№ 427.

ВѢСТНИКЪ

ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ѳ. Кагана.

XXXVI-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66.
1906.

ОБЪЯВЛЕНІЕ

КОНКУРСА НА УСТРОЙСТВО СЕЙСМОГРАФА.

Постоянная Комиссія Международной Сейсмологической Ассоціаціи поручила центральному бюро Ассоціаціи (въ Страсбургѣ, въ Эльзасѣ) назначить конкурсъ на устройство сейсмометра для близкихъ землетрясеній.

Приборъ долженъ удовлетворять слѣдующимъ условіямъ. Онъ долженъ регистрировать горизонтальныя или вертикальныя движенія при близкихъ землетрясеніяхъ. Онъ долженъ быть возможно простой конструкціи. Приборъ долженъ достигать по крайней мѣрѣ сорока или пятидесятикратнаго увеличенія движенія почвы.

Продажная цѣна прибора (вмѣстѣ съ регистрирнымъ аппаратомъ) должна быть, по возможности, умѣренна, т. е. около 300 марокъ *).

Предлагаемыя преміи составляютъ 1000, 700, 500 и 300 марокъ.

Приборы должны быть доставлены за счетъ и страхъ конкуррентовъ до 1-го сентября 1907 года по адресу вице-президента, директора І. П. ванъ деръ Стокъ въ Дебильтъ, Голландія (Mr. le Directeur Dr. J. P. van der Stok à De Bilt, Pais-Bas); они будутъ выставлены на съѣздѣ Общаго Собранія въ Гаагѣ, въ серединѣ сентября 1907 года.

Изслѣдованіе приборовъ и ихъ достоинствъ поручено Центральному Бюро въ Страссбургѣ.

Присужденіе премій будетъ поручено жюри изъ 5 сейсмологовъ, избранныхъ. Постановленіе жюри будетъ опубликовано на Пасхѣ 1908 года.

За болѣе подробными свѣдѣніями просятъ обращаться въ Центральное Бюро (Bureau de l'Association internationale sismologique à Strassbourg, Alsace, Schwarzwaldstrasse 10).

*) 1 марка равняется приблизительно 46 коп.

XXXVI Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 427.

Элементарное ученіе объ электрическомъ потенціалѣ.

П. Шепелева.

*(Продолженіе *).*

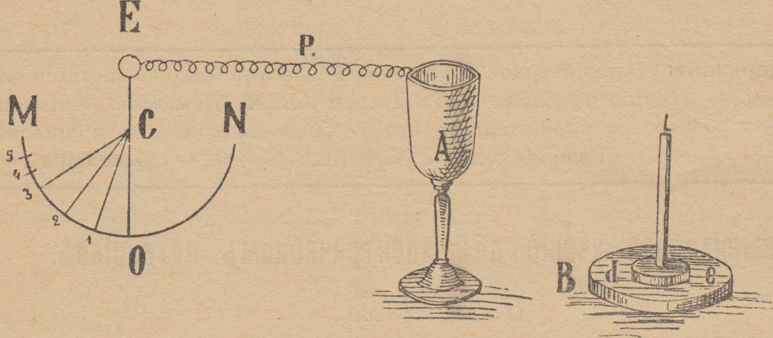
10. *Зависимость между потенціаломъ и зарядомъ проводника. Электрометръ. Вольтъ.*

Возьмемъ проводникъ А, соединенный тонкой проволокой p съ удаленнымъ отъ него электроскопомъ. Опытъ показываетъ, что если проводникъ А не заряженъ, то электроскопъ не показываетъ никакого отклоненія своего листочка. Примемъ потенціалъ незаряженнаго проводника за нуль потенціаловъ. Опытъ показываетъ далѣе, что листочекъ электроскопа не отклоняется, если соединенный съ нимъ заряженный проводникъ А приведенъ въ соприкосновеніе съ землею. Напримѣръ, пусть проводникъ А соединенъ съ землею, и къ нему поднесена эбонитовая палочка, заряженная отрицательно. Тогда на А наведены положительное и отрицательное электричество, причемъ отрицательное уйдетъ въ землю, а положительное останется на проводникѣ; и, хотя проводникъ А заряженъ положительнымъ электричествомъ, листочекъ электроскопа не отклоняется. Этотъ опытъ показываетъ между прочимъ, что по показанію удаленнаго отъ проводника электроскопа ни въ коемъ случаѣ нельзя судить о его зарядѣ. Наконецъ, на электроскопѣ не замѣчается никакого отклоненія

*) См. №№ 425—426 „Вѣстника".

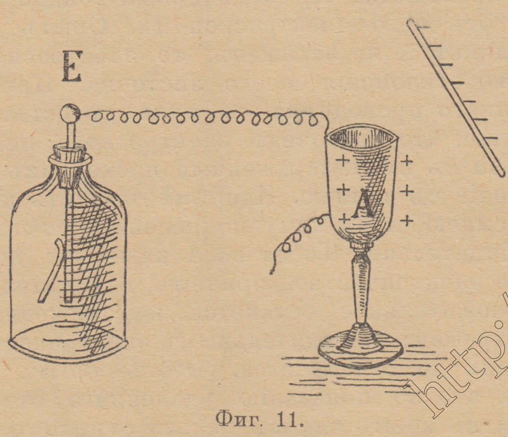
листочка, если электроскопъ непосредственно соединенъ съ землею. Отсюда заключаемъ, что потенціалъ земли есть нуль, или, что будетъ лучше соотвѣтствовать дѣйствительности, мы примемъ потенціалъ земли за нуль потенціаловъ.

Возвратимся къ проводнику А чертежа 10. Зарядимъ электрофоръ В и перенесемъ съ него на проводникъ А при помощи диска *de*, сидящаго на изолирующей ручкѣ *l*, нѣкоторый зарядъ. Листочекъ электроскопа Е сейчасъ же отклонится. Будемъ увеличивать зарядъ проводника А. Одновременно съ этимъ будетъ увеличиваться отклоненіе листочка электроскопа Е, и, слѣдовательно, будетъ увеличиваться потенціалъ проводника. Итакъ, потенціалъ проводника, не соединеннаго съ землею, увеличи-



Фиг. 10.

вается съ увеличеніемъ заряда проводника. Пользуясь этимъ, мы можемъ построить шкалу потенціаловъ. Для этого возьмемъ опредѣленный проводникъ, напримѣръ, проводникъ А (фиг. 10) и опредѣленный электроскопъ Е. Сообщимъ проводнику А единицу



Фиг. 11.

электричества. Онъ приметъ при этомъ опредѣленный потенціалъ, который мы примемъ за единицу потенціала. Листочекъ электроскопа отклонится при этомъ на нѣкоторый уголъ, который мы будемъ отсчитывать по дугѣ MON. Пусть этотъ уголъ есть $\angle 1CO$. Напишемъ на дугѣ MON противъ листочка цифру 1. Сообщимъ затѣмъ проводнику A еще единицу электричества. Листочекъ отклонится еще болѣе, и противъ него мы напишемъ на той же дугѣ MON цифру 2. Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы отмѣтимъ цифры 3, 4, 5 и т. д. и получимъ электроскопъ, градуированный на потенціалы, причемъ единица потенціала выбрана произвольно. Электроскопъ, градуированный на потенціалы, называется электрометромъ и можетъ служить для сравненія потенціаловъ различныхъ проводниковъ. Положимъ, что, соединивъ такой электроскопъ съ нѣкоторымъ проводникомъ, мы замѣтимъ, что его листочекъ отклонится до цифры 6. Значитъ, потенціалъ этого проводника равенъ 6 выбраннымъ единицамъ потенціала. При такомъ способѣ сравнивать потенціалы проводниковъ, потенціалы одного и того же проводника условно принимаются пропорціональными его зарядамъ, такъ какъ, напримѣръ, за потенціалъ въ 2 единицы у насъ принятъ потенціалъ того же проводника A, но заряженнаго двумя единицами электричества. Мы знаемъ, что одно и то же количество электричества заряжаетъ проводники различныхъ формъ и размѣровъ до различныхъ потенціаловъ. При этомъ потенціалъ проводника зависитъ еще отъ того, какой непроводящей средой окруженъ проводникъ, а также отъ того, находятся или не находятся вблизи даннаго проводника другіе проводники и какіе именно. Объ этомъ мы будемъ говорить подробнѣе далѣе. Пока замѣтимъ, что при данныхъ условіяхъ одно и то же количество электричества заряжаетъ данный проводникъ, не соединенный съ землею, до одного и того же потенціала. Этимъ обстоятельствомъ мы и воспользовались при построеніи шкалы потенціаловъ, пока произвольной.

