№ 439.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVII-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1907.

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. **Г. АБРАГАМЪ**, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Приватъ-доцента *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность – Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. **С. АРРЕНІУСЪ**, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.* Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ.* Радій и его лучи—*Дебіернъ,* Радій и радіоактивность—*Рихарцъ,* Электрическія волны—*Слаби,* Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ,* Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5. **Ф. АУЭРБАХЪ**, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи.* Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома,* Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. **С. НЬЮКОМЪ**, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ.** Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго.*

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей. Цѣна 1 р. 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. **Г. ВЕБЕРЪ** и **І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана.* Книга I, **Основанія ариѳметики,** гл. I—X. Книга II. **Алгебра,** гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ.** гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. **1 р. 50 к.**, вып. II окончаніе, ц. **2 р.**

8. **ДЖ. ПЕРРИ**, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. **Р. ДЕДЕКИНДЪ**, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

10. **К. ШЕЙДЪ**, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова.* 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. **Э. ВИХЕРТЪ**, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

XXXVII Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 439.

Задача объ измѣреніи. Принципъ Архимеда.

Прив.-доц. В. Кагана.

34 глава II тома сочиненія «Основанія геометріи».

Въ тѣсной связи съ вопросомъ о непрерывности стоитъ ученіе объ измѣреніи. Первой задачей, сюда относящейся, является измѣреніе длины прямолинейнаго отрѣзка, которое сводится къ нахожденію отношенія одного отрѣзка къ другому. Съ этой задачей мы встрѣчаемся уже при координаціи въ аффинной геометріи. Для нахожденія этого отношенія служитъ извѣстный алгориѳмъ Евклида, приводящій къ конечному числу операцій, если отношеніе выражается раціональнымъ числомъ, и къ безконечному числу операцій, если это отношеніе выражается ирраціональнымъ числомъ. Операція эта начинается съ того, что мы откладываемъ меньшій отрѣзокъ на большемъ столько разъ, сколько онъ въ послѣднемъ помѣщается. Возможность выполнить эту операцію основывается очевидно на допущеніи, что, откладывая надлежащее число разъ на большемъ отрѣзкѣ меньшій, мы сможемъ превзойти послѣдній отрѣзокъ. Иначе говоря, если

AB есть большій, а CD есть меньшій отрѣзокъ, то всегда найдется такое цѣлое число n, что $CD.n > AB$. Изъ чего это, однако, вытекаетъ? Вопросъ этотъ возникъ уже въ глубокой древности, такъ что уже Архимедъ въ сочиненіи «О сферѣ и цилиндрѣ», посвященномъ исключительно метрическимъ вопросамъ, пришелъ къ необходимости отвѣтить на этотъ вопросъ особымъ постулатомъ (см. стр. 13 и 14). Постулатъ формулированъ имъ слѣдующимъ образомъ:

«Сверхъ того, изъ двухъ неравныхъ линій, двухъ неравныхъ поверхностей или двухъ неравныхъ тѣлъ большее можетъ оказаться меньше той величины, которую мы получимъ, если повторимъ меньшее надлежащее число разъ». У Евклида, однако, такого постулата нѣтъ; вопросъ, такимъ образомъ, вовсе игнорируется. Постулируемое Архимедомъ положеніе представлялось настолько очевиднымъ, что о немъ вовсе не говорили, какъ не говорили о другихъ интуитивныхъ соображеніяхъ, которыхъ такъ много у Евклида. Дѣло, однако, оказалось гораздо менѣе яснымъ, когда рѣчь зашла о проективной координаціи, такъ сказать, о проективномъ измѣреніи. Проективная координація, какъ это подробно изложено на страницахъ 425 и 426, осуществляется путемъ повторнаго построенія четвертой гармонической точки. Мы будемъ придерживаться принятыхъ тамъ обозначеній. Относитъ ли этотъ процессъ дѣйствительно опредѣленную координату каждой точкѣ, лежащей внутри отрѣзка A_0A_∞? Чтобы это было такъ, какъ мы указывали уже на страницѣ 425, прежде всего необходимо, чтобы каждая точка B отрѣзка A_0A_∞ оказалась бы между двумя точками A_ν и $A_{\nu+1}$ изъ ряда

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots . A_\nu \ldots,$$

который мы получаемъ путемъ послѣдовательнаго гармоническаго построенія. Иначе сказать, нужно, чтобы откладывая послѣдовательно проективные отрѣзки A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ..., мы рано или поздно необходимо перешагнули черезъ каждую точку B отрѣзка A_0A_∞. Въ этомъ видѣ вопросъ уже далеко не представляется столь яснымъ, и нужно удивляться, что его обходитъ Штаудтъ. Вопросъ этотъ возбуждаетъ въ первый разъ Клейнъ въ мемуарѣ, помѣщенномъ въ VI т. Математическихъ Анналовъ, о которомъ мы уже неоднократно говорили (см. стр. 185). Клейнъ указываетъ, что здѣсь содержится постулатъ, представляющій собой примѣненіе аксіомы Архимеда къ проективной геометріи.

Въ отвѣтъ на это замѣчаніе, указывающее на пробѣлъ въ основной теоремѣ проективной геометріи, Клейнъ вскорѣ получилъ два доказательства этого положенія, данныя одно Люротомъ, другое Цейтеномъ. Сущность этого доказательства опубликована Клейномъ въ VII т. Анналовъ, въ мемуарѣ, о которомъ намъ также приходилось уже говорить (см. стр. 186). Позже такое же доказательство дано Дарбу [1]), а затѣмъ Цейтенъ опубликовалъ видоизмѣненія того-же доказательства [2]). Къ этимъ доказательствамъ мы ниже возвратимся. Нѣсколько позже Штольцъ возвращается къ вопросу о постулатѣ Архимеда въ аффинной геометріи [3]). Штольцъ показываетъ здѣсь, что на непрерывной прямой принципъ Архимеда можетъ быть выведенъ изъ постулата Дедекинда доказательствомъ отъ противнаго. Разсужденія, посредствомъ которыхъ Штольцъ воспроизводитъ доказательство, крайне элементарны. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что на непрерывной прямой AB существуетъ точка B, трансфинитная относительно отрѣзка CD, т. е. такая точка, которую мы не можемъ перешагнуть, откладывая на прямой AB отъ точки A повторно отрѣзокъ CD. Въ такомъ случаѣ раздѣлимъ всѣ точки луча AB на двѣ категоріи; именно, къ одной категоріи отнесемъ всѣ тѣ точки луча, которыя относительно отрѣзка CD удовлетворяютъ принципу Архимеда, а ко второй категоріи трансфинитныя точки. Ясно, что всѣ точки одной категоріи расположены по одну сторону точекъ другой категоріи, а потому, согласно постулату Дедекинда, существуетъ точка K, отдѣляющая точки одной категоріи отъ точекъ другой категоріи. Всѣ точки, лежащія внутри отрѣзка AK, удовлетворяютъ постулату Архимеда; по другую же сторону точки K лежатъ трансфинитныя точки. Ясно, что K также есть трансфинитная точка, иначе, отложивъ отрѣзокъ CD на продолженіи отрѣзка AK въ сторону точки K, мы получили бы по другую сторону точки K еще точки, удовлетворяющія постулату Архимеда, что, какъ мы видѣли, мѣста не имѣетъ.

---

[1]) *G. Darboux.* «Sur le théorème fondamental de la géométrie projective». Mathematische Annalen. XVII. 1882.

[2]) *H. Zeuthen.* «Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective». — «Sur le théorème fondamental de la geometrie projective». Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. T. 125. 1897. — «Sur le fondement de la géométrie projective». Comptes Rendus. T. 126. 1898.

[3]) *O. Stolz.* «Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes». Mathem. Annalen. Bd. XXII. 1883. — «Ueber das Axiom des Archimedes». Math. Annalen. Bd. XXXIX. 1891.

Отложимъ теперь отрѣзокъ CD отъ точки K до точки L внутрѣ отрѣзка AK. Въ такомъ случаѣ L удовлетворяетъ постулату Архимеда, а потому, откладывая повторно отрѣзокъ CD, мы можемъ перешагнуть за точку L. Но отложивъ тогда отрѣзокъ CD еще одинъ разъ, мы перешагнемъ также за точку K, что, какъ мы видѣли, не можетъ имѣть мѣста. Эти простыя соображенія доказываютъ, такимъ образомъ, что на непрерывной прямой положеніе, выраженное въ постулатѣ Архимеда, необходимо будетъ имѣть мѣсто. Особаго постулата тутъ не нужно.

На той же идеѣ построены доказательства Люрота, Цейтена и Дарбу въ примѣненіи къ проективной геометріи. Мы изложимъ сущность этого доказательства такимъ образомъ, чтобы была ясна его аналогія съ доказательствомъ Штольца въ аффинной геометріи.

