выводы. Въ заключеніе представимъ, въ краткихъ чертахъ, общую характеристику земной атмосферы въ статической ея фазѣ.

Земная атмосфера простирается, въ метеорологическомъ смыслѣ, до высоты 300—400 километровъ. Составъ ея, по отношенію къ основнымъ газамъ, постояненъ до наибольшихъ высотъ, доступныхъ наблюденію. Водяные пары, играющіе огромную роль въ экономіи природы, сосредоточены, главнымъ образомъ, въ

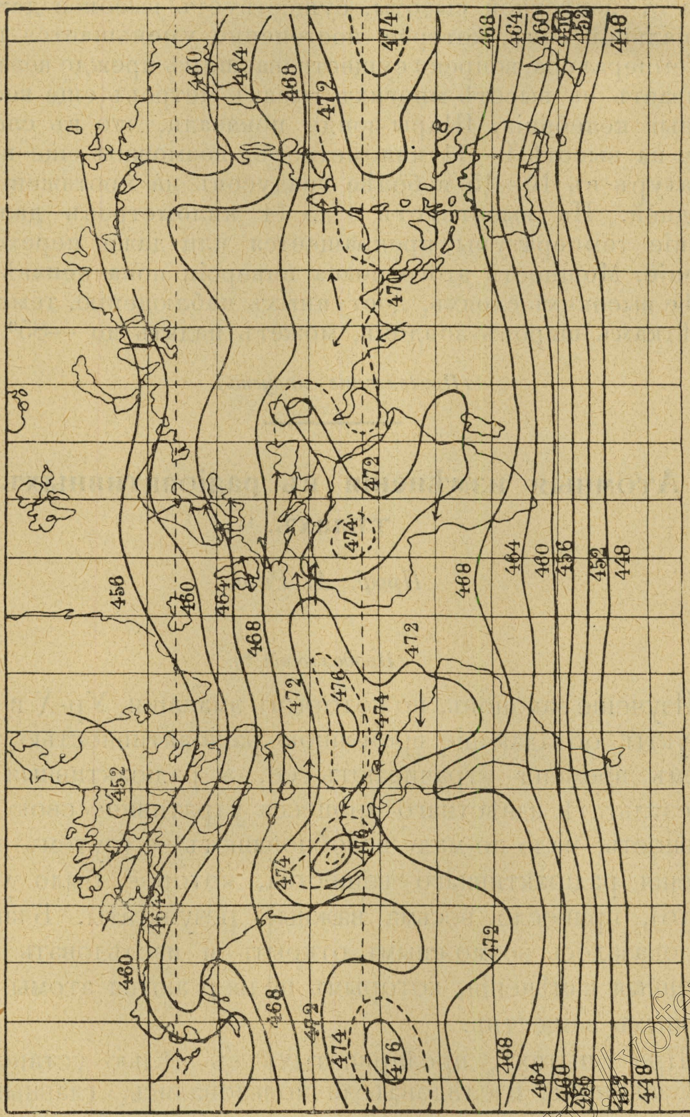
Январь.



Фиг. 3.

нижнихъ слояхъ, такъ что на высотѣ 6000 метровъ абсолютная влажность выражается уже десятыми долями миллиметра. Пыль, плавающая въ воздухѣ, также образуетъ своего рода пылевую атмосферу, простирающуюся до высоты 5000—6000 метровъ. Вся атмосфера, взятая въ ея цѣломъ, поглощаетъ извѣстную часть солнечной радіаціи, вслѣдствіе чего напряженіе солнечной инсоляціи тѣмъ интенсивнѣе, чѣмъ выше лежитъ мѣсто наблюденія. Атмосфера обнаруживаетъ избирательную поглощательную спо-

Іюль.



Фиг. 4.

собность: болѣе длинныя волны поглощаются водяными парами и углекислотой. Лучъ свѣта несетъ намъ вѣсти о физическихъ явленіяхъ, совершающихся въ верхнихъ слояхъ нашей воздушной оболочки: о загораніи метеоритовъ и полярныхъ сіяніяхъ. По мѣрѣ поднятія надъ земной поверхностью постепенно измѣняются ея физическія свойства: свѣтъ и теплопрозрачность увеличиваются, а плотность и температура постепенно уменьшаются. Неравномѣрное давленіе у земной поверхности съ высотою постепенно сглаживается и замѣняется болѣе равномѣрнымъ распредѣленіемъ; начиная съ извѣстной высоты, существуетъ высокое давленіе въ экваторіальной зонѣ, которое постепенно уменьшается къ полюсамъ. Температура, вопреки существовавшимъ прежде воззрѣніямъ, испытываетъ на высотѣ многихъ тысячъ метровъ еще весьма значительныя колебанія. Шары-зонды показали, что въ слояхъ, лежащихъ на высотѣ 9—11 километровъ, возможны еще измѣненія температуръ въ 10—15 и болѣе градусовъ на протяженіи двухъ-трехъ дней. На высотѣ отъ 8 до 14 километровъ дальнѣйшее пониженіе температуры прекращается или даже переходитъ въ повышеніе. Мощность этого пояса инверсіи пока неизвѣстна. Въ наиболѣе высокихъ слояхъ, доступныхъ наблюденію, температура, по отмѣткамъ шаровъ зондовъ, можетъ падать до —85⁰.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Атомныя измѣненія въ радіоактивныхъ тѣлахъ. [1]

Проф. А. Риги.

*(Продолженіе *).*

Изученіе законовъ, по которымъ эманаціи, Ур-*X* и другіе продукты, обладающіе временною радіоактивностью, съ теченіемъ времени утрачиваютъ ее, а радіоактивныя тѣла, въ результатѣ извѣстнаго процесса утратившіе свою радіоактивность, мало-по-малу возобновляютъ ее (путемъ возстановленія радіоактивнаго вещества, которое было у нихъ отнято), принесло весьма важные результаты. Благодаря ему, оказалось возможнымъ открыть и изслѣдовать многочисленныя измѣненія, которымъ подвергаются атомы радіоактивныхъ веществъ.

При опытахъ, предпринятыхъ съ цѣлью установленія этихъ законовъ, изслѣдователи пользовались, главнымъ образомъ, электрическимъ методомъ, измѣряя посредствомъ электрометра въ опредѣленные моменты заряжаніе (или, вѣрнѣе, разряжаніе) въ секунду, обусловливаемое іонизаціей

---

*) См. № 445 „Вѣстника“.

газа подъ вліяніемъ радіоактивнаго вещества, или, другими словами, измѣряя напряженіе вызываемаго тока. Это напряженіе можно принимать за мѣру радіоактивности, пропорціональную числу частицъ α или β, испускаемыхъ въ единицу времени. Произведенныя измѣренія такого рода для Ур-X дали въ результатѣ законъ, который легко было предвидѣть дедуктивнымъ путемъ.

Разсмотримъ теперь какое-нибудь вещество, обладающее временною радіоактивностью, напримѣръ, Ур-X. Въ каждую единицу времени подвергается превращенію извѣстное число атомовъ этого вещества; очевидно, если мы возьмемъ количество этого вещества вдвое или втрое большее, то и число атомовъ, подвергающихся превращенію въ единицу времени, будетъ больше также вдвое, втрое и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что для каждаго даннаго вещества существуетъ постоянное отношеніе между числомъ атомовъ, которые разлагаются въ единицу времени, и числомъ атомовъ, остающихся безъ измѣненія. Это отношеніе, которое обыкновенно обозначается буквою λ, называется *константой радіоактивности* или *константой превращенія*. Оно является характернымъ для каждаго даннаго вещества: чѣмъ его числовое значеніе меньше, тѣмъ медленнѣй совершается превращеніе. Для Ур-X λ составляетъ 0·000000036, т. е. изъ 100 милліоновъ атомовъ вещества въ каждую секунду распадается 36 атомовъ, или 1 атомъ на 2800000. Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ довольно медленнымъ превращеніемъ. Эманація актинія представляетъ примѣръ наиболѣе быстраго превращенія, какое до сихъ поръ найдено, такъ какъ для него λ равняется 0·18, т. е. въ каждую секунду распадается почти шестая часть наличныхъ атомовъ.

Такъ какъ по мѣрѣ превращенія число неизмѣненныхъ атомовъ постепенно уменьшается, то съ теченіемъ времени убываетъ и число тѣхъ атомовъ, которые подвергаются превращенію. Такъ, напримѣръ, когда половина всего вещества подверглась превращенію, то и число атомовъ, которые подвергаются превращенію дальше, уменьшается вдвое, такъ что іонизація, вызываемая выбрасываніемъ частицъ, постепенно ослабѣваетъ, сначала очень быстро, а затѣмъ все медленнѣе. На математическомъ языкѣ этотъ законъ называется *экспоненціальнымъ*. Опыты, произведенные надъ изолированными веществами, обладающими временною радіоактивностью, напримѣръ, надъ Ур-X, вполнѣ подтвердили существованіе такого экспоненціальнаго закона*).

Степень радіоактивности тѣла можно опредѣлить и помимо численнаго значенія константы, напримѣръ, указывая время T, необходимое для того, чтобы радіоактивность тѣла уменьшилась вдвое, т. е. чтобы половина вещества подверглась превращенію. Для урана-X это время составляетъ 1925429 секундъ, т. е. около 22 сутокъ, для эманаціи же актинія $T = 3 \cdot 9$ секундъ. Когда извѣстно λ, легко опредѣлить T, и наоборотъ. Такъ, чтобы вычислить T по данному λ, нужно только раздѣлить число $0 \cdot 69314719$ на λ **). Время T можно назвать *періодомъ превращенія*.

Когда тѣло освобождается отъ радіоактивнаго вещества, непрерывно производимаго имъ,—напримѣръ, когда уранъ освобождается отъ урана-X и такимъ образомъ перестаетъ испускать β-лучи, а затѣмъ предоставляется самому себѣ, то его утраченная радіоактивность, какъ уже было упомянуто, мало-по-малу возстанавливается. Законъ, по которому возрастаетъ эта радіоактивность съ теченіемъ времени, совершенно совпадаетъ съ тѣмъ, что слѣдовало предвидѣть по теоріи, т. е. радіоактивность растетъ по тому же экспо-

---

*) Пусть N будетъ число наличныхъ атомовъ въ моментъ t, а λ константа превращенія даннаго вещества. Число атомовъ, распадающихся въ единицу времени, равняется λN; отсюда слѣдуетъ, что въ безконечно малый промежутокъ времени dt превращенію подвергаются $\lambda N dt$ атомовъ, а число неизмѣненныхъ атомовъ настолько же уменьшается.

