№ 428.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVI-го Семестра № 8-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

XXXVI Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 428.

Введеніе въ геодезію.

Профессора Э. Вихерта.

Лекціи для преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній.

*(Продолженіе *).*

§ 6. *Болѣе крупныя съемки; тріангуляція.*

При съемкахъ болѣе значительныхъ мѣстъ (напр. свыше четверти квадратнаго километра) даже примѣненіе ходовыхъ линій не обезпечитъ достаточной точности. Въ такихъ случаяхъ въ основу съемки кладутъ „*тріангуляцію*“

Какъ вамъ извѣстно, въ этомъ случаѣ по всей поверхности снимаемой мѣстности выбирается система точекъ и въ получающихся между ними треугольникахъ измѣряются углы (фиг. 28), что позволяетъ, разъ будетъ измѣрена одна сторона, опредѣлить также относительное положеніе всѣхъ остальныхъ точекъ этой сѣти. При тщательныхъ работахъ измѣряютъ какъ можно больше этихъ угловъ, пользуясь затѣмъ излишкомъ наблюденій для выравниванія ошибокъ наблюденій по способу наименьшихъ квадратовъ.

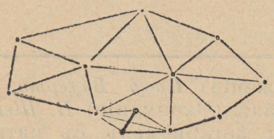
Та сторона, которая измѣряется непосредственно (она отмѣчена на рисункѣ жирной чертой), называется *базисомъ* системы.

---

* См. №№ 425—426 „Вѣстника“.

Базисъ располагаютъ въ возможно удобномъ мѣстѣ и его измѣряютъ со всей возможной тщательностью, отъ которой зависитъ точность всей этой системы. Затѣмъ остается только выполнить измѣреніе угловъ, что при помощи теодолита можно сдѣлать очень удобно и со всей желаемой точностью.

Дальнѣйшимъ шагомъ въ отношеніи измѣреній деталей является включеніе въ тригонометрическую сѣть сѣти полигонометрической, причемъ тригонометрическіе пункты, а затѣмъ уже опредѣленные полигонометрическіе пункты связываются ходовыми линіями; это продолжается до тѣхъ поръ, пока не получится достаточная сѣть магистралей.



Фиг. 28.

Вамъ ясно такимъ образомъ, что тріангуляція представляетъ какъ бы остовъ съемки. Она удобна для этого, такъ какъ ея линіи могутъ идти высоко надъ тѣми препятствіями, которыя такъ отягощаютъ съемочную работу на самой землѣ. Съ другой стороны, именно поэтому необходимо связывать тригонометрическіе пункты линіями, доступными для съемки; это не всегда возможно при помощи прямыхъ линій, и въ такомъ случаѣ естественно выступаютъ ходовыя линіи.

При съемкѣ шоссейныхъ и желѣзныхъ дорогъ, рѣкъ и каналовъ нужно стремиться примыкать къ тригонометрической сѣти своими ходовыми линіями, такъ какъ на большомъ протяженіи онѣ сами по себѣ скоро могутъ начать давать неправильныя направленія. Эту тригонометрическую сѣть даетъ обыкновенно государственная съемка, о которой я буду говорить ниже.

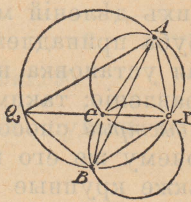
Преимущества тріангуляціи, какъ основы для съемки, выступаютъ тѣмъ больше, чѣмъ больше будутъ ея треугольники, но при этомъ уменьшается также число точекъ. которыя она даетъ для дальнѣйшей съемки и увеличиваются разстоянія между этими точками. Для устраненія этого неудобства область съемки покрываютъ сначала сѣтью очень крупныхъ треугольниковъ, которую обрабатываютъ и прочисляютъ отдѣльно, а затѣмъ въ петли этой сѣти вплетаютъ болѣе тѣсную сѣть, уже не самостоятельную, а опирающуюся на первую. Такимъ образомъ мы получаемъ такія группы вспомогательныхъ точекъ для съемки, расположенныя въ порядкѣ ихъ послѣдовательной подчиненности: точки основной тріангуляціи, точки вспомогательной тріангуляціи, точки излома ходовыхъ линій, точки связей магистралей, точки основаній координатъ. Въ этомъ порядкѣ проявляется *важный принципъ: при съемкѣ всегда переходятъ отъ большаго къ меньшему, а не наоборотъ.* Его значеніе состоитъ въ томъ, что онъ предохраняетъ отъ накопленія ошибокъ наблюденій.

При опредѣленіи положеній новыхъ точекъ съ помощью тріангуляціи приходится встрѣчаться главнымъ образомъ съ тремя случаями, которыя я укажу вкратцѣ.

1) *Изъ двухъ данныхъ точекъ* (A *и* B) *для опредѣленія точки* X *измѣряютъ углы треугольника* XAB *и* XBA. Этотъ пріемъ въ практикѣ называютъ „*засѣчкой впередъ*". Ему соотвѣтствуетъ, какъ вы видите, тригонометрическая задача рѣшенія треугольника по данной сторонѣ и угламъ.

2) Также вычисляется случай „*засѣчки въ сторону*", когда промѣряются углы треугольника при опредѣляемой точкѣ и при одной изъ двухъ данныхъ точекъ.

3) Но особенно интересной и очень поучительной для школы является задача опредѣленія точки, когда измѣренія угловъ были сдѣланы только на самой опредѣляемой точкѣ, когда приходится прибѣгнуть къ такъ называемой „*обратной засѣчкѣ*". Если измѣрить изъ X уголъ между двумя данными точками A и B, то теорема объ углахъ, опирающихся на окружность, даетъ для геометрическаго мѣста X кругъ, проходящій чрезъ A и B. Отсюда слѣдуетъ, что *необходимо визировать по крайней мѣрѣ на три извѣстныхъ точки*. Если это будутъ A, B и C, то X получится, какъ точка пересѣченія трехъ круговъ (Фиг. 29). Вамъ ясно, что этотъ пріемъ будетъ непригоденъ, если точка X лежитъ на кругѣ, проходящемъ чрезъ A, B и C, и что опредѣленіе будетъ тѣмъ менѣе точно, чѣмъ ближе X къ этому кругу. Поэтому его называютъ „*опаснымъ кругомъ*".



Фиг. 29.

Для рѣшенія этой задачи путемъ вычисленія есть много путей. Особенно интересно примѣненіе *вспомогательной точки Коллинса*. Такъ называется точка пересѣченія прямой, соединяющей опредѣляемую точку и одну изъ данныхъ точекъ, съ кругомъ, который проходитъ чрезъ искомый пунктъ и двѣ другія данныя точки; такимъ образомъ, вообще ихъ получается въ каждомъ случаѣ три. Если напр. Q_3 есть вспомогательная точка *Коллинса* на линіи XC, то изъ теоремы объ углахъ, опирающихся на окружность, слѣдуетъ непосредственно, что $\angle Q_3AB = \angle CXB$ и $\angle Q_3BA = \angle CXA$. Въ треугольникѣ ABQ_3, такимъ образомъ, извѣстны одна сторона (AB) и углы; этимъ опредѣляется положеніе *Коллинсовой* точки Q_3, что позволяетъ для любого изъ треугольниковъ XAC, XBC, XAQ_3, XBQ_3 дать сторону и углы; этого достаточно для вычисленія положенія X.

Задачу обратной засѣчки часто называютъ по имени Потенота; но это несправедливо, такъ какъ голландецъ Снелліусъ гораздо раньше разобралъ эту задачу какъ съ практической, такъ и съ вычислительной стороны. Рѣшеніе Потенота было дано въ 1692 году, а Снелліусъ указалъ свое уже въ 1617 году.

§ 7. *Измѣренія въ полярныхъ координатахъ; тахиметрія*

Для отдѣльныхъ съемокъ предметовъ въ полѣ, для частичныхъ съемокъ мы прибѣгали до сихъ поръ къ употребленію прямоугольныхъ координатъ. Вмѣсто послѣднихъ, иногда обращаются также къ *полярнымъ координатамъ*, т. е. опредѣляютъ разстоянія отъ какой нибудь „начальной точки“ и направленія относительно какой-нибудь опредѣленно выбранной линіи. Если-бы при этомъ для измѣренія разстояній приходилось пользоваться мѣрной лентой, то этотъ пріемъ на практикѣ стоилъ-бы въ большинствѣ случаевъ очень мало, такъ какъ при этомъ приходилось бы, такъ сказать, мѣрять черезъ пень колоду; но дѣло принимаетъ совсѣмъ другой оборотъ, если пользоваться „*дальномѣромъ*“. Чаще всего послѣдній состоитъ въ сущности изъ зрительной трубы, перекрестныя нити которой дополняются двумя неподвижными горизонтальными параллельными „*дальномѣрными нитями*“, и раздѣленной рейки. Зрительная труба устанавливается въ избранной начальной точкѣ, а рейка ставится въ вертикальномъ положеніи на всѣхъ опредѣляемыхъ точкахъ. Чѣмъ больше разстояніе, тѣмъ большая часть рейки помѣщается между дальномѣрными нитями и изъ отсчета этихъ дѣленій можно получить разстояніе. Если эта зрительная труба принадлежитъ угломѣрному теодолиту, то каждая отдѣльная установка на рейку одновременно даетъ и разстояніе, и направленіе; такимъ образомъ получается необыкновенно удобный и *быстрый* способъ съемки, „*тахиметрія*“. Вы, пожалуй, спросите почему же его не примѣняютъ всегда. А потому, что у него есть также крупные недостатки. Во-первыхъ, для этого требуются болѣе цѣнные инструменты, и во-вторыхъ, и это самое важное—его точность не велика. Здѣсь можно разсчитывать на точность не свыше нѣсколькихъ десятыхъ процента, а это часто недопустимо. Но когда это допустимо, какъ напримѣръ, при подготовительныхъ работахъ по постройкѣ шоссейныхъ и желѣзныхъ дорогъ, то тогда тахиметрія оказываетъ превосходныя услуги. Въ этихъ случаяхъ мѣряютъ тахиметрически и ходовыя линіи. Такъ какъ, далѣе, теодолитъ, снабженный кругомъ высотъ и уровнемъ для нивелированія, даетъ также высоты, то съ такимъ инструментомъ можно получать самымъ удобнымъ образомъ всѣ необходимыя данныя.