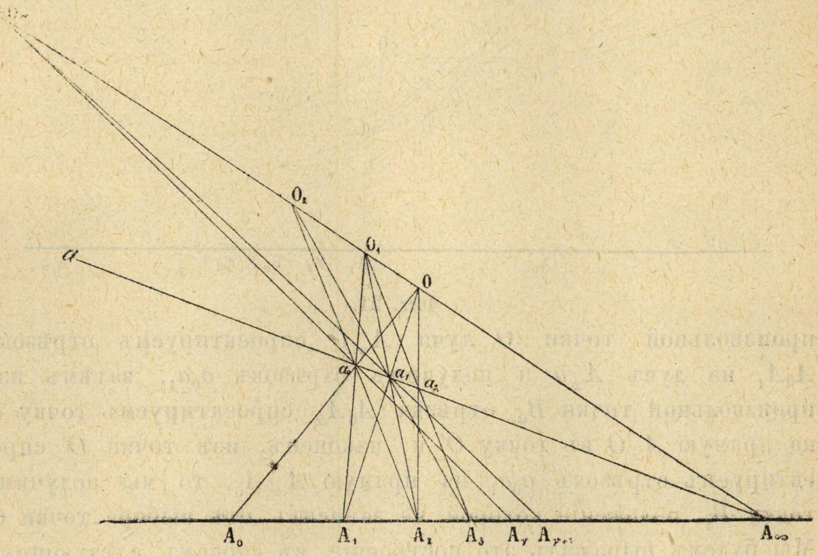
Когда мы строимъ «проективную скалу», какъ ее называетъ Клейнъ, то мы наносимъ рядъ точекъ

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots . A_\nu \ldots .$$

такимъ образомъ, что A_2 есть точка гармоническая съ A_0 относительно пары A_1, A_∞. Точка A_3 есть гармоническая съ A_1 относительно A_2, A_∞, и т. д.... Иначе говоря,

$$A_0A_1A_2A_\infty,\ A_1A_2A_3A_\infty,\ A_2A_3A_4A_\infty \ldots . A_{\nu-2}A_{\nu-1}A_\nu A_\infty \ldots$$

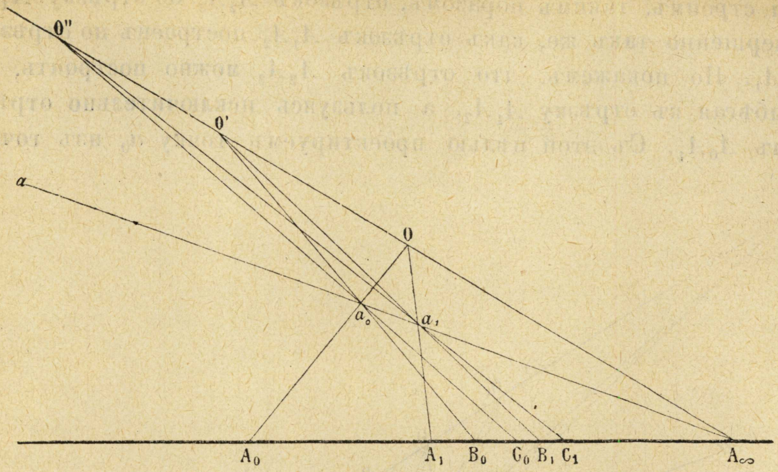
суть гармоническія системы точекъ. Клейнъ выражаетъ это такъ, что мы откладываемъ отрѣзокъ A_1A_2, «равный отрѣзку A_0A_1» въ нашей проективной скалѣ. Далѣе откладываемъ отрѣзокъ A_2A_3, проективно равный отрѣзку A_1A_2 и т. д. Самое осуществленіе этого построенія можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ (фиг. 20). Изъ точки A_∞ въ плоскости нашего построенія проводимъ два луча $A_\infty a$ и $A_\infty O$, на послѣднемъ лучѣ выбираемъ произвольно точку O, изъ которой проектируемъ отрѣзокъ A_0A_1 на лучъ $A_\infty a$; получимъ отрѣзокъ a_0a_1. Изъ точки A_1 проектируемъ точку a_0 на лучъ $A_\infty O$ въ точку O_1, и изъ точки O_1 вновь проектируемъ отрѣзокъ a_0a_1 на лучъ $A_\infty A_0$; получимъ отрѣзокъ A_1A_2. Въ полномъ четырехугольникѣ $Oa_1a_0O_1$ діагональ A_1A_∞ дѣлится двумя другими діагоналями Oa_0 и O_1a_1 гармонически въ точкахъ A_0 и A_2. Положеніе точки A_2, такимъ образомъ, не зависитъ отъ выбора точки O. Аналогично этому, для построенія точки A_3 поступаемъ слѣдующимъ образомъ: отрѣзокъ A_1A_2 проектируемъ на лучъ $A_\infty a$ изъ точки O, получаемъ отрѣзокъ a_1a_2. Проектируя его вновь изъ точки O_1 на лучъ $A_\infty A_0$, получимъ отрѣзокъ $A_2 A_3$. Мы строимъ, такимъ образомъ, отрѣзокъ $A_2 A_3$ по отрѣзку $A_1 A_2$ совершенно такъ же, какъ отрѣзокъ $A_1 A_2$ построенъ по отрѣзку $A_0 A_1$. Но покажемъ, что отрѣзокъ $A_2 A_3$ можно построить, не прибѣгая къ отрѣзку $A_1 A_2$, а пользуясь исключительно отрѣзкомъ $A_0 A_1$. Съ этой цѣлью проектируемъ точку a_0 изъ точки



Фиг. 20.

A_2 на лучъ $A_\infty O$ въ точку O_2 и, соединивъ точку O_2 съ точкой A_3, покажемъ, что прямая $O_2 A_3$ пройдетъ черезъ точку a_1. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что шестиугольникъ $A_1 O_1 A_3 O_2 A_2 O$ вписанъ въ коническое сѣченіе, образуемое двумя прямыми $A_\infty A_0$ и $A_\infty O$. Поэтому точка пересѣченія противоположныхъ сторонъ $O_2 A_3$ и OA_1 лежитъ на прямой, проходящей черезъ точки пересѣченія a_0 и a_2 остальныхъ двухъ паръ противоположныхъ сторонъ. Отсюда слѣдуетъ, что точку A_3 можно получить слѣдующимъ образомъ: изъ произвольной точки O проектируемъ отрѣзокъ $A_0 A_1$ на прямую $A_\infty a$, получаемъ отрѣзокъ $a_0 a_1$; точку a_0 проектируемъ на $A_\infty O$ изъ точки A_2, получаемъ точку O_2, изъ которой проектируемъ отрѣзокъ $a_0 a_1$ вновь на прямую $A_\infty A_0$; получаемъ отрѣзокъ $A_2 A_3$. Далѣе, всякую точку $A_{\nu+1}$ мы можемъ построить по точкѣ A_ν слѣдующимъ образомъ: проектируемъ точку a_0 изъ A_ν на лучъ $A_\infty O$, получаемъ точку O_ν, изъ которой проектируемъ отрѣзокъ $a_0 a_1$ на прямую $A_\infty A_0$, получаемъ отрѣзокъ $A_\nu A_{\nu+1}$.

Вообще можно показать слѣдующее. Если (фиг. 21) изъ



Фиг. 21.

произвольной точки O луча $A_\infty O$ спроектируемъ отрѣзокъ A_0A_1 на лучъ $A_\infty a$ и получимъ отрѣзокъ a_0a_1, затѣмъ изъ произвольной точки B_0 отрѣзка A_0A_∞ спроектируемъ точку a_0 на прямую $A_\infty O$ въ точку O' и, наконецъ, изъ точки O' спроектируемъ отрѣзокъ a_0a_1 на прямую $A_\infty A_0$, то мы получимъ точку B_1, положенiе которой не зависитъ отъ выбора точки O. Мы будемъ выражать это построенiе въ словахъ слѣдующимъ образомъ: мы отложили отъ точки B отрѣзокъ B_0B_1, *проективно равный* отрѣзку A_0A_1 относительно точки A_∞. Ясно, что мы можемъ также отложить отъ точки B_1 въ обратную сторону отрѣзокъ B_1B_0, проективно равный отрѣзку A_1A_0. Для этого нужно было бы спроектировать точку a_1 изъ B_1 въ точку O' и изъ O' проектировать точку a_0 на прямую $A_\infty A_0$ въ точку B_0. Путемъ простыхъ разсужденiй, которыхъ мы не станемъ здѣсь излагать, можно обнаружить слѣдующее: если точка C_0 лежитъ между точками B_0 и B_1, и мы отъ точки C_0 въ сторону точки A_∞ также отложимъ отрѣзокъ C_0C_1, проективно равный отрѣзку A_0A_1, то точки C_0 и C_1 раздѣлятъ пару точекъ B_0,B_1, т. е. точка C_1 будетъ расположена по другую сторону точки B_1 между точками B_1 и A_∞.

Теперь нетрудно доказать требуемое предложенiе совершенно такъ же, какъ это дѣлаетъ Штольцъ въ аффинной геометрiи. Если бы на отрѣзкѣ A_0A_∞ существовала точка H, трансфинитная относительно проективной скалы, т. е. точка, не содержащаяся между двумя точками A_ν и $A_{\nu+1}$, то, основываясь на принципѣ Дедекинда, можно доказать, что существуетъ такая точка K, которая отдѣляетъ трансфинитныя точки отъ остальныхъ. Отъ точки K отложимъ отрѣзокъ KL, проективно равный отрѣзку A_0A_1, въ сторону точки A_0. Въ такомъ случаѣ точка L лежитъ между двумя точками A_ν и $A_{\nu+1}$. Отложивъ же отъ точки $A_{\nu+1}$ еще разъ отрѣзокъ, проективно равный отрѣзку A_0A_1, мы получимъ точку $A_{\nu+2}$, расположенную уже по другую сторону точки K. Это противорѣчитъ тому, что K есть трансфинитная точка.

