№ 437.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XXXVII-го Семестра № 5-й.

ОДЕССА

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

1907.

XXXVII Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 437.

Эволюція солнечной системы.

Ф. Р. Мультона.

*(Окончаніе *).*

Направленіе обращеній спутниковъ. — Когда первичные планетные узлы отдѣлялись отъ солнца, ихъ сопровождали менѣе значительные вторичные узлы. Хотя въ частныхъ случаяхъ вторичные узлы могли имѣть какое-нибудь общее направленіе обращеній около своихъ первичныхъ узловъ, но нѣтъ очевидныхъ основаній предполагать, что такое общее направленіе обращеній должно существовать; поэтому мы разсмотримъ различные случаи, которые могли имѣть мѣсто.

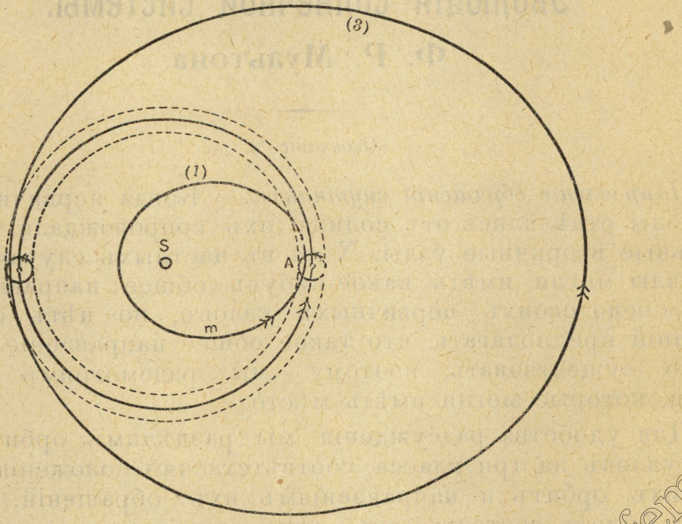
Для удобства разсужденія мы раздѣлимъ орбиты вторичныхъ узловъ на три класса, соотвѣтственно положеніямъ плоскостей ихъ орбитъ и направленіямъ ихъ обращеній. (a) Первый классъ будетъ состоять изъ тѣхъ вторичныхъ узловъ, орбиты которыхъ имѣли значительный наклонъ къ плоскостямъ движенія соотвѣтственныхъ первичныхъ узловъ; (b) во второй классъ войдутъ тѣ, обращеніе которыхъ происходило приблизительно въ плоскостяхъ движенія первичныхъ узловъ и въ прямомъ направленіи; и (в) третій классъ составятъ тѣ, которые обращались приблизительно въ плоскостяхъ движенія первичныхъ узловъ, но въ обратномъ направленіи.

---

*) См. № 436 „Вѣстника".

(а). Разсмотримъ дѣйствіе разсѣяннаго вещества на вторичные узлы перваго класса. Когда одинъ изъ такихъ узловъ пересѣкаетъ плоскость движенія своего первичнаго узла, онъ встрѣчаетъ разсѣянное вещество, дѣйствующее на него, какъ сопротивляющаяся среда, и уменьшающее его скорость. Вслѣдствіе этого сопротивленія его движенію размѣры его орбиты должны уменьшиться. Кромѣ того, масса первичнаго узла постоянно возрастаетъ вслѣдствіе захвата метеорнаго вещества, и это также уменьшаетъ размѣры орбиты вторичнаго узла. Эти двѣ причины, дѣйствуя всегда въ одномъ направленіи, въ концѣ концовъ заставятъ вторичный узелъ упасть на первичный. Конечно, чѣмъ дальше онъ былъ вначалѣ отъ своего первичнаго узла, тѣмъ больше шансовъ у него сохранить независимое существованіе.

(б). Теперь разсмотримъ движеніе вторичнаго узла, который обращается въ прямомъ направленіи въ плоскости движенія своего главнаго узла. Тѣ небольшія частички, которыя онъ можетъ встрѣтить, мы раздѣлимъ на три группы: на (1) тѣ, орбиты которыхъ лежатъ цѣликомъ внутри орбиты планетнаго узла M; (2) тѣ, орбиты которыхъ пересѣкаютъ орбиту M, и (3) тѣ, орбиты которыхъ лежатъ совершенно внѣ орбиты M. На фиг. 10 сплош-



Фиг. 10.

ной кругъ представляетъ орбиту планетнаго узла M, пунктирные круги—предѣлы орбиты вторичнаго узла (спутника) при его обращеніи вокругъ M, а (1) и (3) представляютъ орбиты частичекъ первой и третьей группъ. Орбиты частицъ, лежащія между этими двумя кривыми, не указаны.

Частицы (1) класса встрѣтятъ вторичный узелъ въ точкѣ (или вблизи) A. Мы должны найти, кто изъ нихъ въ этой точкѣ будетъ двигаться скорѣе. Вторичный узелъ увлекается впередъ движеніемъ массы M, а движеніе его обращенія вокругъ M увлекаетъ его назадъ. Послѣднее движеніе гораздо медленнѣе перваго. Окончательная скорость движенія впередъ будетъ разностью этихъ двухъ скоростей. Такъ какъ большая полуось орбиты массы m меньше, чѣмъ полуось орбиты M, то изъ уравненій (1) вытекаетъ, что масса m движется медленнѣе, чѣмъ M. Если ея большая ось значительно меньше оси M, то она будетъ двигаться со скоростью меньшей, нежели разница въ движеніи M и вторичнаго узла. Въ этомъ случаѣ вторичный узелъ будетъ нагонять массу m. Но вслѣдствіе направленія движенія вторичнаго узла его движеніе вокругъ массы M въ этомъ случаѣ будетъ ускоряться столкновеніемъ съ m. Математическое изслѣдованіе показываетъ, что этотъ результатъ будетъ получаться всегда, если эксцентриситетъ орбиты m будетъ больше, чѣмъ

$$\frac{r}{R} + 2\sqrt{\frac{MR}{r}},$$

гдѣ R есть радіусъ орбиты планетнаго узла вокругъ солнца, r радіусъ вторичнаго узла относительно M, а M есть масса планетнаго узла, выраженная въ единицахъ солнечной массы. Для земли и луны этотъ предѣлъ составляетъ 0,035, но для болѣе крупныхъ планетъ и болѣе близкихъ спутниковъ онъ гораздо значительнѣе. Впрочемъ, когда столкновенія происходили чаще, планетные узлы не достигли еще своихъ нынѣшнихъ размѣровъ. Такъ какъ орбиты частицъ распыленнаго вещества, какъ общее правило, должны были быть значительно эксцентричнѣе, то въ общемъ столкновенія должны были ускорять движеніе вторичныхъ узловъ.

Эта формула и эти результаты сохраняются также для частицъ, которыя движутся по орбитамъ типа (3). Онѣ измѣняются для частицъ, которыя движутся по орбитамъ (2), промежуточнымъ между двумя разсмотрѣнными классами.

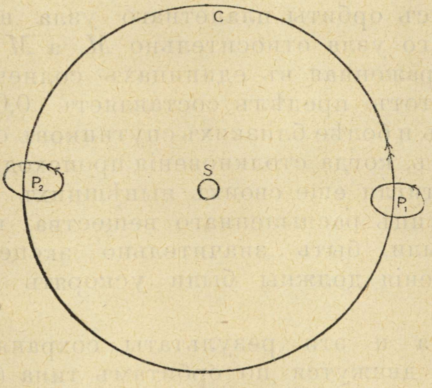
Такимъ образомъ, ускоренія, сообщаемыя распыленнымъ веществомъ, будутъ увеличивать орбиту вторичнаго узла и будутъ мѣшать ему пріобщаться къ растущему планетному узлу. Въ силу этого вторичные узлы такого типа, вѣроятно, сохранятъ отдѣльное существованіе и разовьются въ спутники.

(в). Дѣйствіе распыленнаго вещества на вторичные узлы, движущіеся въ обратномъ направленіи, будетъ противоположно тому дѣйствію, которое оно производитъ на вторичные узлы съ прямымъ движеніемъ. Такимъ образомъ, орбиты такихъ узловъ будутъ постоянно уменьшаться, съ одной стороны—отъ столкновеній съ частицами распыленнаго вещества, а съ другой—также и отъ увеличенія притягательной силы массы M, которая постепенно растетъ. По этимъ причинамъ такіе спутники въ общемъ будутъ падать на свои планеты. Условія ихъ переживанія могутъ сложиться благопріятно только въ томъ случаѣ, если распыленное вещество распредѣлено совершенно особымъ образомъ или если они возникли на очень большомъ разстояніи отъ своихъ планетъ.