Обозначивъ это уменьшеніе черезъ $-dN$, мы получимъ

$$dN = -\lambda N dt,$$

откуда

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

гдѣ N_0 обозначаетъ собою число существующихъ атомовъ въ моментъ $t = 0$. Но такъ какъ іонизація, вызываемая испускаемыми лучами, пропорціональна числу превращающихся атомовъ, равно какъ и току J, вызываемому іонизаціей, то можно написать:

$$J = J_0 e^{-\lambda t}.$$

**) Если положить $J = \frac{1}{2} J_0$, то формула въ предыдущемъ примѣчаніи превратится въ

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

откуда $\lambda T = \log_e 2$, или

$$\lambda T = 0 \cdot 69314719.$$

ненціальному закону, по которому отдѣленный продуктъ (въ нашемъ примѣрѣ Ур-X) теряетъ свою радіоактивность *).

---

*) Законъ возстановленія утраченной радіоактивности можно вывести слѣдующимъ образомъ. Для большей ясности предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ ураномъ, возстанавливающимъ свою способность испускать β-лучи, послѣ отдѣленія отъ него Ур-X. Пусть μ будетъ константа превращенія урана, λ—константа Ур-X, Q—число атомовъ урана въ моментъ t, Q_0—число тѣхъ же атомовъ въ моментъ $t = 0$, за который мы примемъ моментъ освобожденія урана отъ содержащагося въ немъ Ур-X. Пусть, наконецъ, q будетъ число атомовъ Ур-X въ моментъ t. Это число q стремится непрерывно возрастать, такъ какъ уранъ непрерывно вырабатываетъ Ур-X; но, съ другой стороны, оно стремится уменьшаться, такъ какъ преобразуется въ свою очередь и Ур-X. Въ промежутокъ времени dt возрастаніе составляетъ $\mu Q dt$, т. е. пропорціонально существующему числу атомовъ урана; уменьшеніе равняется $\lambda q dt$, т. е. пропорціонально числу q атомовъ Ур-X. Мы получаемъ

$$dq = (\mu Q - \lambda q)\, dt.$$

Такъ какъ количество урана уменьшается согласно экспоненціальному закону

$$Q = Q_0 e^{-\mu t},$$

то

$$dq = \left(\mu Q_0 e^{-\mu t} - \lambda q\right) dt.$$

Этому уравненію удовлетворяетъ

$$q = A e^{-\mu t} + B e^{-\lambda t},$$

если $A = \dfrac{\mu Q_0}{\lambda - \mu}$. А такъ какъ при $t = 0$ и $q = 0$, то $B = -A$, и мы получаемъ:

$$q = \frac{\mu Q_0}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\right).$$

Эта формула выражаетъ собою общій законъ, по которому съ теченіемъ времени измѣняется радіоактивность вещества (Ур-X), непрерывно вырабатываемаго другимъ веществомъ (Ур) и, въ свою очередь, непрерывно превращающагося въ третье неактивное вещество, принимая, что и первоначальное вещество неактивно въ отношеніи разсматриваемыхъ лучей (въ данномъ случаѣ β-лучей).

Но въ большинствѣ случаевъ константа μ, опредѣляющая первая превращеніе, чрезвычайно мала въ сравненіи съ λ. Такъ, напримѣръ, періодъ T превращенія Ур-X составляетъ, какъ мы видѣли, 22 дня, тогда какъ для самого урана его можно считать въ 600 милліоновъ лѣтъ. А такъ какъ радіоактивныя константы λ обратно пропорціональны періодамъ превращенія T, то отсюда уже видно, насколько мала величина μ по сравненію съ λ.

Ограничиваясь только первою степенью μ въ выраженіи q, получимъ:

$$q = (q)_{\mu = 0} + \mu \left(\frac{dq}{d\mu}\right)_{\mu = 0},$$

Легко уяснить себѣ причину этого. Первоначальное вещество, напримѣръ, уранъ, освобожденный отъ Ур-X, непрерывно производитъ послѣднее вещество, и такъ какъ часть урана, которая превращается въ единицу времени, крайне ничтожна и, слѣдовательно, образованіе Ур-X можно считать равномѣрнымъ, то количество Ур-X возрастало бы безгранично, еслибы оно, въ свою очередь, не было радіоактивнымъ веществомъ и не превращалось постепенно въ новое неизвѣстное вещество, согласно экспоненціальному закону. Отсюда слѣдуетъ, что количество Ур-X съ теченіемъ времени возрастаетъ (а вмѣстѣ съ тѣмъ возрастаетъ и количество испускаемыхъ имъ β-лучей), и это возрастаніе въ единицу времени будетъ равняться разности между упомянутымъ равномѣрнымъ увеличеніемъ и уменьшеніемъ по экспоненціальному закону.

Превращенія торія гораздо болѣе сложны, нежели превращенія урана, потому что торій превращается въ Тр-X, но послѣдній не превращается въ неактивное вещество, а даетъ газообразную эманацію, которая, въ свою очередь, преобразуется въ твердое вещество; это вещество, отлагаясь на поверхностяхъ твердыхъ тѣлъ, производитъ такъ называемую наведенную радіоактивность. Разумѣется, это отложеніе образуется и въ самой массѣ торія, такъ что послѣдній, находясь въ состояніи радіоактивнаго равновѣсія, заключаетъ въ себѣ, по крайней мѣрѣ, четыре различныхъ вещества, кромѣ торія, а именно: Тр-X, газообразную эманацію, отложеніе, обусловливающее наведенную радіоактив-

---

или

$$q = \frac{\mu}{\lambda} Q_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Называя J напряженіе тока, измѣряющаго радіоактивность въ моментъ t, а J_∞ — токъ въ концѣ безконечно долгаго времени, получимъ:

$$J = J_\infty \left(1 - e^{-\lambda t}\right),$$

т. е. радіоактивность урана возстанавливается съ тою же быстротою и постепенностью, съ какими она уменьшается въ радіоактивномъ продуктѣ (Ур-X), взятомъ отдѣльно.

Рётгерфордъ (129) приходитъ къ тому же результату, принимая въ разсчетъ съ самаго начала крайнюю медленность превращенія первоначальнаго радіоактивнаго вещества (Ур), т. е принимая постояннымъ число атомовъ новаго вещества (Ур-X), возникающихъ въ каждую единицу времени. Изложенный выше методъ имѣетъ то преимущество, что, кромѣ приблизительной величины, соотвѣтствующей самому малому значенію μ, онъ даетъ и точное выраженіе для q.

ность, и, наконецъ, то вещество, въ которое превращается это отложенiе. И между тѣмъ какъ количество торiя непрерывно уменьшается, а количество окончательнаго продукта безпрерывно увеличивается, количества промежуточныхъ веществъ остаются безъ измѣненiя, такъ какъ ихъ образованiе и уничтоженiе взаимно компенсируются.

Ниже мы увидимъ, что въ дѣйствительности эти процессы еще болѣе сложны, чѣмъ было только что указано; но чтобы дать представленiе о методахъ, примѣняемыхъ при подобныхъ изслѣдованiяхъ, опишемъ, какимъ образомъ были открыты и изучены первыя превращенiя торiя.

Прибавляя амміакъ къ раствору торiевой соли, Рётгерфордъ и Содди получили осадокъ, активность котораго была менѣе половины первоначальной активности, между тѣмъ какъ жидкость, которая, согласно реакцiямъ, была лишена торiя, дала, по осушенiи и сильномъ охлажденiи для удаленiя амміачной соли, легкiй осадокъ, который при равномъ вѣсѣ былъ въ тысячу разъ активнѣе торiя. Радiоактивное вещество, содержавшееся въ этомъ осадкѣ, изслѣдователи назвали торiемъ-X (Тр-X).

Съ теченiемъ времени Тр-X теряетъ свою активность, тогда какъ осажденный торiй возстанавливаетъ ее. Изслѣдованiе радiоактивности производилось по электрическому методу и, такъ какъ пластинка слюды совершенно устраняла всѣ эти эффекты, то отсюда ясно, что оба эти вещества, торiй и Тр-X, испускаютъ только α-лучи. Происходящiя съ теченiемъ времени измѣненiя въ радiоактивности этихъ веществъ слѣдуютъ, впрочемъ, обычнымъ экспоненцiальнымъ законамъ (по крайней мѣрѣ, если отбросить первыя измѣренiя—тотчасъ послѣ отдѣленiя Тр-X отъ торiя), но въ отличiе отъ того, что мы видѣли при уранѣ, продуктъ X даетъ мѣсто другимъ радiоактивнымъ веществамъ. Причина такого совпаденiя заключается въ томъ, что производимая Тр-X эманацiя отдѣляется, главнымъ образомъ, въ газообразномъ состоянiи.

Но въ теченiе нѣкотораго времени тотчасъ послѣ отдѣленiя Тр-X отъ торiя наблюдается совершенно иной процессъ, а именно: радiоактивность торiя, прежде чѣмъ начать возрастать, сначала убываетъ до минимума. Это объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что, выдѣляя изъ торiя, который сначала, какъ мы предполагаемъ, находится въ радiоактивномъ равновѣсiи, вещество Тр-X, растворимое въ водѣ, амміакъ не освобождаетъ его отъ отложеній, вызывающихъ наведенную радіоактивность, и послѣднія, уже не производимыя эманаціей, которая, конечно, удаляется вмѣстѣ съ Тр-*X*, постепенно преобразуются, вызывая уменьшеніе радіоактивности самого торія. По той же причинѣ Тр-*X*, прежде чѣмъ терять свою радіоактивность, въ теченіе извѣстнаго времени обнаруживаетъ повышеніе активности.

Какъ мы видимъ, наблюдаемыя явленія объясняются довольно просто и можно было сомнѣваться только относительно самаго порядка или послѣдовательности преобразованій, т. е. нельзя было рѣшить, является ли эманація дѣйствительно продуктомъ Тр-*X*, какъ это мы предположили, или же она есть продуктъ самого торія. Соотвѣтственные опыты уяснили и это обстоятельство. Такъ, напримѣръ, оказывается, что, будучи помѣщенъ въ струѣ газа, Тр-*X* съ самаго начала даетъ эманацію, тогда какъ торій, осажденный амміакомъ, вначалѣ не даетъ замѣтныхъ слѣдовъ эманаціи и начинаетъ ее производить лишь по мѣрѣ того, какъ въ немъ возстанавливается Тр-*X*.

Многочисленные опыты, недавно произведенные надъ торіемъ, показали далѣе, что твердый продуктъ, въ который превращается эманація, не однороденъ, а состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ трехъ радіоактивныхъ веществъ, которыя различаютъ наименованія Тр-*A*, Тр-*B* и Тр-*C*. Эманація превращается въ продуктъ *A*, послѣдній въ продуктъ *B*, этотъ—въ продуктъ *C* и послѣдній—въ окончательный, еще неизвѣстный продуктъ безъ замѣтной радіоактивности. Кромѣ того, можно считать установленнымъ, что Тр-*X* не производится непосредственно торіемъ, но что между ними существуетъ промежуточная ступень, которой Рамзэй далъ названіе *радіоторія*. Это вещество, которое было получено изъ такъ называемаго торіанита, минерала, довольно богатаго геліемъ, значительно активнѣе торія и даетъ подобные же продукты превращенія, тогда какъ по химическимъ свойствамъ оно принадлежитъ къ металламъ рѣдкихъ земель. Почти одновременно и Ганъ пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, между тѣмъ какъ Бланъ изъ твердыхъ осадковъ водъ Echaillon и Salins-Moutier въ Савойѣ извлекъ радіоактивное вещество, которое съ конечномъ результатѣ оказалось тождественнымъ въ радіоторіемъ.