Итакъ, на непрерывной въ смыслѣ Дедикиндова постулата прямой трансфинитныхъ точекъ не существуетъ. Иными словами, построить непрерывное пространство, въ которомъ постулатъ Архимеда не имѣлъ бы мѣста, невозможно. Но, какъ мы знаемъ, возможно пространство не непрерывное, т. е. не удовлетворяющее постулату Дедекинда. Возникаетъ поэтому вопросъ, возможно ли вообще построить пространство, хотя бы и не непрерывное, въ которомъ принципъ Архимеда не имѣлъ бы мѣста. Это и есть вопросъ о трансфинитной геометріи или о трансфинитномъ пространствѣ. Подъ трансфинитнымъ пространствомъ разумѣютъ, слѣдовательно, такое пространство, которое отличалось бы отъ обыкновенной аффинной или проективной геометріи тѣмъ, что въ немъ не имѣетъ мѣста принципъ Архимеда.

Вопросъ о возможности трансфинитной геометріи находится въ тѣсной связи съ вопросомъ о возможности трансфинитной ариѳметики. Принципъ Архимеда мы встрѣчаемъ и въ ариѳметикѣ въ видѣ слѣдующаго предложенія: если мы имѣемъ два положительныхъ числа ω и Ω, при чемъ $\omega < \Omega$, то всегда существуетъ такое цѣлое число n, что $\omega . n > \Omega$. Возможно ли построить систему величинъ, надъ которыми можно было бы производить ариѳметическія дѣйствія по тѣмъ же формальнымъ законамъ, но которая этимъ свойствомъ бы не обладала. Если бы такая система была построена, то съ ея помощью можно было бы построить аналитическое трансфинитное пространство подобно тому, какъ мы строили аналитическія пространства средствами обычной ариѳметики.

Такая система была дѣйствительно предложена Дю-Буа Реймондомъ и затѣмъ переработана Штольцомъ[1]; обѣ системы

[1]) O. *Stolz*. «Vorlesungen über allgemeine Arithmetik». Leipzig, 1885. стр. 205—215. Подробнѣе эти идеи изложены авторомъ въ XIV томѣ журнала «Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereins in Innsbruck». Намъ однако не удалось получить этого журнала

Дю-Буа и Штольца весьма схожи между собой, обѣ имѣютъ изъяны въ томъ смыслѣ что не воспроизводятъ ариѳметики сполна. Мы изложимъ здѣсь вкратцѣ только сущность системы Штольца.

Положимъ, что мы имѣемъ рядъ функцій одного независимаго перемѣннаго x, обладающихъ слѣдующими свойствами: а) при нѣкоторомъ предѣльномъ переходѣ перемѣннаго x, напримѣръ, когда x, убывая, стремится къ a, всѣ функціи стремятся къ нулю, сохраняя при значеніяхъ x, достаточно близкихъ къ a, положительное значеніе; b) отношеніе двухъ функцій этого ряда стремится къ опредѣленному предѣлу или къ безконечности, когда x стремится къ a; c) если въ составъ комплекса входятъ функціи $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$, то въ составъ его входитъ также сумма и произведеніе этихъ функцій.

Этимъ требованіямъ удовлетворяютъ, напримѣръ, всѣ функціи, составленныя всѣми возможными способами путемъ сложенія и перемноженія функцій:

$$F_1(x) = -\frac{1}{lg(x-a)}, F_2(x) = -\frac{1}{lg F_1(x)}; F_3(x) = -\frac{1}{lg F_2(x)} \ldots\ldots$$

$$G_1(x) = e^{\frac{1}{x-a}},\ G_2(x) = e^{\frac{1}{G_1(x)}},\ G_3(x) = e^{\frac{1}{G_2(x)}} \ldots\ldots$$

Итакъ, положимъ, что мы имѣемъ такой комплексъ функцій. Съ каждой функціей $F(x)$ этого комплекса Штольцъ соединяетъ новое понятіе, которое онъ называетъ *моментомъ* функціи и обозначаетъ символомъ $UF(x)$. Совокупность моментовъ онъ претворяетъ въ ариѳметическую величину (см. гл. XVII въ I части настоящаго сочиненія) на основаніи слѣдующаго соглашенія.

Если $U(f)$ и $U(g)$ суть два момента, то мы будемъ считать $U(f) > U(g)$, $U(f) = U(g)$, $U(f) < U(g)$, смотря по тому, будетъ ли отношеніе $\frac{f(x)}{g(x)}$ стремиться къ предѣлу большему 1, равному 1 или меньшему 1, когда x стремится къ a. Легко видѣть, что всѣ постулаты сравненія (см. опр. 2 гл. XVII въ I части) удовлетворены.

Подъ суммой двухъ моментовъ $U(f) + U(g)$ условимся разумѣть моментъ $U(f+g)$. Ясно, что сумма, опредѣленная такимъ образомъ, обладаетъ формальными свойствами обыкновенной суммы, — сочетательностью и перемѣстительностью.

Подъ произведеніемъ двухъ моментовъ $U(f) \cdot U(g)$ будемъ разумѣть моментъ $U(f \cdot g)$. И тутъ, очевидно, остаются въ силѣ законы перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный.

Однако, опредѣленіе вычитанія встрѣчаетъ уже затрудненія. Замѣтимъ, что двумъ функціямъ $f(x)$ и $g(x)$ нашего комплекса не всегда отвѣчаетъ функція $f(x)-g(x)$, также принадлежащая комплексу; это обусловливается не только тѣмъ, что она не введена присвоеннымъ комплексу свойствомъ c), но также и тѣмъ, что она и не можетъ быть введена, такъ какъ мы можемъ попасть въ противорѣчіе со свойствомъ a): разность $f(x)-g(x)$ не всегда будетъ сохранять положительное значеніе, когда x достаточно близко къ a; это будетъ имѣть мѣсто только, если $U(f) > U(g)$. Если, однако, ввести въ составъ комплекса всѣ разности вида $f(x)-g(x)$, соотвѣтствующія функціямъ, для которыхъ $U(f) > U(g)$, то двумъ моментамъ $U(f)$ и $U(g)$, изъ которыхъ первый больше второго, будетъ отвѣчать разность $U(f-g)$, которая удовлетворяетъ уравненію

$$U(g)+U(x)=U(f).$$

Путемъ надлежащихъ соглашеній (введенія отрицательныхъ моментовъ подобно тому, какъ вводятся отрицательныя числа), можно было бы распространить вычитаніе и на тотъ случай, когда $U(f) \leqq U(g)$; но и въ случаѣ, когда $U(f) > U(g)$ мы встрѣчаемъ затрудненіе другого рода. Дѣло въ томъ, что вычитаніе здѣсь не однозначно. Чтобы это понять, посмотримъ, будетъ ли $U(f)+U(g)$ больше, нежели $U(f)$. Это зависитъ отъ предѣла отношенія $\frac{f+g}{f}$: если предѣлъ отношенія $\frac{g}{f}$ при $x=a$ отличенъ отъ нуля, то $U(f)+U(g) > U(f)$; если же $\lim \frac{g}{f}=0$, то $U(f)+$ $+U(g)=U(f)$. Итакъ, возможны моменты, прибавленіе которыхъ не мѣняетъ момента $U(f)$, т. е. даетъ въ суммѣ равный ему моментъ; вслѣдствіе этого разность моментовъ не однозначна.

Затрудненіе встрѣчаетъ и осуществленіе дѣленія, такъ какъ отношеніе двухъ функцій комплекса $\frac{f(x)}{g(x)}$ можетъ не стремиться къ нулю, когда x стремится къ a, и введеніе въ составъ комплекса функціи $\frac{f(x)}{g(x)}$ привело бы къ противорѣчію съ требованіемъ a).

Ариѳметика моментовъ представляетъ собой дѣйствительно трансфинитную ариѳметику: если $f(x)$ и $g(x)$ суть двѣ функціи комплекса, для которыхъ $\lim \frac{g}{f} = 0$ при $x = a$, то не существуетъ такого цѣлаго числа n, при которомъ $n.U(g) > U(f)$. Но ариѳметика эта, какъ мы видимъ, очень существенно отличается отъ обычной ариѳметики, а дальнѣйшее развитіе операцій обычной ариѳметики вызываетъ затрудненія, повидимому, непреодолимыя. Эта первая попытка построенія трансфинитной ариѳметики врядъ ли можетъ быть признана удачной, а для построенія трансфинитной геометріи она во всякомъ случаѣ непригодна. Однако, дальнѣйшіе шаги въ этомъ направленіи имѣютъ явную преемственную связь съ этой первой попыткой.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Преобразованіе элементовъ. *)

Профессора В. Оствальда.

Мы всѣ хорошо помнимъ то невѣроятное изумленіе, съ какимъ было встрѣчено открытіе образованія гелія изъ радія. Съ тѣхъ поръ этотъ фактъ былъ многократно подтвержденъ какъ авторомъ, такъ и независимо отъ него; въ настоящее время никакихъ сомнѣній на этотъ счетъ уже быть не можетъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ дальнѣйшія изслѣдованія непостоянныхъ элементовъ обнаружили, что, въ полномъ согласіи съ открытіями Рутерфорда, Содди (Rutherford, Soddy) и др., значительное число металловъ, которые на первый взглядъ обладаютъ свойствами элементарныхъ веществъ, въ дѣйствительности образуются изъ послѣднихъ. Образованіе одного элемента изъ другого, по крайней мѣрѣ, въ ограниченныхъ предѣлахъ, пришлось, такимъ образомъ, разсматривать, какъ доказанный фактъ.

Но упомянутое выдающееся открытіе Рамзая (Ramsay) объ образованіи гелія отличается отъ всѣхъ этихъ работъ тѣмъ, что здѣсь рѣчь уже шла не только объ образованіи непостоянныхъ элементовъ при самопроизвольныхъ превращеніяхъ уранія, радія, торія и т. п.; напротивъ, здѣсь рѣчь шла уже о постоянномъ

*) Chemiker-Zeitung, № 59, 24 Juli 1907.