11. *Электроемкость.*

При выбранномъ нами способѣ сравнивать потенціалы проводниковъ, потенціалъ проводника A (фиг. 10) пропорціоналенъ его заряду. Возьмемъ теперь какой-нибудь другой проводникъ B и будемъ изслѣдовать зависимость между его зарядомъ и потенціаломъ. Пусть при сообщеніи этому проводнику 10 единицъ электричества электроскопъ E показалъ единицу потенціала. Въ такомъ случаѣ, какъ показываетъ опытъ, для заряженія проводника B до 2 единицъ потенціала надобно 20 единицъ электричества, до 3 единицъ потенціала—30 единицъ и т. д. И вообще, какой бы проводникъ мы ни взяли и при какихъ бы условіяхъ мы ни производили опыты, мы всегда найдемъ, что, при выбранномъ нами способѣ сравнивать потенціалы продводниковъ, потенціалъ одного и того же проводника пропорціоналенъ его заряду и обратно, зарядъ одного и того же проводника пропорціоналенъ его потенціалу. Называя коффиціентъ пропорціональности черезъ C, зарядъ проводника черезъ E, а его потенціалъ черезъ V, мы напишемъ:

$$E = CV. \qquad (2)$$

Коэффиціентъ C называется электроемкостью проводника; значеніе его заключается въ слѣдующемъ. Пусть потенціалъ V равняется единицѣ потенціала. Въ такомъ случаѣ формула 2) даетъ:

$$E = C,$$

т. е. электроемкость проводника равна количеству электричества, необходимаго для заряженія этого проводника до единицы потенціала. А такъ какъ то же самое количество электричества необходимо и для повышенія потенціала проводника на единицу, то мы можемъ сказать, что электроемкостью проводника называется количество электричества, необходимое для повышенія потенціала проводника на единицу потенціала. Очевидно, понятіе объ электроемкости проводника аналогично понятію о теплоемкости тѣла. Подъ послѣдней, какъ извѣстно, разумѣется количество теплоты, необходимое для повышенія температуры тѣла на одинъ градусъ. Замѣнивъ въ этомъ опредѣленіи теплоту электричествомъ, а температуру потенціаломъ, получимъ опредѣленіе электроемкости. Надо замѣтить, что на этомъ и заканчивается аналогія между теплоемкостью и электроемкостью. По своимъ свойствамъ эти величины совершенно различны. Такъ, теплоемкость тѣла тѣмъ больше, чѣмъ больше масса тѣла, зависитъ отъ вещества тѣла и не зависитъ отъ его формы и размѣровъ. Электроемкость проводника не зависитъ ни отъ его вещества, ни отъ его массы, но зависитъ отъ формы и размѣровъ проводника. Такъ, электроемкость полаго и сплошного шара одинаковы, если равны ихъ радіусы, причемъ вещество, изъ котораго сдѣланы проводящія оболочки шаровъ, не играетъ никакой роли. Наоборотъ, два проводника, равные по массѣ и сдѣланные изъ одинаковаго вещества, будутъ имѣть разныя электроемкости, если различны ихъ форма и размѣры.

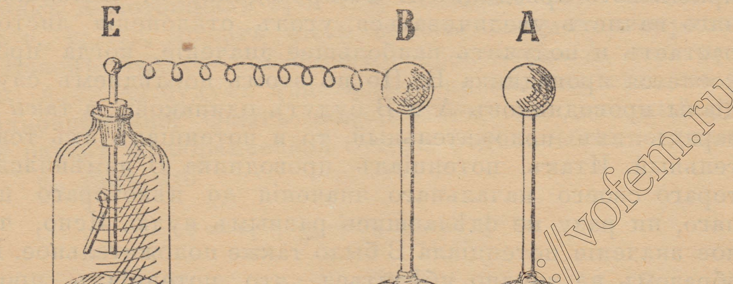
12. *Потенціалъ положительный и отрицательный.*

Зарядимъ одинъ проводникъ положительнымъ электричествомъ, а другой отрицательнымъ, но такъ, чтобъ ихъ потенціалы были одинаковы, о чемъ судимъ, какъ и всегда, по показанію удаленнаго электроскопа. Соединивъ два такіе проводника, мы замѣтимъ, что зарядъ положительно заряженнаго проводника уменьшился—слѣдовательно, электричество съ проводнника, заряженнаго положительнымъ электричествомъ, перешло на проводникъ, заряженный отрицательнымъ электричествомъ. Значитъ, потенціалъ положительно заряженнаго проводника выше потенціала отрицательно заряженнаго проводника. А такъ какъ электроскопъ показывалъ одинаковое отклоненіе листочка, то, значитъ, числовыя значенія потенціаловъ обоихъ проводниковъ были равны. Изъ двухъ величинъ, равныхъ по числовому значенію, одна можетъ быть больше другой только въ томъ случаѣ, если одна изъ нихъ положительная, а другая отрицательная. Слѣдовательно, мы должны считать потенціалъ проводника, заряженнаго положительнымъ электричествомъ, положительнымъ, а потенціалъ проводника, заряженнаго отрицательнымъ электричествомъ, отрицательнымъ. Только введеніе въ разсмотрѣніе понятій о положительномъ и отрицательномъ потенціалѣ позволяетъ, не впадая въ противорѣчіе съ установленными уже понятіями, объяснить слѣдующій опытъ. Пусть проводникъ А заряженъ положительнымъ электричествомъ до потенціала, напримѣръ, въ 3 единицы, а проводникъ В отрицательнымъ электричествомъ до большаго потенціала, напримѣръ, въ 7 единицъ.

При соединеніи этихъ проводниковъ положительный зарядъ проводника А уменьшится, равно какъ уменьшится и отрицательный зарядъ проводника В. Значитъ, положительное электричество перешло съ проводника А на проводникъ В, хотя потенціалъ А численно меньше потенціала В. Введеніе въ разсмотрѣніе отрицательнаго потенціала позволяетъ и этотъ опытъ истолковать согласно со всѣмъ предыдущимъ. Потенціалъ проводника А, какъ положительный, больше отрицательнаго проводника В, и, слѣдовательно, электричество въ данномъ случаѣ перешло съ проводника, имѣющаго бо́льшій потенціалъ, на проводникъ, имѣющій меньшій потенціалъ.

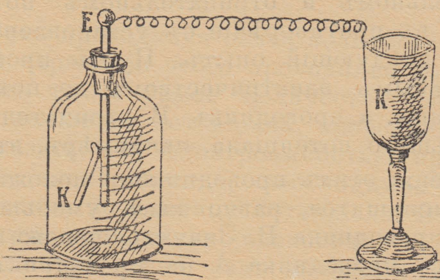
13. *Потенціалъ незаряженнаго проводника, подверженнаго электростатической индукціи.*

Пусть проводникъ А заряженъ, а проводникъ В не заряженъ. Соединимъ проводникъ В проволокой *p* съ удаленнымъ электроскопомъ Е (фиг. 12). Листочекъ электроскопа отклонится. Слѣдовательно, проводникъ В имѣетъ нѣкоторый потенціалъ. На проводникѣ В наводятся, вслѣдствіе дѣйствія на него провод-



Фиг. 12.