Изъ изслѣдованій Гана вытекаетъ, что радіоторій есть дѣйствительно продуктъ превращенія торія, содержащійся въ незначительнѣйшихъ количествахъ въ тѣхъ минералахъ, изъ которыхъ былъ извлеченъ торій. Эльстеръ и Гейтель пришли къ же результатамъ. Недавнія изслѣдованія Больтвуда и Дадуріана подтвердили это обстоятельство и, кромѣ того, сдѣлали весьма вѣроятнымъ, что торій, превращаясь въ радіоторій, не испускаетъ никакихъ лучей,—ни α-, ни β-, ни γ-лучей.

Послѣдовательныя превращенія актинія въ значительной степени напоминаютъ измѣненія торія. Актиній даетъ, въ качествѣ продукта превращенія, актиній-X; этотъ, въ свою очередь, образуетъ эманацію актинія, отлагающую твердые продукты на поверхности тѣлъ, съ которыми она приходитъ въ соприкосновеніе; отложеніе также послѣдовательно подвергается различнымъ превращеніямъ, производящимъ наведенную радіоактивность. Недавнія изслѣдованія Гана установили, что между актиніемъ и актиніемъ-X существуетъ промежуточный продуктъ, аналогичный радіоторію и названный поэтому *радіоактиніемъ*.

Съ другой стороны, послѣдовательныя превращенія радія отличаются не только отъ немногочисленныхъ измѣненій уранія, но и отъ превращеній торія и актинія.

Повидимому, между радіемъ и его газообразной эманаціей не существуетъ никакого посредствующаго звена, аналогичнаго радіоторію и торію-X. Эманація радія возникаетъ непосредственно вслѣдствіе распаденія его атомовъ. Зато послѣдующія извѣстныя намъ превращенія, которымъ подвергается эманація радія, довольно многочисленны.

Твердое отложеніе эманаціи, составляющее причину наведенной радіоактивности, не представляетъ собою однороднаго продукта, но состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ семи послѣдовательныхъ веществъ. Первымъ шести Рётгерфордъ далъ названія: радій-A, радій-B... радій-F въ порядкѣ ихъ образованія. Первое вещество, радій-A, представляетъ собою непосредственный продуктъ распаденія атомовъ эманаціи; предпослѣднее, т. е. радій-F, превращается въ седьмое вещество, которое еще остается совершенно неизслѣдованнымъ, потому что не обнаруживаетъ замѣтной активности и не превращается, повидимому, ни въ какія другія активныя вещества. Нельзя, впрочемъ, отрицать, что количества, въ которыхъ до сихъ поръ приходилось имѣть радіоактивныя вещества, настолько малы, что ихъ вообще нельзя было бы совершенно открыть, еслибы они не испускали лучей α или β.

Нами уже было довольно подробно изложено, какимъ образомъ были открыты первыя превращенія урана и торія, но въ этомъ случаѣ дѣло шло о довольно простыхъ явленіяхъ. Когда же приходится изучать тѣла, дающія длинную серію послѣдовательныхъ атомныхъ превращеній, то разборъ и правильное истолкованіе соотвѣтственныхъ опытовъ становится въ высшей степени сложнымъ. Съ такого рода сложностью и пришлось имѣть дѣло при послѣдовательныхъ продуктахъ эманацій и въ особенности эманаціи радія. Чтобы дать сжатое, хотя и не совсѣмъ полное, представленіе о тѣхъ методахъ, къ которымъ приходится прибѣгать при этихъ трудныхъ изслѣдованіяхъ, нелишнимъ будетъ изложить ходъ изслѣдованія превращеній радія, изслѣдованія, которымъ мы обязаны почти исключительно Рётгерфорду.

Существованіе первыхъ продуктовъ превращенія радія, т. е. превращеніе его въ эманацію и превращеніе эманаціи въ то отложеніе, которое производитъ наведенную радіоактивность, было доказано способомъ, сходнымъ съ тѣмъ, который былъ примѣненъ для урана, и въ данномъ случаѣ дѣло, пожалуй, было еще болѣе просто, потому что газообразность эманаціи дѣлала излишними попытки химическаго отдѣленія продукта. Но дѣло значительно усложнилось, когда пришлось изучать дальнѣйшіе продукты.

Что такъ называемая наведенная радіоактивность обусловлена невидимымъ слоемъ вещества, отложеннаго эманаціей, не подлежитъ сомнѣнію. Хотя отложенное вещество невидимо даже и въ микроскопъ и такъ ничтожно по количеству, что не вліяетъ на вѣсъ тѣла, къ которому оно пристало, но оно можетъ отдѣлиться отъ него въ извѣстныхъ реактивахъ и можетъ быть механически перенесено, напримѣръ, посредствомъ соскабливанія; тогда его присутствіе въ растворѣ или на томъ тѣлѣ, при помощи котораго производилось соскабливаніе, легко открывается, благодаря радіоактивности. Если принять въ соображеніе ничтожность его количества, то это отложеніе, несомнѣнно, въ нѣсколько тысячъ разъ радіоактивнѣе, при равномъ вѣсѣ, нежели самъ радій.

Констатированный фактъ, что радіоактивное отложеніе становится особенно обильнымъ, если тѣло, подверженное дѣйствію эманаціи, наэлектризовано отрицательно, представляетъ, однако, весьма серьезное затрудненіе для объясненія. Эманація радіоактивна, но испускаетъ лишь α-лучи, какъ это легко показать непосредственнымъ наблюденіемъ; отсюда казалось бы, что каждый атомъ эманаціи, теряя положительную частицу α и превращаясь такимъ образомъ въ атомъ радіоактивнаго отложенія, долженъ быть наэлектризованъ отрицательно и долженъ отталкиваться, а не притягиваться тѣлами съ отрицательнымъ зарядомъ. Ввиду этого является подозрѣніе, что каждый атомъ эманаціи, прежде чѣмъ сдѣлаться атомомъ радіоактивнаго отложенія, подвергается другимъ, еще неизвѣстнымъ превращеніямъ.

Но возможны и другія объясненія. Такъ, Рётгерфордъ предполагаетъ, что вмѣстѣ съ α-лучами эманація испускаетъ и β-лучи, обладающіе ничтожной скоростью и потому трудно обнаруживаемые, но въ такомъ количествѣ, что атомъ эманаціи, потерявъ частицу α и два или болѣе электроновъ, остается отрицательнымъ.

Г-жа Слэтеръ помѣщала электроскопъ въ пріемникъ, изъ котораго какъ можно лучше выкачивался воздухъ и въ который вводилась затѣмъ эманація торія или радія; этотъ электроскопъ разряжался замѣтно быстрѣе, если на немъ былъ положительный зарядъ, чѣмъ въ противномъ случаѣ. Эти явленія были объяснены, какъ слѣдствіе того, что часть самой эманаціи испускаетъ электроны, обладающіе малыми скоростями.

Но, съ другой стороны, Маковеръ, основываясь на опытахъ другого рода, пришелъ къ заключенію, что, когда атомъ эманаціи выбрасываетъ частицу α, то какъ послѣдняя, такъ и остальная часть атома (которая въ силу реакціи также пріобрѣтаетъ довольно значительную скорость) лишены электрическаго заряда. И лишь затѣмъ, благодаря столкновеніямъ съ молекулами газовъ, послѣдній остатокъ іонизуется, теряя одинъ электронъ, и потому получаетъ положительный зарядъ. Рётгерфордъ допускалъ возможность такого объясненія еще раньше.

Что частицы, которыя, отлагаясь на поверхности тѣлъ, производятъ наведенную радіоактивность, наэлектризованы положительно, явствуетъ изъ опытовъ Дебіерна, который наблюдалъ при этомъ магнитныя отклоненія, и изъ опытовъ Гизеля, который прибѣгалъ къ электрическимъ силамъ. Тѣ и другіе опыты относятся, впрочемъ, исключительно къ актинію, который даетъ значительно болѣе обильную эманацію, нежели радій. Чтобы объяснить свои замѣчательные результаты, Гизель приписываетъ эманію (актинію) испусканіе особыхъ лучей, которые онъ назвалъ лучами E; но по мнѣнію Рётгерфорда наблюдаемое явленіе, т. е. усиленное свѣченіе фосфоресцирующаго тѣла при отрицательномъ зарядѣ, объясняется просто положительнымъ зарядомъ частицъ, выбрасываемыхъ при превращеніи эманаціи и производящихъ, послѣ отложенія, наведенную радіоактивность.

Какимъ бы способомъ ни происходило образованіе радіоактивнаго отложенія частью эманаціи радія, изслѣдованія Рётгерфорда показали, что это отложеніе имѣетъ довольно сложный составъ.

Въ воздухъ, содержащій въ себѣ эманацію, которая находится въ закрытомъ сосудѣ надъ растворомъ радія, вводится металлическая пластинка, заряженная отрицательно; спустя нѣкоторое время ее вынимаютъ и подносятъ къ электрометру. Лучи, которые исходятъ изъ нея, іонизуютъ воздухъ, дѣлаютъ его электропроводнымъ и вызываютъ отклоненіе электрометра. Это отклоненіе, отнесенное къ единицѣ времени, пропорціонально количеству электричества, переданнаго черезъ воздухъ, или напряженію вызываемаго такимъ путемъ тока и потому можетъ служить мѣриломъ радіоактивности пластинки. Если между послѣдней и воздухомъ, заключающимся въ измѣрительномъ приборѣ, находится лишь небольшой слой воздуха, то наблюдаемый эффектъ представитъ сумму дѣйствія лучей α, β, γ, если всѣ эти три рода лучей испускаются самимъ тѣломъ; но эффектъ лучей β и γ будетъ ничтоженъ въ сравненіи съ эффектомъ α-лучей. А такъ какъ изученіе каждаго рода лучей отдѣльно можетъ дать полезныя указанія, то производились также особыя измѣренія при помощи тонкой алюминіевой пластинки, которая задерживаетъ α-лучи и позволяетъ изучать дѣйствіе лучей β и γ вмѣстѣ или только лучей β, такъ какъ γ-лучи играютъ сравнительно весьма ничтожную роль. Вставляя же затѣмъ свинцовую пластинку толщиною въ 6 или болѣе миллиметровъ, изолировали γ-лучи и изучали въ чистомъ видѣ ихъ дѣйствіе на измѣрительный аппаратъ.