элементѣ, такъ какъ гелій принадлежитъ къ числу самыхъ постоянныхъ веществъ, какія намъ только извѣстны.

Когда я съ годъ тому назадъ посѣтилъ Рамзая въ Лондонѣ, онъ мнѣ показалъ новый результатъ своихъ изслѣдованій, которыя онъ производитъ въ небольшой частной лабораторіи, устроенной имъ у себя на дому. Онъ просилъ, однако, никому не сообщать еще объ этомъ фактѣ, отъ котораго у правовѣрнаго химика волосы бы стали дыбомъ на головѣ: то было образованіе лития изъ мѣди. Въ часовомъ стеклышкѣ лежало нѣсколько бѣлыхъ кристалловъ; по моей просьбѣ, онъ охотно взялъ оттуда песчинку и показалъ мнѣ на раскаленной платиновой проволокѣ въ спектроскопѣ линію лития. Онъ получилъ это вещество, дѣйствуя эманаціей радія на растворъ сѣрнокислой мѣди. Послѣ удаленія мѣди изъ раствора при помощи сѣрной кислоты получился чистый фильтратъ съ осадкомъ, дававшій реакцію лития.

Когда впервые были обнаружены явленія изоморфизма, то химическій міръ нѣкоторое время не рѣшался признать того факта, что одно и то же вещество можетъ имѣть различныя формы, такъ какъ Штромейеръ (Stromeyer) обнаружилъ содержаніе стронція во всѣхъ изслѣдованныхъ имъ арагонитахъ, между тѣмъ какъ въ кальцитѣ онъ его не нашелъ; такъ и здѣсь вскорѣ очень компетентнымъ лицомъ было указано, что въ соединеніяхъ мѣди всегда содержатся слѣды лития. Это было обнаружено чрезвычайно опытнымъ и свѣдущимъ спектроскопистомъ и, такимъ образомъ, нѣкоторое время казалось, что здѣсь произошла одна изъ тѣхъ случайныхъ ошибокъ, избѣжать которыхъ иногда не удается и величайшимъ изслѣдователямъ. Къ тому же это сообщеніе объ образованіи лития изъ мѣди и безъ того не было опубликовано, такъ какъ Рамзай хотѣлъ получить обо всемъ этомъ больше экспериментальныхъ данныхъ раньше, чѣмъ сообщить научному міру.

Въ настоящее время въ этой сдержанности нѣтъ уже надобности. Нѣсколько дней тому назадъ авторъ этого замѣчательнаго открытія прислалъ мнѣ корректуру сообщенія, которое онъ имѣлъ въ виду опубликовать; сообщеніе это въ настоящее время уже появилось въ печати. Здѣсь не только подтверждаются прежніе результаты, но приодятся многіе новые, которые онъ тѣмъ временемъ получилъ.

Прежде всего укажемъ вкратцѣ самые факты; они подтверждены отличными другъ отъ друга опытами, повторенными нѣсколько разъ (большею частью, четыре раза), и сводятся къ слѣдующему. Если эманацію радія, чистую или съ примѣсью водорода, предоставить самой себѣ, то черезъ нѣкоторое время въ сосудѣ обнаруживается гелій, какъ это было извѣстно и раньше. Если же эманація находится въ соприкосновеніи съ водой, то вмѣсто гелія образуется неонъ съ весьма незначительными слѣдами гелія; повидимому, эти продукты получаются изъ газообразнаго вещества, фигурирующаго въ этомъ опытѣ. Если же въ водѣ растворить соль тяжелаго металла (опыты производились съ азотнокислымъ серебромъ и мѣднымъ купоросомъ, то образуется аргонъ.

Кромѣ газовъ, принадлежащихъ группѣ элементовъ нулевой валентности, всякій разъ образуются еще другія вещества, которыя остаются въ растворѣ и обнаруживаются окраской или осадкомъ. Болѣе тщательное изслѣдованіе этой части продуктовъ воздѣйствія эманаціи радія на соли еще не произведено и представляется особенно затруднительнымъ вслѣдствіе того, что вещества эти оказываются въ чрезвычайно ничтожныхъ количествахъ. Обнаружилось присутствіе литія, далѣе натрія и кальція; относительно послѣдняго не лишено возможности, что онъ обязанъ своимъ происхожденіемъ стеклу сосуда. По всей вѣроятности, методы микроскопическаго анализа, дающіе возможность уже распознать $^1/_{1000}$ mg., найдутъ здѣсь блестящее примѣненіе. Уже самое изолированіе названныхъ газовъ для спектроскопическаго анализа, который, какъ извѣстно, представляетъ почти единственное средство ихъ отождествленія, оказалось возможнымъ только благодаря замѣчательному искусству этого экспериментатора и тонкому знанію этихъ веществъ, какимъ только онъ, ихъ отецъ, и владѣетъ. Я имѣлъ возможность даже наблюдать спектры изготовленныхъ имъ Гейслеровыхъ трубокъ, когда намъ удалось ввести эти маленькія трубки, емкостью около 4 куб. мм., съ тонкими, какъ волосъ, электродами, въ цѣпь катушки. Чтобы извлечь слѣды газа изъ растворовъ, обработанныхъ эманаціей, безъ утраты, послѣдніе были предварительно заморожены. Такъ какъ ледъ не поглощаетъ газовъ въ замѣтной степени, то этотъ излюбленный пріемъ далъ возможность почти совершенно отдѣлить газы отъ жидкости. Чтобы на будущее время освободить жидкость отъ загрязненій, которыя растворяются изъ стекла, даже изъ наиболѣе твердыхъ его сортовъ, придется пользоваться сосудами изъ платины или кварца.

Такова экспериментальная сторона дѣла. Но въ рукахъ великаго мастера возникающая здѣсь новая проблема, если хотите, цѣлый потокъ проблемъ, въ такой мѣрѣ исчерпана, что къ этому нечего прибавить. Даже теоретическая сторона дѣла, касающаяся выдѣленія элементовъ въ смыслѣ періодической системы, имъ въ общихъ чертахъ уже намѣчена. Что лично для меня особенно цѣнно, это то, что энергетическія соображенія представляются ему простѣйшей формой, въ которую изливаются его широкіе взгляды. Но позвольте мнѣ остановиться на значеніи этихъ новыхъ фактовъ съ иной точки зрѣнія, именно съ точки зрѣнія теоріи познанія, съ точки зрѣнія образованія въ наукѣ новыхъ общихъ понятій и законовъ.

Никто, конечно, не будетъ отрицать, что мы стоимъ здѣсь передъ глубокимъ научнымъ переворотомъ въ химіи, быть можетъ, наиболѣе глубокимъ съ тѣхъ поръ, какъ была установлена кислородная теорія горѣнія. Законъ сохраненія элементовъ, который со времени тщетныхъ попытокъ алхимиковъ признавался настолько несомнѣннымъ, что учебники даже не считаютъ нужнымъ строго его выразить [1]), этотъ законъ въ настоящее время теряетъ свою „абсолютную“ силу; мы вновь стоимъ здѣсь передъ фактомъ, который на опытѣ заставляетъ насъ признать, что абсолютнаго нѣтъ ничего.

Невольно приходитъ на мысль сравнить эти результаты съ подобнымъ же переворотомъ, которому подверглось въ послѣднее время наше представленіе о матеріи: я разумѣю нашествіе электро-динамики въ механику [2]). Понятіе о массѣ, которое долгое время царило столь же абсолютно, какъ и законъ химическихъ элементовъ, также оказывается крайне условнымъ; онъ оказывается функціей скорости электроновъ, и даже законъ сохраненія количества движенія, этотъ основной столпъ классической механики, долженъ примириться съ тѣмъ, что онъ признается въ настоящее время справедливымъ только въ предѣльномъ случаѣ, при явленіяхъ, протекающихъ безъ лучеиспусканія; а такъ какъ процессовъ, не дающихъ лучеиспусканія, строго говоря, вовсе нѣтъ, то рѣчь идетъ объ идеальныхъ процессахъ, при ко-

[1]) Насколько я могу судить, я самъ былъ первымъ, который строго выразилъ этотъ законъ и указалъ его экспериментальное обоснованіе въ тщетныхъ попыткахъ алхимиковъ.

[2]) См. статью „Новѣйшія электромагнитныя теоріи и абсолютное движеніе“ въ предыдущемъ номерѣ „Вѣстника“.

торыхъ мы произвольно отвлекаемся отъ нѣкоторыхъ свойствъ явленія, въ дѣйствительности всегда имѣющихъ мѣсто.