Изъ этихъ соображеній вытекаетъ, что спутники могутъ вращаться около своихъ планетъ въ любомъ направленіи, но шансы переживанія въ качествѣ независимыхъ тѣлъ будутъ противъ тѣхъ вторичныхъ узловъ, которые не обращаются въ прямомъ направленіи. Планета можетъ имѣть спутниковъ, которые движутся и въ томъ и въ другомъ направленіи.

Эксцентриситеты орбитъ спутниковъ.—Вообще орбиты вторичныхъ узловъ вначалѣ были очень эксцентричны. Теперь мы покажемъ, что орбиты тѣхъ изъ нихъ, которые движутся въ прямомъ направленіи, отъ ударовъ планетезимальнаго матеріала дѣлаются менѣе эксцентричными.

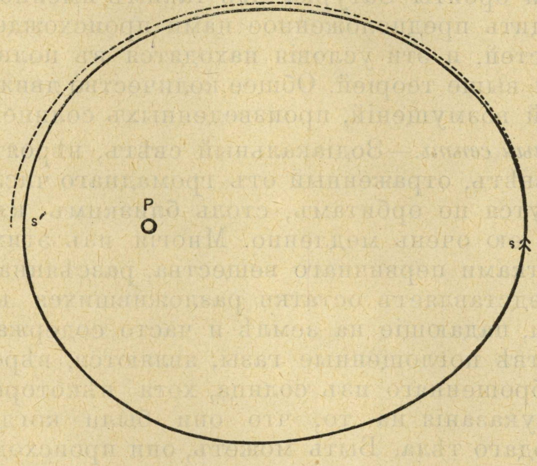
Пусть S будетъ солнце, а C та кривая, по которой обращается вокругъ него планетный узелъ (фиг. 11). Пусть P_1 бу-



Фиг. 11.

детъ положеніе планетнаго узла, когда болѣе далекій апсидъ орбиты спутника лежитъ внѣ C, а P_2 его положеніе, когда имѣетъ мѣсто обратное. Если бы эта орбита была вся заполнена однимъ тѣломъ, вращающимся вокругъ P_1, какъ твердое тѣло, то паденіе метеоровъ стремилось бы увеличить вращеніе въ томъ же направленіи, какъ мы это видѣли выше, когда говорили о вращеніи планетъ. Подобнымъ образомъ, ихъ дѣйствіе на вторичный узелъ будетъ ускорять его движеніе, и при томъ это дѣйствіе будетъ наибольшее, когда узелъ будетъ дальше всего отъ P_1.

Увеличеніе ускоренія тѣла въ тотъ моментъ, когда оно находится въ самой далекой точкѣ своей орбиты, будетъ увеличивать разстояніе ея другого апсида и будетъ дѣлать орбиту болѣе близкой къ кругу. Такъ, если тѣло первоначально двигалось по сплошной кривой (фиг. 12), и если его ускореніе увеличилось въ точкѣ s, то разстояніе точки s' отъ P увеличится, и *орбита станетъ менѣе эксцентричной.* Это замѣчаніе будетъ имѣть мѣсто также въ томъ случаѣ, когда P прошла половину своей орбиты, и когда условія будутъ отвѣчать P_2 на рис. 11. Значитъ, удары частицъ раздробленнаго вещества о вторичные узлы съ прямымъ движеніемъ будутъ увеличивать ихъ скорости и при томъ больше всего именно тогда, когда ихъ разстояніе отъ ихъ планетъ больше всего: *въ результатѣ сообщаемыя ускоренія увеличатъ орбиты и сдѣлаютъ ихъ менѣе эксцентричными.* Слѣдуетъ замѣтить, что для вторичныхъ узловъ съ обратнымъ движеніемъ результаты будутъ обратные.



Фиг. 12.

Въ нашей нынѣшней системѣ орбиты спутниковъ въ общемъ очень близки къ кругамъ. Изъ спутниковъ съ прямымъ движеніемъ самымъ эксцентричнымъ движеніемъ обладаетъ Гиперіонъ, который подвергается очень значительнымъ возмущеніямъ отъ сосѣдняго спутника Титана. Эксцентриситетъ орбиты Гиперіона равенъ 0,12. Но эксцентриситетъ орбиты девятаго спутника Сатурна, который обращается въ обратномъ направленіи, достигаетъ 0,22. Излагаемая теорія не предуказываетъ большого наклона орбитъ спутниковъ Урана къ орбитѣ самой планеты; но они и не противорѣчатъ ей, какъ противорѣчатъ теоріи Лапласа.

Внутренній спутникъ Марса и кольца Сатурна.—Внутренній спутникъ Марса вначалѣ представлялъ небольшой вторичный узелъ, который обращался очень близко отъ узла Марса. Его періодъ обращенія былъ длиннѣе, чѣмъ теперь, и съ увеличеніемъ массы планеты онъ постоянно уменьшался. Сама планета, какъ сплошное тѣло, никогда не простиралась даже до орбиты этого спутника. Второй спутникъ Фобосъ лежитъ внѣ предѣловъ Роша, и краткость его періода обращенія не представляетъ затрудненій.

Кольца Сатурна развились изъ того вещества, которое первоначально обращалось вблизи ядра самой планеты. Они лежатъ внутри предѣла Роша, и приливныя напряженія, стремившіяся раздѣлить массу планеты, болѣе чѣмъ уравновѣшивали стремленіе частицъ соединяться подъ вліяніемъ взаимнаго тяготѣнія. Столкновенія обратили этотъ матеріалъ въ пыль и сгладили разницы въ ихъ движеніи, пока всѣ частицы не стали двигаться въ одной и той же плоскости.

Количество движенія системы.—Почти все количество движенія нашей системы принадлежитъ большимъ планетамъ, при чемъ Юпитеръ даетъ свыше 95% того количества, которое имѣетъ вся система внутри орбиты Сатурна. Къ такимъ именно условіямъ и должно приводить предположенное нами происхожденіе спиральныхъ туманностей, и эти условія находятся въ полномъ согласіи съ очерченной выше теоріей. Общее количество движенія системы является мѣрой возмущеній, произведенныхъ солнцемъ S'.

Зодіакальный свѣтъ.—Зодіакальный свѣтъ, вѣроятно, представляетъ собою свѣтъ, отраженный отъ громаднаго числа частичекъ, которыя движутся по орбитамъ, столь близкимъ къ земной, что захватываются ею очень медленно. Многія изъ этихъ частичекъ являются остатками первичнаго вещества, разсѣяннаго солнцемъ S', а часть представляетъ остатки разложившихся кометъ. Большіе метеориты, падающіе на землѣ и часто содержащіе въ большомъ количествѣ поглощенные газы, являются, вѣроятно, частью матеріала, выброшеннаго изъ солнца, хотя нѣкоторые изъ нихъ даютъ рѣзкія указанія на то, что они были когда-то частями большого твердаго тѣла. Быть можетъ, они происходятъ отъ тѣхъ планетъ, которыя существовали до появленія солнца S' и которыя были раздроблены и разсѣяны этимъ тѣломъ.

Эволюція планетъ.—Эволюція большихъ и малыхъ планетныхъ узловъ была совершенно различная. Въ моментъ своего выбрасыванія всѣ они обладали очень высокой температурой. Незначительные узлы не обладали притяженіемъ, достаточнымъ для того, чтобы удержать при себѣ болѣе легкіе газы. Спустя сравнительно короткое время у нихъ уже не оставалось замѣтныхъ атмосферъ, и они быстро охладились и стали твердыми. Метеорное вещество, которое падало на нихъ, также было въ твердомъ состояніи. Относительныя скорости ихъ были въ общемъ такъ незначительны, что столкновенія не могли производить большого количества тепла, а то тепло, которое получалось, быстро терялось излученіемъ. Послѣ того, какъ массы начали принимать размѣры, подобные размѣрамъ земли, внутреннее давленіе стало дѣлаться очень значительнымъ, и ихъ объемы уменьшались. Это сжатіе произвело внутреннюю теплоту, какъ оно производитъ ее теперь въ солнцѣ. Вычисленіе показываетъ, что при томъ сжатіи земли, при которомъ ея плотность повысилась отъ средней плотности извѣстныхъ намъ метеоритовъ (3,5) до своей нынѣшней плотности (5,5), должно было развиться такое количество тепла, что ея температура (принимая удѣльную теплоемкость 0,2, какою обладаютъ скалы) повысилась бы болѣе, чѣмъ на 4000°С. Эта теплота постепенно проводилась бы на поверхность и терялась бы очень медленно; ея слишкомъ достаточно для объясненія всѣхъ плутоническихъ явленій земли. Но въ цѣломъ земля оставалась твердой въ продолженіе всей своей исторіи.