Впрочемъ, послѣднее изученіе можно теперь считать излишнимъ, такъ какъ уже неоднократно была констатирована взаимная пропорціональность дѣйствія двухъ послѣднихъ видовъ лучей.

Повторныя измѣренія радіоактивности металлической палочки въ опредѣленные промежутки времени, начиная съ того момента, когда она удалена изъ эманаціи, показываютъ, что ея радіоактивность постепенно убываетъ, но этотъ процессъ происходитъ не по извѣстному экспоненціальному закону и притомъ бываетъ различенъ въ зависимости отъ времени, въ теченіе котораго продолжалось дѣйствіе эманаціи.

Обратимся прежде всего къ изученію убыванія радіоактивности въ отношеніи α-лучей въ томъ случаѣ, когда тѣло съ наведенною радіоактивностью оставалось въ соприкосновеніи съ эманаціей лишь короткое время, напримѣръ, 1 минуту. Оказывается, что вначалѣ, т. е. примѣрно въ теченіе первыхъ 10 минутъ съ момента удаленія изъ эманаціи, радіоактивность палочки убываетъ сравнительно быстро; затѣмъ постепенно замедляется, приблизительно съ пятнадцатой минуты до тридцать пятой она остается почти безъ измѣненія; потомъ потеря активности идетъ снова быстрѣе. Въ первомъ періодѣ это убываніе почти отвѣчаетъ экспоненціальному закону, и время T, необходимое для уменьшенія активности до половины первоначальной величины, составляетъ около 3 минутъ, что соотвѣтствуетъ величинѣ константы превращенія $\lambda = 0 \cdot 00385$. Въ послѣднемъ періодѣ этотъ процессъ убыванія радіоактивности опять отвѣчаетъ экспоненціальному закону, но въ этомъ случаѣ T составляетъ около 19 минутъ и, слѣдовательно, константа равна 0·00061 *).

Промежуточная фаза, во время которой радіоактивность остается почти безъ измѣненія, продолжается тѣмъ меньше, чѣмъ долѣе продолжалась экспозиція палочки въ эманаціи.

Эти первые результаты показываютъ, что радіоактивное отложеніе не однородно, а по всей вѣроятности содержитъ въ себѣ два радіоактивныхъ продукта, къ которымъ и относятся указанныя значенія для T (3 минуты и 19 минутъ), т. е. времени, нужнаго для уменьшенія ихъ радіоактивности вдвое.

Когда мы имѣемъ смѣсь нѣсколькихъ радіоактивныхъ

*) Рётгерфордъ получилъ въ этомъ случаѣ $T = 28$ минутамъ, но недавніе довольно убѣдительные опыты Бронсона (143) даютъ принимаемую нами величину, которая, какъ мы увидимъ немного ниже, отвѣчаетъ радіоактивному продукту радію-*C*. Для радія-*B* мы также принимаемъ показанное Бронсономъ значеніе $T = 26$ минутамъ, вмѣсто $T = 21$ минутѣ, указаннаго Рётгерфордомъ.

веществъ A, B, C..., изъ которыхъ каждое превращается въ другое по экспоненцiальному закону, то мы легко можемъ вычислить законъ измѣненiя радiоактивности этой смѣси, если намъ извѣстны константы каждаго превращенiя или—что одно и то же—если намъ извѣстно время T, въ теченiе котораго въ каждомъ продуктѣ радiоактивность доходитъ до половины первоначальной величины. Такимъ образомъ можно опредѣлить, могутъ ли получаться приведенные выше числовые результаты съ двумя продуктами, изъ которыхъ одинъ имѣетъ $T=3$ минутамъ, а другой $T=19$ минутамъ. Оказывается, что это невозможно, но что можно хорошо представить экспериментальныя данныя, если допустить: 1) что эманацiя даетъ продуктъ A, который выбрасываетъ α-лучи и имѣетъ $T=3$ минутамъ; 2) что A превращается въ продуктъ B, который не испускаетъ α-лучей и для котораго $T=26$ минутамъ; 3) что B превращается въ третiй продуктъ C, который, подобно A, испускаетъ α-лучи и для котораго $T=19$ минутамъ, и 4) что C превращается въ продуктъ или въ рядъ послѣдовательныхъ продуктовъ, не проявляющихъ замѣтной радiоактивности.

Но если мы обратимся къ разсмотрѣнiю лучей β (или же γ), то получится нѣсколько иной результатъ. При кратковременной экспозицiи дѣйствiю эманацiи радiоактивность, вначалѣ почти неощутимая, начинаетъ возрастать, достигая максимума черезъ 36 минутъ, затѣмъ снова падаетъ, пока, наконецъ, по истеченiи нѣсколькихъ часовъ процессъ не начинаетъ совершаться согласно экспоненцiальному закону при $T=19$ минутамъ. Наоборотъ, если тѣло находилось подъ влiянiемъ эманацiи продолжительное время, то съ самаго начала наблюдается сильная активность, которая постепенно убываетъ. Коротко говоря, всѣ наблюденные факты объединяются допущенiемъ, что изъ трехъ упомянутыхъ продуктовъ только третiй испускаетъ, кромѣ лучей α, также и лучи β и γ *).

Наблюдаемыя различiя въ дѣйствiи β-лучей въ зависимости отъ продолжительности экспозицiи дѣйствiю эманацiи объясняются довольно легко. При краткой экспозицiи полу-

*) По Бронсону радiй-B испускаетъ β-лучи, обладающiе весьма слабою проницающей способностью, почему они въ большинствѣ случаевъ остаются необнаруженными.

чается почти исключительно радій-A, который затѣмъ мало-по-малу производитъ радій-B, а послѣдній, въ свою очередь,— радій-C; и такъ какъ только послѣдній способенъ давать β-лучи, то они могутъ обнаружиться лишь послѣ извѣстнаго времени и въ количествѣ, которое сначала растетъ. При продолжительной же экспозиціи съ самаго начала измѣренія существуютъ всѣ три продукта и, слѣдовательно, существуютъ съ самаго начала и β-лучи, но ихъ количество съ теченіемъ времени убываетъ по мѣрѣ постепеннаго истощенія продукта C и предыдущихъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О четыреугольникахъ.

Дм. Ефремова.

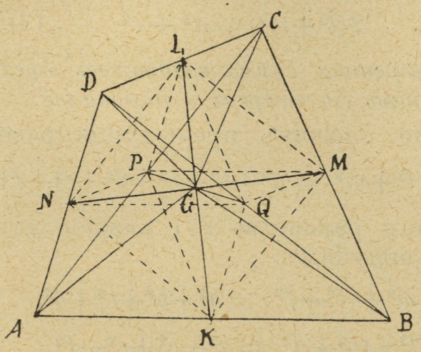
I.

О медіанахъ четыреугольника.

1. *Медіанами* чет—ка, какъ извѣстно, называются прямыя, соединяющія средины его противоположныхъ сторонъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ діагонали чет—ка можно разсматривать, какъ третью пару его противоположныхъ сторонъ; въ такомъ случаѣ прямая, соединяющая средины діагоналей чет—ка, называется также его *медіаною*.

Теорема. *Три медіаны чет—ка пересѣкаются въ одной точкѣ.*



Фиг. 1.

Пусть KL, MN и PQ суть три медіаны произвольнаго чет—ка ABCD (фиг. 1). Такъ какъ каждыя двѣ изъ этихъ трехъ прямыхъ служатъ діагоналями трехъ параллелограммовъ KLMN, KLPQ и MNPQ, то всѣ онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ G, въ которой каждая изъ нихъ дѣлится пополамъ.

2. Положимъ (фиг. 1)

$$AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DA=d,$$

$$AC=e,\quad BD=f,$$

$$KL=k,\quad MN=l,\quad PQ=m.$$

Такъ какъ

$$KM=LN=\frac{AC}{2}=\frac{e}{2},$$

$$KN=ML=\frac{BD}{2}=\frac{f}{2},$$

$$KP=QL=\frac{BC}{2}=\frac{b}{2},$$

$$KQ=LP=\frac{AD}{2}=\frac{d}{2},$$

$$MP=NQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2},$$

$$MQ=NP=\frac{CD}{2}=\frac{c}{2},$$

то, прилагая извѣстную теорему о діагоналяхъ параллелограмма къ параллелограммамъ KMLN, KQLP и PMQN, получимъ:

$$2(k^2+l^2)=e^2+f^2, \qquad (1)$$

$$2(k^2+m^2)=b^2+d^2, \qquad (2)$$

$$2(l^2+m^2)=a^2+c^2. \qquad (3)$$

Теорема. *Учетверенная сумма квадратовъ трехъ медіанъ чет—ка равна суммѣ квадратовъ его сторонъ и діагоналей.*

Дѣйствительно, сложивъ предыдущія равенства, получимъ:

$$4(k^2+l^2+m^2)=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2. \qquad (4)$$

3. Вычитая изъ равенства (4) каждое изъ первыхъ трехъ, умноженное на 2, получимъ:

$$4m^2+(e^2+f^2)=a^2+b^2+c^2+d^2, \qquad (5)$$

$$4l^2+(b^2+d^2)=a^2+c^2+e^2+f^2, \qquad (6)$$

$$4k^2+(a^2+c^2)=b^2+d^2+e^2+f^2. \qquad (7)$$

Если разсматривать діагонали чет—ка какъ третью пару противоположныхъ сторонъ его (1), то каждое изъ этихъ равенствъ можно выразить такъ: *учетверенный квадратъ медіаны двухъ противоположныхъ сторонъ чет—ка, сложенный съ суммою квадратовъ* *этихъ сторонъ, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ паръ остальныхъ его сторонъ.*

4. Въ случаѣ ортодіагональнаго чет—ка, т. е. такого, діагонали котораго взаимно перпендикулярны, параллелограммъ KMLN обращается въ прямоугольникъ; въ этомъ случаѣ

$$KL=MN, \text{ т. е. } k=l,$$

а потому, вычитая равенство (6) изъ (7), получимъ:

$$a^2+c^2=b^2+d^2,$$

т. е, что *сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ ортодіагональнаго чет—ка равна суммѣ квадратовъ двухъ другихъ его сторонъ.*

Теорема. *Учетверенный квадратъ медіаны противоположныхъ сторонъ ортодіагональнаго чет—ка равенъ суммѣ квадратовъ его діагоналей.*

Ибо, на основаніи предыдущаго, равенства (6) и (7) приводятся къ одному слѣдующему:

$$4k^2=4l^2=e^2+f^2.$$

5. Изъ равенствъ (5), (6) и (7) *M. Neuberg* вывелъ соотношенія между сторонами, діагоналями и медіанами пятиугольника [1]).