Оба эти переворота въ нашихъ научныхъ воззрѣніяхъ связаны между собою не только случайнымъ единствомъ времени; они имѣютъ также и внутреннюю фактическую связь. Въ томъ и въ другомъ случаѣ рѣчь идетъ о фактѣ, что законъ о сохраненіи количествъ различныхъ видовъ энергіи нуждается въ дополненіи, какъ это впервые высказалъ Ле Шательэ (Le Chatelier). Повидимому, мы имѣемъ здѣсь случай, подобный закону сохраненія живой силы, который справедливъ, правда, при астрономическихъ явленіяхъ въ предѣлахъ, доступныхъ нашему измѣренію (потому что соотвѣтствуюшая потеря энергіи совершенно ничтожна), а въ процессахъ, происходящихъ у насъ на землѣ, оказывается совершенно несостоятельнымъ и долженъ быть замѣненъ болѣе общимъ закономъ сохраненія энергіи. Точно также законъ сохраненія количествъ энергіи несомнѣнно справедливъ въ общихъ и широкихъ чертахъ, но до тѣхъ поръ, пока мы не придемъ къ болѣе общему, еще неизвѣстному намъ, закону преобразованія количествъ энергіи. Соотвѣтствующая величина въ тепловыхъ явленіяхъ—энтропія, какъ извѣстно, не только не постоянна, но напротивъ, ея постоянное нарастаніе признается характернымъ признакомъ устройства извѣстнаго намъ міра. Мы знаемъ, такимъ образомъ, что здѣсь рѣчь идетъ не о непонятномъ исключеніи, а о предѣльномъ случаѣ общаго явленія. Установить законы самаго этого явленія, вѣроятно, составитъ когдал ибо, быть можетъ, даже скоро, одну изъ великихъ задачъ науки.

Точно такъ же и здѣсь, при предстоящемъ выясненіи количественныхъ отношеній, которымъ подчиняются превращенія элементовъ, нужно ожидать сначала простыхъ законовъ, которые регулируютъ эти явленія; они дадутъ намъ цѣнныя, исходныя точки и приведутъ къ тому общему третьему закону, который дастъ намъ возможность количественно себѣ уяснить, а слѣдовательно, и предсказать не только явленія равновѣсія, но и явленія превращенія.

Недавно выдающійся ученый, стоящій далеко отъ естествознанія, спросилъ меня, можетъ ли этотъ потокъ новыхъ открытій долго мчаться съ той же быстротой, какъ въ послѣднія десятилѣтія. Я долженъ былъ ему отвѣтить: не только съ такой же, но съ гораздо большей быстротой. Но существенное средство, которое человѣчество имѣетъ, чтобы не потонуть въ этомъ потокѣ, заключается въ томъ, чтобы возможно быстро и энергично выдѣлить то, что есть общаго во всѣхъ этихъ отдѣльныхъ явленіяхъ. Въ этомъ заключается глубокое практическое значеніе современной натурфилософіи.

Эманація радія.

Письмо въ редакцію журнала „Nature“.

Въ 1903 г. было показано г. Soddy и мною, что произвольное измѣненіе эманаціи радія приводитъ къ образованію гелія; это наблюденіе было подтверждено Jndrikson'омъ, Debierne'омъ, Giesel'емъ, Curie и Dewar'омъ, Himstedt'омъ и G. Meyer'омъ. Debierne показалъ, что хлористый и фтористый актиній также образуютъ гелій. Я также открылъ гелій въ газахъ, непрерывно выдѣляемыхъ растворомъ азотнокислаго торія, и надѣюсь вскорѣ подтвердить это наблюденіе.

Когда эманація находится въ соприкосновеніи съ водой и растворяется въ ней, инертный газъ, который образуется при ея измѣненіи, состоитъ главнымъ образомъ, изъ неона; только слѣды гелія могутъ быть обнаружены.

Если вмѣсто воды взять насыщенный растворъ мѣднаго купороса, то гелій не образуется; главнымъ продуктомъ является аргонъ, содержащій, возможно, слѣды неона, такъ какъ появляются нѣкоторыя изъ болѣе яркихъ его линій. Остатокъ, послѣ удаленія изъ раствора мѣди, даетъ спектры натрія и кальція; красная линія также наблюдалась, но очень слабо. Послѣднее наблюденіе было сдѣлано четыре раза,—въ двухъ случаяхъ съ растворами мѣднаго купороса и въ двухъ съ растворами азотнокислой мѣди; всѣ возможныя предосторожности были приняты; подобные остатки отъ азотнокислаго свинца и отъ воды не дали указаній на присутствіе литія; литій не былъ также обнаруженъ въ растворѣ азотнокислой мѣди, обработанномъ во всѣхъ отношеніяхъ подобнымъ образомъ, за исключеніемъ лишь дѣйствія эманаціи.

Эти замѣчательные результаты приводятъ къ слѣдующей мысли. Возможно, что эманація радія въ своемъ недѣятельномъ состояніи принадлежитъ къ группѣ элементовъ гелія. Во время своего произвольнаго измѣненія она освобождаетъ сравнительно громадное количество энергіи. Направленіе, которое принимаетъ эта энергія, мѣняется въ зависимости отъ обстоятельствъ. Если эманація одна или въ смѣси съ водородомъ и кислородомъ, то часть ея „разлагается“ или „дезинтегрируется“ при помощи энергіи, отдаваемой другой ея частью. Въ этомъ случаѣ образуется гелій. Если же распредѣленіе энергіи измѣнено присутствіемъ воды, то часть эманаціи, которая „разлагается“, даетъ неонъ; въ присутствіи мѣднаго купороса она даетъ аргонъ. Подобнымъ же образомъ мѣдь подъ дѣйствіемъ эманаціи испытываетъ „деградацію" до перваго члена своей группы—литія; невозможно утвержать, что образуются также натрій или калій на томъ только основаніи, что они содержатся въ растворѣ; но по аналогіи съ „продуктами разложенія" эманаціи они также могутъ явиться результатомъ „деградаціи" мѣди.

Полное изложеніе настоящаге изслѣдованія будетъ вскорѣ сообщено Chemical Society.

11 іюля. *William Ramsay.*

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Вновь найденное произведеніе Архимеда.

Математическій міръ обогатился драгоцѣнной находкой. Прошлымъ лѣтомъ I. L. Heiberg, профессоръ филологіи Копенгагенскаго университета, извѣстный своими работами въ области исторіи древнегреческой математики [1]), предпринялъ изслѣдованіе рукописи, принадлежащей Церкви Гроба Господня въ Іерусалимѣ и содержащей подъ богословскимъ текстомъ XIII столѣтія математическій текстъ, съ пергамента только смытый, а не соскобленный и, благодаря этому, поддающійся чтенію посредствомъ лупы. Этотъ текстъ оказался произведеніемъ Архимеда Сиракузскаго и изложенъ, какъ и большинство такого рода произведеній древности, въ формѣ письма. Оно называется: „'Αρχιμήδους περὶ των μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς 'Ερατοσθένην ἔφοδος" и содержитъ нѣсколько теоремъ о центрахъ тяжести и рядъ теоремъ о соотношеніяхъ между объемами нѣкоторыхъ фигуръ съ ихъ доказательствами. Архимедъ даетъ для этихъ доказательствъ общій методъ и указываетъ на него, какъ на единственный, дающій точное доказательство этихъ теоремъ.

Геній Архимеда предвидѣлъ, такимъ образомъ, справедливость теоремы, доказательство которой принадлежитъ, какъ извѣстно, послѣднему времени. М. Денъ (Dehn) изъ Геттингена, а затѣмъ Каганъ доказали, что теоремы объ объемахъ фигуръ, включая относящіяся сюда теоремы элементарной геометріи, не могутъ быть доказаны безъ примѣненія метода исчерпыванія Архимеда (Exhaustionsmethode), состоящаго въ томъ, что мы разбиваемъ данную фигуру помощью параллельныхъ линій или плоскостей на элементы и значеніе той или иной величины, принадлежащее этой фигурѣ (напр. объемъ, тяжесть), разсматриваемъ, какъ сумму значеній отдѣльныхъ элементовъ, въ свою очередь

---

[1]) Johann Ludwig Heiberg. „Questions Archimedeae". „Philologische Studien zu griechischen Mathematikum". „Mathematisches zu Aristoteles". „Abhandlungen z. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften". Подъ редакціей Гейберга выпущены также изданія классиковъ—Евклида, Архимеда и др.

разсматриваемыхъ въ процессѣ безконечнаго возрастанія числа этихъ элементовъ и безконечнаго убыванія величины каждаго изъ нихъ. Это основной методъ интегральнаго исчисленія, и Архимедъ извѣстенъ, какъ родоначальникъ его. Во вновь открытомъ произведеніи Архимедъ пользуется имъ съ такимъ совершенствомъ, что вполнѣ можетъ быть названъ первымъ творцомъ современнаго интегральнаго исчисленія, уже въ глубокой древности знавшимъ значеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Это произведеніе Архимеда теперь окончательно съ очень небольшими изъянами разобрано и переведено на нѣмецкій языкъ подъ названіемъ: „Eine neue Schrift des Archimedes“. Работу эту Гейбергъ выполнилъ вмѣстѣ съ Цейтеномъ (H. G. Zeuthen), профессоромъ математики въ томъ же Копенгагенскомъ университетѣ, также спеціалистомъ въ этой области [2]).

Этотъ переводъ съ математическими комментаріями Zeuthen'а помѣщенъ въ „Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften“. 3 Folge, 7 Band, 4 Heft 1907. Греческій оригиналъ съ филологическими комментаріями Гейберга теперь печатается и выйдетъ въ ближайшей книжкѣ филологическаго журнала „Hermes“. Сравнительно небольшіе размѣры этого произведенія и его глубокій научный и историческій интересъ даютъ намъ возможность помѣстить его переводъ на русскій языкъ въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ „Вѣстника“.

Я. Ш.