ника А, оба рода электричества, но потенціалъ его одинаковъ по знаку съ потенціаломъ наводящаго проводника А. Если послѣднiй заряженъ положительнымъ электричествомъ, то потенцiалъ проводника В тоже положительный. Чтобъ убѣдиться въ этомъ, произведемъ предварительно слѣдующiй опытъ. Пусть полый проводникъ К заряженъ положительнымъ электричествомъ и соединенъ съ электроскопомъ Е (фиг. 13). Электроскопъ покажетъ положительный потенцiалъ. Будемъ теперь переносить



Фиг. 13.

на проводникъ К съ электрофора при помощи диска отрицательное электричество. Потенцiалъ проводника К начнетъ уменьшаться, обратится въ нуль, о чемъ судятъ по тому, что уголъ отклоненiя листочка К сдѣлается равнымъ нулю, а затѣмъ, при дальнѣйшемъ сообщенiи отрицательнаго электричества проводнику К, потенцiалъ послѣдняго станетъ отрицательнымъ, такъ что листочекъ К снова отклонится. Отсюда заключаемъ, что отрицательный потенцiалъ проводника можетъ перейти въ положительный не иначе, какъ принявъ предварительно значенiе нуля. Теперь возвратимся къ прежнему опыту. Электроскопъ Е показываетъ нѣкоторый потенцiалъ проводника В. Пусть проводникъ А заряженъ положительнымъ электричествомъ. Будемъ приближать прводникъ А къ проводнику В. Потенцiалъ послѣдняго начнетъ увеличиваться, уголъ отклоненiя листочка К возрастаетъ и получитъ наибольшее значенiе, когда проводникъ А коснется проводника В. Но въ этомъ послѣднемъ случаѣ потенцiалы проводниковъ А и В будутъ одинаковы, а такъ какъ общiй зарядъ ихъ положительный, то и потенцiалъ ихъ тоже положительный. Итакъ, потенцiалъ проводника В измѣнился отъ нѣкотораго своего начальнаго значенiя до нѣкотораго положительнаго, ни разу не сдѣлавшись равнымъ нулю. Ясно, что начальное значенiе потенцiала В было также положительное. Подобнымъ образомъ не трудно убѣдиться, что потенцiалъ проводника В отрицательный, если наводящiй проводникъ А заряженъ отрицательнымъ электричествомъ.

Изслѣдуемъ, отчего зависитъ потенцiалъ проводника В. Не измѣняя прочихъ условiй опыта, увеличимъ или уменьшимъ въ нѣкоторое число разъ зарядъ проводника А. Мы увидимъ, что во столько же разъ увеличится или уменьшится потенцiалъ проводника В. Итакъ, наведенный потенціалъ пропорціоналенъ заряду наводящаго проводника. Теперь будемъ измѣнять только разстояніе между проводникомъ А и проводникомъ В. Окажется, что, съ увеличеніемъ разстоянія между ними, наведенный потенціалъ уменьшается, съ уменьшеніемъ разстоянія увеличивается. Если размѣры проводниковъ А и В малы, то болѣе тщательное изслѣдованіе показало бы, что наведенный потенціалъ проводника В обратно пропорціоналенъ его удаленію отъ наводящаго проводника. Наконецъ, наведенный потенціалъ зависитъ отъ свойствъ изолирующей среды, раздѣляющей оба проводника А и В. Такъ, если мы, не измѣняя ни заряда А, ни разстоянія между А и В, помѣстимъ между ними стеклянную или эбонитовую или какую-нибудь другую изолирующую пластинку, то отклоненіе листочка электроскопа Е всякій разъ будетъ иное. Соединяя все сказанное вмѣстѣ, мы можемъ выразить зависимость потенціала v проводника В отъ заряда Е наводящаго проводника А, разстоянія R между А и В и свойствъ изолирующей среды слѣдующей формулой

$$3)\qquad v = \frac{1}{k}\frac{E}{R},$$

гдѣ коэффиціентъ k различенъ для различныхъ діэлектриковъ, отдѣляющихъ наводящій проводникъ отъ подвергающагося индукціи и носитъ названіе діэлектрической постоянной среды или индуктивной способности діэлектрика.

14. *Сложеніе потенціаловъ.*

Пусть проводникъ А подвергается наводящему дѣйствію нѣсколькихъ проводниковъ: A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$, имѣющихъ заряды соотвѣтственно E_1, $E_2, \ldots E^n$, и пусть проводникъ A_1, дѣйствуя съ разстоянія R_1 одинъ, наводитъ на проводникъ А потенціалъ v_1, проводникъ A_2, дѣйствуя съ разстоянія R_2 одинъ, наводитъ на проводникъ А потенціалъ v_2 и т. д. Каждый изъ этихъ потенціаловъ v_1, $v_2 \ldots v_n$ можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Каковъ будетъ потенціалъ v проводника А, если проводники A_1, $A_2 \ldots A_n$ будутъ дѣйствовать на него въ тѣхъ же условіяхъ одновременно? Опытъ показываетъ, что искомый потенціалъ v равенъ алгебраической суммѣ отдѣльныхъ потенціаловъ v_1, $v_2 \ldots v_n$, такъ что

$$4)\qquad v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Если зарядъ A_1 есть E_1, разстояніе A_1 отъ $A = R_1$, и діэлектрическая постоянная среды есть k, то по формулѣ 3)

$$v_1 = \frac{1}{k}\,\frac{E_1}{R_1} \text{ и аналогично}$$

$$v_2 = \frac{1}{k}\,\frac{E_2}{R_2}$$

. . . .

. . . .

$$v_n = \frac{1}{k}\,\frac{E_n}{R_n}.$$

На основанiи этого формула 4) даетъ

$$v = \frac{1}{k}\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_n}{R_n}\right),$$

причемъ въ этой формулѣ знаки $+$ передъ какимъ-нибудь однимъ изъ E_1, $E_2 \ldots E_n$ надо измѣнить на минусъ, если этотъ зарядъ отрицательный. Въ этомъ состоитъ такъ называемый законъ сложенiя потенцiаловъ.

15. *Потенцiалъ шара.*

Потенцiалъ шара мы можемъ опредѣлить на основанiи теоремы о сложенiи потенцiаловъ слѣдующимъ образомъ. Пусть шаръ съ центромъ въ точкѣ O и съ радiусомъ R заряженъ электричествомъ съ поверхностной плотностью σ. Возьмемъ какую-нибудь точку A (фиг. 14) внѣ шара, помѣстимъ въ ней весьма малый проводникъ, и опредѣлимъ потенцiалъ, который шаръ наводитъ на проводникъ. Пусть проводникъ A такъ малъ, что размѣрами его можно пренебречь и считать его за точку. Проведемъ черезъ точку A и центръ шара линiю AO и построимъ двѣ плоскости, перпендикулярныя къ линiи AO. Эти двѣ плоскости вырѣжутъ изъ поверхности шара зону, заключенную между двумя параллельными кругами радiусовъ DC и D_1C_1. Пусть разстоянiе между проведенными плоскостями, равное DD_1, весьма мало. Въ такомъ случаѣ можно принять, что всѣ точки зоны одинаково удалены отъ точки A, и именно на разстоянiе AC. Разобьемъ всю поверхность зоны на весьма малыя площадки s_1, s_2, s_3 . . . и т. д., на которыхъ находятся заряды l_1, l_2, l_3 . . . и т. д. Зарядъ l_1 наводитъ въ точкѣ A потенцiалъ v_1, равный