Обозначимъ

чрезъ a, b, c, d, e—стороны произвольнаго пятиугольника ABCDE, противолежащія его вершинамъ A, B, C, D, E;

чрезъ a', b', c', d', e'—его діагонали, лежащія противъ тѣхъ же вершинъ;

чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$—прямыя, соединяющія средины a и a', b и b', c и c', d и d', e и e';

чрезъ $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$—прямыя, соединяющія средины b и e, c и a, d и b, e и c, a и d, и, наконецъ,

чрезъ $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \varepsilon''$—прямыя, соединяющія средины c' и d', d' и e' e' и a', a' и b', b' и c'.

Прилагая равенства (5), (6) и (7) къ чет-ку BCDE, получимъ:

$$(b^2+e^2)+(c'^2+d'^2)=a^2+a'^2+4\alpha^2,$$
$$(a^2+a'^2)+(c'^2+d'^2)=b^2+e^2+4\alpha'^2,$$
$$(a^2+a'^2)+(b^2+e^2)=c'^2+d'^2+4\alpha''^2.$$

Сложивъ каждое изъ этихъ равенствъ съ четырьмя другими того же типа, составленными для чет—въ CDEA, DEAB, EABC и ABCD, получимъ:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2)=$$
$$=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2),$$

[1]) Mathesis, 1906. № 2.

$$3(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2)-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)=$$
$$=4(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2),$$
$$3(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2)=$$
$$=4(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2+\delta''^2+\varepsilon''^2).\ *)$$

Сложивъ эти равенства по два, получимъ еще слѣдующія три:

$$a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2),$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2+\delta''^2+\varepsilon''^2),$$
$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2+e'^2)=$$
$$=2(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\varepsilon'^2)+2(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2+\delta''^2+\varepsilon''^2).$$

6. Послѣднія три равенства, въ примѣненіи къ *правильному* пятиугольнику, т. е. при

$$a=b=c=d=e,$$
$$a'=b'=c'=d'=e',$$
$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon,$$
$$\alpha'=\beta'=\gamma'=\delta'=\varepsilon',$$
$$\alpha''=\beta''=\gamma''=\delta''+\varepsilon''$$

принимаютъ видъ:

$$a'^2=\alpha^2+\alpha'^2,$$
$$a^2=\alpha^2+\alpha''^2,$$
$$a^2+a'^2=2(\alpha'^2+\alpha''^2).$$

Аналогичныя равенства могутъ быть получены изъ тѣхъ же равенствъ (5), (6) и (7) для всякаго многоугольника.

7. Точка пересѣченія медіанъ чот—ка названа *Neuberg*'омъ *среднею точкою* чет—ка; мы будемъ называть эту точку *центромъ медіанъ* чет—ка.

Понятно, что *центръ медіанъ чет—ка есть центръ тяжести четырехъ равныхъ массъ, расположенныхъ въ его вершинахъ,* подобно тому, какъ центръ медіанъ тр—ка есть центръ тяжести трехъ равныхъ массъ, находящихся въ его вершинахъ. Благодаря этому, центръ медіанъ чет—ка обладаетъ многими свойствами, аналогичными съ свойствами центра медіанъ тр—ка. Важнѣйшія изъ этихъ свойствъ слѣдующія:

---

*) Послѣднее изъ этихъ равенствъ было указано *Jahnke*. Archiv für Math. und Phys. 3, IX, p. 91.

a) Алгебраическая сумма разстояній вершинъ чет—ка отъ произвольной прямой, проходящей чрезъ центръ медіанъ его, равна нулю;

b) Алгебраическая сумма разстояній вершинъ чет—ка отъ произвольной прямой равна учетверенному разстоянію центра медіанъ его отъ той же прямой;

c) Если стороны чет—ка ABCD раздѣлены въ точкахъ A′, B′, C′, D′ такъ, что

$$\frac{AA'}{BA'}=\frac{BB'}{CB'}=\frac{CC'}{DC'}=\frac{DD'}{AD'}=\frac{m}{n},$$

то чет—ки ABCD и A′B′C′D′ имѣютъ общій центръ медіанъ;

d) Сумма квадратовъ разстояній произвольной точки M отъ вершинъ чет—ка равна суммѣ квадратовъ разстояній вершинъ его отъ центра медіанъ, сложенной съ учетвереннымъ квадратомъ разстоянія точки M отъ центра медіанъ.

Теоремы эти доказываются совершенно такъ же, какъ соотвѣтственныя имъ теоремы о центрѣ медіанъ тр—ка *).

Слѣдующія теоремы устанавливаютъ еще болѣе близкую аналогію между центрами медіанъ чет—ка и тр—ка.

8. **Теорема.** *Удвоенная сумма квадратовъ разстояній центра медіанъ чет—ка отъ его вершинъ равна суммѣ квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ его, сложенной съ удвоеннымъ квадратомъ ихъ медіаны.*

Дѣйствительно, такъ какъ KG и LG суть медіаны тр—въ AGB и CGD (фиг. 1), то

$$2(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2)=a^2+4\overline{KG}^2$$

и

$$2(\overline{CG}^2+\overline{DG}^2)=c^2+4\overline{LG}^2;$$

сложивъ эти равенства, находимъ, что

$$2(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2)=a^2+c^2+4(\overline{KG}^2+\overline{LG}^2);$$

но

$$\overline{KG}=\overline{LG}=\frac{k}{2};$$

поэтому (3)

$$2(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2)=a^2+c^2+2k^2,$$

что и требуется доказать.

9. Примѣняя эту теорему къ двумъ другимъ сторонамъ чет—ка (*b* и *d*), получимъ:

$$2(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2)=b^2+d^2+2l^2.$$

---

[1]) См. „Нов. геом. тр-ка“ Д. Ефремова. I, 29, 31 и VI, 7.

Сложивъ это равенство съ предыдущимъ и замѣтивъ, что (1)

$$2(k^2+l^2)=e^2+f^2,$$

находимъ, что

$$4(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2)=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2, \qquad (8)$$

т. е. что *учетверенная сумма квадратовъ разстояній центра медіанъ чет—ка отъ его вершинъ равна суммѣ квадратовъ всѣхъ его сторонъ и діагоналей.*

Послѣднее равенство, на основаніи равенства (4), представляется еще въ такомъ видѣ:

$$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2=k^2+l^2+m^2; \qquad (9)$$

значитъ, *сумма квадратовъ разстояній центра медіанъ чет—ка отъ его вершинъ равна суммѣ квадратовъ трехъ его медіанъ.*

10. Разумѣя подъ M произвольную точку въ плоскости чет—ка, на основаніи предыдущаго (7,d), можемъ написать:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=$$

$$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2+4\overline{MG}^2,$$

или (9)

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=k^2+l^2+m^2+4\overline{MG}^2. \qquad (10)$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что *сумма квадратовъ разстояній точки отъ вершинъ чет—ка дѣлается наименьшею, когда эта точка совпадаетъ съ центромъ медіанъ чет—ка.*

11. Послѣднимъ равенствомъ можно воспользоваться для опредѣленія разстояній центра медіанъ чет—ка отъ его вершинъ. Напр., для опредѣленія AG положимъ, что точка M совпадаетъ съ A; тогда равенство (10) приметъ видъ:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=k^2+l^2+m^2+4\overline{AG}^2,$$

откуда

$$\overline{AG}^2=(a^2+e^2+d^2)-(k^2+l^2+m^2).$$

12. Соединивъ средину P діагонали AC (фиг. 1) съ вершинами чет—ка B и D и замѣтивъ, что прямыя PB и PD суть медіаны тр-въ ABC и ADC, получимъ:

$$4\overline{PB}^2=2a^2+2b^2-e^2$$

и

$$4\overline{PD}^2=2c^2+2d^2-e^2;$$

отсюда, чрезъ сложеніе, находимъ, что

$$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{1}{2}e^2,$$

т. е. *сумма квадратовъ разстояній средины діагонали чет—ка отъ двухъ* *вершинъ его, противолежащихъ этой діагонали, равна полусуммѣ квадратовъ всѣхъ его сторонъ безъ половины квадрата взятой діагонали.*

13. Такъ какъ

$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PA}^2=\frac{1}{2}e^2,$$

то, сложивъ это равенство съ предыдущимъ, получимъ:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{QA}^2+\overline{QB}^2+\overline{QC}^2+\overline{QD}^2=$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

т. е. *сумма квадратовъ разстояній средины каждой діагонали чет—ка отъ четырехъ вершинъ его равна полусуммѣ квадратовъ всѣхъ его четырехъ сторонъ.*

Если чет—къ *ортодіагональный*, то послѣднее равенство принимаетъ видъ (4):

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{QA}^2+\overline{QB}^2+\overline{QC}^2+\overline{QD}^2=$$
$$=a^2+c^2=b^2+d^2;$$

слѣдовательно, *сумма квадратовъ разстояній средины каждой діагонали ортодіагональнаго чет—ка отъ четырехъ вершинъ его равна суммѣ квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ его.*

14. Вычитая равенства (6) и (7) изъ (5), по сокращеніи находимъ, что

$$2m^2+(e^2+f^2)=2k^2+(a^2+c^2)=2l^2+(b^2+d^2),$$

слѣдовательно, *сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ чет—ка, сложенная съ удвоеннымъ квадратомъ ихъ медіаны, равна суммѣ квадратовъ діагоналей, сложенной съ удвоеннымъ квадратомъ ихъ медіаны.*

15. Предположимъ, что чет—къ ABCD вписывается въ кругъ радіуса R (фиг. 2).

Обозначимъ

чрезъ O—центръ этого круга;

чрезъ x, y, z, u, v, w—разстоянія его отъ сторонъ чет—ка a, b, c, d и діагоналей его e и f, и

черезъ 2α, 2β, 2γ и 2δ—центральные углы, соотвѣтственные дугамъ AB, BC, CD и DA, такъ что

$$2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=360^0,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^0.$$

Если при этомъ чет—къ ABCD *ортодіагональный*, то, обозначивъ черезъ H точку пересѣченія его діагоналей, замѣтимъ, что

$$\angle AHB=\angle CHD=\frac{2\alpha+2\gamma}{2}=\alpha+\gamma=90^0$$

и

$$\angle BHC = \angle AHD = \frac{2\beta + 2\delta}{2} = \beta + \delta = 90^0.$$

Теорема. *Сумма квадратовъ разстоянiй центра отъ двухъ противоположныхъ сторонъ вписаннаго въ него ортодiагональнаго чет—ка равна квадрату радiуса этого круга.*

Ибо, такъ какъ

$$x = OK = R\cos\alpha,$$

$$y = OM = R\cos\beta,$$

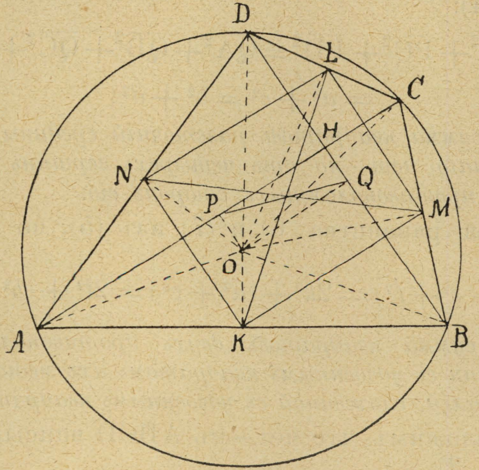
$$z = OL = R\cos\gamma = R\sin\alpha,$$

$$u = ON = R\cos\delta = R\sin\beta,$$

то

$$x^2 + z^2 = y^2 + u^2 = R^2, \qquad (11)$$

что и требовалось доказать.