Теперь я долженъ сдѣлать еще нѣсколько *указаній на особенности тахиметрическихъ съемокъ*, которыя покажутъ вамъ, какой простой видъ въ этомъ случаѣ принимаетъ теорія и ея приложеніе къ практикѣ.

Что касается *теоріи*, то допустимъ прежде всего, что визировка вертикально-стоящей рейки происходитъ при *горизонтальномъ положеніи* трубы съ дальномѣромъ. Пусть рейка находится въ L (Фиг. 30), объективъ трубы въ Q, и пара дальномѣрныхъ нитей въ D. Пусть M будетъ ось инструмента, отъ которой мы будемъ мѣрять разстоянія, т. е. пусть это будетъ начальная точка нашихъ координатъ. Пусть (постоянное) разстояніе дальномѣрныхъ нитей будетъ d; помѣщающаяся между ними часть рейки пусть будетъ l; l есть, слѣдовательно, отсчетъ, изъ котораго получается разстояніе x рейки. Значеніе a b, и e ясно изъ чертежа; наконецъ, f пусть означаетъ фокусное разстояніе объектива.

Такъ какъ трубу надо устанавливать каждый разъ на отчетливое зрѣніе, то b мѣняется съ x. По законамъ собирательныхъ стеколъ,

$$1/a + 1/b = 1/f \text{ и } l/d = a/b;$$

имѣемъ:

$$a = bl/d = b\ (a - f)/f;$$

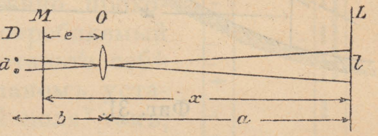
слѣдовательно,

$$a - f = fl/d.$$

Въ силу того, что $x = a + e$, отсюда получается

$$x = f + e + l\frac{f}{d}.$$

Здѣсь $f + e$ и f/d представляютъ собою опредѣленныя разъ навсегда постоянныя тахиметра; *такимъ образомъ, искомое разстояніе x находится въ линейной зависимости отъ отсчета l.* Если мы обозначимъ для сокращенія $c = f + e$, $k = f/d$, то наша *тахиметрическая формула для горизонтальнаго визированія* будетъ имѣть видъ



Фиг. 30.

$$x = c + kl.$$

Въ этой формулѣ $c = f + e$ мы будемъ называть *постоянной поправкой тахиметра*, а $k = f/d$ *коэффиціентомъ* его. На практикѣ, соотвѣтственнымъ выборомъ разстоянія нитей, коэффиціентъ подводятъ къ круглому числу $= 50$, $= 100$ или $= 200$; *подсчитавъ число паръ сантиметровъ или полусантиметровъ на рейкѣ L, мы получимъ членъ kl опредѣляемаго разстоянія x. Чтобы получить послѣднее, нужно будетъ прибавить постоянную поправку* $c = f + e$, величина которой опредѣляется разъ навсегда непосредственнымъ измѣреніемъ f и e. Если k недостаточно близко подходитъ къ выбранному круглому числу, то полученный результатъ надо будетъ соотвѣтственно поправить.

Если рейка стоитъ значительно выше или ниже зрительной трубы, то послѣднюю для отсчета придется ставить наклонно. Пусть уголъ этого наклона будетъ i. Рейку и теперь ставятъ вертикально (Фиг. 31), а не нормально къ направленію визированія, такъ какъ это было бы практически неудобно. Поэтому отсчетъ получается теперь въ $(1/\cos i)$ разъ больше того, который долженъ соотвѣтствовать разстоянію отъ инструмента. Послѣднее, въ свою очередь, въ $1/\cos i$ разъ больше, чѣмъ разстояніе на планѣ въ горизонтѣ, которое только и нужно намъ. *Такимъ обра-*

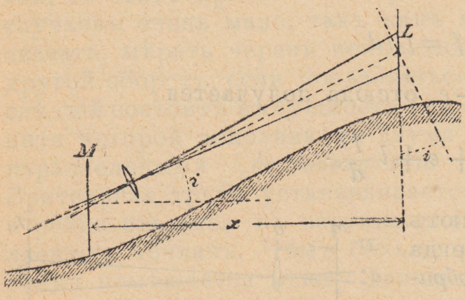
зомъ для наклоннаго визированія мы получаемъ формулу тахиметра:

$$x = (c + kl)\cos^2 i,$$

вмѣсто прежней формулы

$$x = c + kl.$$

Рейкой для тахиметра при небольшихъ разстояніяхъ (до 50 или 100 метровъ) можетъ служить обыкновенная рейка для нивелированія съ сантиметровыми дѣленіями, но при бо́льшихъ разстояніяхъ нужно брать рейки съ рѣзкими отчетливыми дѣленіями въ 5 или 10 сантиметровъ. Здѣсь (Фиг. 32а) на рейкѣ въ 4 метра длиною вы имѣете дѣленія для тахиметра въ видѣ штриховъ толщиною въ 8 миллиметровъ, нанесенныхъ черной краской на бѣломъ фонѣ. Можно рекомендовать также дѣленіе на полосы (Фиг. 32b), какія вы уже видѣли въ простѣйшемъ видѣ на вѣхахъ (Фиг. 1).



Фиг. 31.

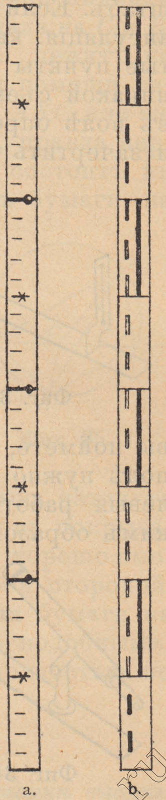
Прибавленіе цифръ къ этимъ дѣленіямъ не имѣетъ особаго значенія, такъ какъ на большихъ разстояніяхъ отсчетъ ихъ не можетъ быть вѣренъ. Приходится ограничиваться тѣмъ облегченіемъ отсчета, какое даютъ на этихъ образцахъ (фиг. 32, а также фиг. 39) особыя мѣтки.

§ 8. *Мензульныя съемки.*

Описанные до сихъ поръ способы съемки имѣютъ то общее, что въ нихъ ситуаціонный планъ изготовляется на основаніи полевыхъ работъ только впослѣдствіи, иногда послѣ извѣстныхъ вычисленій. Но существуетъ очень интересный способъ чертить ситуаціонный планъ непосредственно въ полѣ; это—такъ называемая „*мензульная съемка*". На практикѣ она въ настоящее время отступаетъ нѣсколько на задній планъ, но для всѣхъ насъ она имѣетъ большое значеніе въ одномъ отношеніи: именно, она лежитъ въ основѣ топографическихъ съемокъ прусскаго Генеральнаго Штаба. Ему мы обязаны непосредственно „*мензульными листами*" въ масштабѣ 1:25000, которые вамъ, конечно, извѣстны. Такъ какъ, кромѣ того, этотъ пріемъ представляетъ особенно поучительное приложеніе геометріи и требуетъ незначительныхъ денежныхъ средствъ, то я долженъ обратить на него ваше вниманіе.

Бумага для вычерчиванія плана затягивается на „*планшетъ*", верхнюю доску мензулы. Планшетъ долженъ быть совершенно плоскимъ и имѣетъ большею частью квадратную форму. Стоящая передъ вами мензула имѣетъ 55×55 сантиметровъ. Для съемки планшетъ устанавливается на глазъ—или лучше при помощи уровня—горизонтально. Лучшей подставкой для планшета является трекога; очень хорошо можетъ пригодиться штативъ фотографической камеры, если только онъ достаточно проченъ. Для работъ необходимо, чтобы планшетъ можно было легко вращать и закрѣплять на его подставкѣ.