$$v_1 = \frac{1}{k}\,\frac{l_1}{AC}.$$

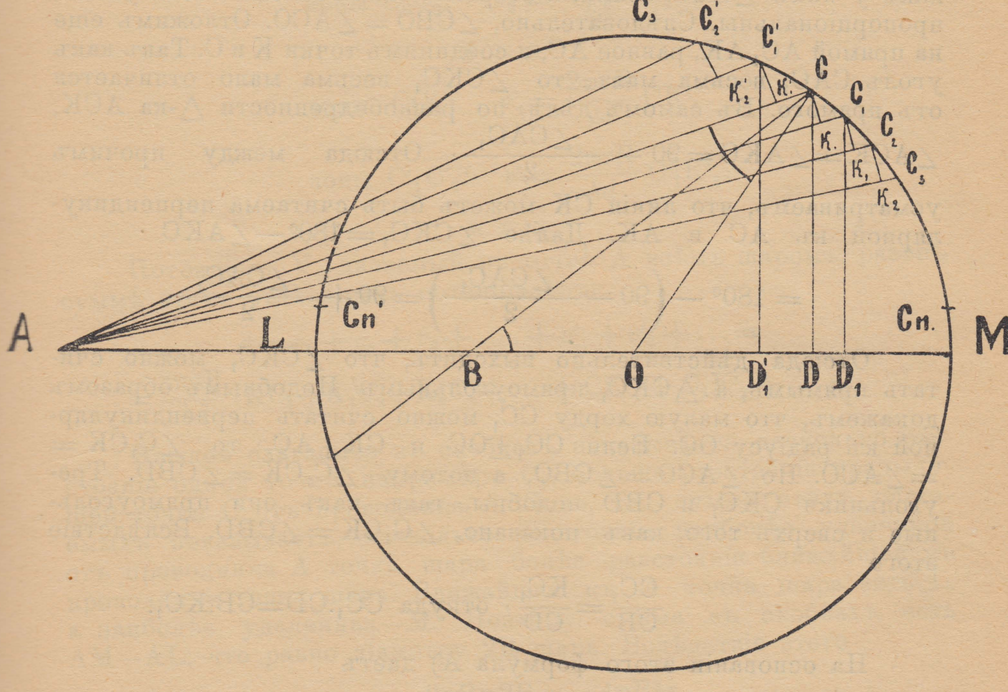
Подобнымъ образомъ заряды l_2, l_3, и т. д. наводятъ въ A потенцiалы v_2, v_3 . . . и т. д., равные

$$v_2 = \frac{1}{k}\,\frac{l_2}{AC},\quad v_3 = \frac{1}{k}\,\frac{l_3}{AC} \cdots \text{ и т. д.,}$$

гдѣ k діэлектрическая постоянная среды, окружающей шаръ. По закону сложенія потенціаловъ, потенціалъ V_1, наводимый всѣмъ зарядомъ зоны, равенъ

$$V_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = \frac{1}{k}\;\frac{1}{AC}\,(l_1 + l_2 + \cdots).$$

Но сумма $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots$ есть весь зарядъ E_1 зоны. Если поверхность зоны есть S_1, то $E_1 = \sigma S_1$. Опредѣлимъ S_1. Поверх-



Фиг. 14.

ность очень тонкой зоны можно разсматривать, какъ поверхность усѣченнаго конуса, котораго радіусами верхняго и нижняго основанія служатъ CD и C_1D_1, а образующей является хорда CC_1. На основаніи этого

$$S_1 = 2\pi\;\frac{CD + C_1D_1}{2}\cdot CC_1.$$

Но C_1D_1 весьма мало отличается отъ CD, такъ что можно принять $CD + C_1D_1 = 2.CD$ и положить

$$S_1 = 2\pi CD.CC_1.$$

На основанiи этого $E_1 = 2\pi\sigma CD.CC_1$, а

$$V_1 = \frac{1}{k} \frac{2\pi\sigma CD.CC_1}{AC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A)$$

Найдемъ на прямой АО точку В, удовлетворяющую условiю

$$\frac{AO}{R} = \frac{R}{OB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad B)$$

При этомъ условiи треугольники АОС и ВОС подобны, такъ какъ у нихъ $\angle AOC$ общiй, а стороны, заключающiя этотъ уголъ, пропорцiональны. Слѣдовательно, $\angle CBO = \angle ACO$. Отложимъ еще на прямой AC_1 АК, равное АС, и соединимъ точки К и С. Такъ какъ уголъ CAC_1 весьма малъ, то $\angle CKC_1$ весьма мало отличается отъ прямого. Въ самомъ дѣлѣ, по равнобедренности $\triangle$-ка АСК, $\angle ACK = \angle AKC = 90 - \frac{\angle CAC_1}{2}$. Отсюда между прочимъ усматриваемъ, что линiя СК можетъ быть считаема перпендикулярной къ АС и АК. Далѣе $\angle CKC_1 = 180^0 - \angle AKC$

$$= 180^0 - \left(90 - \frac{\angle CAC_1}{2}\right) = 90 + \frac{\angle CAC_1}{2}.$$

Отсюда дѣйствительно выходитъ, что $\angle CKC_1$ можно считать прямымъ, а $\triangle CKC_1$ прямоугольнымъ. Подобнымъ образомъ докажемъ, что малую хорду CC_1 можно считать перпендикулярной къ радiусу ОС. Если $CC_1 \perp OC$ и $CK \perp AC$, то $\angle C_1CK = \angle ACO$. Но $\angle ACO = \angle CBO$, а потому $\angle C_1CK = \angle CBD$. Треугольники CKC_1 и CBD подобны, такъ какъ они прямоугольные и сверхъ того, какъ показано, $\angle C_1CK = \angle CBD$. Вслѣдствiе этого

$$\frac{CC_1}{CB} = \frac{KC_1}{CD}, \text{ откуда } CC_1.CD = CB.KC_1.$$

На основанiи этого формула А) даетъ

$$V_1 = \frac{2\pi\sigma}{k} \frac{CB}{AC} \cdot KC_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C)$$

Подобiе треугольниковъ АСО и СВО даетъ:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{OC}{AO} = \frac{R}{d},$$

при чемъ разстоянiе АО точки А отъ центра шара обозначено буквою d. Въ силу этого формула С) даетъ:

$$V_1 = \frac{2\pi\sigma}{k} \frac{R}{d} \cdot KC_1.$$

Здѣсь KC_1 есть разность разстоянiй проводника А отъ ближайшей и удаленной точки дуги CC_1. Чтобъ найти потенцiалъ, который даетъ весь шаръ въ точкѣ A, надо разбить всю поверхность шара на весьма тонкія зоны, въ родѣ разсмотрѣнной, построивъ дуги CC_1, C_1C_2, C_2C_3 и т. далѣе, кончая дугою C_nM, а также дуги CC'_1, $C'_1C'_2$, $C'_2C'_3$ и т. далѣе, кончая дугою C'_nL. Построимъ еще разности между разстояніями AC_2 и AC_1, AC_3 и AC_2 и т. д., а также между AC и AC'_1. AC'_1 и AC'_2 и т. д. Пусть это будутъ отрѣзки C_2K_1, C_3K_2 и т. д., и K'_1C, $K'_2C'_1$ и т. д.

Потенціалы, наводимые въ A отдѣльными зонами, суть:

$$\text{зоны } C_1C_2: \quad v_2 = \frac{2\pi\sigma R}{kd} K_1C_2$$

$$\text{зоны } C_2C_3: \quad v_3 = \frac{2\pi\sigma R}{kd} K_2C_3$$

и т. д.

$$\text{зоны } CC'_1: \quad v'_1 = \frac{2\pi\sigma R}{2d} CK'_1$$

$$\text{зоны } C'_1C'_2: \quad v'_2 = \frac{2\pi\sigma R}{kd} C'_1K'_2.$$

и т. д.