Объ электропроводимости селена. М. Костъ. Свойство селена измѣнять свою электропроводимость подъ дѣйствіемъ свѣта давно извѣстно. Изслѣдованіе Коста даетъ теперь болѣе детальное освѣщеніе этого явленія, а также касается примѣненія электропроводимости селена въ зависимости отъ температуры. Селеновая пластинка, обладавшая первоначальнымъ сопротивленіемъ 75000 омъ, подверглась освѣщенію лампочкой накаливанія силой 10,4 свѣчи, на разстояніи 1 метра, въ продолженіе 5 секундъ; сопротивленіе это немедленно послѣ того, какъ освѣщеніе было прекращено, упало до 425000 омъ, послѣ 10 секундъ было 565000 омъ, послѣ 30 с.—620000, послѣ 9 минутъ – 690000; первоначальное же сопротивленіе было вновь достигнуто лишь по истеченіи 20 минутъ. Экспозиція селена тому же источнику свѣта въ теченіе 1 минуты уменьшила сопротивленіе на половину, для возвращенія же первоначальнаго сопротивленія потребовалось 3 час. 30 минутъ. Дальнѣйшая экспозиція уменьшаетъ сопротивленіе очень слабо. Такимъ образомъ свѣтъ дѣйствуетъ на селенъ сравнительно быстро; возвращеніе же къ первоначальному состоянію совершается гораздо медленнѣе. Подобнымъ же обра-

---

[2]) Hieronymus Georg Zeuthen извѣстенъ своими трудами: „Die Lehre v. d. Kegelschitten in Altertum“. „Geschichte der Mathematik in Altertum und Mitelalter“ и другими.

зомъ дѣйствуетъ и повышеніе температуры. Электропроводимость селена возрастаетъ съ нагрѣваніемъ до температуры 174⁰; при охлажденіи первоначальная электропроводимость возстанавливается очень медленно; такъ, селенъ, нагрѣтый до 132⁰ и охлажденный затѣмъ до 71⁰, пріобрѣлъ соотвѣтствующую этой температурѣ проводимость лишь по истеченіи 14 часовъ. При нагрѣваніи выше 174⁰ электропроводимость селена опять уменьшается, при чемъ это уменьшеніе идетъ сперва быстро, а затѣмъ все медленнѣе; такъ, послѣ 200⁰ состояніе равновѣсія не было еще достигнуто по истеченіи 32 часовъ. Быстрымъ охлажденіемъ сплавленнаго селена можно предотвратить обратное превращеніе и получить его въ аморфномъ, стекловидномъ состояніи. Селенъ, подвергавшійся нагрѣванію и еще не вернувшійся къ своему первоначальному состоянію, т. е. сохраняющій еще „остаточную проводимость", оказывается нечувствительнымъ къ дѣйствію свѣта. Образчикъ селена, обладавшій очень большимъ сопротивленіемъ и терявшій 70% сопротивленія подъ дѣйствіемъ лампочки въ 37,5 свѣчей на разстояніи 1,25 метра, терялъ свою свѣточувствительность при нагрѣваніи до 100⁰.

(„Электричество").

Новый родъ катодныхъ лучей. П. Вилларъ. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Дж. Томсонъ замѣтилъ, что послѣ отклоненія магнитомъ пучка катодныхъ лучей въ Круксовой трубкѣ на мѣстѣ этого пучка еще остаются неотклоненные лучи, довольно мало замѣтные, исходящіе изъ тѣхъ же точекъ катода, что и обыкновенные катодные лучи, но не возбуждающіе флуоресценціи стекла. Эти остающіеся лучи окрашены всегда въ розовый цвѣтъ, даже въ томъ случаѣ, если эвакуированная трубка заключала въ себѣ кислородъ, въ которомъ обыкновенные катодные лучи имѣютъ желтый цвѣтъ; спектръ ихъ всегда совпадаетъ со спектромъ водорода. Изъ этого слѣдуетъ заключить, что частички, составляющія эти остаточные лучи, способны возбуждать свѣченіе лишь атомовъ водорода, но не кислорода. Дѣйствительно, эти лучи становятся гораздо болѣе яркими, если въ эвакуированную трубку впускается немного водорода или водяного пара.

Падая на стекло, новые лучи вызываютъ на немъ очень слабое желтое пятно, подобное тому, какое вызывается закатодными лучами (Kanalstrahlen) Гольдштейна; такъ какъ послѣдніе также окрашены въ розовый цвѣтъ, то Вилларъ предположилъ, что новые лучи несутъ на себѣ, подобно закатоднымъ, положительный зарядъ. Опыты съ отклоненіемъ въ магнитномъ и электрическомъ полѣ вполнѣ подтверждаютъ это предположеніе; отклоненіе всегда происходитъ въ сторону, соотвѣтствующую положительному заряду, а по своей величинѣ относится къ тому же порядку, что и отклоненіе закатодныхъ лучей. Происхожденіе этихъ лучей Вилларъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ. Изъ темнаго пространства Круксовой трубки устремляются къ катоду съ большой скоростью положительные іоны, вызывающіе своими ударами о катодъ испусканіе отрицательныхъ катодныхъ лучей. Если въ катодѣ имѣются отверстія, то часть положительныхъ іоновъ проходитъ чрезъ нихъ и образуетъ закатодные лучи. Если же катодъ сплошной, то часть іоновъ отражается и образуетъ открытые Томсономъ лучи. То обстоятельство, что эти отраженные положительные іоны проникаютъ за предѣлы темнаго пространства, т. е. отлетаютъ дальше тѣхъ точекъ, откуда они были выпущены, можно, по мнѣнію Виллара, объяснить прерывистымъ характеромъ катоднаго лучеиспусканія, т. е. измѣнчивостью потенціала катода.

(„Электричество“).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 871 (4 сер.). Сколько членовъ въ суммѣ

$$a+b+c+\ .\ .\ .\ +v+u,$$

если извѣстно, что ея кубъ содержитъ послѣ приведенія въ $4\frac{2}{3}$ раза болѣе членовъ, чѣмъ ея квадратъ? *)

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 872 (4 сер.) Какимъ образомъ изъ деревяннаго куба, ребро котораго равно a, слѣдуетъ выточить цилиндръ, ось котораго совпадаетъ съ діагональю куба, при условіи, чтобы объемъ цилиндра достигалъ maximum'а?

Л. Ямпольскій (Одесса).

№ 873 (4 сер.). Построить прямую такъ, чтобы она была наклонена подъ даннымъ угломъ α къ данной прямой L и чтобы сумма ея разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ A и B была равна данному отрѣзку m. Сколько рѣшеній имѣетъ вообще задача? При какихъ условіяхъ она можетъ имѣть безконечное число рѣшеній?

И. Коровинъ (Петербургъ).

№ 874 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(\frac{N}{d^2}\right)^{2N-1}-1$$

дѣлится на $4N-1$, если d^2 есть дѣлитель N и если $4N-1$ простое число.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

---

*) Предположено, что слагаемыя a, b, c, . . . разсматриваются, какъ различные одночлены, напр. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

№ 875 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^5-(3-x)^5=243.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 876 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3=7x+3y,\quad y^3=7y+3x.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 737 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\frac{x(x+z)+y(x-z)}{(x+z)(x+y)}=\frac{a}{y+z},$$

$$\frac{y(y+x)+z(y-x)}{(y+x)(y+z)}=\frac{b}{z+x},$$

$$\frac{z(z+y)+x(z-y)}{(z+y)(z+x)}=\frac{c}{x+y}.$$

Полагая $y+z=u$, $z+x=v$, $x+y=t$, получаемъ отсюда:

$$x=\frac{v+t-u}{2},\quad y=\frac{t+u-v}{2},\quad z=\frac{u+v-t}{2}\qquad(1).$$

Подставляя значенія x, y, z изъ равенствъ (1) въ данную систему, приводимъ ее къ виду:

$$\frac{v^2+t^2-u^2}{2vt}=\frac{a}{u}\quad(2),\qquad \frac{t^2+u^2-v^2}{2tu}=\frac{b}{v}\quad(3),\qquad \frac{u^2+v^2-t^2}{2uv}=\frac{c}{t}\quad(4).$$

Помножая равенства (2) и (3) соотвѣтственно на v и u и затѣмъ складывая, равенства (3) и (4)—соотвѣтственно на t и v и затѣмъ складывая, равенства (4) и (2)—на u и t и тоже складывая, получимъ:

$$t=a\frac{v}{u}+b\frac{u}{v},\qquad u=b\frac{t}{v}+c\frac{v}{t},\qquad v=c\frac{u}{t}+a\frac{t}{u}\qquad(5).$$

Освободивъ систему (5) отъ знаменателей, находимъ:

$$uvt=av^2+bu^2\ (6),\quad uvt=bt^2+cv^2\ (7),\quad uvt=cu^2+at^2\ (8).$$

Помножая равенства (6), (7), (8) соотвѣтственно на $b-a$, a, $-b$ и складывая ихъ, имѣемъ:

$$a(b-a)v^2+b(b-a)u^2+acv^2-bcu^2=0,\ \text{или}\ a(b+c-a)v^2-b(a+c-b)u^2=0\quad(9),$$

откуда

$$\frac{u}{v}=\sqrt{\frac{a(b+c-a)}{b(a+c-b)}}\qquad(10).$$

Слѣдовательно, [см. первое уравненіе системы (5) и (10)]

$$t=\frac{a}{\sqrt{\frac{a(b+c-a)}{b(a+c-b)}}}+b\sqrt{\frac{a(b+c-a)}{b(a+c-b)}}=$$

$$=\frac{a+\frac{a(b+c-a)}{a+c-b}}{\sqrt{\frac{a(b+c-a)}{b(a+c-b)}}}=\frac{2abc}{\sqrt{ab(b+c-a)(a+c-b)}} \quad (11).$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$u=\frac{2abc}{\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}}, \quad v=\frac{2abc}{\sqrt{ac(b+c-a)(a+b-c)}} \quad (12).$$