Черченіе производятъ при помощи линейки, снабженной приспособленіемъ для визированія. Послѣднее въ крайнемъ случаѣ можетъ состоять изъ пары воткнутыхъ въ линейку иголъ. Лучше—и для школы всегда достаточенъ—діоптръ съ глазнымъ прорѣзомъ и предметнымъ волоскомъ, съ которымъ вы познакомились въ эккирѣ. Такую *линейку* или *алидаду съ діоптромъ* вы видите на фиг. 33. Если требуется большая точность, какъ въ съемкахъ Генеральнаго Штаба, то для визированія пользуются зрительной трубой; такимъ образомъ получается „*кипрегель*", подобный изображенному на фиг. 34, получившій свое имя (нѣмецкое) отъ того, что его труба должна имѣть движеніе около горизонтальной оси. Его плоскость визированія должна непремѣнно проходить какъ разъ черезъ край линейки, употребляемый для прочерчиванія линій. Теперь представьте себѣ мензулу съ отчасти уже нанесеннымъ планомъ, установленную надъ какой-нибудь точкой поля такъ, чтобы соотвѣтственная точка чертежа приходилась какъ разъ надъ нею и чтобы чертежъ былъ оріентированъ соотвѣтственно дѣйствительности, т. е. чтобы каждая линія чертежа шла параллельно соотвѣтственной линіи въ полѣ. Какъ разъ въ этой точкѣ чертежа мы втыкаемъ тонкую стальную иглу (швейную иголку, у которой для удобства придѣлана головка изъ сургуча), прикладываемъ къ ней краемъ визирную линейку, визируемъ послѣдовательно на тѣ точки поля, которыя должны быть нанесены на планъ, и каждый разъ проводимъ соотвѣтственную линію. *На чертежѣ получается пучекъ прямыхъ линій, который представляетъ проекцію соотвѣтственнаго пучка линій въ полѣ.* Для каждой изъ снимаемыхъ точекъ поля это дастъ геометрическое мѣсто. Для того, чтобы получить самыя точки, можно *либо опредѣлить разстоянія ихъ отъ мѣста установки въ полѣ и затѣмъ откладывать эти разстоянія на соотвѣтственныхъ линіяхъ, уменьшивъ согласно избранному масштабу, либо же можно установить мензулу надъ другой точкой поля и провести здѣсь другой пучекъ такихъ же линій.* Если вы припомните сказанное относительно тріангуляціи, то вы замѣтите, что мы получаемъ во второмъ случаѣ точки чертежа при помощи „*засѣчки впередъ*" или „*прямой засѣчки*".

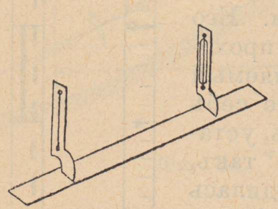


Фиг. 32a и 32b.

Опредѣленіе точекъ чертежа при помощи откладыванія разстояній является особенно удобнымъ, если—какъ это бываетъ при съемкахъ прусскаго Генеральнаго Штаба—пользоваться кипрегелемъ, зрительная труба котораго снабжена дальномѣрными нитями. Но его можно также рекомендовать и въ другихъ случаяхъ, напр. для зачерчиванія отрѣзковъ ходовыхъ линій.

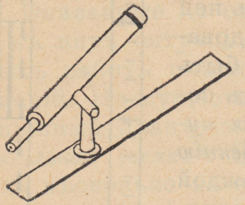
Я ввелъ васъ сразу въ самую средину съемки. Разсмотримъ же теперь прежде всего подготовительныя работы для начала съемки, а затѣмъ разберемъ подробнѣе отдѣльно вопросы самой работы.

Прежде чѣмъ перейти къ съемкѣ, нужно рѣшить, какъ долженъ лежать чертежъ на бумагѣ и окончательно выбрать масштабъ. Если существуютъ уже съемки другого рода—напр. тріангуляція, какъ при съемкахъ генеральнаго штаба—то уже снятые пункты зарисовываютъ на бумагу какъ можно точнѣе. Если никакой съемки еще не существуетъ, то нужно непосредственно въ полѣ опредѣлять разстояніе, по крайней мѣрѣ, двухъ точекъ и зачертить эти двѣ точки въ правильномъ масштабѣ.



Фиг. 33.

Теперь можно приступить къ съемкѣ на мензулѣ. *При всякой ея установкѣ, выбранный заранѣе пунктъ поля долженъ приходиться какъ разъ подъ соотвѣтственной точкой чертежа.* Если этого не будетъ, то начерченный пучекъ прямыхъ линій будетъ отвѣчать не выбранному заранѣе, а другому пункту поля, находящемуся какъ разъ подъ взятой точкой чертежа. Изъ этихъ соображеній вы поймете, что при опредѣленіи выбраннаго пункта чертежа въ полѣ нужно стремиться только къ точности, какую имѣютъ полевыя работы, а не къ гораздо большей точности чертежа. Такимъ образомъ для опредѣленія положенія точки чертежа достаточно будетъ визировки по отвѣсу, который подвѣшивается съ разныхъ сторонъ возлѣ мензулы; для этого удобнѣе такъ называемая „*вилка съ отвѣсомъ*“, которая имѣетъ на верхнемъ концѣ остріе для отмѣтокъ, а подъ нимъ отвѣсъ.—*Затѣмъ мензульный чертежъ долженъ быть оріентированъ параллельно линіямъ дѣйствительнаго плана.* Для того, чтобы достичь этого, визирную линейку, приложивъ ее къ иглѣ, наводятъ на какой-нибудь уже зачерченный пунктъ и затѣмъ вращаютъ планшетъ, пока соотвѣтственная точка поля не появится въ визирной плоскости.



Фиг. 34.

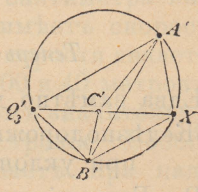
Я принималъ до сихъ поръ, что изображеніе точки, выбранной для установки надъ нею мензулы, уже есть на чертежѣ. Если этого на самомъ дѣлѣ нѣтъ, то сперва нужно опредѣлить эту точку чертежа при помощи визировки на извѣстныя точки. Передъ нами стоитъ теперь, какъ это вамъ ясно, задача „*засѣчки назадъ*“ или „*обратной засѣчки*“. Ея рѣшеніе можно получить весьма разнообразными способами, напр. при помощи *Коллинсовой* вспомогательной точки. Пусть A, B, C будутъ, какъ раньше (фиг. 29), визированныя точки поля, X точка установки, Q_3 *Коллинсова* вспомогательная точка на линіи XC. Соотвѣтственныя точки чертежа мы обозначимъ черезъ A', B', C', X', Q'_3 (фиг. 35). Теперь намъ извѣстны только $A', B', C',$ и нужно найти X'. Для этого мы сначала строимъ Q'_3; такъ какъ

$$< Q'_3A'B' = < Q'_3X'B' = < CXB$$

и

$$< Q'_3B'A' = < Q'_3X'A' = < CXA,$$

то это нетрудно сдѣлать, нанеся при помощи визирной линейки углы CXB и CXA, прилегающіе къ $A'B'$, визируя сначала на C и B, а затѣмъ на C и A. Теперь намъ извѣстно, что X' лежитъ на Q'_3C', и мы можемъ найти самое X', опредѣливъ при помощи визирной линейки ту точку, для которой $< A'X'C' = < AXC$ или же $< B'X'C' = < BXC$. Другой способъ опредѣленія X', правда первобытный, но практически очень цѣлесообразный, состоитъ въ томъ, что на планшетъ накладываютъ другой кусокъ бумаги, на которомъ, при произвольномъ положеніи планшета, зачерчиваютъ при помощи визирной линейки пучекъ прямыхъ, идущихъ отъ X къ нѣсколькимъ уже нанесеннымъ на чертежѣ точкамъ, и затѣмъ двигаютъ эту бумагу на планшетѣ, пока каждая прямая на ней не пройдетъ черезъ соотвѣтственную точку. Точка пересѣченія пучка прямыхъ дастъ X'.



Фиг. 35.

Для успѣшности мензульной съемки, естественно, въ высшей степени важно, чтобы бумага была натянута хорошо и прочно. Обыкновенно на практикѣ планшетъ покрываютъ взбитой въ пѣну смѣсью воды и бѣлка, затѣмъ хорошо смоченную бумагу надавливаютъ на планшетъ мокрой стороной, начиная со средины, и наконецъ приклеиваютъ края бумаги на бокахъ планшета гуммиарабикомъ или чѣмъ-нибудь подобнымъ. Такимъ образомъ бумага пристаетъ всей своей поверхностью, но позднѣе легко можетъ быть снята.

§ 9. *Неровности.*

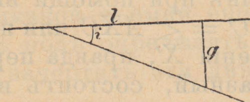
Теперь мы перейдемъ отъ съемки въ горизонтѣ къ съемкѣ высотъ. Наша работа упростится въ томъ смыслѣ, что намъ придется имѣть дѣло только съ однимъ измѣреніемъ.

Замѣтимъ прежде всего, что измѣненія высотъ при съемкѣ бываютъ большею частью гораздо меньше соотвѣтственныхъ горизонтальныхъ перемѣщеній, но что они соотвѣтственно гораздо больше замѣтны намъ. Это станетъ яснѣе, если мы представимъ себѣ уклоны земной поверхности, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло.

Угломъ „*уклона*“, „*паденія*“, „*обрыва*“ или, короче, „*уклономъ*“, „*паденіемъ*“, „*обрывомъ*“ называютъ уголъ разсматриваемой поверхности съ горизонтомъ. На моемъ чертежѣ (фиг. 36) онъ обозначенъ черезъ i. Если l обозначаетъ перемѣщеніе по горизонту, g измѣненіе высоты, то $g:l$ называется „*паденіемъ*“ или „*подъемомъ*“, смотря по тому, имѣется ли въ въ виду пониженіе или повышеніе. Такимъ образомъ

$$\text{паденіе} = \text{подъемъ} = \frac{g}{l} = tgi.$$

При заданіяхъ обыкновенно принимаютъ $g = 1$. Въ такомъ случаѣ l въ уклонѣ $1:l$ даетъ разстояніе, на которое нужно перемѣститься въ горизонтальномъ направленіи, чтобы высота измѣнилась на 1 метръ.