Потенціалъ V_1, даваемый въ точкѣ A всѣмъ шаромъ, равенъ суммѣ этихъ отдѣльныхъ потенціаловъ:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v'_1 + v'_2 + \ldots =$$

$$= \frac{2\pi\sigma R}{kd}(KC_1 + K_1C_2 + K_2C_3 + \ldots + CK'_1 + C_1K'_2 + \ldots).$$

Каждое слагаемое въ скобкахъ показываетъ, насколько разстояніе одной точки, напримѣръ C_1, больше разстоянія предыдущей точки C отъ проводника A. Ясно, что сумма этихъ слагаемыхъ показываетъ, насколько разстояніе наиболѣе удаленной отъ проводника A точки шара болѣе разстоянія ближайшей къ проводнику точки шара. Ближайшая къ A точка шара есть L, а наиболѣе удаленная—M. Поэтому сумма въ скобкахъ есть AM—AL, что равно діаметру 2R шара. Вслѣдствіе этого

$$V = \frac{2\pi R\sigma . 2R}{kd} = \frac{4\pi R^2\sigma}{kd};$$

$4\pi R^2$ есть полная поверхность шара, а произведеніе $4\pi R^2\sigma$ есть весь зарядъ E шара, такъ что

$$V = \frac{1}{k}\,\frac{E}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad D)$$

Эта формула показываетъ, что шаръ наводитъ въ точкѣ A, лежащей внѣ шара, потенціалъ такъ, какъ если бы весь его зарядъ былъ сосредоточенъ въ его центрѣ.

Всякая точка поверхности шара есть проводникъ, удаленный отъ центра на разстояніе радіуса R шара. Поэтому мы найдемъ потенціалъ самаго шара, положивъ въ формулѣ D) d=R, такъ что

$$V = \frac{1}{k} \frac{E}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Эта формула позволяетъ установить абсолютную единицу потенціала. Пусть зарядъ шара, окруженнаго воздухомъ, равенъ абсолютной единицѣ электричества, а его радіусъ равенъ одному сантиметру. Примемъ для воздуха k=1. Потенціалъ такого шара по формулѣ 5), въ которой надо положить E=1 и R=1, равенъ также единицѣ. Такимъ образомъ, абсолютной единицей потенціала должно считать потенціалъ шара съ радіусомъ въ 1 сантиметръ, заряженнаго абсолютной единицей электричества и находящагося въ воздухѣ въ отсутствіи всякихъ другихъ проводниковъ, при чемъ для воздуха принимается k=1. На практикѣ за единицу потенціала принятъ вольтъ, равный $\frac{1}{300}$ абсолютной единицы потенціала. Изъ формулы 5) находимъ

$$E = kRV.$$

Съ другой стороны, называя электроемкость шара черезъ C, напишемъ по формулѣ 2) стр. 143

$$E = CV.$$

Отсюда вытекаетъ, что $C = kR$. Если шаръ находится въ воздухѣ, то C=R, т. е. электроемкость шара равна его радіусу. Вычислимъ, какова должна быть электроемкость шара, чтобъ одинъ кулонъ заряжалъ его до потенціала въ одинъ вольтъ. Мы знаемъ, что кулонъ равенъ 3.10^9 абсолютнымъ единицамъ электричества, а вольтъ равенъ $\frac{1}{300}$ абсолютной единицѣ потенціала. Поставимъ въ формулѣ 5)

$$v = \frac{1}{300} \text{ и } E = 3.10^9, \text{ получимъ:}$$

$$\frac{1}{300} = \frac{3.10^9}{R}, \text{ откуда}$$

$$R = 9.10^{11} \text{ сантиметровъ.}$$

Итакъ, для того, чтобы одинъ кулонъ электричества заряжалъ шаръ до 1 вольта, надо, чтобъ радіусъ шара равнялся 9.10^{11} сантиметровъ или 9000000 километровъ.

Такой шаръ превосходитъ по своимъ размѣрамъ землю. Электроемкость такого шара принята на практикѣ за единицу электроемкости и называется „фарада". Такъ какъ эта единица очень велика, то употребляютъ обыкновенно единицу въ 1000000 разъ меньшую, которая называется „микрофарада".

(Продолженіе слѣдуетъ).

Теорія приближенныхъ дробей.

В. Н. Шимковича.

1. Будемъ возводить двучленъ $(a \pm \sqrt{N})$, въ которомъ подъ a и N подразумѣваются пока цѣлыя и положительныя числа, последовательно въ первую, вторую, третью и т. д. степени; въ полученныхъ результатахъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ члена a, будемъ соединять всѣ члены, свободные отъ $\sqrt{N}$, стало быть всѣ члены нечетнаго порядка, въ одну группу, обозначая сумму этихъ членовъ черезъ p, и всѣ члены, въ кои входитъ $\sqrt{N}$, т. е. всѣ члены четнаго порядка,—въ другую группу, обозначая сумму коэффиціентовъ при $\sqrt{N}$, черезъ q. Значкомъ m при p_m и q_m будемъ отмѣчать степень, въ которую возведенъ двучленъ $(a \pm \sqrt{N})$.

При такомъ условіи различныя степени двучена $(a \pm \sqrt{N})$ примутъ видъ:

$$(a \pm \sqrt{N})^1 = p_1 \pm q_1 \sqrt{N}, \text{ гдѣ } p_1 = a, \quad q_1 = 1$$

$$(a \pm \sqrt{N})^2 = p_2 \pm q_2 \sqrt{N}, \text{ гдѣ } p_2 = a^2 + N, \; q_2 = 2a$$

$$(a \pm \sqrt{N})^3 = p_3 \pm q_3 \sqrt{N}, \text{ гдѣ } p_3 = a^3 + 3aN, \; q_3 = 3a^2 + N$$

. . . .

$$(a \pm \sqrt{N})^m = p_m \pm q_m \sqrt{N}, \text{ гдѣ}$$

$$p_m = \frac{(a+\sqrt{N})^m + (a-\sqrt{N})^m}{2}$$

и

$$q_m = \frac{(a+\sqrt{N})^m - (a-\sqrt{N})^m}{2\sqrt{N}}.$$

2. Составивъ тождество

$$q_m \sqrt{N} = p_m + q_m \sqrt{N} - p_m$$

и раздѣливъ обѣ части его на q_m, получимъ

$$\sqrt{N} = \frac{p_m}{q_m} + \frac{q_m \sqrt{N} - p_m}{q_m} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_m - q_m \sqrt{N}}{q_m};$$

но $p_m - q_m \sqrt{N} = (a - \sqrt{N})^m$; поэтому

$$\sqrt{N} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{(a-\sqrt{N})^m}{q_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если выбрать a такимъ, чтобы оно удовлетворяло одному изъ неравенствъ

$$a > \sqrt{N} > a - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

или

$$a < \sqrt{N} < a + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то разность $a - \sqrt{N}$ представитъ изъ себя нѣкоторую дробь, меньшую единицы; взявъ m достаточно большимъ, мы можемъ сдѣлать отношеніе $\frac{(a-\sqrt{N})^m}{q_m}$, въ коемъ q_m—цѣлое положительное число, меньшимъ всякой данной величины и тогда $\frac{p_m}{q_m}$ представитъ собой квадратный корень изъ числа N съ любымъ приближеніемъ [1]).

Дробь $\frac{p_m}{q_m}$ будемъ называть m-ной *приближенной* [2]) квадратнаго корня изъ N по a или, вкратцѣ, m-ной *приближенной*, а совокупность всѣхъ *приближенныхъ* квадратнаго корня изъ N по a—*рядомъ приближенныхъ*.