Подставивъ найденныя значенія u, v, t [(см. (12), (11)] въ равенства (1) получимъ значенія x, y, z. Что касается выбора знаковъ при радикалахъ, то для рѣшенія этого вопроса подставляемъ значенія u, v, t изъ формулъ (12), (11) въ уравненія (6), (7), (8); тогда каждое изъ нихъ обращается въ тожество

$$\frac{8a^3b^3c^3}{\sqrt{ab(b+c-a)(a+c-b)}\cdot\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}\cdot\sqrt{ac(b+c-a)(a+b-c)}}=$$

$$=\frac{8a^2b^2c^2}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

или

$$\sqrt{ab(b+c-a)(a+c-b)}\cdot\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}\cdot\sqrt{ac(b+c-a)(a+b-c)}=$$

$$=(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)abc \quad (13),$$

откуда видно, что въ формулахъ (11), (12) при двухъ радикалахъ можно выбрать знакъ произвольно, а знакъ третьяго радикала опредѣляется равенствомъ (13); такимъ образомъ, формулы (11) и (12) даютъ вообще четыре системы рѣшеній для u, v, t, а потому и для x, y, z. Замѣтимъ еще, что мы при рѣшеніи полагали $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, $a+b-c\neq0$, $a+c-b\neq0$, $b+c-a\neq0$, $u\neq0$, $v\neq0$, $t\neq0$ (такъ какъ $y+z$, $z+x$, $x+y$ являются знаменателями въ данной системѣ); въ противномъ случаѣ необходимо особое изслѣдованіе. Такъ, при $a=0$ и $b(a+c-b)=b(c-b)\neq0$ [см. (9)] имѣемъ $u=0$, что указываетъ на невозможность рѣшенія данной системы (можно было бы *условиться* рѣшать систему по освобожденіи отъ знаменателей; тогда получилась бы новая система рѣшеній при $a=0$, полагая $u=y+z=0$). Если же $a=0$ и $b(a+c-b)=0$, то или $a=b=0$, или $a=0$, $b=c\neq0$. Въ первомъ случаѣ равенство (6) даетъ $uvt=0$, что указываетъ опять на невозможность рѣшенія; во второмъ случаѣ уравненія (6), (7), (8) даютъ неопредѣленную систему $uvt=bu^2$, $uvt=bt^2+cv^2$, которую можно рѣшить, давая t произвольное, но отличное отъ нуля значеніе. Подобнымъ же образомъ изслѣдуются прочіе особые случаи.

Г. Оганянцъ (Ялта); *В. Булыгинъ.*

№ 738 (4 сер.). *Доказать, что*

$$\frac{d_a^2}{m_a n_a}+\frac{d_b^2}{m_b n_b}+\frac{d_c^2}{m_c n_c}=4,$$

гдѣ d_a, d_b, d_c *суть хорды, по которымъ окружность, вписанная въ остроугольный треугольникъ* ABC, *пересѣкаетъ соотвѣтственно его высоты* h_a, h_b, h_c, *а* m_a, n_a, m_b, n_b, m_c, n_c *суть соотвѣтственно отрѣзки сторонъ* a, b, c, *опредѣляемые высотами треугольника.*

Пусть AD—высота треугольника, $CD=m_a$, $DB=n_a$ — отрѣзки стороны

$BC=a$, K—точка касанія стороны BC къ вписанному кругу, $EF=d_a$— хорда, по которой вписанный кругъ пересѣкается съ высотой AD, OM—перпендикуляръ, опущенный изъ центра O этого круга на AD. Тогда

$$\overline{ME}^2=\left(\frac{d_a}{2}\right)^2=\overline{OE}^2-\overline{OM}^2=\overline{OE}^2-\overline{KD}^2=\overline{OE}^2-(\overline{CK}-\overline{CD})^2 \quad (1).$$

Кромѣ того (треугольникъ ABC, по предположенію, остроугольный)

$$c^2=a^2+b^2-2a.m_a, \qquad b^2=a^2+c^2-2a.n_a,$$

откуда

$$CD=m_a=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \quad (2), \qquad n_a=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \quad (3).$$

Называя черезъ p полупериметръ треугольника и замѣчая, что $CK=p-c$, находимъ [см. (2)]:

$$\overline{CK}-\overline{CD}=p-c-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\frac{a+b-c}{2}-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\frac{a^2+ab-ac-a^2-b^2+c^2}{2a}=$$

$$=\frac{(c-b)(b+c-a)}{2a}=\frac{(c-b)(p-a)}{a} \quad (4).$$

Называя черезъ r радіусъ круга вписаннаго и черезъ s площадь треугольника и замѣчая, что $\overline{ME}=\frac{d_a}{2}$, $\overline{OE}=r$, мы можемъ написать равенство (1) въ видѣ [см. (4)]:

$$\frac{d_a^2}{4}=r^2-\frac{(b-c)^2(p-a)^2}{a^2}=\frac{s^2}{p^2}-\frac{(b-c)^2(p-a)^2}{a^2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}-$$

$$-\frac{(b-c)^2(p-a)^2}{a^2}=\frac{(p-a)[a^2(p-b)(p-c)-p(p-a)(b-c)^2]}{a^2p}=$$

$$=\frac{(p-a)[a^2(a+c-b)(a+b-c)-(a+b+c)(b+c-a)(b-c)^2]}{4a^2p}=$$

$$=\frac{(p-a)\{a^2[a^2-(b-c)^2]-[(b+c)^2-a^2](b-c)^2\}}{4a^2p}=\frac{(p-a)[a^4-(b^2-c^2)^2]}{p\cdot 4a^2}=$$

$$=\frac{p-a}{p}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

откуда, [см. (2), (3)]

$$\frac{d_a^2}{4}=\frac{p-a}{p}\cdot m_a\cdot n_a.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{d_a^2}{m_a n_a}=\frac{4(p-a)}{p}.$$

Точно такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d_b^2}{m_b n_b}=\frac{4(p-b)}{p}, \qquad \frac{d_c^2}{m_c n_c}=\frac{4(p-c)}{p},$$

а потому

$$\frac{d_a^2}{m_a n_a}+\frac{d_b^2}{m_b n_b}+\frac{d_c^2}{m_c n_c}=\frac{4(p-a+p-b+p-c)}{p}=\frac{4(3p-2p)}{p}=4.$$

Оганянцъ (Ялта); *Н. С.* (Одесса).

№ 740 (4 сер.). *Доказать, что разность*

$$N^{Nk^{k-1}}-1$$

дѣлится на Nk^k+1, *если* Nk^k+1 *число простое.*

Если N или k равно нулю, то число Nk^k+1 либо обращается въ 1 (1 обыкновенно не причисляется къ числу простыхъ чиселъ) или въ выраженіе неопредѣленное, а потому эти случаи не соотвѣтствуютъ тексту теоремы. Если $N=1$, а $k>0$, теорема вѣрна, такъ какъ въ этомъ случаѣ разность $N^{Nk^{k-1}}-1$ обращается въ нуль. Остается разсмотрѣть случай, когда $N>1$, а $k\geqslant 1$. Въ этомъ случаѣ число Nk^k должно быть четнымъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ Nk^k+1, будучи четнымъ и болѣе 2, не было бы простымъ числомъ. Число Nk^{k-1} должно быть поэтому также четнымъ; дѣйствительно, если k четно, то $k\geqslant 2$, а потому число k^{k-1}, а вмѣстѣ съ нимъ и Nk^{k-1} четно; если же k нечетно, то N четно, такъ какъ Nk^k четно, а потому четно и Nk^{k-1}. Разсмотримъ выраженіе

$$k^{Nk^k}.\left(N^{Nk^{k-1}}-1\right)=k^{Nk^k}.N^{Nk^{k-1}}-k^{Nk^k}=$$

$$=\left(k^k\right)^{Nk^{k-1}}.N^{Nk^{k-1}}-k^{Nk^k}=\left(Nk^k\right)^{Nk^{k-1}}-k^{Nk^k}=$$

$$=\left[\left(Nk^k\right)^{Nk^{k-1}}-1\right]-\left(k^{Nk^k}-1\right).$$

Такъ какъ Nk^{k-1} четно, то $\left(Nk^k\right)^{Nk^{k-1}}-1$ кратно Nk^k+1, а по теоремѣ Fermat'a (k—взаимно простое съ простымъ числомъ Nk^k+1) разность $k^{Nk^k}-1$ тоже кратна Nk^k+1. Слѣдовательно, произведеніе $k^{Nk^k}\left(N^{Nk^{k-1}}-1\right)$ тоже кратно Nk^k+1, а такъ какъ k взаимно простое съ Nk^k+1, то и число $N^{Nk^{k-1}}-1$ тоже кратно Nk^k+1.

В. Булыгинъ; А. Турчаниновъ (Одесса).