Фиг. 36.

Для дорогъ уклоны часто даютъ въ видѣ процентовъ; въ этомъ случаѣ подъ числомъ p процентовъ разумѣютъ процентное отношеніе g къ l:

$$p = 100 \cdot \frac{g}{l} \cdot$$

Теперь еще нѣсколько указаній по части практики:

Едва замѣтно для глаза паденіе въ . . . . 1:300.

Желѣзнодорожные вагоны начинаютъ катиться сами при уклонѣ въ . . . . 1:200.

Въ Германіи на *желѣзныхъ дорогахъ* допускаются уклоны на равнинахъ не свыше 1:200,
въ холмистой мѣстности „ 1:100,
въ горахъ „ „ „ . . . . 1:40.

Для большихъ *шоссейныхъ дорогъ* въ Пруссіи допускаются уклоны на равнинахъ не свыше . . . . 1:40.
въ горахъ „ „ 1:20;
на менѣе важныхъ дорогахъ они доходятъ до 1:15,
или даже до . . . . 1:10.

На *картахъ для велосипедистовъ* дороги съ уклономъ въ . 1:20 отмѣчаются, какъ опасныя; для *телѣгъ* опасны дороги съ уклономъ отъ . . . . , . . 1:6.

Мулъ можетъ одолѣвать еще подъемы въ . . . . . . 1:1,8.

Человѣкъ съ трудомъ только подымается по тропинкѣ съ уклономъ 1:1²/₃,
и съ трудомъ взлѣзаетъ на обрывъ, покрытый газономъ, въ . . . . 1:1,43.

Среднее пониженіе *западно-германской низменности* отъ Вигенскихъ горъ до берега моря составляетъ около 1:4000.

Паденіе равнины По отъ Альповъ къ рѣкѣ составляетъ около 1:400;
такія же незначительныя повышенія мы находимъ и въ другихъ низменностяхъ.

Въ *горныхъ долинахъ* уклонъ въ 1:40
может уже считаться довольно крутымъ.

Подъемы круче 1:1
рѣдко встрѣчаются и въ горахъ.

Для *движеній войскъ* при 20°, отвѣчающихъ уклону въ . 1:2,7,
начинаются замѣтныя затрудненія; поэтому у военныхъ различаютъ уклоны ниже и выше 20°, подъ названіемъ „*скатовъ*" и „*обрывовъ*".

Паденіе Рейна составляетъ

возлѣ Базеля 1:1000,
возлѣ Мангейма 1:9000,
возлѣ Кельна . . . . 1:5000.

Миссиссиппи имѣетъ паденіе при впаденіи Огайо около 1:10000,
а возлѣ Новаго Орлеана паденіе въ . . . . . . 1:50000.

Несмотря на такое ничтожное паденіе — 2 сантиметра на 1 километръ—ея теченіе около Новаго Орлеана имѣетъ скорость 1,8 метра въ 1 секунду. Большая величина этой скорости является слѣдствіемъ большой ширины и глубины рѣки (800 и 40 метровъ). Чѣмъ больше поперечное сѣченіе ложа рѣки, тѣмъ значительнѣе бываетъ и скорость вслѣдствіе уменьшенія тренія. Вообще можно принять, что граница *судоходности* бываетъ при паденіи отъ . . . . 1:1000 до 1:500
и что при паденіи въ 1:2000
въ благопріятныхъ случаяхъ движеніе можетъ совершаться подъ парусами.

Въ заключеніе еще нѣсколько данныхъ относительно *сельскаго хозяйства*: обработка поля плугомъ при . 1:6
дѣлается трудной, а употребленіе жатвенной машины затрудняется при . . . . 1:10.

Для дренажа берутъ возможно большій уклонъ отъ . 1:1000
до . . . . 1:10.

Эти числа ясно показываютъ намъ, что при опредѣленіи разницы высотъ вообще нужно стремиться къ гораздо большей точности, чѣмъ при измѣреніи длинъ въ горизонтѣ. Часто бываетъ необходимо принимать въ разсчетъ миллиметры или даже десятыя доли миллиметровъ.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Элементарное ученіе объ электрическомъ потенціалѣ.

П. Шепелева.

*(Окончаніе *).*

Разсмотримъ еще одинъ случай, который представится намъ впослѣдствіи. Пусть въ точкѣ A (фиг. 14) находится проводникъ весьма малыхъ размѣровъ, заряженный электричествомъ. Опредѣлимъ, какой потенціалъ v наведетъ этотъ проводникъ на шарѣ радіуса R съ центромъ въ точкѣ O. Съ этою цѣлью разбиваемъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, поверхность шара на зоны CC_1, $C_1C_2, \ldots CC'_1$, $C'_1C'_2, \ldots$ и т. д. Такъ какъ всѣ точки любой зоны, напр. CC_1, одинаково удалены отъ точки A, то на всѣхъ точкахъ этой зоны наведется одинъ и тотъ же потенціалъ v_1, равный

$$v_1 = \frac{1}{k}\,\frac{e}{AC},$$

гдѣ e зарядъ проводника A. Но такъ какъ различныя зоны не одинаково удалены отъ проводника A, то наведенные на нихъ потенціалы не одинаковы. Вслѣдствіе этого начнется переходъ электричества съ одной зоны на другую, пока вся шаровая оболочка не приметъ нѣкотораго средняго потенціала. Задача о нахожденіи послѣдняго, очевидно, подобна слѣдующей задачѣ. Пусть имѣется три сорта товара: 1-го сорта 20 фунт. по 50 коп., 2-го сорта 10 фунт. по 40 коп. и 3-го—15 ф. по 30 к. Найти среднее значеніе стоимости фунта товара. Очевидно, нужно образовать сумму $50.20 + 40.10 + 30.15$ и раздѣлить ее на общее число фунтовъ товара, т. е. на $20 + 10 + 15$. Такимъ же образомъ надо рѣшать задачу о нахожденіи средняго потенціала проводящей оболочки шара. Единица поверхности зоны CC_1 имѣетъ потенціалъ $v_1 = \frac{1}{k}\,\frac{e}{AC}$, ея поверхность есть $2\pi\, CD.\,CC_1$. Далѣе единица поверхности зоны C_1C_2 имѣетъ потенціалъ $v_2 = \frac{1}{k}\,\frac{e}{AC_1}$, ея поверхность есть $2\pi C_1D_1.C_1C_2$ и т. д. Очевидно, нужно образовать сумму произведеній потенціала каждой зоны на ея поверхность и полученную сумму раздѣлить на всю поверхность шара. Частное представитъ значеніе средняго потенціала v шара, такъ что

$$v = (v_1 2\pi CD.CC_1 + v_2.2\pi C_1D_1.C_1C_2 + \ldots + v_1 2\pi.C'_1D'_1.CC_1' + \ldots):4\pi R^2$$

$$= \frac{2\pi e}{k.4\pi R^2}\left(\frac{CD.CC_1}{AC} + \frac{C_1D_1.C_1C_2}{AC_1} + \ldots + \frac{C_1'D_1'.CC_1'}{AC'_1} + \ldots\right)$$

*) См. № 427 „Вѣстника“.

На страницѣ 146 и было показано, что выраженіе $\frac{CD.CC_1}{AC}$ преобразовывается въ $\frac{R}{d}\cdot KC_1$, $\frac{C_1D_1.C_1C_2}{AC}$ — въ $\frac{R}{d}\cdot K_1C_2$ и т. д.

На основаніи этого

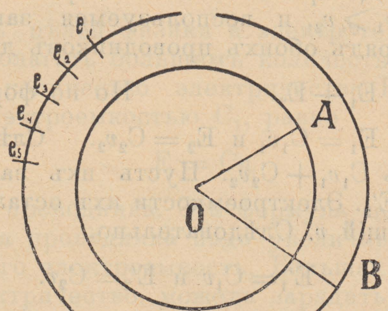
$$v=\frac{2\pi e}{k.4\pi R^2}\,\frac{R}{d}\,(KC_2+K_1C_2+\ldots+CK'_1+C_1'K'_2+\ldots)$$

Значеніе суммы, заключенной въ скобки, есть, какъ было показано, 2R, такъ что

$$v=\frac{4\pi R^2 e}{k.4\pi R^2}\,\frac{1}{d}=\frac{1}{k}\,\frac{e}{d}\,\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad 6)$$

т. е. потенціалъ проводящей шаровой оболочки, наведенный электрическимъ зарядомъ e, находящимся на разстояніи d отъ центра шара, равенъ потенціалу, наводимому тѣмъ же зарядомъ въ центрѣ шара.

Предположимъ, что шаръ радіуса $OA=R$ съ центромъ въ точкѣ O окруженъ концентрической съ нимъ шаровой поверхностью радіуса $OB=R_1$ (фиг. 15). Пусть внѣшній шаръ заряженъ, а внутренній не заряженъ. Опредѣлимъ наведенный петенціалъ



Фиг. 15.