Фиг. 2.

16. Замѣтимъ еще, что

$$v = OP = R\cos(\gamma + \delta) = R\cos[180^0 - (\alpha + \beta)] = -R\cos(\alpha + \beta)$$

и

$$w = OQ = R\cos(\beta + \gamma) = R\cos[90^0 - (\alpha - \beta)] = R\sin(\alpha - \beta);$$

отсюда

$$v^2 + w^2 = R^2 [\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] =$$

$$= R^2 (1 - 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta),$$

или

$$v^2 + w^2 = R^2 (1 - \sin 2\alpha . \sin 2\beta) =$$

$$= R^2 (1 - \sin 2\gamma . \sin 2\delta).$$

(Продолженiе слѣдуетъ).

РЕЦЕНЗІИ.

А. П. Постниковъ. *Систематическій курсъ практическихъ работъ по общей химіи.*

Первыми практическими занятіями по химіи въ нашихъ университетахъ являются обыкновенно работы по качественному анализу. Практическихъ занятій по неорганической химіи, съ которой студенты начинаютъ свое знакомство съ химіей, обыкновенно не бываетъ. Правда, проходя качественный анализъ, студенты въ значительной мѣрѣ знакомятся со свойствами элементовъ и ихъ соединеній, но главы, посвященныя теоретической части химіи, не подвергаются экспериментальной провѣркѣ. Иногда только передъ практическими занятіями въ органической лабораторіи студенты опредѣляютъ плотность пара по способу В. Мейера или продѣлываютъ одно-два опредѣленія молекулярнаго вѣса по кріоскопическому методу. Не говоря уже о томъ, что наиболѣе трудныя и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе важныя основныя положенія химіи могли бы быть гораздо лучше восприняты, если бъ они провѣрялись на опытѣ, у студентовъ невольно получается убѣжденіе, что вопросы опредѣленія молекулярныхъ и атомныхъ вѣсовъ, установленія химическихъ формулъ и др. являются дѣломъ чрезвычайно сложныхъ экспериментальныхъ работъ, невозможныхъ въ обыкновенной лабораторіи. Что означенныя работы могутъ, однако, вестись съ успѣхомъ начинающими студентами-естественниками, не имѣющими еще достаточнаго практическаго навыка, доказывается вышедшей въ прошломъ году книжкой проф. Коновалова: „Практическія занятія по общей химіи“ и книгой А. П. Постникова; оба автора представляютъ сводку практическихъ работъ, которыя велись со студентами.

Книга А. П. Постникова начинается съ опредѣленія молекулярнаго вѣса по плотности газа и пара. Для этой цѣли опредѣляется вѣсъ литра воздуха и водорода, а затѣмъ молекулярные вѣса кислорода, азота и хлора; примѣромъ опредѣленія плотности пара служитъ опредѣленіе плотности пара обыкновеннаго эфира. Слѣдующія работы посвящаются опредѣленію молекулярнаго вѣса по кріоскопическому методу, согласно закону Рауля; опредѣляются молекулярные вѣса тростниковаго сахара и нафталина. Важное значеніе авторъ совершенно справедливо придаетъ объемнымъ анализамъ газовъ и паровъ, благодаря возможности пользоваться данными, полученными этимъ путемъ для опредѣленія атомныхъ вѣсовъ, если комбинировать ихъ съ результатами, добытыми въ первой главѣ. Одинъ изъ наиболѣе важныхъ законовъ химіи—законъ Гей-Люссака объ отношеніи между объемами простыхъ тѣлъ и объемами происходящаго изъ нихъ сложнаго тѣла—можетъ быть прекрасно усвоенъ, благодаря разнообразнымъ работамъ, приводимымъ авторомъ въ порядкѣ возрастающей сложности. Приводятся объемные анализы хлористаго водорода, воды, амміака, углекислаго газа, метана и воздуха. Опредѣленію атомнаго вѣса согласно закону Дюлонга и Пти авторъ посвящаетъ меньше вниманія, что вполнѣ правильно въ виду меньшей точности и сравнительно малой примѣнимости этого метода; указываются опредѣленія атомнаго вѣса цинка и ртути.

Слѣдующую главу авторъ посвящаетъ установленію химическихъ формулъ по вѣсовому составу сложныхъ тѣлъ, пользуясь данными по опредѣленію плотности пара, полученными въ первой главѣ. Опредѣляются молекулярныя формулы окиси ртути, воды, окиси мѣди, амміака, закиси азота, амміачной селитры. Авторъ посвящаетъ также отдѣльную главу опредѣленію эквивалентовъ и выясненію понятія объ атомности. Опредѣляются эквиваленты натрія, цинка, олова и др. металловъ. Послѣдняя глава посвящена краткому изложенію объемнаго анализа; эту главу можно было бы безъ ущерба опустить, такъ какъ студенты химики проходятъ объемный анализъ гораздо полнѣе по спеціальнымъ руководствамъ, краткое же изложеніе объемнаго анализа для студентовъ, не берущихъ себѣ химію спеціальностью, врядъ ли можетъ быть признано особенно необходимымъ.

Книга А. П. Постникова, какъ показываетъ приведенное вкратцѣ содержаніе, даетъ достаточно матеріала для того, чтобы цѣль, поставленная авторомъ, могла быть достигнута. Желательно было бы только дополнить книгу еще одной главой, посвященной установленію эквивалентовъ металловъ путемъ электролиза ихъ солей. Такимъ путемъ студенты получили бы понятіе объ одной изъ важнѣйшихъ главъ электрохиміи, которая, къ сожалѣнію, рѣдко преподается въ нашихъ университетахъ. Къ достоинствамъ книги, выгодно отличающей ее отъ книги проф. Коновалова, относится удачная группировка матеріала. Авторъ соединяетъ въ одну главу работы, относящіяся къ одному вопросу. Этимъ достигается большая ясность, а также возможность отбросить извѣстное количество работъ въ случаѣ недостатка времени. Всѣ работы излагаются по одному плану: сначала приводятся необходимые приборы, далѣе хронологически излагается порядокъ производства опыта, затѣмъ слѣдуютъ вычисленія и выводы, если они имѣютъ въ данномъ случаѣ мѣсто. Каждая глава начинается съ необычнаго введенія, кратко излагающаго теоретическое положеніе, провѣркѣ котораго посвящены приводимыя въ этой главѣ работы.

Повсюду авторъ старается пользоваться исключительно простыми приборами, встрѣчающимися въ каждой лабораторіи. Считая это положеніе по существу правильнымъ, можно все-таки признавать необходимость описанія такихъ важныхъ приборовъ, какъ приборъ для опредѣленія плотности пара по способу В. Мейера или приборъ Бекмана, употребляющійся для опредѣленія молекулярнаго вѣса по кріоскопическому методу.

Въ отличіе отъ книги Коновалова, авторъ не приводитъ качественныхъ опытовъ съ элементами и ихъ соединеніями, мотивируя это тѣмъ, что „повтореніе опытовъ, видѣнныхъ на лекціяхъ, совершенно излишне“. Врядъ-ли съ этимъ можно согласиться; свойства элементовъ и химическія реакціи гораздо лучше усваиваются, если продѣлываются самими студентами, и введеніе ихъ въ курсъ практическихъ занятій помогло бы усвоенію и этой части неорганической химіи. Изъ мелкихъ недостатковъ можно отмѣтить неудачный примѣръ перемѣнной атомности: авторъ считаетъ углеродъ въ этиленѣ двухатомнымъ (стр. 67—68).

Выполненіе практическихъ работъ по книгѣ Постникова потребовало бы отъ студентовъ довольно много времени. Однако, вводимая въ настоящее время предметная система, ведущая къ большей спеціализаціи, позволитъ студентамъ-химикамъ продѣлать эти весьма важныя для теоретическаго усвоенія химіи работы.

П. К.

П. Б. Лейбергъ. *Физика. Курсъ средней школы. Ч. I.*

Передъ нами новый учебникъ физики для гимназій. Нельзя отрицать, что мы не имѣемъ вполнѣ удовлетворительнаго руководства по физикѣ для средней школы; причина этого заключается въ томъ, что методика предмета до сихъ поръ очень мало разработана. Въ виду существованія ряда руководствъ по физикѣ (Краевича, Киселева, Малинина и др.) мы вправѣ ожидать отъ автора вновь появляющагося учебника новыхъ методовъ разработки матеріала, другой систематизаціи его или хотя бы лучшаго, болѣе яркаго изложенія. Нельзя сказать, чтобы лежащая предъ нами книга удовлетворяла какому-либо изъ указанныхъ требованій; если отбросить небольшія добавленія, учебникъ г. Лейберга мало отличается отъ прежнихъ руководствъ въ отношеніи матеріала или способовъ доказательства.

Впрочемъ, самъ авторъ въ предисловіи указываетъ на то новое, что онъ внесъ въ свой учебникъ; „въ основу изложенія физики долженъ быть положенъ экспериментъ“. Нельзя не согласиться съ вѣрностью этого положенія, но вѣдь и прежніе учебники для средней школы отнюдь не теоретически излагали предметъ. Книга г. Лейберга отличается тѣмъ, что почти всякое положеніе начинается съ примѣра или съ опыта. Но это обиліе опытовъ и примѣровъ имѣетъ несомнѣнно и отрицательную сторону; вниманіе ученика должно въ значительной степени отклоняться отъ важныхъ положеній, которыя часто формулируются авторомъ въ двухъ словахъ и нерѣдко производятъ впечатлѣніе какого-то прибавленія къ примѣру. Достаточно указать на §§ 11—14—равномѣрно-ускоренное движеніе, масса, ускореніе и т. д. или на § 18—формула равномѣрно-ускореннаго движенія. Между прочимъ опыты описываются иногда такъ элементарно, что невольно возникаетъ сомнѣніе, дѣйствительно ли они могутъ удаться, если не принять никакихъ предосторожностей. (Напр. § 16—паденіе тѣлъ, § 125—смѣшеніе жидкостей разной температуры).