Примѣръ. Пусть $N = 7$, $a = 2$; тогда

$\frac{p_1}{q_1} = 2:1 = 2{,}0.$ $\qquad$ $\frac{p_2}{q_2} = 11:4 = 2{,}75$

$\frac{p_3}{q_3} = 50:19 = 2{,}63...$ $\qquad$ $\frac{p_4}{q_4} = 233:88 = 2{,}647...$

$\frac{p_5}{q_5} = 1082:409 = 2{,}6454...$ $\qquad$ $\frac{p_6}{q_6} = 5027:1900 = 2{,}64578...$

Истинное значеніе $\sqrt{7} = 2{,}64575...$

Пусть $N = 13$, $a = 4$; тогда

$\frac{p_1}{q_1} = 4:1 = 4{,}0.$ $\qquad$ $\frac{p_2}{q_2} = 29:8 = 3{,}625.$

$\frac{p_3}{q_3} = 220:61 = 3{,}606...$ $\qquad$ $\frac{p_4}{q_4} = 1673:464 = 3{,}6056...$

$\frac{p_5}{q_5} = 12724:3529 = 3{,}605553...$ $\qquad$ $\frac{p_6}{q_6} = 96773:26840 = 3{,}6055514...$

Истинное значеніе $\sqrt{13} = 3{,}605551275...$

---

[1]) Дальше будетъ покозано, что $\sqrt{N}$ есть предѣлъ, къ которому стремится дробь $\frac{p_m}{q_m}$, по мѣрѣ увеличенія m, при всякомъ a, а не только удовлетворяющемъ неравенствамъ (2) и (3).

[2]) Наименованіе *приближенныхъ* присвоено этимъ дробямъ въ отличіе отъ *подходящихъ* въ непрерывныхъ дробяхъ.

3. *Законъ образовнія прибалиженныхъ дробей.* Такъ какъ

$$p_m \pm q_m \sqrt{N} = (a \pm \sqrt{N})^m$$

а

$$p_{m+1} \pm q_{m+1} \sqrt{N} = (a \pm \sqrt{N})^{m+1},$$

то

$$p_{m+1} \pm q_{m+1} \sqrt{N} = (p_m \pm q_m \sqrt{N})(a \pm \sqrt{N}) =$$

$$= (ap_m + q_m N) \pm (aq_m + p_m) \sqrt{N},$$

откуда

$$p_{m+1} = ap_m + q_m N \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

$$q_{m+1} = aq_m + p_m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

Измѣнивъ въ этихъ равенствахъ значекъ m на $m-1$ и рѣшая ихъ относительно p_{m-1} и q_{m-1}, находимъ

$$p_{m-1} = \frac{ap_m - q_m N}{a^2 - N} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

$$q_{m-1} = \frac{aq_m - p_m}{a^2 - N} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

Затѣмъ,

$$p_{m+2} = ap_{m+1} + q_{m+1} N = a(ap_m + q_m N) + (aq_m + p_m)N$$

$$q_{m+2} = aq_{m+1} + p_{m+1} \qquad = a(aq_m + p_m) \quad + (ap_m + q_m N),$$

откуда

$$p_{m+2} = p_m (a^2 + N) + 2aq_m N \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

$$q_{m+2} = q_m (a^2 + N) + 2ap_m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

Далѣе,

$$p_{2m} \pm q_{2m} \sqrt{N} = (a \pm \sqrt{N})^{2m} = [(a \pm \sqrt{N})^m]^2 =$$

$$= (p_m \pm q_m \sqrt{N})^2,$$

откуда

$$p_{2m} = p_m^2 + q_m^2 N \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10)$$

$$q_{2m} = 2p_m q_m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Кромѣ того, такъ какъ

$$p_m + q_m \sqrt{N} = (a + \sqrt{N})^m$$

$$p_m - q_m \sqrt{N} = (a - \sqrt{N})^m,$$

то

$$(p_m + q_m \sqrt{N})(p_m - q_m \sqrt{N}) = [(a + \sqrt{N})(a - \sqrt{N})]^m,$$

откуда

$$p_m^2 - q_m^2 N = (a^2 - N)^m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

$$p_m = \sqrt{(a^2 - N)^m + q_m^2 N} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13)$$

$$q_m = \sqrt{\frac{p_m^2 - (a^2 - N)^m}{N}} \quad . \ . \ . \ . \quad (14)$$

Наконецъ,

$$p_m \pm q_m \sqrt{N} = (a \pm \sqrt{N})^m = a^m \pm m a^{m-1} \sqrt{N} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} N \pm$$

$$\pm \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2.3\ldots 2n} a^{m-2n} N^n \pm$$

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots(2n+1)} a^{m-2n+1} N^n \sqrt{N} + \cdots,$$

откуда

$$p_m = a^m + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} N + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2.3\ldots 2n} a^{m-2n} N^n + \quad . . \ (15)$$

$$q_m = m a^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} N + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots(2n+1)} a^{m-2n+1} N^n + \ . \ . \ . \ (16)$$

Изъ выведенныхъ формулъ (4) и (5) явствуетъ, что при a и N цѣлыхъ и положительныхъ всегда 1) $p_{m+1} > p_m$, 2) $q_{m+1} > q_m$ и 3) $p_m > q_m$.

4. *Разность между приближенными*. Вычитая изъ m-той *приближенной* $(m+1)$-ую и пользуя сьформулами (4), (5), (9), (10) и (12), находимъ

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{a p_m + q_m N}{a q_m + p_m} = \frac{p^2_m - q^2_m N}{q_m \cdot q_{m+1}},$$

откуда

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{(a^2 - N)^m}{q_m q_{m+1}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

Равнымъ образомъ,

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{2m}}{q_{2m}} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p^2_m + q^2_m N}{2 p_m q_m} = \frac{(a^2 - N)^m}{2 p_m q_m} \quad . \ . \ . \ (18)$$

5. *О сократимости приближенныхъ*. Въ томъ случаѣ, когда числа a и N одинаковой четности или имѣютъ общій дѣлитель, вторая *приближенная* $\frac{a^2 + N}{2a}$ можетъ быть сокращена на 2 или на этотъ общій дѣлитель. Отсюда слѣдуетъ, что нѣкоторыя *приближенныя* сократимы.

Пусть числитель и знаменатель m-той *приближенной* имѣютъ общій дѣлитель k, т. е. пусть

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{k \cdot p'_m}{k \cdot q'_m};$$

тогда

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{ap_m + q_m N}{aq_m + p_m} = \frac{k(ap'_m + q'_m N)}{k(aq'_m + p'_m)},$$

т. е. *если какая либо приближенная сократима, то и всѣ послѣдующія приближенныя одного съ нею ряда также сократимы* и наоборотъ, *если какая либо приближенная несократима, то и всѣ предшествующія ей приближенныя одного съ нею ряда также несократимы.*

Допустимъ, что вторая *приближенная* сократима на k, т. е. что $(a^2 + N)$ и $2a$ имѣютъ общій дѣлитель k; тогда p_4 и q_4 будутъ дѣлиться на k^2, ибо входящіе въ составъ ихъ члены (8) и (9) дѣлятся каждый порознь на k^2; точно также, p_6 и q_6 будутъ дѣлиться на k^3 и, вообще, если вторая *приближенная* $\frac{p_2}{q_2}$ сократима на k то $\frac{p_{2m}}{q_{2m}}$ сократима на k^m.

Разность между двумя послѣдовательными *приближенными* равна

$$\frac{p_{2m}}{q_{2m}} - \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} = \frac{(a^2 - N)^{2m}}{q_{2m}\, q_{2m+1}},$$

откуда

$$p_{2m}\, q_{2m+1} - q_{2m}\, p_{2m+1} = (a^2 - N)^{2m}.$$

Если дробь $\frac{p_{2m}}{q_{\ m}}$ сократима на k^m, то и $\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}$ также сократима на k^m; стало быть, первая часть написаннаго равенства дѣлится на k^{2m}; поэтому, и вторая часть равенства т. е. $(a^2 - N)^{2m}$ должна дѣлиться на k^{2m}. Это значитъ, что *приближенныя* могутъ быть сокращаемы только на дѣлителей числа $(a^2 - N)$.