внутренняго шара. Разобьемъ поверхность внѣшняго шара на весьма малыя части съ зарядами e_1, e_2, e_3, и т. д. соотвѣтственно на каждой изъ этихъ частей. Потенціалъ v_1 шара радіуса OA, наведенный зарядомъ e_1, опредѣлится по формулѣ 6), въ которой надо положить $d=R_1$, и подъ k подразумѣвать діэлектрическую постоянную среды, раздѣляющей поверхности разсматриваемыхъ шаровъ, такъ что

$$v_1=\frac{1}{k}\,\frac{e_1}{R_1}.$$

Подобнымъ образомъ зарядъ l_2 наведетъ на внутреннемъ шарѣ потенціалъ v_2, равный

$$v_2 = \frac{1}{k}\frac{e_2}{R_1}.$$

и т. д.

Потенціалъ внутренняго шара. наводимый всѣми зарядами, найдется, какъ сумма $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Обозначая этотъ потенціалъ черезъ v, имѣемъ

$$v = \frac{1}{k}\frac{1}{R_1}(e_1 + e_2 + e_3 + \ldots).$$

Но сумма $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$ есть зарядъ всей внѣшней шаровой поверхности, который обозначимъ черезъ E, такъ что

$$v = \frac{1}{k}\frac{E}{R_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Эта формула намъ понадобится впослѣдствіи.

16. *Распредѣленіе электричества при соединеніи проводниковъ.*

Пусть имѣется два проводника: зарядъ одного есть E_1, его потенціалъ v_1 и его электроемкость C_1; зарядъ другого E_2, потенціалъ v_2 и электроемкость C_2. Эти проводники приведены въ соприкосновеніе. Найти ихъ общій потенціалъ v и ихъ заряды послѣ соединенія. Для рѣшенія этого вопроса примемъ для опредѣленности, что $v_1 > v_2$, и воспользуемся закономъ сохраненія электричества. Зарядъ обоихъ проводниковъ до соединенія есть

$E_1 + E_2$. Но по формулѣ 2) стр. 140

$E_1 = C_1 v_1$ и $E_2 = C_2 v_2$. Слѣдовательно, ихъ общій зарядъ есть $C_1 v_1 + C_2 v_2$. Пусть ихъ заряды послѣ соединенія суть E'_1 и E'_2. Электроемкости ихъ остались прежнія, а потенціалъ сталъ общій v. Слѣдовательно,

$$a) \qquad E'_1 = C_1 v \text{ и } E'_2 = C_2 v.$$

Такъ какъ по закону сохраненія электричества

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2, \text{ то}$$

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 = C_1 v + C_2 v = v(C_1 + C_2),$$

откуда

$$V = \frac{c_1 v_1 + c_2 v_2}{c_1 + c_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad b)$$

Послѣ этого не трудно вычислить заряды E'_1 и E'_2 по формулѣ а), подставивъ вмѣсто V его значеніе изъ 6). Разсмотримъ случай, когда проводникъ емкости C_1 и потенціала v_1 соединяется съ электроскопомъ, служащимъ для измѣренія его потенціала, или электрометромъ. Начальный потенціалъ электрометра есть нуль, а электроемкость электроскопа и соединительной проволоки пусть будетъ C_2. Послѣ соединенія проводника съ электрометромъ, оба они примутъ потенціалъ v, вычисляемый по формулѣ b), въ которой надо положить $v_2 = 0$.

Имѣемъ:

$$c \quad \ldots\ldots\ldots \quad v = \frac{C_1 v_1}{C_1 + C_2}.$$

Очевидно, что $v < v_1$, т. е. потенціалъ проводника при соединеніи его съ электрометромъ уменьшается. Но если C_2, т. е. электроемкость электрометра и проволочки ничтожна по сравненію съ C_1, то потенціалъ v почти равенъ потенціалу v_1. Въ самомъ дѣлѣ формула c) даетъ

$$v = \frac{v_1}{1 + \frac{C_2}{C_1}}.$$

Если дробь $\frac{C_2}{C_1}$ очень мала, то, пренебрегая ею, получимъ

$$v = v_1.$$

Вотъ почему стержень и листочекъ электроскопа (фиг. 5) должны имѣть малые размѣры, а соединительная проволока должна быть очень тонкой.

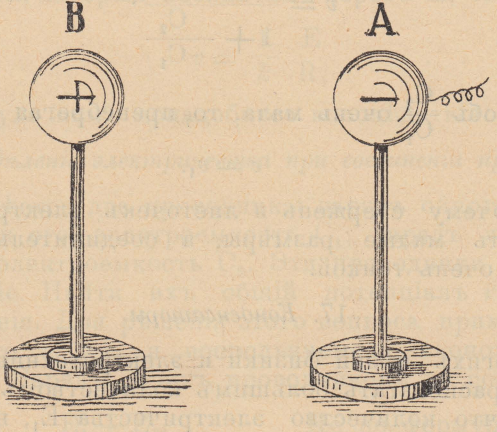
17. *Конденсаторы.*

Для многихъ цѣлей физики и электротехники является необходимымъ располагать большимъ количествомъ электричества. Мы знаемъ, что количество электричества E_1, находящееся на проводникѣ съ электроемкостью C_1, равно

$$E = Cv,$$

гдѣ v потенціалъ проводника. Эта формула показываетъ, что для увеличенія заряда проводника надо увеличивать или потенціалъ проводника или его электроемкость. Большая часть машинъ, доставляющихъ электричество, можетъ зарядить проводникъ только до опредѣленнаго потенціала, повысить который машина не въ состояніи. Въ виду этого, для увеличенія заряда проводника надобно увеличить его электроемкость. Приборъ, электроемкость котораго искусственно увеличена, называется конденсаторомъ. Принципъ конденсатора лучше всего выяснить на примѣрѣ. Пусть проводникъ A соединенъ съ электрической машиной, на которой поддерживается потенціалъ v. Электричество, допустимъ, положительное, съ машины будетъ переходить на проводникъ A до тѣхъ поръ, пока его потенціалъ не станетъ v. Приблизимъ теперь къ проводникѣ A проводникъ B, заряженный только отрицательнымъ электричествомъ. Отрицательный зарядъ проводника B наведетъ на проводникѣ A отрицательный потенціалъ, положимъ v_1, который, по закону сложенія потенціаловъ, сложится съ прежнимъ потенціаломъ v проводника A. Вслѣдствіе этого потенціалъ проводника A станетъ $v - v_1$, т. е. уменьшится. Вслѣдствіе этого электричество съ машины начнетъ опять переходить на проводникъ A до тѣхъ поръ, пока его настоящій потенціалъ $v - v_1$ не сдѣлается опять равнымъ потенціалу v машины. Такимъ образомъ проводникъ A въ присутствіи проводника B, заряженнаго электричествомъ противоположнаго знака съ электричествомъ проводника A, требуетъ большаго заряда, чтобъ потенціалъ его равнялся потенціалу машины. Значитъ электроемкость его стала больше. Совокупность проводниковъ B и A составляетъ конденсаторъ.

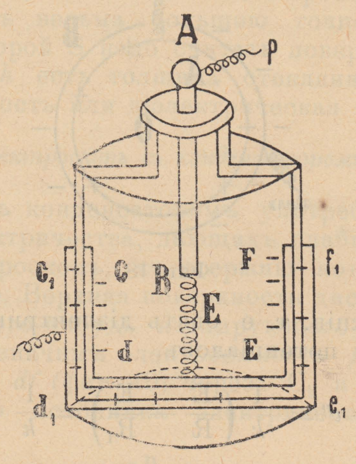
Конденсаторы бываютъ самаго разнообразнаго устройства, но во всѣхъ ихъ осуществляется схема фиг. 16.



Фиг. 16.

Въ физическихъ лабораторіяхъ самымъ употребительнымъ конденсаторомъ является Лейденская банка. Это обыкновенная стеклянная банка, у которой наружная и внутренняя поверхности оклеены оловянными листами $cdef$ и $c_1d_1e_1f_1$, называемыми обкладками конденсатора. Толщина стѣнокъ и листовъ представлена на фиг. 17 умышленно увеличенною. Дѣйствіе банки, какъ конденсатора, таково. Внутренняя обкладка $cdef$ соединяется при помощи цѣпи E, стрежня AB и проволоки p съ электрической машиной, а наружная обкладка съ землею. Пусть машина заряжаетъ внутреннюю обкладку отрицательнымъ электричествомъ. Отрицательное электричество этой обкладки наводитъ на внѣшней обкладкѣ электричество обоихъ знаковъ изъ которыхъ отрицательное, какъ свободное, уходитъ въ землю, а положительное расположится на ближайшей къ обкладкѣ $cdef$ сторонѣ обкладки $c_1d_1e_1f_1$; положительное электричество обкладки $c_1d_1e_1f_1$ наведетъ на обкладкѣ $cdef$ положительный потенціалъ, который, сложившись съ прежнимъ потенціаломъ обкладки $cdef$, уменьшитъ величину ея отрицательнаго потенціала. Вслѣдствіе этого съ машины потечетъ еще извѣстное количество электричества, пока измѣненный потенціалъ обклаеки $cdef$ не сдѣлается равнымъ потенціалу машины. Такъ какъ величина наведеннаго потенціала обкладки $cdef$ зависитъ, по формулѣ 3) отъ величины наводящаго заряда $c_1d_1e_1f_1$, разстоянія этой обкладки отъ обкладки $cdef$ и отъ индуктивной способности діэлектрика, раздѣляющаго эти обкладки, то мы можемъ заключить отсюда, что электроемкость Лейденской банки зависитъ отъ сорта стекла, изъ котораго она сдѣлана; она тѣмъ больше, чѣмъ меньше толщина стѣнокъ банки и тѣмъ больше, чѣмъ больше величина поверхности обкладокъ.