Земля пріобрѣла свою атмосферу, главнымъ образомъ, уже послѣ того, какъ достигла приблизительно величины Меркурія. Атмосферные газы вышли изъ ея средины, какъ бы выжатые изъ сжатаго вещества при высокой температурѣ. Тѣла, значительно меньшія, чѣмъ Меркурій, никогда и не обладали настоящими атмосферами. Это относится къ большинству спутниковъ и ко всѣмъ планетоидамъ.

Съ другой стороны, болѣе значительные планетные узлы обладали такой массой, что никогда не теряли своихъ легкихъ газообразныхъ оболочекъ. Въ силу этого они въ значительной мѣрѣ сохраняли свою первоначальную теплоту и не сокращались въ сколько-нибудь значительной мѣрѣ. Они обладаютъ меньшей плотностью, чѣмъ менѣе крупныя планеты, какъ вслѣдствіе того, что удержали при себѣ всѣ свои первичные легкіе элементы, такъ и потому, что ихъ условія не благопріятствовали ихъ охлажденію и сжатію.

Возрастъ солнечной системы.—На вопросъ о времени, котораго потребовала указанная эволюція нашей системы, нельзя дать опредѣленнаго отвѣта. Оно, несомнѣнно, очень велико. Труднѣе всего объяснить неуменьшающуюся энергію солнца. Если во время посѣщенія массы S' оно было въ зрѣломъ возрастѣ, то теперь оно должно быть въ періодѣ значительнаго упадка. Есть только одно объясненіе, которымъ пользуется также и теорія Лапласа, а именно, что теорія сжатія солнца объясняетъ только небольшую часть энергіи, принимающей эту форму.

Будущее нашей системы.—Повидимому, та часть эволюціи системы, во время которой происходило собираніе разсѣяннаго вещества, почти закончилась. Будущее, вѣроятно, будетъ очень сходно съ настоящимъ, пока запасъ солнечной энергіи не упадетъ до того, что его излученіе замѣтно уменьшится. Тогда наступитъ вѣкъ все возрастающаго холода, который, сколько мы можемъ видѣть, будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока не появится какой-нибудь новый внѣшній факторъ.

Одно представляется вѣроятнымъ. Если только движенія звѣздъ не согласованы какимъ-нибудь особеннымъ образомъ такъ, что эти тѣла никогда не могутъ значительно сближаться другъ съ другомъ, чего мы теперь не можемъ даже подозрѣвать, то въ какую-нибудь далекую эпоху наше солнце вновь пройдетъ вблизи какого-нибудь другого солнца. Если это второе солнце будетъ находиться въ періодѣ юности, образуется новая спиральная туманность, въ которую войдетъ, вѣроятно, хотя часть вещества, составляющаго далекія планеты нашей системы. Такимъ образомъ могутъ развиться условія для новой эволюціи. Если оба эти солнца будутъ темныя тѣла, то работа приливовъ можетъ болѣе или менѣе разрушить ихъ и нагрѣть.

Раньше думали, что звѣздная эволюція есть всецѣло почти процессъ собиранія, и астрономы рисовали себѣ, какъ солнце будетъ присоединяться къ солнцу, вслѣдствіе столкновеній, пока вся матеріальная вселенная не обратится въ одно или въ нѣсколько громадныхъ солнцъ, которыя со временемъ станутъ холодными и безжизненными. Но шансы тѣснаго сближенія безъ столкновенія несравненно больше, чѣмъ шансы дѣйствительнаго столкновенія. Значительное сближеніе производитъ дробленіе солнца и разсѣяніе матеріала, а не собиранія его. Теперь мы видимъ, что есть шансы и для разсѣянія, какъ есть шансы, хотя меньшіе, для собиранія. Кромѣ того, именно въ настоящее время мы находимъ, что въ радіоактивныхъ веществахъ нѣкоторые атомы, по крайней мѣрѣ, обладаютъ силами, ведущими ихъ къ разложенію.

Заключеніе.—Прежде всего нужно остерегаться принимать только что кратко очерченную теорію за окончательную. Въ ней есть много вопросовъ, гдѣ нужно добиться количественныхъ результатовъ, для сравненія ихъ съ нашей дѣйствительной системой. Въ ней возможны и необходимы, надо думать, многія измѣненія. Такъ, напримѣръ, образованіе спиральныхъ туманностей можетъ значительно отличаться отъ представленнаго выше.

На гипотезу первичной спиральной туманности наводятъ новѣйшія фотографіи туманностей, какъ и сама наша система. Въ виду существованія движенія звѣздъ тѣ условія, которыя, по нашему предположенію, дали начало спиральной туманности, представляются наиболѣе возможными. Развитіе спиральной туманности въ силу достаточнаго сближенія двухъ солнцъ является, повидимому, необходимымъ слѣдствіемъ, хотя этотъ вопросъ нуждается еще въ дальнѣйшей разработкѣ. Развитіе системы, подобной нашей, изъ небольшой спиральной туманности разсмотрѣннаго типа представляется, повидимому, неизбѣжнымъ. Поскольку теорія эта была разработана въ деталяхъ, не было найдено ничего прямо противорѣчащаго ей или хотя бы возбуждающаго серьезныя сомнѣнія относительно нея. Въ то же время она превосходно объясняетъ всѣ главныя особенности нашей системы. Можно съ увѣренностью сказать, что въ настоящее время эта гипотеза удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ успѣшной теоріи гораздо лучше, чѣмъ какая бы то ни была изъ предшествующихъ ей.

Задача Мальфатти.

Н. Агрономова.

Въ 1803 году въ итальянскомъ журналѣ „Memorie di mathematica et di fisica della Società Italiana delle scienze“ (Modena, t. XI pars 1) появился небольшой мемуаръ „Memoria sopra un problema stereotomica“. Предметомъ этого мемуара было рѣшеніе слѣдующей задачи: *въ данный треугольникъ вписать три круга такъ, чтобы каждый касался двухъ другихъ и двухъ сторонъ треугольника.* Авторомъ этого мемуара былъ Мальфатти (Malfatti).

Имѣя въ виду изложить здѣсь рѣшеніе задачи, мы дадимъ предварительно небольшой историческій очеркъ ея происхожденія и развитія.

I.

Въ первый разъ, насколько извѣстно, вопросъ о вписаніи извѣстнымъ способомъ трехъ круговъ въ данный треугольникъ былъ разобранъ извѣстнымъ геометромъ 18-го вѣка Яковомъ Бернулли (Jacques Bernulli, Oeuvres, t. I, p. 93, Genève, 1744). Но задача была поставлена Бернулли очень узко: онъ разсматривалъ случай равносторонняго треугольника. Разумѣется, такая постановка вопроса не могла возбудить къ нему интереса геометровъ. Дѣйствительно, въ теченіе почти 60 послѣдующихъ лѣтъ ни одинъ ученый не обращался къ затронутому Бернулли вопросу.

Появленіе мемуара Мальфатти прошло незамѣченнымъ. Способствовала ли этому малая распространенность журнала, гдѣ онъ былъ напечатанъ, или что другое, сказать трудно. Поворотнымъ пунктомъ въ исторіи этого вопроса было появленіе въ журналѣ Жергона и Лавернеда „Annales de mathématiques pures et appliqueés“ (t. I) условія задачи Мальфатти, которую редакторы „Анналовъ“ предлагали читателямъ журнала для рѣшенія. Интересно то обстоятельство, что въ примѣчаніи къ условію задачи есть ссылка на „Собраніе сочиненій Бернулли“, но мемуаръ Мальфатти не цитируется.

Задача, вѣроятно, не была рѣшена читателями „Анналовъ“, и редакторы ихъ рѣшились предложить свое рѣшеніе [1]) (t. I, p. 343).

Появленіе задачи въ „Анналахъ“, въ журналѣ весьма распространенномъ, вызвало къ ней интересъ и другихъ геометровъ. Вмѣстѣ съ этимъ и забытый мемуаръ Мальфатти снова появился на сцену. Туринскій профессоръ Бидонъ (Bidonne) письмомъ въ редакцію „Анналовъ“ указалъ, что вопросъ, затронутый редакторами „Анналовъ“, трактовался уже Мальфатти, и привелъ изъ его мемуара небольшую выдержку.

---

[1]) Рѣшеніе, по всей вѣроятности, принадлежитъ одному Жергону.