Отсюда слѣдуетъ также, что если знаменатель второй *приближенной* $2a$ дѣлится безъ остатка на $a^2 - N$, то разность между послѣдовательными приближенными $\frac{p_m}{q_m}$ и $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ сократима на $(a^2 - N)^m$ и можетъ принять видъ $\frac{1}{q'_m \cdot q'_{m+1}}$, гдѣ $q'_m q'_{m+1} =$

$$= \frac{q_m\, q_{m+1}}{(a^2 - N)^m}.$$

6. *Предѣлъ, къ которому стремятся приближенныя по мѣрѣ увеличенія m.* Разность $\frac{(a - \sqrt{N})^m}{q_m}$ между *приближенной* $\frac{p_m}{q_m}$ и истин-

нымъ значеніемъ квадратнаго корня изъ N можетъ быть величиной положительной или отрицательной въ зависимости отъ того, будетъ ли a больше или меньше $\sqrt{N}$. При $a > \sqrt{N}$ эта разность всегда положительна и потому всегда $\frac{p_m}{q_m} > \sqrt{N}$. При $a < \sqrt{N}$ эта разность будетъ положительной, когда m четно есть число l, и отрицательной, когда m нечетно есть число l. Поэтому, въ случаѣ $a < \sqrt{N}$ всѣ приближенныя четнаго порядка больше $\sqrt{N}$, а нечетнаго—меньше.

7. Пусть $\frac{p_m}{q_m} > \sqrt{N}$. Каково бы ни было a разъ только оно положительно, числитель и знаменатель *приближенной* $\frac{p_m}{q_m}$ будутъ всегда положительными. Поэтому, если $p_m > q_m\sqrt{N}$, то $p_m^2 > q_m^2\sqrt{N}$;

$$p_m^2 + ap_m q_m > q_m^2 N + ap_m q_m;\quad \frac{p_m^2 + ap_m q_m}{q_m(aq_m + p_m)} > \frac{q_m^2 N + ap_m q_m}{q_m(aq_m + p_m)}.$$

Сокративъ первую часть послѣдняго неравенства на $aq_m + p_m$, а вторую часть на q_m, получимъ

$$\frac{p_m}{q_m} > \frac{ap_m + q_m N}{aq\ + p_m};$$

но вторая часть полученнаго неравенства есть $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$; поэтому, если $\frac{p_m}{q_m} > \sqrt{N}$, то $\frac{p_m}{q_m} > \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$.

Измѣнивъ въ предшествующихъ выкладкахъ знакъ $>$ на $<$, приходимъ къ выводу, что если $\frac{p_m}{q_m} < \sqrt{N}$, то $\frac{p_m}{q_m} < \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$.

А такъ какъ $\frac{p_1}{q_1} = a$, то, въ случаѣ $a > \sqrt{N}$, рядъ *приближенныхъ* имѣетъ видъ:

$$a > \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_3}{q_3} > \ldots > \frac{p_m}{q_m} > \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} > \ldots > \sqrt{N} \qquad (19)$$

Въ случаѣ $a < \sqrt{N}$ рядъ *приближенныхъ* распадается на два ряда; такъ какъ $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a^2 + N}{2a}$, то эти два ряда могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$a < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \cdots < \sqrt{N}\ \ldots \qquad (20)$$

$$\frac{a^2+N}{2a} > \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_6}{q_6} > \cdots > \frac{p_{2m}}{q_{2m}} > \frac{p_{2m+2}}{q_{2m+2}} > \cdots > \sqrt{N} \quad . \ . \ . \quad (21)$$

Возьмемъ разности между сосѣдними приближенными:

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(a^2-N)^{m-1}}{q_{m-1} \cdot q_m}$$

$$\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{(a^2-N)^m}{q_m q_{m+1}}.$$

Раздѣлимъ обѣ части перваго изъ этихъ равенствъ на соотвѣтствующія части второго, получимъ

$$\frac{\dfrac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \dfrac{p_m}{q_m}}{\dfrac{p_m}{q_m} - \dfrac{p_{m+1}}{q_{m+1}}} = \frac{q_{m+1}}{q_{m-1}(a^2-N)} = \frac{aq_m+p_m}{aq_m-p_m}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} > \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (22)$$

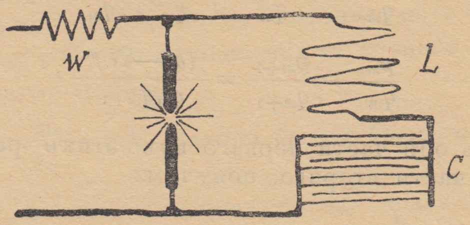
т. е. что *разность между двумя послѣдовательными приближенными тѣмъ меньше, чѣмъ больше порядокъ приближенныхъ.*

(Продолженіе слѣдуетъ).

Новѣйшие успѣхи безпроволочной телеграфіи.

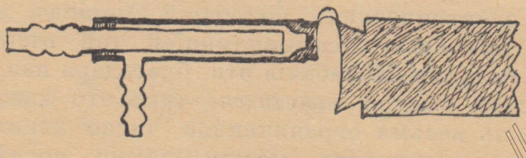
До настоящаго времени въ безпроволочной телеграфіи примѣнялись въ качествѣ источниковъ электромагнитныхъ волнъ электрическіе разряды конденсаторовъ. Каждый разрядъ сопровождается, какъ извѣстно, искрой, а каждая искра состоитъ изъ цѣлаго ряда электрическихъ колебаній, періодъ которыхъ обусловливается емкостью и самоиндукціей той цѣпи, въ которой происходитъ разрядъ. Колебанія эти, благодаря излученію энергіи въ пространство, быстро *затухаютъ*, такъ что каждая искра можетъ дать лишь весьма ограниченное число электромагнитныхъ волнъ. Если промежутокъ между двумя послѣдовательными искрами будетъ въ $\frac{1}{100}$ долю секунды, то при появленіи второй искры группа волнъ, порожденныхъ первою искрой, распространяясь со скоростью свѣта, успѣетъ удалиться уже на 3.000 километровъ. Каждому отдѣльному разряду приходится сообщать поэтому весьма большую энергію.

Датскій инженеръ Паульсенъ опубликовалъ недавно свой способъ полученія *незатухающихъ* электромагнитныхъ волнъ. Въ основѣ этого способа лежитъ явленіе „поющей вольтовой дуги", открытое въ 1899 г. англійскимъ физикомъ Дудделемъ. Дуддель бралъ вольтову дугу, возбуждаемую постояннымъ токомъ, и параллельно съ нею включалъ отвѣтвленіе, содержащее въ себѣ емкость и самоиндукцію (фиг. 1). Измѣненія въ силѣ тока, возни-



Фиг 1.

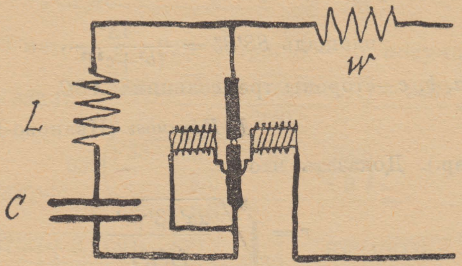
кающія благодаря неустойчивости вольтовой дуги, передаются отвѣтвленію, возбуждая въ немъ электрическія колебанія (перемѣнный токъ) съ періодомъ $T=2\pi\sqrt{CL}$, гдѣ C и L соотвѣтственно обозначаютъ емкость и самоиндукцію. Эти колебанія, въ свою очередь, дѣйствуютъ на дугу, благодаря чему она становится источникомъ электромагнитныхъ (и звуковыхъ) волнъ того же періода. Чтобы сдѣлать эти электромагнитныя волны примѣнимыми въ техникѣ безпроволочнаго телеграфированія, Паульсену пришлось увеличить силу порождающаго ихъ перемѣннаго тока. Онъ достигъ этой цѣли двумя путями: увеличеніемъ вольтажа и увеличеніемъ числа колебаній. Вольтажъ главнаго тока онъ повысилъ до 440 вольтъ, а число колебаній довелъ до 1 милліона въ секунду. Самую же дугу онъ видоизмѣнилъ такъ, чтобы процессы горѣнія протекали въ ней менѣе интенсивно. Онъ помѣстилъ ее въ атмосферу водорода, обладающаго большой теплопроводностью, и придалъ положительному полюсу форму мѣдной трубки, внутри которой циркулируетъ охлаждающій водяной токъ (фиг. 2). Кромѣ того, Паульсенъ помѣстилъ пламя дуги



Фиг. 2.