Очевидно, что Лейденскую банку можно употреблять и такимъ образомъ: соединить ея наружную обкладку съ однимъ полюсомъ машины, а внѣшнюю съ другимъ. Отъ этого одна изъ обкладокъ будетъ заряжена положительнымъ электри-

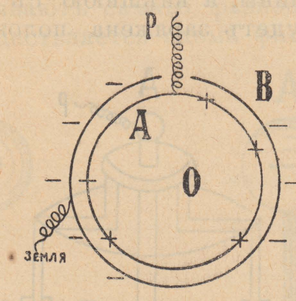


Фиг. 17.

чествомъ, другая отрицательнымъ. Зарядъ одной обкладки будетъ наводить на другой потенціалъ противоположнаго знака съ потенціаломъ послѣдней и, благодаря этому, уменьшать его, вслѣдствіе чего съ машины будутъ переходить новыя количества электричества, пока обкладка опять не приметъ потенціала машины.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, пользуясь теоремой о сложеніи потенціаловъ, можно безъ труда вычислить электроемкость конденсатора. Разсмотримъ шаровой конденсаторъ, состоящій изъ шара A радіуса R, окруженнаго шаровой поверхностью B радіуса R_1 (фиг. 18). Шаровая поверхность B окружаетъ почти сполна шаръ A; оставлено лишь небольшое отверстіе, черезъ которое проходитъ проволока p, соединяющая шаръ A съ источникомъ электричества. Поверхность B соединяемъ съ землею

Разсмотримъ конденсаторъ, когда на шарѣ A уже установился потенціалъ v. Пусть шаръ A заряженъ положительнымъ зарядомъ E. На шаровой поверхности B наведенъ зарядъ отрицательный, а зарядъ положительный ушелъ въ землю. Такъ какъ поверхность B почти сполна окружаетъ шаръ A, то наведенный на ней отрицательный зарядъ равенъ заряду E шара. Потенціалъ v шара A слагается изъ двухъ потенціаловъ: v', происходящаго отъ его заряда E, и v'', наведеннаго на немъ отрицательнымъ зарядомъ E шара B. Потенціалъ v опредѣляется по формулѣ 5) стр 148, при чемъ подъ k надо разумѣть индуктивную способность діэлектрика, окружающаго шаръ A, т. е. діэлектрика между обкладками конденсатора. Потенціалъ v'' опредѣляется по формулѣ 7) стр. 174, причемъ подъ k разумѣется индуктивная способность вещества между наводящимъ проводникомъ и под-



Фиг. 18.

вергающимся индукціи, т. е. опять діэлектрика конденсатора. По теоремѣ о сложеніи потенціаловъ,

$$v = v' - v'' = \frac{1}{k}\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R_1}\right) = \frac{1}{k}\ \frac{R - R_1}{RR_1}\ E,$$

такъ какъ

$$v' = \frac{1}{k}\ \frac{E}{R}, \text{ а } v'' = -\frac{1}{k}\ \frac{E}{R}.$$

Разность $R_1 - R$ есть толщина изолирующаго слоя, раздѣляющаго поверхности обѣихъ шаровыхъ поверхностей. Обозначимъ ее черезъ h. Если h достаточно мало, то мы можемъ принять, что приблизительно

$$R = R_1.$$

Вслѣдствіе этого

$$v = \frac{1}{k}\ \frac{h}{R^2}\ E,$$

откуда

$$E = \frac{kR^2}{h} v.$$

Отсюда видно, что электроемкость C шароваго конденсатора равна

$$C = \frac{kR^2}{h}$$

$\mu k R^2$

или, помножая числителя и знаменателя на 4π, получимъ

$$C = \frac{k 4\pi R^2}{4\pi h}.$$

Но $4\pi R^2$ есть поверхность S шара, такъ что

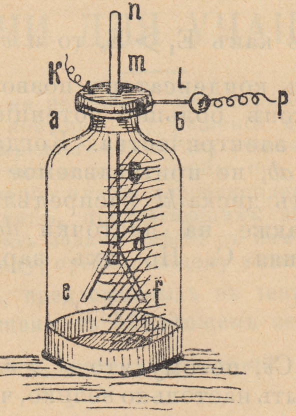
$$C = \frac{kS}{4\pi h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

Мѣняя изолирующій слой между внутренней и внѣшней шаровой поверхностью конденсатора и сравнивая электроемкости этихъ конденсаторовъ, мы можемъ сравнить діэлектрическія способности различныхъ веществъ.

Хотя форма Лейденской банки не шаровая, тѣмъ не менѣе ея электроемкость съ весьма большою точностью выражается формулой 8), въ которой S надо считать поверхностью обкладки Лейденской банки, h есть толщина стеклянной стѣнки и k — индуктивная способность или діэлектрическая постоянная стекла.

Электроскопъ съ конденсаторомъ.

Электроскопъ съ конденсаторомъ употребляется для изученія источниковъ электричества, дающихъ слабый потенціалъ. Это обыкновенный электроскопъ, къ стержню котораго привинчена круглая пластинка ab. Верхняя поверхность диска покрыта весьма тонкимъ слоемъ какого-нибудь изолирующаго вещества, напримѣръ, парафина. Обозначимъ электроемкость диска ab, стержня cd и листочковъ de и df (фиг. 19) черезъ С, и пусть v есть потенціалъ изучаемаго источника электричества, съ которымъ



Фиг. 19.

электроскопъ соединяется проволокой p. Изъ этого источника на электроскопъ перейдетъ зарядъ E, опредѣляемый по формулѣ

$$E = Cv.$$

Такъ какъ потенціалъ v малъ, электроемкость С также не велика, то зарядъ Е ничтоженъ. Пусть электроемкость листочка есть C'. Въ такомъ случаѣ на листочкахъ будетъ находиться зарядъ e, равный $C'v$. Этотъ зарядъ можетъ оказаться недостаточнымъ для того, чтобы раздвинуть ихъ на сколько-нибудь замѣтный уголъ, такъ какъ для этого надо преодолѣть вѣсъ листочковъ, заставляющій ихъ висѣть вертикально. Но помѣстимъ на дискъ ab дискъ kl, соединенный съ землею. Тогда система дисковъ kl и ab образуетъ конденсаторъ, и электроемкость электроскопа значительно возрастетъ. Обозначимъ новую электроемкость электроскопа черезъ C_1. Потенціалъ электроскопа останется прежнимъ v, такъ какъ изъ источника электричества перейдетъ на электроскопъ еще такое количество электричества, чтобы новый зарядъ E_1 электроскопа обусловилъ на немъ прежній потенціалъ v. Зарядъ E_1, очевидно, равенъ

$$E_1 = C_1 v,$$

причемъ E_1, конечно, больше Е, такъ какъ $C_1 > C$. Но зарядъ E_1 распредѣленъ, главнымъ образомъ, на дискѣ ab, такъ какъ электричество диска ab притягивается противоположнымъ электричествомъ, наведеннымъ на kl. Разобщимъ теперь дискъ ab отъ источника, удаливъ проволоку p, а затѣмъ удалимъ дискъ kl. Электроемкость электроскопа безъ диска kl будетъ прежняя С, а зарядъ E_1, конечно, сохранится. Потенціалъ электроскопа будетъ иной, мы обозначимъ его v'. Изъ формулъ

$$E_1 = Cv'$$

и

$$E = Cv$$

заключаемъ, что такъ какъ $E_1 > E$, то и $v' > v$.

Такимъ образомъ конденсаторъ позволяетъ получить искусственно на электроскопѣ бо́льшій потенціалъ, чѣмъ какой могъ доставить источникъ электричества. Когда дискъ kl удаленъ, то электричество диска ab, не притягиваемое болѣе противоположнымъ электричествомъ диска kl, распредѣлится по всему электроскопу и перейдетъ также на листочки de и cf. Ихъ электроемкость теперь прежняя С. Но ихъ зарядъ e_1 будетъ болѣе прежняго, такъ какъ

$$e_1 = C'v',$$

что болѣе, чѣмъ $e = Cv$, потому что $v' > v$. Это усиленіе заряда листочковъ можетъ быть настолько велико, что листочки разойдутся на замѣтный уголъ.

Таково дѣйствіе электроскопа съ конденсаторомъ, впервые изобрѣтеннаго итальянскимъ ученымъ Вольта.

РЕЦЕНЗІИ.

Проф. С. П. Глазенапъ. *Таблицы логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками, съ приложеніемъ другихъ таблицъ, упрощающихъ вычисленія* СПБ. 1906.

Авторъ составилъ свои таблицы логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками по образцу прекрасныхъ заграничныхъ таблицъ Noüel'я.

Таблицы логариѳмовъ чиселъ авторомъ расположены весьма удобно и снабжены данными для вычисленія логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ малыхъ угловъ. Въ тригонометрическихъ таблицахъ даны логариѳмы не четырехъ, какъ это обыкновенно дѣлается, а всѣхъ шести тригонометрическихъ функцій. Далѣе, въ книжкѣ даны таблицы, служащія для нахожденія суммы и разности (таблицы Гаусса), помѣщены четырехзначные логариѳмы и антилогариѳмы чиселъ, таблица квадратныхъ чиселъ, таблица квадратныхъ корней и многія другія таблицы.