Во II томѣ „Анналовъ" редакторы ихъ по просьбѣ нѣкоторыхъ читателей помѣстили разборъ рѣшенія Мальфатти, а немного спустя въ томъ же томѣ появилось письмо въ редакцію журнала нѣкоего Тедена (Tedenat), посвященное задачѣ Мальфатти. Вопросъ съ этого времени становится уже извѣстнымъ въ ученыхъ кругахъ.

Однако, въ теченіе послѣдующихъ почти 10 лѣтъ задача Мальфатти снова забывается. Только въ 1814—20 годахъ въ тѣхъ же „Анналахъ" (t. X) появляется третье рѣшеніе задачи, чисто аналитическое. Авторомъ рѣшенія былъ Лехмютцъ (Lechmütz). Его рѣшеніе было прототипомъ многихъ другихъ аналитическихъ рѣшеній. Съ этого времени литература задачи Мальфатти стала быстро возрастать. Послѣ Лехмютца предложили болѣе или менѣе изящныя рѣшенія Крель (Crelle), Грюнертъ (Grünerte), Шефферъ (Scheffer) и другіе. Назрѣвала новая задача—поставить вопросъ шире. Это сдѣлалъ знаменитый геометръ Штейнеръ (Steiner). Обобщенная Штейнеромъ задача Мальфатти получила слѣдующій видъ: „даны три кривыя на поверхности второго порядка; найти три другія кривыя второго порядка такъ, чтобы онѣ касались взаимно другъ друга и двухъ первыхъ кривыхъ".

Тамъ же Штейнеръ (Journal Crelle, t. I) далъ свое извѣстное построеніе задачи Мальфатти.

То и другое породило обширную литературу. Обобщенію Штейнера посвящены труды Кели (Cayley), Клебша (Clebsch), Биндера (Binder) и др.

Но, къ сожалѣнію, Штейнеръ далъ свое построеніе безъ доказательства. Этотъ пробѣлъ пополнилъ Зорновъ (Zornow). Онъ далъ весьма изящное доказательство построенія Штейнера. О построеніи Штейнера писали Плюкеръ (Plücker), Квидде (Quidde), Мендгаль (Mendhal), Гартъ (Hart) и др.

Весьма любопытное доказательство построенія Штейнера предложилъ Симонъ (Simons). Для полноты очерка намъ остается упомянуть о классическомъ рѣшеніи Каталана (Catalan), Шрётера (Schröter) и Неймана (Neumann), о рѣшеніи посредствомъ взаимныхъ фигуръ, о чисто геометрическомъ рѣшеніи Адамса (Adams), объ обобщеніи Мертенсомъ (Mertens) задачи Мальфатти для сферическаго треугольника.

Работы большинства вышеуказанныхъ геометровъ послужили намъ основой для нашего скромнаго труда. Помѣщенная въ концѣ таблица составлена по Derousseau [1]). Изъ массы рѣшеній мы взяли только небольшое число для примѣра, значительно ихъ сокративъ.

---

[1]) Mém. de la Soc. Royale des sc. de Liège, t. XVIII.

II.

1. Возьмемъ тр-къ ABC. Центры окружностей Мальфатти обозначимъ черезъ X, У, Z, а радіусы тѣхъ же окружностей черезъ x, y, z. Буквами B_x и C_x мы обозначаемъ точки касанія круга X со сторонами CA и AB тр-ка ABC; равнымъ образомъ, C_y и A_y, A_z и B_z будутъ обозначать точки касанія круговъ У и Z со сторонами тр-ка. Проекціи центра вписаннаго круга или центровъ внѣвписанныхъ круговъ на стороны BC, CA, AB будемъ обозначать черезъ A', B', C'. Точки A'', B'', C'' суть тѣ точки, въ которыхъ касательныя къ двумъ изъ искомыхъ круговъ пересѣкаютъ стороны BC, CA, AB тр-ка. Какъ обыкновенно, r, r_a, r_b, r_c, p—радіусы вписанной и внѣвписанныхъ окружностей и полупериметръ, а O, O_1, O_2, O_3 — центры тѣхъ же окружностей. (Чертежъ читатель безъ труда изготовитъ самъ).

2. Укажемъ сперва два конструктивныхъ рѣшенія задачи Маальфатти, а потомъ перейдемъ къ аналитическимъ.

Пусть въ точкѣ ω вписанный кругъ пересѣкаетъ биссекторъ AO. Отъ точки B въ направленіи AB по прямой AB откладываемъ отрѣзокъ $Bd = (p - c) + A\omega$. Отъ точки d въ направленіи, обратномъ прежнему, откладываемъ отрѣзокъ $df = BO + CO$. Разстояніе Af въ точкѣ m дѣлимъ пополамъ и къ точкѣ m возставляемъ перпендикуляръ, пересѣкающій AO въ точкѣ X. Точка X будетъ центромъ одной изъ окружностей Мальфатти.

Это построеніе даетъ для x слѣдующее выраженіе:

$$x = \frac{r}{AC_x} \cdot \frac{1}{2}(p - r + AO - BO - CO), \tag{1а}$$

и по аналогіи:

$$y = \frac{r}{BA_y} \cdot \frac{1}{2}(p - r + BO - CO - AO), \tag{1б}$$

$$z = \frac{r}{CB_z} \cdot \frac{1}{2}(p - r + CO - AO - BO). \tag{1в}$$

Это построеніе и эти формулы даны Мальфатти. Путь, которымъ онъ до нихъ дошелъ, весьма не ясенъ, на что указывалъ уже и Жергонъ.

3. Второй способъ, чрезвычайно простой, принадлежитъ Штейнеру.

Въ тр-ки BCO, CAO, ABO впишемъ три окружности a_1, b_1, c_1. Предположимъ, что послѣдняя касается AB въ точкѣ ω''. Если провести въ точкѣ ω'' касательную къ a_1 такъ, чтобы она касалась и b_1, что всегда возможно, то эта касательная будетъ также общей касательной окружностей X и У. Дальнѣйшее построеніе не представляетъ затрудненій.

Мы не станемъ доказывать построенія Штейнера, такъ какъ въ дальнѣйшемъ оно намъ не понадобится, а теперь перейдемъ къ аналитическимъ рѣшеніямъ, изъ которыхъ послѣднее дастъ намъ весьма удобное построительное рѣшеніе.

III.

4. Прежде, чѣмъ приступать къ рѣшенію задачи, выпишемъ рядъ равенствъ, кототорыя будутъ намъ весьма полезны.

Такъ какъ

$$r^2p = (p-a)(p-b)(p-c), \tag{2}$$

то

$$\begin{aligned} bc(p-a) &= pd_1^2, \\ ca(p-b) &= pd_2^2, \\ ab(p-c) &= pd_3^2, \end{aligned} \tag{3}$$

гдѣ d_1, d_2, d_3 соотвѣтственно равны OA, OB, OC.

Далѣе, умножая послѣдовательно равенство (2) на равенство (3), получимъ:

$$\begin{aligned} (p-b)(p-c)d_1^2 &= r^2bc, \\ (p-c)(p-a)d_2^2 &= r^2ca, \\ (p-a)(p-b)d_3^2 &= r^2ab; \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$\begin{aligned} (p-a)d_2d_3 &= rad_1, \\ (p-b)d_3d_1 &= rbd_2, \\ (p-c)d_1d_2 &= rcd_3. \end{aligned} \tag{5}$$

5. Опустимъ изъ X и У перпендикуляры $XC_x = x$ и $УC_y = y$ на c. Соединяемъ X и У и черезъ X проводимъ параллельную къ c, пересѣкающую $УC_y$ въ точкѣ l. Изъ тр-ка $XlУ$ находимъ, что

$$Xl = c - AC_x - BC_y = \sqrt{(y+x)^2-(y-x)^2} = 2\sqrt{xy}. \tag{6}$$

Такъ какъ $AC_x = x\cot g\ \frac{1}{2}A = x\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{p-a}{r}x$

и

$$BC_y = y\cot g\ \frac{1}{2}B = x\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} = \frac{p-b}{r}\cdot y,$$

то, подставляя въ формулу (6) значенія BC_y, находимъ:

$$c - \frac{p-a}{r}x - \frac{p-b}{r}y = 2\sqrt{xy}.$$

Нашедши два аналогичныхъ равенства, мы все полученное перепишемъ такъ:

$$\begin{aligned} (p-a)x + 2r\sqrt{xy} + (p-b)y &= cr, \\ (p-b)y + 2r\sqrt{yz} + (p-c)z &= ar, \\ (p-c)z + 2r\sqrt{zx} + (p-a)x &= br. \end{aligned}$$

Эта система уравненій послужитъ точкой отправленія для нашихъ изслѣдованій. Рѣшить ее можно весьма разнообразно.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О гармоническомъ рядѣ.