№ 743 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$y+2x+z=a(y+x)(z+x),$$

$$z+2y+x=b(z+y)(x+y),$$

$$x+2z+y=c(y+z)(x+z).$$

Представивъ данную систему въ видѣ

$$(y+x)+(x+z)=a(y+x)(z+x),\quad (z+y)+(y+x)=b(z+y)(y+x),$$

$$(x+z)+(z+y)=c(y+z)(x+z)\quad (1),$$

и раздѣливъ эти три уравненія соотвѣтственно на $(y+x)(z+x)$, $(z+y)(y+x)$, $(y+z)(x+z)$, получимъ:

$$\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}=a\quad (2),\qquad \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}=b\ (3),\qquad \frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=c\quad (4).$$

Сложивъ уравненія (2), (3), (4) и раздѣливъ обѣ части на 2, находимъ:

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{a+b+c}{2} \quad (5).$$

Вычитая изъ уравненія (5) послѣдовательно равенства (2), (3), (4), получимъ:

$$\frac{1}{y+z}=\frac{b+c-a}{2}, \quad \frac{1}{z+x}=\frac{c+a-b}{2}, \quad \frac{1}{x+y}=\frac{a+b-c}{2} \quad (6),$$

откуда

$$y+z=\frac{2}{b+c-a}, \quad z+x=\frac{2}{c+a-b}, \quad x+y=\frac{2}{a+b-c} \quad (7).$$

Рѣшая систему (7) обычнымъ путемъ, находимъ:

$$x=\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}-\frac{1}{b+c-a}, \; y=\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{c+a-b},$$

$$z=\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{b+c-a}-\frac{1}{a+b-c}. \quad (8).$$

Однако, рѣшенія (8) мы получили, переходя отъ системы (1) къ равенствамъ (2), (3), (4) и отъ системы (6) къ системѣ (7), что возможно лишь въ томъ предположеніи, что $x+y\neq 0$, $y+z\neq 0$, $z+x\neq 0$ и $a+b-c\neq 0$, $b+c-a\neq 0$, $a+c-b\neq 0$. Поэтому надо узнать, не допускаетъ ли система (1) новыхъ рѣшеній при одномъ изъ предположеній $x+y=0$, $y+z=0$, $z+x=0$, $a+b-c=0$, $b+c-a=0$, $a+c-b=0$. Первыя два изъ уравненій системы (1) даютъ, что при $x+y=0$ имѣемъ также $y+z=0$, $z+x=0$, откуда

$$x=y=z=0 \quad (9).$$

Предположенія $y+z=0$ или $z+x=0$ приводятъ также къ единственно возможному рѣшенію (9). Если $a+b-c=0$, то, умножая уравненія системы (1) соотвѣтственно на $y+z$, $z+x$, $-(x+y)$ и складывая, получимъ послѣ приведенія въ лѣвой части $2(y+z)(z+x)=(a+b-c)(x+y)(y+z)(z+x)=0$, т. е. или $y+z=0$ или $z+x=0$, откуда вытекаетъ, какъ мы уже знаемъ, рѣшеніе (9). Къ тому же рѣшенію приводитъ также каждое изъ предположеній $a+c-b=0$, $b+c-a=0$. Замѣчая, что рѣшеніе (9) всегда удовлетворяетъ предложенной системѣ, приходимъ къ слѣдующему результату: если ни одно изъ количествъ $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ не равно нулю, то система (1) допускаетъ рѣшенія (8) и (9); если же одно изъ этихъ трехъ количествъ равно 0, то система (1) допускаетъ лишь рѣшеніе (9).

Г. Оганянцъ (Ялта); *В. Булыгинъ*; *И. Коровинъ* (Екатеринбургъ); *Г. Лебедевъ* (Обоянь).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

ГОДЪ XII.

ГОДЪ XII.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1907 г.

на ежемѣсячный научно-популярный и педагогическій журналъ

„ЕСТЕСТВОЗНАНІЕ и ГЕОГРАФІЯ“.

Выходитъ ежемѣсячно, за исключеніемъ двухъ лѣтнихъ мѣсяцевъ (іюня—іюля), книжками въ 5—6 печатныхъ листовъ.

Журналъ **ОДОБРЕНЪ Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія** для фундаментальныхъ библіотекъ всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній и для учительскихъ библіотекъ учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; **Ученымъ Комитетомъ Министерства Земледѣлія и Государственныхъ имуществъ ОДОБРЕНЪ** за всѣ годы существованія и допущенъ на будущее время въ библіотеки подвѣдомственныхъ Министерству учебныхъ заведеній.

Журналъ ставитъ себѣ задачей удовлетворять научному интересу читателей въ области естествознанія и географіи, а также способствовать правильной постановкѣ и разработкѣ вопросовъ по преподаванію естествознанія и географіи. Въ журналѣ имѣются отдѣлы: 1) научно-популярныя статьи по всѣмъ отраслямъ естествознанія и географіи, статьи по вопросамъ преподаванія естествознанія теоретическаго и прикладного (садоводство, пчеловодство и т. под.) и географіи; 2) акваріумъ и терраріумъ; 3) библіографія (обзоръ русской и иностранной литературы по естествознанію и географіи); 4 хроника; 5) смѣсь; 6) вопросы и отвѣты по предметамъ программы.

Весьма желательно установленіе живой связи между лицами стоящими у дѣла преподаванія, и журналъ ставитъ себѣ цѣлью содѣйствовать этому. Редакція проситъ лицъ, завѣдующихъ учебными заведеніями, земскія управы и училищные совѣты **высылать** въ редакцію отчеты по училищному дѣлу.

Въ журналѣ были помѣщены статьи: И. Я Акинфіева, А. П. Артари, проф. П. И. Бахметьева, Л. И. Бородовскаго, проф. А. Ѳ. Брандта, В. В. Богданова, П. Вольногорскаго, Н. Н. Вакуловскаго, проф. С. П. Глазенапа, М. И. Голенкина, проф. А. С. Догеля, М. И. Демкова, Л. Н. Елагина, Е. В. Жадовскаго, Б. М. Житкова, В. Р. Заленскаго, проф. Н. Ю. Зографа, Н. Ѳ. Золотницкаго, проф. Н. Ѳ. Кащенко, проф. Н. И. Кузнецова, проф. И. А. Каблукова, проф. Н. М. Кулагина, проф. Г. А. Кожевникова, проф. А. Н. Краснова, М. Э. Мендельсона, С. П. Меча, Г. А. Надсона, А. М. Никольскаго, К. Д. Носилова, проф. А. П. Павлова, А. Н. Рождественскаго, проф. В. В. Сапожникова, К. А. Сатунина, К. К. Сентъ-Илера, М. М. Сіязова, В. И. Таліева, проф. К. А. Тимирязева, проф. А. А. Тихомирова, П. Р. Фрейберга, проф Н. А. Холодковскаго, проф. В. М. Шимкевича, П. Ю. Шмидта, Э. В. Эриксона и нѣкоторыхъ друг.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: на годъ съ доставкою и пересылкою **4 р. 50 коп.**, безъ доставки **4 руб.**; на полгода съ пересылкою и доставкою **2 р. 50 коп.**; за границу **7 руб.** За ту же цѣну можно получать журналъ за 1903, 1904, 1905 г.г.; за остальные годы (1896—1902), по **3 р. 50 к.** за каждый годъ съ перес. Выписывающіе всю серію за 10 лѣтъ платятъ **35 р.** съ перес. Книжки журнала въ отдѣльной продажѣ стоятъ **75 коп.** каждая.

Книжные магазины, доставляющіе подписку, могутъ удерживать за комиссію и пересылку денегъ только **20 коп** съ каждаго годового полнаго экземпляра.

Подписка въ разсрочку отъ книжныхъ магазиновъ не принимается.

При непосредственномъ обращеніи въ контору допускается разсрочка: для городскихъ и иногороднихъ подписчиковъ съ доставкой—при подпискѣ **2 руб. 50 коп.** и къ 1 іюня **2 руб.**

Для городскихъ подписчиковъ въ Москвѣ безъ доставки допускается разсрочка по **1 руб.** въ мѣсяцъ съ платежомъ—въ началѣ января, въ началѣ марта, въ началѣ мая, и, наконецъ, въ началѣ августа.

Другихъ условій разсрочки не допускается.

КОНТОРА РЕДАКЦІИ: Москва, Донская ул., д. Даниловой, кв. **№ 4.**

Редакторъ-издатель **М. П. Варавва.**

ПРОГРАММА

ЕЖЕМѢСЯЧНАГО ЖУРНАЛА

„ПРИРОДА ВЪ ШКОЛѢ“,

посвященнаго вопросамъ преподаванія физики, химіи и естествознанія въ средней и начальной школѣ.

---

1. Руководящія статьи по выясненію общаго плана и частностей преподаванія физико-химическихъ и естественныхъ наукъ.
2. Статьи научнаго характера по отдѣльнымъ вопросамъ физики, химіи и естествознанія — главнымъ образомъ примѣнительно къ цѣлямъ преподаванія.
3. Статьи и замѣтки, касающіяся различныхъ учебно-вспомогательныхъ пособій, кабинетовъ, лабараторій и т. п.
4. Статьи и замѣтки, относящіеся къ практическимъ занятіямъ учениковъ.
5. Свѣдѣнія о постановкѣ преподаванія физики, химіи и естествознанія въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи и другихъ странъ.
6. Разборъ учебныхъ, популярно-научныхъ и научныхъ книгъ.
7. Обзоръ статей по преподаванію физики, химіи и естествознанія помѣщенныхъ въ главнѣйшихъ русскихъ и иностранныхъ журналахъ
8. Разныя извѣстія.
9. Письма въ редакцію.
10. Объявленіе.

Журналъ будетъ выходить въ 1907 году ежемѣсячно книжками въ 4 печатн. листа.

ЦѢНА съ пересылкою 3 руб. въ годъ.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ: МОСКВА, Петровка, д. Матвѣева, Товарищество И. Д. Сытина, а также въ главныхъ книжныхъ магазинахъ.

ДОПУСКАЕТСЯ РАЗСРОЧКА:

1 р. при подпискѣ, **1** р. — не позже 1 апрѣля и **1** р. — не позже 1 іюля.