Нельзя не обратить вниманія на то, что авторъ почти не считается съ чисто психологическимъ фактомъ, въ силу котораго болѣе важныя положенія должны быть рѣзко выдѣлены, оттѣнены, чтобы они лучше запоминались (напр. § 91—барометръ, § 140—о парахъ). У него почти весь матеріалъ излагается одинаково, вслѣдствіе чего книга при чтеніи кажется утомительной. Къ недостаткамъ того-же рода относится чрезвычайная схематичность изложенія (см. гл. IV—о машинахъ, §§ 106, 107—мѣхи и водяные насосы, § 115—о водяныхъ двигателяхъ), которая, быть-можетъ, является достоинствомъ въ университетскомъ руководствѣ, но въ учебникѣ для гимназій несомнѣнно составляетъ крупный недочетъ.

Авторъ назвалъ свою книгу курсомъ „средней школы". Слѣдовало бы точнѣй обозначить, что понимаетъ подъ этимъ авторъ. Въ книгѣ не описаны многія явленія и приборы, входящіе въ курсъ мужскихъ гимназій. Таковы: подробное описаніе воздушнаго насоса, приготовленіе термометра, описаніе золотника, калориметровъ, пирометровъ. Для женскихъ гимназій онъ могъ бы подходить по объему, но онъ, несомнѣнно, слишкомъ труденъ. Есть даже цѣлый рядъ положеній, изложенныхъ такъ кратко, что вообще они не могутъ быть доступны даже ученикамъ старшихъ классовъ мужскихъ гимназій безъ подробныхъ объясненій учителя. (Напр., § 46—дифференціальный воротъ, § 48—доказательство закона работъ, §69—теорія маховового колеса, § 157—машина Линде, § 160—паровые двигатели).

Нельзя не указать также на мало удачную систематизацію матеріала. Вопросы, относящіеся къ одной главѣ, являются часто разбросанными. Напр., параграфы о количествѣ теплоты и теплоемкости отдѣлены другъ отъ друга параграфами о теплопроводности и лучеиспусканіи. Изложеніе въ одной главѣ жидкостей и газовъ, при чемъ послѣ нѣсколькихъ параграфовъ, посвященныхъ жидкостямъ, слѣдуютъ параграфы, посвященные газамъ, затѣмъ опять жидкостямъ и т. д.,—также врядъ ли можетъ быть признано удачнымъ.

Неудачно изложены молекулярная гипотеза и законъ сохраненія энергіи.

Странное впечатлѣніе производитъ глава о химическихъ явленіяхъ. Съ одной стороны, основные законы химіи изложены въ двухъ словахъ, съ другой—есть такія подробности, какъ сѣрноватистокислыя соли и марганцовокаліевая соль. Глава эта можетъ быть конспектомъ по химіи, но усвоить ее ученику гимназіи невозможно.

Къ достоинствамъ книги слѣдуетъ отнести стремленіе къ большей точности изложенія, а также то, что авторъ (какъ на этомъ настаивалъ проф. Хвольсонъ) вводитъ повсюду обозначеніе единицъ физическихъ величинъ.

М. Л.

Объ учебникахъ **Д. Горячева** и **А. Воинова**, озаглавленныхъ „*Основанія анализа безконечно-малыхъ*".

Эти только что вышедшіе учебники для VII класса реальныхъ училищъ составлены примѣнительно къ программѣ 1906 года. Интересно сравнить ихъ другъ съ другомъ и отчасти съ учебникомъ А. Киселева „Дополнительныя статьи алгебры". Учебникъ Воинова болѣе подходитъ ко всей программѣ математики VII класса, такъ какъ заключаетъ въ себѣ приложеніе о комплексныхъ количествахъ, о цѣлой функціи и объ уравненіяхъ.

Понятіе о постоянной и перемѣнной величинѣ выяснено проще у Воинова. Опредѣленіе предѣла изложено лучше у Киселева. У Горячева не изложены 2 аксіомы о предѣлахъ, которыя приведены у Киселева и у Воинова. Свойство перемѣнной величины, по которому она можетъ имѣть только одинъ предѣлъ, у Воинова считается аксіомой, а у Киселева и Горячева доказывается. Киселевъ и Горячевъ доказываютъ нѣкоторыя свойства безконечно-малыхъ величинъ. Воиновъ обходится безъ этого. Но изложеніе теоріи предѣловъ выигрываетъ въ ясности, если будутъ изложены свойства безконечно-малыхъ величинъ. Киселевъ ясно различаетъ значенія величинъ, не выраженныя числами, отъ числовыхъ значеній. Воиновъ и Горячевъ дѣлаютъ только намеки, что они разсуждаютъ о числовыхъ значеніяхъ величинъ. Горячевъ допускаетъ неточныя выраженія въ изложеніи теоремъ. Въ § 7 онъ излагаетъ теорему 2-ую такимъ образомъ: „произведеніе безконечно-малой величины на конечную есть величина безконечно-малая", вмѣсто „произведеніе безконечно-малой величины на конечное число есть величина безконечно-малая." Такъ же неудачно изложеніе теоремы 3-ьей и двухъ замѣчаній въ этомъ параграфѣ. Горячевъ и Воиновъ напрасно не излагаютъ теоремъ о предѣлѣ цѣлой и дробной степени перемѣннаго числа. Киселевъ ничего не говоритъ о предѣлѣ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченномъ увеличеніи абсолютнаго значенія n. При нахожденіи этого предѣла при n цѣломъ и положительномъ Воиновъ совсѣмъ не поясняетъ, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ увеличивается при увеличеніи n, а Горячевъ предоставляетъ доказать это учащимся, хотя доказательство едва ли для нихъ посильно. Такъ какъ Горячевъ не изложилъ аксіомъ о предѣлахъ, то изъ его объясненій не видно, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имѣетъ опредѣленный предѣлъ. Воиновъ также не позаботился этого доказать и во 2-омъ случаѣ въ § 16 неожиданно вводитъ букву e. Горячевъ безъ доказательства увѣряетъ, что e отличается отъ суммы k первыхъ членовъ ряда $\left(1+\frac{1}{1}\right)+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots$ на величину $R=\frac{1}{1.2.3\ldots(k+1)}+$ $+\frac{1}{1.2.3\ldots(k+2)}+\ldots$ Напрасно Горячевъ опускаетъ доказательства, что предѣлъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченномъ увеличенiи дробныхъ значенiй n или абсолютныхъ величинъ отрицательныхъ значенiй n будетъ также e. Воиновъ въ 1-омъ случаѣ въ § 16 даетъ неполное и невѣрное разложенiе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формулѣ Ньютона, пропустивъ въ третьемъ членѣ разложенiя множитель $-\frac{1}{n}\cdot$ Выводъ предѣла $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ для n дробнаго у Воинова неубѣдителенъ, ибо не была доказана теорема о предѣлѣ степени m^p, если m и p стремятся соотвѣтственно къ предѣламъ M и P. Этотъ выводъ гораздо проще и убѣдительнѣе можно изложить такъ: пусть n содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами x и $x+1$, такъ что $x<n<x+1$; тогда

$$\frac{1}{x}>\frac{1}{n}>\frac{1}{x+1};\quad 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{x+1};$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x;$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}:\left(1+\frac{1}{x+1}\right);$$

такъ какъ $1+\frac{1}{x}$ и $1+\frac{1}{x+1}$ стремятся къ 1, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$ стремятся къ e, то предѣлъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ будетъ e.

Примѣненiе метода предѣловъ къ геометрiи изложено немного подробнѣе у Горячева, но выводы у Воинова представляютъ продолженiе выводовъ, изложенныхъ въ элементарной геометрiи А. Киселева. Понятiе о функцiяхъ, классификацiя функцiй и геометрическое представленiе функцiй изложены подробнѣе у Горячева. Киселевъ непрерывность функцiй опредѣляетъ только словами, Воиновъ—главнымъ образомъ алгебраическими символами, Горячевъ словами и символами. Горячевъ подробно поясняетъ непрерывность функцiй съ геометрической точки зрѣнiя, а Воиновъ очень коротко. Горячевъ не выводитъ предѣла a^x при неограниченномъ уменьшенiи абсолютнаго значенiя x, но въ § 35 ссылается на то, что предѣлъ a^x-1 при неограниченномъ уменьшенiи x есть 0. Выводъ этого предѣла у Киселева элементарнѣе, чѣмъ у Воинова. Горячеву и Воинову можно сдѣлать существенный упрекъ въ томъ, что они въ своихъ учебникахъ не изложили, хотя бы кратко, теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ и свойствъ приближенныхъ значеній корней изъ чиселъ. Горячевъ въ § 46 неправильно рѣшаетъ примѣръ 4-ый, говоря, что при высотѣ коробки $x_1 = (a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}):6$ она имѣетъ наименьшій объемъ. Если $a>b$, то ясно, что наименьшій объемъ коробки будетъ 0 при высотѣ $\frac{b}{2}$ и при высотѣ 0. Высоту x_1 коробка имѣть не можетъ, ибо $a:2>(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}):6>\frac{b}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, $b-a<0$; $3ab-3a^2<0$; $4ab-4a^2<ab-a^2$; $a^2-ab<4a^2-4ab$; $a^2-ab+b^2<4a^2-4ab+b^2$; $a^2-ab+b^2<(2a-b)^2$; $\sqrt{a^2-ab+b^2}<2a-b$, будетъ ли $2a-b>0$ или $2a-b<0$; $a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}<3a$; $x_1<a:2$. Точно также докажемъ, что $x_1>b:2$. Выраженіе, полученное для объема коробки v въ зависимости отъ ея высоты x перестаетъ обозначать ея объемъ, если x будетъ больше $b:2$. Поэтому минимумъ выраженія v не совпадаетъ съ наименьшимъ значеніемъ объема коробки.

Во всемъ остальномъ оба учебника вполнѣ удовлетворительны.

П. Свѣшниковъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 901 (4 сер.). Доказать, что во всякомъ параллелограммѣ отношеніе большей діагонали къ меньшей заключается между

$$1 \text{ и } \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

гдѣ α — острый уголъ параллелограмма.

А. Григорьевъ (Казань).

№ 902 (4 сер.). Доказать теорему: алгебраическая сумма разстояній всякой прямой, проходящей черезъ центръ O круга, описаннаго около треугольника ABC, отъ центровъ J, J_1, J_2, J_3 круговъ вписаннаго и внѣвписанныхъ равна нулю. *)

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

*) Предложеніе это есть слѣдствіе теоремы *Lauvernay* (см. „Новая геометрія треугольника“ *Д. Ефремова*, стр. 26, упражненіе 34). *(Замѣчаніе автора)*

№ 903 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC по биссекторамъ $AD=l$, $AD'=l'$ и по прямой $AS=m$, соединяющей вершину A съ точкой касанія S вписанной окружности со стороной BC.

Н. Агрономовъ (Петербургъ).