Э. Лейнъка.

1). *Теорема.* Сумма гармоническаго ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ равна $\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x-1}\binom{n}{x}\cdot\frac{1}{x}$.

По формулѣ Ньютона имѣемъ:

$$(x-a)^n=x^n-\frac{n}{1}\cdot x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2+\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}x^{n-k}a^k+\ldots+(-1)^n a^n. \quad (1)$$

Полагая $a=x=1$, получимъ:

$$0=1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}+\ldots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n-1)\ \ldots\ [n-(n-2)]}{1.2\ \ldots\ (n-1)}+(-1)^n. \quad (2)$$

Теперь раздѣлимъ обѣ части на n и перенесемъ послѣдній членъ въ первую часть; тогда мы получимъ:

$$-(-1)^n\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-1+\frac{n-1}{1.2}-$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(n-2)]}{1.2\ldots(n-1)},$$

или

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n-1}+\frac{(n-1).(n-2)}{1.2.(n-2)}-$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.(n-3)}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots 1.}{1.2\ldots(n-1).1},$$

или

$$(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\binom{n-1}{1}\cdot\frac{1}{n-1}+$$

$$+\binom{n-1}{2}\cdot\frac{1}{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{1}, \quad (3)$$

гдѣ черезъ $\binom{n-1}{k}$ обозначенъ k-ый коэффиціентъ въ разложеніи $(x-a)^{n-1}$. Если теперь въ выраженіи (3) вмѣсто n будемъ подставлять послѣдовательно $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . 3, 2, 1, то получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^{n-2}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\binom{n-2}{1}\cdot\frac{1}{n-2}+\\
&+\binom{n-2}{2}\cdot\frac{1}{n-3}-\binom{n-2}{3}\frac{1}{n-4}+\ldots+(-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}\cdot\frac{1}{1};\\
&(-1)^{n-3}\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n-2}-\binom{n-3}{1}\cdot\frac{1}{n-3}+\binom{n-3}{2}\cdot\frac{1}{n-4}+\ldots\\
&\qquad\ldots+(-1)^{n-3}\binom{n-3}{n-3}\cdot\frac{1}{1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(-1)^{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\binom{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\binom{2}{2}\cdot\frac{1}{1};\\
&(-1)^{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\binom{1}{1};\\
&1=1.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Складывая равенства (3) и (4), умноживъ предварительно въ (4) поочереди каждую строчку то на -1, то на $+1$, мы получимъ:

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{n}-\left[\binom{n-1}{1}+1\right]\cdot\frac{1}{n-1}+\\
&+\left[\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{1}+1\right]\cdot\frac{1}{n-2}+\ldots+\\
+(-1)^{p}\left[\binom{n-1}{p}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-3}{p-2}+\ldots+\binom{n-p}{1}+1\right]&\cdot\frac{1}{n-p}\cdots\quad(5)
\end{aligned}$$

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя преобразованія въ формулѣ (5):

$$\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)\ldots[n-(p-1)](n-p)}{1.2.3\ldots p};$$

$$\binom{n-1}{p-1}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-1-(p-2)]}{1.2.3\ldots p-1};$$

складывая эти выраженія, получимъ:

$$\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-1-(p-2)]}{1.2.3\ldots p-1}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-1-(p-2)]}{1.2.3\ldots p-1}\left\{1+\frac{n-1-(p-1)}{p}\right\}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-1)]}{1.2\ldots p}=\binom{n}{p},$$

или

$$\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}=\binom{n}{p}.$$

Полагая вмѣсто n и p соотвѣтственно $n-1$ и $p-1$, получимъ

$$\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2}=\binom{n-1}{p-1}.$$

Повторяя здѣсь опять ту же операцію, найдемъ:

$$\binom{n-3}{p-2}+\binom{n-3}{p-3}=\binom{n-2}{p-2}$$

. . . .

$$\binom{n-p+1}{2}+\binom{n-p+1}{1}=\binom{n-p+2}{2}$$

$$\binom{n-p}{1}+\binom{n-p}{0}=\binom{n-p+1}{1}.$$

Складывая всѣ эти тожества, мы получимъ, принявъ во вниманіе, что $\binom{n-p}{0}=1$:

$$\binom{n-1}{p}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-3}{p-2}+\ldots+\binom{n-p}{1}+1=\binom{n}{p}.$$

Поэтому выраженіе (5) представляется въ видѣ:

$$(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n-1}+$$

$$+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{1}.$$

Или, такъ какъ $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$, то

$$(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}+$$

$$+\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}\cdot 1.$$

Отсюда получимъ, читая съ конца:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\binom{n}{1}-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n}\frac{1}{n}.$$

А это и требовалось доказать.

Эта теорема заимствована мною изъ „Riecke Über die Function $n^u-\binom{n}{1}(n-1)^{u-1^u}\ldots$, но доказательство гораздо проще, чѣмъ у него.

2). *Теорема.* Сумма гармоническаго ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n}$ выражается формулою

$$A+\sum_{k=0}^{k=E\left(\frac{n}{3}\right)-1}\frac{[n-3(k+1)]!}{(n-3k)!}[3(n-3k)^2-6(n-3k)+2]$$

гдѣ A будетъ $\frac{11}{6}$, 1, $\frac{3}{2}$, смотря по тому, имѣетъ ли n форму $3q$, $3q+1$, $3q+2$.

Доказательство. Положимъ, что мы имѣемъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ, и что изъ нихъ составлены всевозможныя сочетанія по $n-1$, безъ повторенія, при чемъ то сочетаніе, въ которое не входитъ единица, отброшено. Тогда, значитъ, у насъ имѣются $n-1$ группъ; перемножимъ всѣ элементы каждой группы между собою и, сложивъ эти произведенія, постараемся найти выраженіе подобнаго рода суммы въ зависимости отъ n. Задача рѣшается легче всего въ частныхъ случаяхъ, изъ которыхъ потомъ выведемъ общее выраженіе для какого угодно n.

Сочетанія изъ 6 эл. по 5 будутъ:

12345, 12346, 12356, 12456, 13456.

Поэтому, обозначая эти суммы черезъ L_n, получимъ въ этомъ случаѣ:

$$L_6=1.2.3.4.5+1.2.3.4.6+1.2.3.5.6+1.2.4.5.6+1.3.4.5.6=$$

$$=1.2.3(4.5+4.6+5.6)+4.5.6(1.2+1.3)=1.2.3(4.5+4.6+5.6)+4.5.6\ L_3$$

Сочетанія изъ 7 элементовъ по 6 будутъ:

123456, 123457, 123467, 123567, 124567, 134567;

$$L_7 = 1.2.3.4.5.6 + 1.2.3.4.5.7 + 1.2.3.4.6.7 + 1.2.3.5.6.7 + 1.2.4.5.6.7 +$$

$$+ 1.3.4.5.6.7 =$$

$$= 1.2.3.4(5.6 + 5.7 + 6.7) + 5.6.7(1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4) =$$

$$= 1.2.3.4.(5.6 + 5.7 + 6.7) + 5.6.7.L_4;$$

подобнымъ образомъ:

$$L_8 = 1.2.3.4.5(6.7 + 6.8 + 7.8) + 6.7.8\,L_5.$$

Поэтому заключаемъ, что вообще

$$L_n = (n-3)!\,[(n-2)(n-1) + (n-2)n + (n-1)n] + n(n-1)(n-2)\,L_{n-3}. \quad (!)$$

Теперь докажемъ, что, полагая эту формулу справедливою при n, мы будемъ имѣть точно такую же при $n+3$. Другими словами, эта формула есть общее выраженіе L_n при $n > 3$.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда $n=1, 2, 3$, мы непосредственно составляемъ:

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 1; \quad L_3 = 1.2 + 1.3 = 5.$$

Теперь переходимъ къ общему случаю. Легко понять, что изъ функціи L_n мы получимъ слѣдующую, когда умножимъ L_n на $(n+1)$ и придадимъ къ произведенію $n!$ Итакъ,

$$\left.\begin{aligned} L_{n+1} &= (n+1).L_n + n! \\ L_{n+2} &= (n+2)L_{n+1} + (n+1)! \\ L_{n+3} &= (n+3)L_{n+2} + (n+2)! \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Отсюда получаемъ:

$$L_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)\,L_n + (n+3)(n+2)n! + (n+3)(n+1)! + (n+2)!$$

или, взявъ въ послѣднихъ 3-хъ членахъ $n!$ за скобку, найдемъ:

$$L_{n+3} = n!\,[(n+1)(n+2) + (n+1)(n+3) + (n+2)(n+3)] +$$

$$+ (n+1)(n+2)(n+3)\,L_n.$$

Для $n = 4, 5, 6$ наша формула (!) оказывается справедливой; поэтому, по только-что доказанному, она имѣетъ мѣсто и при $n=7, 8, 9$ и т. д.