Таблицы проф. С. П. Глазенапа смѣло можно рекомендовать для нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній; точно также онѣ могли бы быть весьма полезны всѣмъ лицамъ, постоянно занимающимся вычисленіями (астрономамъ, геодезистамъ и т. п.).

Ко всему этому надо прибавить, что внѣшній видъ изданія производитъ весьма пріятное впечатлѣніе.

Приватъ-доцентъ А. А. Ивановъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ" и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 811 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\sqrt{x}+\sqrt[3]{4y}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{4x}=\frac{3}{2}.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 812 (4 сер.). Изъ точки M, взятой внутри круга, описаннаго около правильнаго треугольника ABC, опущены на его стороны перпендикуляры

MM_1, MM_2, MM_3. Доказать, что

$$\text{площ. } M_1M_2M_3 = \frac{1}{2}\triangle - \frac{3(d^2+R^2)\sqrt{3}}{16},$$

гдѣ $\triangle$ — площадь треугольника ABC, R — радіусъ описаннаго круга, d—разстояніе точки M отъ его центра.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

№ 813 (4 сер.). Доказать, что для всякаго остроугольнаго треугольника справедливо неравенство

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{h_a^2+h_b^2+h_c^2} > 2,$$

гдѣ a, b, c — стороны, h_a, h_b, h_c — соотвѣтственныя высоты треугольника.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 814 (4 сер.). Найти сумму n первыхъ членовъ ряда

$$\frac{1}{u(u+r)},\quad \frac{1}{(u+r)(u+2r)},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{[u+(k-1)r](u+kr)}$$

и опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится эта сумма при безконечномъ возрастаніи n.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 815 (4 сер.). Доказать, что число

$$27^n(n+1)^{3n}-1,$$

гдѣ n—цѣлое положительное число и $3n+1$ – простое число, дѣлится на $3n+1$.

Э. Лейнѣкъ (Рига).

№ 816 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій *)

$$x^y = y^x,\quad x^p = y^q.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 685 (4 сер.). *Найти два цѣлыхъ числа, изображенныхъ на десятичной системѣ, зная, что каждое изъ нихъ есть точный квадратъ и что одно изъ нихъ обращается въ другое послѣ взаимной перестановки двухъ послѣднихъ цифръ.*

Называя искомые квадраты черезъ x^2 и y^2, число сотенъ въ первомъ изъ нихъ черезъ a, число десятковъ—черезъ u и единицъ черезъ v, находимъ, согласно съ условіемъ,

$$x^2=100a+10u+v\ (1),\quad y^2=100a+10v+u\ (2).$$

Пусть искомые квадраты неравны; тогда, полагая для большей опредѣленности $x^2 > y^2$, находимъ (см. (1), (2))

$$x^2-y^2=9(u-v)\ (3).$$

Изъ равенства (3), полагая $x=y+m$ (гдѣ $m>0$, такъ какъ $x^2>y^2$ и

*) При рѣшеніи этой системы элементарнымъ путемъ имѣются въ виду лишь дѣйствительныя значенія x и y въ предположеніи, что p и q тоже дѣйствительныя числа.

подъ x и y всегда можно подразумѣвать числа положительныя), получимъ $(y+m)^2-y^2=2my+m^2=9(u-v)$, откуда $y>\frac{9(u-v)}{2m}$ (4). Такъ какъ предположеніе $u=9$, $v=0$ невозможно (иначе точный квадратъ x^2 оканчивался бы лишь однимъ нулемъ), то разность $u-v$ не болѣе 8; такъ какъ цѣлое число m больше нуля, то m не менѣе 1. Поэтому (см. (4)) $y>\frac{9.8}{2}=36$. Испытывая всѣ возможныя значенія y^2, т. е. квадраты $1^2, 2^2, \ldots, 35^2$, мы находимъ лишь одно число $13^2=169$, переставляя двѣ послѣднія цифры котораго, мы получимъ опять точный квадратъ $14^2=196$. Итакъ, искомыя числа суть 13 и 14, если только подъ двумя искомыми числами подразумѣвать два неравныхъ числа. Если же $x^2=y^2$, то задача равносильна требованію найти точный квадратъ съ равными цифрами десятковъ и единицъ. Изъ формулы $(50+x)^2=$ $=2500+100x+x^2$ видно, что прибавленіе къ числу 50 не мѣняетъ единицъ и десятковъ его квадрата. Пересмотръ квадратовъ чиселъ, не большихъ 50, (который можно значительно сократить при помощи простыхъ ариѳметическихъ соображеній) показываетъ, что кромѣ чиселъ, оканчивающихся нулемъ, числа 12 и 38 суть единственныя среди нихъ, квадраты которыхъ имѣютъ равныя цифры единицъ и десятковъ, а потому формулы $10t$, $50t+12$, $50t+38$, гдѣ t—произвольное не отрицательное число, даютъ общій видъ чиселъ, квадраты которыхъ имѣютъ равныя цифры десятковъ и единицъ.

Н. Плахово (Знаменка);; *Н. С.* (Одесса).

№ 686 (4 сер.). *Дано, что* p—*цѣлое положительное число и что каждое изъ чиселъ* p *и* $8p^2+1$ *простое; доказать, что* $8p^2-p+2$ *тоже простое число.*

Если $p=3$, то $8p^2+1=8.9+1=73$, $8p^2-p+2=72-3+2=71$; такимъ образомъ, при $p=3$ теорема справедлива, такъ какъ въ этомъ случаѣ числа $8p^2+1=73$, $8p^2-p+2=71$ тоже простыя. Если же $p\neq 3$, то p, какъ число простое, не кратно 3, а потому $p=3k\pm1$, гдѣ k -цѣлое число. Слѣдовательно, при $p\neq 3$ имѣемъ

$$8p^2+1=(3k\pm1)^2.8+1=(9k^2\pm6k+1).8+1=(9k^2\pm6k).8+9=3[(3k^2\pm2k)8+3],$$

откуда видно, что $8p^2+1$ кратно 3. Но $p^2>1$, а потому $8p^2+1>9>3$; поэтому, при $p\neq 3$, число $8p^2+1$, будучи кратно 3 и больше 3, оказывается составнымъ, что противно условію. Итакъ, p можетъ имѣть лишь одно значеніе, а именно 3, и въ этомъ случаѣ числа $8p^2+1$ и $8p^2-p+2$ тоже оказываются простыми, что согласно съ условіемъ теоремы.

Г. Лебедевъ (Харьковъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); ***А. Турчаниновъ*** (Одесса).

№ 687 (4 сер.). *Въ окружности даны неподвижный діаметръ* AB *и точка* J *на прямой* AB; *произвольную точку* M *окружности соединяютъ съ точкой* J *прямой и опускаютъ изъ центра* O *перпендикуляръ на* AM; *найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія* P *этого перпендикуляра съ прямой* JM.

Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique.*

Проведемъ черезъ P прямую, параллельную MO, до встрѣчи съ AB въ точкѣ O' и соединимъ точки M и B прямой. Такъ какъ $MB\perp AM$ и $OP\perp AM$, то $PO\parallel MB$; кромѣ того, $PO'\parallel MO$. Слѣдовательно, $\frac{JO'}{JO}=\frac{PO'}{MO}=$ $=\frac{JP}{JM}=\frac{JO}{JB}$, откуда

$$PO'=\frac{MO.JO}{JB}\ (1),\qquad JO'=\frac{\overline{JO}^2}{JB}\ (2),$$

Такъ какъ радіусъ MO и отрѣзки JO и JB суть величины постоянныя, то точка O' (см. (2)) сохраняетъ постоянное положеніе на прямой AB, а точка P перемѣщается по кругу, описанному изъ O', какъ изъ центра, радіусомъ (см. (1)) $O'P = \frac{MO.JO}{JB}$.

Э. Лейнѣкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса).

№ 705 (4 сер.). ***Рѣшить уравненіе***

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1 - \sin^2 3x} = \cos 5x.$$

Представивъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ

$$\cos 2x.\sqrt{1 - \sin^2 3x} = \cos 5x \quad (1), \quad (\cos 2x.\cos 3x)^2 - \cos^2 5x = 0,$$

$$(\cos 2x.\cos 3x - \cos 5x)(\cos 2x.\cos 3x + \cos 5x) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\cos 2x.\cos 3x - \cos 5x = 0 \ (2), \text{ или } \cos 2x.\cos 3x + \cos 5x = 0 \ (3).$$

Уравненіе (2) даетъ $\cos 2x.\cos 3x - (\cos 2x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 3x) = \sin 2x.\sin 3x = 0$,

откуда $\sin 2x = 0$, или $\sin 3x = 0$ (4).

Уравненіе (3) даетъ $\cos 2x.\cos 3x + (\cos 2x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 3x) = 2\cos 2x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 3x = 0$, или, замѣняя $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ ихъ выраженіями черезъ $\sin x$ и $\cos x$ —

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x).(4\cos^3 x - 3\cos x) = 2\sin x \cos x(3\sin x - 4\sin^3 x) \quad (5).$$

Перенося всѣ члены уравненія (5) въ лѣвую часть, выводя $\cos x$ за скобки и замѣняя $\cos^2 x$ черезъ $1 - \sin^2 x$, получимъ по сокращеніи на 2

$$\cos x.[(1 - 2\sin^2 x).(4(1 - \sin^2 x) - 3) - 3\sin^2 x + 4\sin^4 x] = 0, \text{ или}$$

$$\cos x.[12\sin^4 x - 9\sin^2 x + 1] = 0,$$

откуда $\cos x = 0$ (6) или $\sin x = \pm\sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{39}}{24}}$ (7).