№ 904 (4 сер.). Дано, что

$$r_a(r_a-r_b)=r_c(r_a+r_b),$$

гдѣ r_a, r_b, r_c — радіусы внѣвписанныхъ круговъ треугольника ABC. Доказать, что этотъ треугольникъ прямоугольный.

Я. Шатуновскій (Страсбургъ).

№ 905 (4 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(cx^2-a)\cdot\frac{b}{x^2}=\frac{4}{27}\left(\frac{b}{x^2}-(cx^2-a)\right)^2.$$

(Заимств.).

№ 906 (4 сер.). Въ чугунной цилиндрической бомбѣ, длина внутренней стѣнки которой равна 148 сантиметрамъ, содержатся сухой кислородъ и отшлифованный кусочекъ стали; послѣдній помѣщаютъ у крайняго конца бомбы и затѣмъ даютъ ему скользить внизъ, наклоняя ось цилиндрической бомбы подъ угломъ 10^0 къ горизонту. Стукъ удара о противоположный конецъ цилиндра раздается черезъ 5,5 секундъ послѣ начала движенія. Зная вѣсъ одного кубическаго сантиметра кислорода 0,0014 граммовъ при нормальныхъ условіяхъ, плотность стали 7,7, коэффиціентъ тренія стали о чугунъ 0,166, ускореніе силы тяжести 980 сантиметровъ и температуру опыта 0^0, вычислить, пренебрегая треніемъ стали о кислородъ, давленіе газа въ бомбѣ.

Л. Ямпольскій (Одесса)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 764 (4 сер.). *Найти maximum выраженія*

$$\log_{xy}x.\log_{xy}y\left[\log_{xy}\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2.$$

Называя $\log_{xy}x$ черезъ x', $\log_{xy}y$ черезъ y', находимъ:

$$\log_{xy}x\,.\,\log_{xy}y\,.\,[\log_{xy}x-\log_{xy}y]^2=x'y'(x'-y')^2 \quad (1),$$

$$\log_{xy}x+\log_{xy}y=\log_{xy}xy=1,\ \text{т. е.}\ x'+y'=1 \quad (2).$$

Такъ какъ [см. (1), (2)]

$$x'y'(x'-y')^2=x'y'[(x'+y')^2-4x'y']=x'y'(1-4x'y')=$$

$$=4\,.\,x'y'\left(\frac{1}{4}-x'y'\right) \quad (3)$$

и такъ какъ сумма $\frac{1}{4}-x'y'+x'y'=\frac{1}{4}$ остается постоянной, то maximum разсматриваемаго выраженія наступаетъ (ср. зад. № 720 въ 411 № „Вѣстника“, рѣшеніе которой напечатано въ № 435) при $x'y' = \frac{1}{4} - x'y'$, откуда

$$x'y' = \frac{1}{8} \qquad (4).$$

Изъ равенствъ (2) и (4) видно, что x' и y' суть корни квадратнаго уравненія

$$t^2 - t + \frac{1}{8} = 0, \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \qquad (5).$$

При этихъ значеніяхъ x' и y' разсматриваемое выраженіе достигаетъ maximum'а, равнаго [см. (3), (4)]

$$4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}.$$

Итакъ, разсматриваемое выраженіе достигаетъ maximum'а [см. (5)], если

$$\log_{xy} x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \qquad \log_{xy} y = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \qquad (6)$$

или

$$\log_{xy} x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \qquad \log_{xy} y = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad (7).$$

Но второе изъ уравненій (6) [или же (7)] есть слѣдствіе [см. (2)] перваго, а потому разсматриваемое выраженіе достигаетъ maximum'а при

$\log_{xy} x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ или $\log_{xy} x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, т. е.—если удовлетворяется одно изъ равенствъ $x = (xy)^{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ или же $x = (xy)^{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$, откуда

$$xy = x^{\frac{4}{2+\sqrt{2}}}, \qquad y = x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \qquad (8)$$

или же

$$xy = x^{\frac{4}{2-\sqrt{2}}}, \qquad y = x^{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \qquad (9).$$

Наоборотъ, изъ равенствъ (8) и (9) находимъ соотвѣтственно

$$xy = x^{\frac{4}{2+\sqrt{2}}}, \quad \log_{xy} x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad \text{и} \quad xy = x^{\frac{4}{2-\sqrt{2}}}, \quad \log_{xy} x = \frac{2-\sqrt{2}}{4},$$

откуда [см. (2)] вытекаютъ равенства (6) и (7). Слѣдовательно, разсматриваемое выраженіе достигаетъ maximum'а при произвольномъ значеніи x (останавливаясь на элементарномъ опредѣленіи логариѳмической функціи, предположимъ $x > 0$) и при y, равномъ $x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ или же $x^{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$.

Г. Лебедевъ (Обоянь); *В. Булыгинъ*; *Н. С.* (Одесса).

№ 777 (4 сер.). *Опредѣлить предѣлъ суммы безконечнаго ряда*

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}+\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{8}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}}+\ldots.$$

Примѣняя формулу $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ и называя сумму n членовъ даннаго ряда черезъ S_n, получимъ:

$$S_n=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}+\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}+\ldots+\frac{\sin^2\frac{x}{2^n}}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}+\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}+\ldots+\frac{1-\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}}+\ldots+\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}+\ldots+\frac{\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x}+\ldots+\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}-1-\frac{1}{\cos x}-\ldots-\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}}-1\right)\quad(1)\text{.}$$

Называя выраженіе $\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^k}$ черезъ P_k, имѣемъ:

$$2\sin\frac{x}{2^m}\cdot P_m=\left(2\sin\frac{x}{2^m}\cdot\cos\frac{x}{2^m}\right)\cdot\cos\frac{x}{2^{m-1}}\ldots\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=$$

$$=\sin2\frac{x}{2^{m-1}}\left(\cos\frac{x}{2^{-m}}\ldots\cos\frac{x}{2}\cos x\right)=\sin\frac{x}{2^{m-1}}\cdot P_{m-1}\quad(2).$$

Полагая въ формулѣ (2) $m=n-1,\ n-2, \ldots, 3, 2$, получимъ:

$$2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot P_{n-1}=\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cdot P_{n-2}$$

$$2\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cdot P_{n-2}=\sin\frac{x}{2^{n-3}}\cdot P_{n-3} \qquad (3).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\sin\frac{x}{2^2}\cdot P_2=\sin\frac{x}{2}\cdot P_1=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{4}.$$

Перемножая равенства (3) и сокращая на $P_{n-2}\cdot P_{n-3}\ldots P_2 . \sin\frac{x}{2^{n-2}}\ldots$ $\ldots\sin\frac{x}{2^2}$, получимъ: $2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot P_{n-1}=\frac{\sin 2x}{4}$ (4), откуда

$$P_{n-1}=\cos x\cos\frac{x}{2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{\sin 2x}{2^{n-2}.\,2^2\sin\frac{x}{2^{n-1}}}=$$

$$=\frac{\sin 2x}{2.2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}=\frac{\sin 2x\,.\,\frac{x}{2^{n-}}}{2x\,.\sin\frac{x}{2^{n-1}}},$$

а потому [см. (1)]

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}-1\right].$$

При возрастанiи n до безконечности уголъ $\frac{x}{2^{n-1}}$ стремится къ нулю; слѣдовательно, по извѣстной теоремѣ, $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}=1$, откуда находимъ:

$$\lim_{n=\infty} S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\sin 2x}-1\right)=\frac{x}{\sin 2x}-\frac{1}{2} \qquad (5).$$

Итакъ, искомый предѣлъ суммы равенъ $\frac{x}{\sin 2x}-\frac{1}{2}$.

Замѣчаніе. Для ускоренія вычисленія P_{n-1} мы перемножили равенства (3) и сократили въ полученной формулѣ обѣ части на $P_{n-2}.P_{n-3}\ldots$ $\ldots P_2 . \sin\frac{x}{2^{n-2}}\ldots\sin\frac{x}{2^2}$, а затѣмъ раздѣлили обѣ части равенства. (4) на $2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cdot$ Но сокращеніе на множителя $P_{n-2}\ldots P_2 . \sin\frac{x}{2^{n-2}}\ldots$ $\ldots\sin\frac{x}{2^2}$ несущественно, такъ какъ тотъ же результатъ можно получить, подставляя послѣдовательно въ первое изъ равенствъ (3) значенія выраженій $\sin\frac{x}{2^{n-2}}.P_{n-2}$, $\sin\frac{x}{2^{n-3}}.P_{n-3},\ldots,\sin\frac{x}{2^2}.P_2$ изъ второго, третьяго и т. д. равенствъ (4). Тогда получается окончательно $2\sin\frac{x}{2^{n-1}}.P_{n-1}=\frac{x}{2^{n-3}}\cdot\frac{\sin 2x}{4}$, и для вычисленія P_{n-1} остается раздѣлить обѣ части на $2\sin\frac{x}{2^{n-1}}$, что всегда можно сдѣлать, если $\sin\frac{x}{2^{n-1}}\neq 0$. Такимъ образомъ, мы можемъ ручаться за правильность формулы (5), если ни при какомъ цѣломъ и положительномъ значеніи n не выполняется равенство $\sin\frac{x}{2^{n-1}}=0$, т. е. если x не имѣетъ ни одного изъ значеній, опредѣляемыхъ равенствомъ $\frac{x}{2^m}=k\pi$, гдѣ m—цѣлое неотрицательное число и k—любое цѣлое число (не исключая нуля). Если $k=0$, то и $x=0$. Въ этомъ случаѣ [см. (1)] S_n при любомъ n равно нулю, а потому и искомый предѣлъ есть 0; формула (5) остается вѣрной для этого случая, если вмѣсто $\frac{x}{\sin 2x}$ взять его истинное значеніе $\lim\limits_{x=0}\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x=0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\cdot$ Если же $k\neq 0$ то, называя черезъ l показатель высшей степени 2, заключающейся въ k, имѣемъ $\frac{x}{2^m}=2^l(2t+1)\pi$, гдѣ t—нѣкоторое цѣлое число. Въ этомъ случаѣ $\frac{x}{2^{m+l+1}}=(2t+1)\frac{\pi}{2}$, а потому $\cos\frac{x}{2^{m+l+1}}=0$, такъ что [см. (1)] сумма S_n при $n>m+l+1$ теряетъ смыслъ, и разсматриваемое выраженіе не имѣетъ никакого конечнаго предѣла. Правая часть формулы (5) обращается въ этомъ случаѣ тоже въ безконечность; дѣйствительно, числитель дроби $\frac{x}{\sin 2x}$ при $k\neq 0$ обращается въ число $2^m k\pi$, неравное нулю, а знаменатель $\sin 2x=\sin(2 . 2^m k\pi)$ обращается въ нуль.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса); *Н. Агрономовъ* (Ревель).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.