Таким образомъ, выраженіе

$$L_n = (n-3)!\,[3n^2 - 6n + 2] + \frac{n!}{(n-3)!}\,L_{n-3} \quad (2)$$

справедливо при всякомъ цѣломъ положительномъ n, большемъ 3.

Подставляя въ равенство (2) на мѣсто n послѣдовательно $n-3$, $n-6, \ldots$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} L_{n-3} &= (n-6)!\,[3(n-3)^2-6(n-3)+2] + \frac{(n-3)!}{(n-6)!}\,L_{n-6} \\ L_{n-6} &= (n-9)!\,[3(n-6)^2-6(n-6)+2] + \frac{(n-6)!}{(n-9)!}\,L_{n-9} \\ L_{n-9} &= (n-12)!\,[3(n-9)^2-6(n-9)+2] + \frac{(n-9)!}{(n-12)!}\,L_{n-12} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

. . . .

Отсюда получимъ вообще:

$$L_n = (n-3)!\,[3n^2-6n+2] + \frac{n!\,(n-6)!}{(n-3)!}\,[3(n-3)^2-6(n-3)+2] +$$

$$+ \frac{n!\,(n-9)!}{(n-6)!}\,[3(n-6)^2-6(n-6)+2] + \ldots \quad (4)$$

Формула (4) даетъ точную величину для L_n въ томъ случаѣ, когда n имѣетъ видъ $3q+1$, такъ какъ въ этомъ случаѣ вычисленіе L_n приводится къ $L_1=0$. Въ тѣхъ случаяхъ, когда n имѣетъ видъ $3q$ и $3q+2$, формула (4) даетъ, какъ это видно изъ формулъ (3), нѣсколько меньшую величину. Въ первомъ случаѣ, т. е. когда число n кратно 3-хъ, къ (4) слѣдуетъ прибавить еще добавочное

слагаемое $\dfrac{n!}{[n-3(q-1)]!}\,L_3 = \dfrac{5n!}{[n-3q+3]!} = \dfrac{5n!}{3!} = \dfrac{5}{6}\,n!$

Въ случаѣ $n=3q+2$ вычисленія L_n приводятъ насъ къ вычисленію L_2, и поэтому придется прибавить добавочное слагаемое

$$\frac{n!}{(n-3q)!}\,L_2 = \frac{n!}{2!} = \frac{1}{2}\,n!$$

Чтобы теперь перейти отъ функцій L къ суммѣ гармоническаго ряда, раздѣлимъ обѣ части (4) на $n!$ Тогда, прибавляя по 1 къ обѣимъ частямъ, получимъ:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = A + \frac{(n-3)!}{n!}\,[3n^2-6n+2] +$$

$$+ \frac{(n-6)!}{(n-3)!}\,[3(n-3)^2-6(n-3)+2] + \ldots,$$

гдѣ A имѣетъ вышеуказанныя значенія.

Теперь посмотримъ, правильно ли выраженъ верхній предѣлъ суммованія въ формулѣ:

$$\mathrm{H}_n = \mathrm{A} + \sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)-1} \frac{[n-3(k+1)]!}{[n-3k]!}\,[3(n-3k)^2-6(n-3k)+2].$$

Очевидно, что суммованіе продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока члены не обратятся въ нули. Итакъ, послѣднимъ членомъ будетъ тотъ, для котораго

$$n-3(k+1) \geqslant 0;\quad \frac{n}{3}-1 \geqslant k;\quad k=\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)-1.$$

Такимъ образомъ, въ верхней формулѣ заключаются три формулы:

$$n=3q+2;\quad \mathrm{H}_n = \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)-1} \frac{[n-3(k+1)]!}{[n-3k]!}\,[3(n-3k)^2-6(n-3k)+2]$$

$$n=3q+1;\quad \mathrm{H}_n = 1 + \sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)-1} \frac{[n-3(k+1)]!}{[n-3k]!}\,[3(n-3k)^2-6(n-3k)+2]$$

$$n=3q:\quad \mathrm{H}_n = \frac{11}{6} + \sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)-2} \frac{[n-3(k+1)]!}{[n-3k]!}\,[3(n-3k)^2-6(n-3k)+2].$$

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Двухсотлѣтній юбилей Эйлера. 2-го апрѣля с. г. исполнилось 200 лѣтъ со дня рожденія Леонарда Эйлера. Германскій Союзъ Математиковъ пріурочилъ празднованіе этого юбилея къ 79-му съѣзду германскихъ естествоиспытателей и врачей, имѣющему состояться 15—21 сентября въ Дрезденѣ. Памяти Эйлера будетъ посвящено особое засѣданіе, на которомъ будутъ прочитаны рефераты о жизни и научной дѣятельности этого замѣчательнаго математика.

Новый математическій журналъ на интернаціональномъ языкѣ „Эсперанто“. Въ послѣдніе годы нѣкоторые выдающіеся математики съ Лораномъ во главѣ явились ревностными приверженцами идеи международнаго языка „Эсперанто“. Журналъ „L'Enseignement Mathématique“ систематически помѣщалъ статьи, посвященныя пропагандѣ этой идеи. Въ настоящее время рѣшено издавать на этомъ языкѣ международный математическій журналъ („Gazeto Matematika internacia“). Приводимъ переводъ циркуляра, разосланнаго редакціей.

Мы имѣемъ намѣреніе издавать математическій журналъ на эсперантскомъ языкѣ для математиковъ всего міра.

Польза такого изданія не нуждается въ выясненіи, такъ какъ этимъ путемъ математики всѣхъ странъ могутъ получать важныя статьи и сообщенія, и такой журналъ можетъ имѣть больше читателей, чѣмъ національный. Новый журналъ будетъ принимать всякаго рода матеріалъ, относящійся къ математикѣ, механикѣ и теоретической физикѣ, въ формѣ большихъ и малыхъ статей (въ томъ числѣ и педагогическаго содержанія), задачъ, вопросовъ, корреспонденцій, историческихъ, біографическихъ свѣдѣній и т. д. Мы будемъ принимать также переводы статей, уже появившихся на національныхъ языкахъ; отсюда они могутъ быть переведены съ разрѣшенія авторовъ на другіе языки.

Такимъ образомъ существующіе національные журналы будутъ тѣсно связаны другъ съ другомъ, такъ какъ этимъ путемъ статья, написанная на какомъ угодно языкѣ, можетъ въ кратчайшій срокъ быть переведена на всѣ другіе языки. Новый органъ такимъ образомъ рѣшительно не имѣетъ въ виду конкуррировать съ существующими изданіями, а наоборотъ—долженъ служить имъ новой опорой.

Размѣръ и цѣна новаго журнала (Gazeto Matematika internacia) будутъ существенно зависѣть отъ числа подписчиковъ и отъ поступающаго матеріала. Предварительно предполагается назначить цѣну въ 10 марокъ за 12 листовъ; но эта цѣна будетъ понижена или будетъ увеличено число листовъ, если это позволитъ число подписчиковъ.

Мы почтительно просимъ всѣхъ тѣхъ, которые подписались бы на такое изданіе, сообщить намъ имя и адресъ по адресу: F. J. Vaes, Mathenesserlaan, 290—Rotterdam, Holland.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ

„Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 859 (4 сер.). Треугольникъ ABC разсѣченъ прямыми AA', BB', CC', проведенными черезъ вершины. Даны отношенія между отрѣзками на каждой сторонѣ, а именно:

$$\frac{A'B}{A'C}=l,\quad \frac{B'C}{B'A}=m,\quad \frac{C'A}{C'B}=n.$$

Найти отношеніе площади треугольника, образованнаго сѣкущими прямыми, къ площади треугольника ABC.

Проф. В. Ермаковъ (Кіевъ).

№ 860 (4 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\cos^2\alpha+\cos^2x+\cos^2(\alpha+x)=1+2\cos\alpha\cos(\alpha+x).$$

И. Коровинъ (Спб.).

№ 861 (4 сер.). Построить треугольникъ ABC съ острыми углами B и C по даннымъ отрѣзкамъ $BD=m$ и $DC=n$, на которые основаніе BC раздѣляется высотой BD такъ, чтобы окружность Эйлера *) искомаго треугольника отсѣкала на высотѣ BD наименьшій отрѣзокъ.

Н. С. (Одесса).