Формулы (4) и (6) даютъ соотвѣтственно $2x = k\pi$, $3x = k\pi$, $x = \frac{(9k+1)\pi}{2}$, гдѣ k—произвольное цѣлое число. Назовемъ наименьшіе углы, синусы которыхъ суть соотвѣтственно $\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{24}}$ и $\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{24}}$, черезъ α и β; тогда формула (7) даетъ $x = k\pi \pm \alpha$, $x = k\pi \pm \beta$, гдѣ k—произвольное цѣлое число. Итакъ, получены рѣшенія:

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = \frac{k\pi}{3}, \quad \left(x = \frac{(2k+1)\pi}{2}; \text{ это рѣшеніе заключается въ первомъ}\right)$$

$$x = k\pi \pm \alpha, \quad x = k\pi \pm \beta, \quad \text{гдѣ } k\text{—произвольное цѣлое число.}$$

Если условиться, какъ это обыкновенно дѣлаютъ, брать радикалъ $\sqrt{1 - \sin^2 3x}$ со знакомъ $+$, то это равносильно требованію, чтобы $\cos 2x$ и $\cos 5x$ не были противныхъ знаковъ, чѣмъ вообще ограничивается произволъ въ выборѣ значеній числа k (напримѣръ, въ рѣшеніи $x = \frac{k\pi}{3}$ число k должно быть четнымъ).

Г. Лебедевъ (Харьковъ); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

Отъ Физическаго Отдѣленія

Русск. Физ.-Хим. Общества при Императорскомъ С.П.Б. Университетѣ.

Физическое отдѣленіе съ 1907 г. издаетъ свой отдѣльный журналъ:

ЖУРНАЛЪ Р. Ф.-Х. О. ФИЗИЧЕСКІЙ ОТДѢЛЪ

Подобно предыдущимъ **тридцати восьми** годамъ XXXIX-ый томъ журнала Физическаго Отдѣленія будетъ состоять изъ двухъ частей:

Первая часть заключаетъ въ себѣ оригинальныя статьи русскихъ физиковъ и протоколы засѣданій Ф. О.

Вторая часть состоитъ изъ обзоровъ, преимущественно по новѣйшимъ вопросамъ физики, рефератовъ, библіографіи и статей, посвященныхъ вопросамъ лабораторной критики.

Первый шагъ преобразованія второй части, разчитываемой для широкихъ круговъ публики, былъ уже сдѣланъ въ Физ. Отдѣлѣ Ж. Р. Ф.-Х. О. за 1906 г. *). Въ этомъ начинаніи Физ. Отдѣленія принимаютъ участіе:

К. К. Баумгартъ, проф. И. И Боргманъ, пр.-доц. Н. А. Булгаковъ, пр.-доц, Б. П. Вейнбергъ, проф. Н. А. Гезехусъ, проф. А. Л. Корольковъ, В. Я. Курбатовъ, В. К. Лебединскій, пр.-доц В. В. Лермантовъ, С. О. Майзель, Д. С. Рождественскій, проф. О. Д. Хвольсонъ, А. А. Шапошниковъ, И. С. Щегляевъ и др.

Подписаная цѣна на „Физическій Отдѣлъ" Ж. Р. Ф.-Х. О. (**обѣ части**) **5 руб. въ годъ** съ доставкой и пересылкой.

Въ видахъ большаго распространенія физическихъ знаній Физическое Отдѣленіе постановило открыть съ 1907 г. отдѣльную подписку на **вторую часть** своего журнала, выпускаемую въ свѣтъ подъ названіемъ

ВОПРОСЫ ФИЗИКИ

„Вопросы Физики" будутъ выходить 10 разъ въ годъ выпусками приблизительно по 2 листа каждый. Подписная цѣна **2 рубля въ годъ** съ доставкой и пересылкой.

Цѣна отдѣльнаго выпуска 30 коп.

Редакторъ ***В. К. Лебединскій.***

Подписка на оба изданія принимается казначеемъ Физическаго Отдѣленія **Аполлономъ Павловичемъ Афанасьевымъ.**

Адресъ редакціи: С.-Петербургъ, Университетъ, Физическій Институтъ.

---

*) „Обзоры по Физикѣ за 1906 г." изданы двумя отдѣльными выпусками, по 75 коп. каждый.

ГОДЪ XII.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1907 г.

на ежемѣсячный научно-популярный и педагогическій журналъ

„ЕСТЕСТВОЗНАНІЕ и ГЕОГРАФІЯ".

ГОДЪ XII.

Выходитъ ежемѣсячно, за исключеніемъ двухъ лѣтнихъ мѣсяцевъ (іюня—іюля), книжками въ 5—6 печатныхъ листовъ.

Журналъ **ОДОБРЕНЪ Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія** для фундаментальныхъ библіотекъ всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній и для учительскихъ библіотекъ учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; **Ученымъ Комитетомъ Министерства Земледѣлія и Государственныхъ имуществъ ОДОБРЕНЪ** за всѣ годы существованія и допущенъ на будущее время въ библіотеки подвѣдомственныхъ Министерству учебныхъ заведеній.

Журналъ ставитъ себѣ задачей удовлетворять научному интересу читателей въ области естествознанія и географіи, а также способствовать правильной постановкѣ и разработкѣ вопросовъ по преподаванію естествознанія и географіи. Въ журналѣ имѣются отдѣлы: 1) научно-популярныя статьи по всѣмъ отраслямъ естествознанія и географіи, статьи по вопросамъ преподаванія естествознанія теоретическаго и прикладного (садоводство, пчеловодство и т. под.) и географіи; 2) акваріумъ и террарiумъ; 3) библіографія (обзоръ русской и иностранной литературы по естествознанію и географіи); 4 хроника; 5) смѣсь; 6) вопросы и отвѣты по предметамъ программы.

Весьма желательно установленіе живой связи между лицами стоящими у дѣла преподаванія, и журналъ ставитъ себѣ цѣлью содѣйствовать этому. Редакція проситъ лицъ, завѣдующихъ учебными заведеніями, земскія управы и **училищные совѣты высылать** въ редакцію **отчеты по училищному дѣлу.**

Въ журналѣ были помѣщены статьи: И. Я. Акинфіева, А. П. Артари, проф. П. И. Бахметьева, Л. И. Бородовскаго, проф. А. Ѳ. Брандта, В. В. Богданова, П. Вольногорскаго, Н. Н. Вакуловскаго, проф. С. П. Глазенапа, М. И. Голенкина, проф. А. С. Догеля, М. И. Демкова, Л. Н. Елагина, Е. В. Жадовскаго, Б. М. Житкова, В. Р. Заленскаго, проф. Н. Ю. Зографа, Н. Ѳ. Золотницкаго, проф. Н. Ѳ. Кащенко, проф. Н. И. Кузнецова, проф. И. А. Каблукова, проф. Н. М. Кулагина, проф. Г. А. Кожевникова, проф. А. Н. Краснова, М. Э. Мендельсона, С. П. Меча, Г. А. Надсона, А. М. Никольскаго, К. Д. Носилова, проф. А. П. Павлова, А. Н. Рождественскаго, проф. В. В. Сапожникова, К. А. Сатунина, К. К. Сентъ-Илера, М. М. Сіязова, В. И. Таліева, проф. К. А. Тимирязева, проф. А. А. Тихомирова, П. Р. Фрейберга, проф. Н. А. Холодковскаго, проф. В. М. Шимкевича, П. Ю. Шмидта, Э. В. Эриксона и нѣкоторыхъ друг.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА: на годъ съ доставкою и пересылкою **4 р. 50 коп.**, безъ доставки **4 руб.**; на полгода съ пересылкою и доставкою **2 р. 50 коп.**; за границу **7 руб.** За ту же цѣну можно получать журналъ за 1903, 1904, 1905 г.г.; за остальные годы (1896—1902), по **3 р. 50 к.** за каждый годъ съ перес. Выписывающіе всю серію за **10 лѣтъ** платятъ **35 р.** съ перес. Книжки журнала въ отдѣльной продажѣ стоятъ **75 коп.** каждая.

Книжные магазины, доставляющіе подписку, могутъ удерживать за комиссію и пересылку денегъ только **20 коп.** съ каждаго годоваго полнаго экземпляра.

Подписка въ разсрочку отъ книжныхъ магазиновъ не принимается.

При непосредственномъ обращеніи въ контору допускается разсрочка: для городскихъ и иногородних подписчиковъ съ доставкой—при подпискѣ 2 руб. 50 коп. и къ 1 іюня 2 руб.

Для городскихъ подписчиковъ въ Москвѣ безъ доставки допускается разсрочка по **1 руб.** въ мѣсяцъ съ платежомъ—въ началѣ января, въ началѣ марта, въ началѣ мая, и, наконецъ, въ началѣ августа.

Другихъ условій разсрочки не допускается.

КОНТОРА РЕДАКЦІИ: Москва, Донская ул., д. Даниловой, кв. № 4.

Редакторъ-издатель **М. П. Варавва**