№ 862 (4 сер.). Найти необходимое и достаточное условіе для того чтобы корни уравненія

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

образовали 1) ариѳметическую, 2) геометрическую или 3) гармоническую **) прогрессію.

(Заимств.).

№ 863 (4 сер.). Суммировать рядъ

$$\cos w+2\cos 2w+3\cos 3w+\ .\ .\ .\ +n\cos nw.$$

(Заимств.).

№ 864 (4 сер.). Съ обрыва надъ пропастью и съ высоты 40 метровъ надъ обрывомъ начинаютъ одновременно свободное паденіе на дно обрыва два камня. Опредѣлить глубину пропасти, если извѣстно, что камни коснулись дна пропасти на $\frac{1}{2}$ секунды одинъ послѣ другого.

Л. Ямпольскій (Одесса).

---

*) Такъ называется окружность, проходящая черезъ средины сторонъ треугольника.

**) Три числа m, n, p образуютъ гармоническую прогрессію, если $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 732 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по радіусу* R *круга описаннаго, биссектрисѣ* $AD=\beta$ *и углу* α *между биссектрисой* AD *и стороной* BC.

Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть O—центръ круга описаннаго, S—точка, въ которой продолженіе биссектрисы встрѣчаетъ окружность, OH—высота треугольника AOS. По свойству биссектрисы $\smile BS=\smile SC$, а потому $OS \perp BC$; кромѣ того, $OA=OS=R$, откуда $OH \perp AS$. Поэтому уголъ SOH равенъ углу между AD и BC, или, называя для большей опредѣленности черезъ α не большій $\frac{\pi}{2}$ уголъ между этими прямыми, $\angle SOH=\alpha$, откуда $\angle AOS=2\alpha$. Отсюда вытекаетъ построеніе: въ кругѣ радіуса R проводимъ изъ центра O радіусы OA и OS подъ угломъ 2α, откладываемъ на AS отрѣзокъ $AD=\beta$ и черезъ D проводимъ прямую, перпендикулярную къ OS до встрѣчи съ окружностью въ B и C. Треугольникъ ABC есть искомый. Для возможности задачи необходимо и достаточно условіе $AD=\beta < AS$. Въ предѣльномъ случаѣ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ остается въ силѣ то же построеніе. При рѣшеніи задачи мы полагали, что дана внутренняя биссектриса. Если бы данная биссектриса AD была внѣшней, то, называя внутреннюю биссектрису въ этомъ случаѣ черезъ AD' и замѣчая, что $\angle D'AD=\frac{\pi}{2}$, мы нашли бы, что $\angle AD'D=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\angle AOS=\pi-2\alpha$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ построеніе нѣсколько видоизмѣняется: проводимъ радіусы OA и OS подъ угломъ $\pi-\alpha$, возставляемъ изъ A перпендикуляръ и на немъ откладываемъ $AD=\beta$ (такъ, чтобы O и D были по разныя стороны AS), наконецъ, проводимъ черезъ D прямую перпендикулярно къ OS до встрѣчи съ окружностью въ B и C. Треугольникъ ABC есть искомый.

А. Круковскій (Черниговъ); *Г. Оганянцъ* (Ялта); *Д. Колянковскій* (Звенигородъ); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *Навакатикянцъ* (Дербентъ); *Н. Агрономовъ* (Ревель).

№ 733 (4 сер.) *Найти общій видъ цѣлаго однороднаго многочлена второй степени относительно* x, y, z, *обладающаго тѣмъ свойствомъ, что числовая его величина не измѣняется при замѣнѣ* x, y, z *черезъ* x+a, y+a, z+a, *гдѣ* a—*произвольное число. Доказать, что многочленъ такого свойства разлагается на двухъ множителей первой степени относительно* x, y, z.

Обозначимъ искомый многочленъ черезъ

$$f(x, y, z)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2 \quad (1).$$

Давая въ формулѣ (1) перемѣннымъ x, y, z нѣкоторыя произвольныя, но вполнѣ опредѣленныя значенія и замѣняя x, y, z черезъ $x+(-z)$, $y+(-z)$, $z+(-z)=0$, получимъ, согласно съ условіемъ,

$$f(x, y, z)=f(x-z, y-z, 0)=A(x-z)^2+B(x-z)(y-z)+C(y-z)^2+D.0+E.0+F.0,$$

т. е.

$$f(x, y, z)=A(x-z)^2+B(x-z)(y-z)+C(y-z)^2 \quad (2).$$

Такъ какъ формула (2) остается вѣрной при произвольныхъ значеніяхъ x, y, z, то искомый многочленъ тожественно равенъ нѣкоторому многочлену вида $A(x-z)^2+B(x-z)(y-z)+C(y-z)^2$; обратно, всякій многочленъ такого вида обладаетъ свойствомъ не измѣнять числовой величины при подстановкѣ вмѣсто x, y, z соотвѣтственно $x+a$, $y+a$, $z+a$. Итакъ, выраженіе

$$A(x-z)^2+B(x-z)(y-z)+C(y-z)^2=$$

$$= Ax^2 + Cy^2 + (A+B+C)z^2 + Bxy - (2A+B)xz - (2C+B)yz \quad (3),$$

гдѣ A, B, C суть произвольныя постоянныя, представляетъ собою общій видъ искомаго многочлена. Если оба коэффиціента A и C равны нулю, то искомый многочленъ разлагается на два линейныхъ множителя $B(x-z)$ и $(y-z)$. Если же одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ, напримѣръ A, не равенъ нулю, то

$$A(x-z)^2 + B(x-z)(y-z) + C(y-z)^2 = (y-z)^2 \cdot \left[A\left(\frac{x-z}{y-z}\right)^2 + B\frac{x-z}{y-z} + C\right] =$$

$$= A(y-z)^2\left(\frac{x-z}{y-z} - \alpha\right)\left(\frac{x-z}{y-z} - \beta\right) = A[x-z-\alpha(y-z)][x-z-\beta(y-z)],$$

гдѣ α и β суть корни квадратнаго уравненія $At^2+Bt+C=0$. Всѣ возможные случаи разложенія обнимаются формулой

$$[m(x-z)+n(y-z)][p(x-z)+q(y-z)] \quad (4),$$

гдѣ m, n, p, q — произвольныя постоянныя. Непосредственная замѣна x, y, z въ выраженіи (1) черезъ $x+a$, $y+a$, $z+a$, приравниваніе соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ до и послѣ замѣны и выключеніе a даютъ, конечно, тѣ же результаты, хотя и въ болѣе симметричной формѣ, но болѣе сложнымъ путемъ. Къ этой симметричной формѣ легко перейти, полагая $A=u$, $C=v$, $A+B+C=w$; тогда выраженіе (3) переходитъ въ $ux^2+vy^2+wz^2+(w-u-v)xy+$ $+(u-v-w)yz+(v-w-u)zx$, гдѣ u, v, w — произвольныя постоянныя; точно также выраженіе (4) можно представить въ болѣе симметричномъ видѣ, а именно $(\lambda x+\mu y+\nu z)(\lambda' x+\mu' y+\nu' z)$, гдѣ произвольныя постоянныя λ, μ, ν и λ', μ', ν' связаны двумя условіями:

$$\lambda+\mu+\nu=0, \qquad \lambda'+\mu'+\nu'=0.$$

Г. Лебедевъ (Обоянь).

№ 739 (4 сер.). ***Построить треугольникъ* ABC *по высотѣ* h_a, *периметру* 2p *и радіусу* r *круга вписаннаго.***

Называя черезъ S площадь, черезъ a сторону BC искомаго треугольника и черезъ α и α' точки прикосновенія вписаннаго круга къ сторонамъ AB и AC, имѣемъ $2s = 2pr = h_a \cdot a$, откуда

$$a = \frac{2pr}{h_a} \quad (1), \quad \text{и} \quad A\alpha = A\alpha' = p - a \qquad (2).$$

Такимъ образомъ, для построенія стороны a искомаго треугольника достаточно найти обычнымъ способомъ (см. (1)) четвертую пропорціональную къ величинамъ $2p$, r, h_a; для построенія угла A искомаго треугольника достаточно отложить (см. (2)) отрѣзокъ $A_1\alpha_1 = p-a$, возставить изъ α_1 перпендикуляръ $\alpha_1 0 = r$ къ $A_1\alpha_1$, описать изъ O радіусомъ r окружность и провести изъ A_1 къ этой окружности вторую касательную $A_1\alpha'_1$. Уголъ $\alpha_1 A_1 \alpha'_1 = \Theta$ равенъ углу A искомаго треугольника. Теперь остается построить треугольникъ по сторонѣ a, соотвѣтствующей высотѣ h_a и противоположному углу Θ. Для этого достаточно, какъ извѣстно, построить на отрѣзкѣ $BC=a$ сегментъ, вмѣщающій уголъ Θ, и провести прямую L параллельно прямой BC въ разстояніи h_a отъ нея и по ту же сторону относительно BC, по которую лежитъ дуга сегмента; пусть A — точка встрѣчи дуги сегмента съ L; треугольникъ ABC есть искомый. Задача имѣетъ одно рѣшеніе или невозможна, смотря по тому, встрѣчаетъ ли L дугу сегмента или нѣтъ (если L встрѣчаетъ дугу сегмента въ двухъ точкахъ, то треугольники ABC, отвѣчающіе каждой изъ двухъ точекъ встрѣчи, равны между собою).

Г. Оганянцъ (Ялта); *Э. Лейнъкъ* (Рига); *А. Турчаниновъ* (Одесса); *В. Булыгинъ.*

№ 746 (4 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по основанію* AC=b *и противолежащему углу* B, *зная положеніе на сторонѣ* AC *(или на ея продолженіи) точки касанія* D *этой стороны съ* 1) *вписаннымъ или* 2) *съ однимъ изъ внѣвписанныхъ круговъ.*

Пусть O—центръ вписаннаго круга, и пусть точка D лежитъ между A и C. Такъ какъ $\angle OAD=\frac{A}{2}$, $\angle OCD=\frac{C}{2}$, то

$$\angle AOC=\pi-\frac{A}{2}-\frac{C}{2}=\pi-\frac{A+C}{2}=\pi-\frac{\pi-B}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2} \quad (1).$$

Изъ равенства (1) вытекаетъ построеніе: на отрѣзкѣ AC строимъ, какъ на діаметрѣ, сегментъ, вмѣщающій уголъ $\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}$, возставляемъ изъ точки D перпендикуляръ до встрѣчи въ O съ дугой этого сегмента, описываемъ изъ O радіусомъ OD окружность и изъ точекъ A и C проводимъ къ ней касательныя до встрѣчи ихъ въ точкѣ B. Треугольникъ ABC есть искомый. Такъ какъ уголъ AOC (см. (1)) тупой, то сумма угловъ OAD и OCD меньше $\frac{\pi}{2}$, а потому сумма угловъ, образуемыхъ касательными изъ точекъ A и C къ окружности O съ AC (со стороны точки O), будучи вдвое болѣе суммы $\angle OAD+\angle OCD$, меньше π, откуда слѣдуетъ, что эти касательныя пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ B, лежащей по ту же сторону AC, какъ и точка O. Если на сторонѣ AC задана точка касанія D внѣвписаннаго круга, то $\angle AOC=\pi-\angle DAO-\angle DCO=\pi-\frac{\pi-A}{2}-\frac{\pi-C}{2}=\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}=$ $=\frac{A+C}{2}=\frac{\pi-B}{2}$ (2). Въ этомъ случаѣ на сторонѣ AC надо построить сегментъ, вмѣщающій уголъ (см. (2)) $\frac{\pi-B}{2}$ (который дополняетъ сегментъ, построенный въ первомъ случаѣ, до полной окружности), а затѣмъ закончить построеніе такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ. Пусть теперь точка D дана на продолженіи AC (напримѣръ, для большей опредѣленности, C лежитъ между A и D). Въ этомъ случаѣ $\angle AOC=\angle OCD-\angle OAD=\frac{\angle BCD}{2}-$ $-\frac{\angle BAD}{2}=\frac{B}{2}$. Слѣдовательно, на AC надо описать сегментъ, вмѣщающій уголъ $\frac{B}{2}$, а затѣмъ закончить построеніе такъ же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ. Въ этомъ случаѣ задача имѣетъ два, одно или вовсе не имѣетъ рѣшеній, смотря по тому, будетъ ли перпендикуляръ, возставленный къ AD изъ D, пересѣкать дугу сегмента, касаться или вовсе не встрѣчаться.

Г. Оганянцъ (Ялта); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.

ВЫШЛИ ВЪ СВѢТЪ СЛѢДУЮЩІЯ ИЗДАНІЯ:

1 и 2. Г. АБРАГАМЪ, проф. **СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ**, составленный при участіи многихъ профессоровъ и преподавателей физики. Переводъ съ французскаго подъ редакціей Привать-доцента *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: Работы въ мастерской. Различные рецепты—Геометрія. Механика—Гидростатика. Гидродинамика. Капиллярность—Теплота—Числовыя таблицы.

Учен. Ком. М. Н. Пр. допущено въ учен. библ. средн. учебн. заведеній, учит. семинарій и гор. по Положенію 31 мая 1872 г., училищъ, а равно и въ безп. нар. читальни и библіотеки.

XVI+272 стр. Со многими (свыше 300) рисунками. Цѣна 1 р. 50 к.

Часть II: Звукъ—Свѣтъ—Электричество—Магнитизмъ.

LXXV+434 стр. Со многими (свыше 400) рисунками. Цѣна 2 р. 75 к.

3. С. АРРЕНІУСЪ, проф. **ФИЗИКА НЕБА.** Разрѣшенный авторомъ и дополненный по его указаніямъ переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*. Содержаніе: Неподвижныя звѣзды—Солнечная система—Солнце—Планеты, ихъ спутники и кометы—Космогонія.

VIII+250 стр. Съ 66 черными и 2 цвѣтными рисунками въ текстѣ и 1 черной и 1 цвѣтной отдѣльными таблицами. Цѣна 2 руб.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

4. **УСПѢХИ ФИЗИКИ**, сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи. Подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики". Содержаніе: *Винеръ*, Расширеніе нашихъ чувствъ—*Пильчиковъ*. Радій и его лучи—*Дебіернъ*, Радій и радіоактивность—*Рихарцъ*, Электрическія волны—*Слаби*, Телеграфированіе безъ проводовъ—*Шмидтъ*, Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

IV+144 стр. Съ 41 рисункомъ и 2 таблицами. Изд. 2-е. Цѣна 75 коп

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

5 Ф. АУЭРБАХЪ, проф. **ЦАРИЦА МІРА И ЕЯ ТѢНЬ.** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ *энергіи и энтропіи*. Переводъ съ нѣмецкаго. Съ предисловіемъ *Ш. Э. Гильома*, Вице-Директора Международнаго Бюро Мѣръ и Вѣсовъ.

VIII+56 стр. Изд. 2-е. Цѣна 40 к.

Учен. Ком. М. Н. П. первое изданіе допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

6. С. НЬЮКОМЪ, проф. **АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ**. Переводъ съ англійскаго. Съ предисловіемъ Приватъ-доцента *А. Р. Орбинскаго*.

XXIV+285 стр. Съ портретомъ Автора, 64 рис. и 1 таблицей Цѣна 1 р 50 к.

Учен. Ком. М. Н. П. допущено въ учен., старш. возр., библ. средн. учебн. заведеній, а равно и въ безпл. нар. библ. и читальни.

7. Г. ВЕБЕРЪ и І. ВЕЛЬШТЕЙНЪ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Томъ I. Энциклопедія элементарной алгебры,** обраб. проф. *Веберомъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей Приватъ-доцента *В. Ф. Кагана*. Книга I, **Основанія ариѳметики**, гл. I—X. Книга II. **Алгебра**, гл. XI—XIX. Книга III. **Анализъ**. гл. XX—XXVIII 650 стр. **Цѣна 3 р. 50 к.**

Выпусками: вып. I, стр. 256, ц. **1 р. 50 к.**, вып. II окончаніе, ц. **2 р.**

8. Дж. ПЕРРИ, проф. **ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ.** Публичная лекція. Переводъ съ англійскаго. VII+96 стр. съ 63 рисунками. **Цѣна 60 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

9. Р. ДЕДЕКИНДЪ, проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** Переводъ Приватъ-доцента *С. Шатуновскаго* съ приложеніемъ его статьи **Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ.** 40 стр. **Цѣна 40 к.**

Учен. Ком. М. Н. Пр. признана заслуживающей вниманія при пополненіи учен. библ. средн. учебн. заведеній.

10. К. ШЕЙДЪ, проф. **ПРОСТЫЕ ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ для юношества.** Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей Лаборанта Новороссійскаго Университета *Е. С. Ельчанинова*. 192 стр. съ 79 рисунками. **Цѣна 1 р. 20 к.**

11. Э. ВИХЕРТЪ, проф. **ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ.** Лекціи для преподавателей средн. учебн. заведеній. Переводъ съ нѣмецкаго.

80 стр. съ 41 рис. Цѣна 35 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ: КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ"

Одесса, Типографія М. Шпенцера, Новосельская 66.