между полюсами сильнаго электромагнита (фиг. 3), вслѣдствіе чего пламя сдвигается перпендикулярно къ оси электромагнита и значительно ослабляется. Отрицательный уголь онъ сдѣлалъ болѣе толстымъ и заставилъ его медленно вращаться. Стремясь къ увеличенію числа колебаній, Паульсенъ въ отвѣтвленіи уменьшалъ главнымъ образомъ емкость, что̀ соотвѣтствуетъ увеличенію разности потенціаловъ на обкладкахъ конденсатора.

Благодаря всѣмъ этимъ ухищреніямъ, „поющая вольтова дуга“ сдѣлалась въ рукахъ Паульсена источникомъ правильныхъ гармоническихъ электромагнитныхъ колебаній, достаточно интенсивныхъ для того, чтобы быть обнаруженными на далекихъ раз-



Фиг. 3.

стояніяхъ. Опыты безпроволочнаго телеграфированія по новой системѣ уже были произведены, при чемъ разстояніе между станціями равнялось 300 километрамъ. Кромѣ сравнительной дешевизны (вслѣдствіе меньшей затраты энергіи), новый способъ обладаетъ еще и другими преимуществами. Съ одной и той же станціи можно, напр., отправлять нѣсколько депешъ одновременно, примѣняя для каждой депеши волны опредѣленной длины. Получать же телеграммы можетъ только та станція, которая имѣетъ соотвѣтственно-настроенные аппараты. Черезъ одну и ту же мѣстность могутъ одновременно, не мѣшая одна другой, сноситься различныя станціи.

Все это составляетъ значительныя преимущества системы Паульсена передъ обычнымъ способомъ искровой телеграфіи.

Д. Х.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 805 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x + axyz = y + bxyz = z + cxyz = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 806 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^{10} - y^9 . z = a, \quad y^{10} - z^9 x = b, \quad z^{10} - x^9 y = 0.$$

Г. Оганянцъ (Москва).

№ 807 (4 сер.). Изъ основанія S симедіаны *) AS треугольника ABC опущены перпендикуляры SS' и SS'' на его стороны AB и AC. Доказать, что

$$\text{площадь } SS'S'' = \frac{4\Delta^3}{(b^2+c^2)^2},$$

гдѣ Δ—площадь, a, b, c—стороны треугольника ABC.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

№ 808 (4 сер.). Доказать, что

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'}{\rho_1\rho_2\rho_3}},$$

гдѣ r—радіусъ вписаннаго круга, ρ_1, ρ_2, ρ_3—радіусы внѣвписанныхъ круговъ относительно треугольника ABC, а α, α', β, β', γ, γ' суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника на внутреннія биссектрисы его угловъ.

В. Шлыгинъ (ст. Урюпинская).

№ 809 (4 сер.). Доказать, что число

$$\left(\frac{N}{d^2}\right)^{2N} - 1$$

дѣлится на $4N+1$, если $4N+1$—простое число и если N дѣлится на d^2, гдѣ d—цѣлое число.

А. Брюхановъ (Иркутскъ).

№ 810 (4 сер.). Построить трапецію по углу при основаніи, площади, діагонали и углу между діагоналями.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

---

*) Симедіаной называется прямая, проведенная изъ A такъ, что уголъ между нею и медіаной AM дѣлится биссектрисой угла A пополамъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 676 (4 сер.). *Съ аэростата, находившагося надъ моремъ, бросили тѣло; звукъ всплеска донесся черезъ* 10 *секундъ. Опредѣлить высоту, на которой находился аэростатъ.*

Обозначивъ искомую высоту въ метрахъ черезъ x, ускореніе силы тяжести въ метрахъ черезъ g, скорость звука въ метрахъ черезъ c, время, за которое тѣло долетѣло до поверхности моря, черезъ y, время, за которое звукъ всплеска достигъ до шара, черезъ z, наконецъ, данное время 10 секундъ черезъ t, находимъ (полагая, что шаръ не перемѣстился замѣтно за время опыта)

$$x = \frac{gy^2}{2} \ (1), \quad x = cz \ (2), \quad y + z = t \ (3)$$ (y и z выражены въ секундахъ).

Подставивъ значеніе z изъ равенства (3) въ равенство (2), имѣемъ

$$x = c(t - y) \ (4).$$

Слѣдовательно, (см. (1)) $\frac{gy^2}{2}=c(t-y)$, или $gy^2+2cy-ct$, откуда, принимая во вниманіе, согласно съ условіемъ, положительный корень, находимъ

$$y=\frac{\sqrt{c^2+2ctg}-c}{g},\ \text{ а потому (см. (4))}$$

$$x=ct-\frac{c(\sqrt{c^2+2ctg}-c)}{g}\quad (5).$$

Полагая $c=333$ метра, $g=9{,}81$ метра, $t=10$, получимъ (см. (5))

$$x=333.10-\frac{333(\sqrt{333(333+2.10.9{,}81)}-333)}{9{,}81}=$$

$$=3330-\frac{333\left(\frac{\sqrt{333(333+2.9{,}81)}}{9.9}-\frac{333}{9}\right)}{9{,}81:9}=$$

$$=3330-\frac{333(\sqrt{37(37+2.1{,}09)}-37)}{1{,}09}=3330-\frac{333(\sqrt{2175{,}6}-37)}{1{,}09}\quad (6).$$

Вычислимъ $\sqrt{2175{,}6}=46{,}64332$ съ точностью до $0{,}00001$ съ недостаткомъ; тогда, такъ какъ множитель $\frac{333}{1{,}09}<400{,}0$ мы получимъ выраженіе $\frac{333(\sqrt{2175{,}6}-37)}{1{,}09}$ съ ошибкой не болѣе $\frac{4}{1000}$; выполняя дѣленіе на 1,09 съ точностью до 0,001 съ недостаткомъ, находимъ (см. (6)) окончательно $x=383{,}922$ метра съ точностью до 0,005 (съ избыткомъ).

С. Конюховъ (Никитовка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н/Д); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Э. Лейнѣкъ* (Рига).

№ 678 (4 сер.). *Построить трапецію, зная ея углы, одну изъ параллельныхъ сторонъ и уголъ между діагоналями.*

Пусть $ABCD$ искомая трапеція, AB данная сторона. Назовемъ точку встрѣчи діагоналей AC и BD черезъ O, точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ AD и BC черезъ P, точку встрѣчи прямой PO со сторонами DC и AB—соотвѣтственно черезъ K и M. Введемъ обозначенія $AB=l$, $\angle DAB=\alpha$, $\angle CBA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$ (1). Вслѣдствіе параллельности DC и AB имѣемъ:

$$\frac{DK}{AM}=\frac{PK}{PM}=\frac{KC}{MB},\ \text{ откуда }\ \frac{DK}{KC}=\frac{AM}{MB}\ (2),\ \text{ и }\ \frac{DK}{MB}=\frac{KO}{MO}=\frac{KC}{AM},\ \text{ откуда}$$

$$\frac{DK}{KC}=\frac{MB}{AB}\quad (3).$$

Слѣдовательно (см. (2), (3)) $\frac{DK}{KC}=\frac{AM}{MB}=\frac{MB}{MA}$, откуда (такъ какъ $\frac{AM}{MB}>0$) $\frac{AM}{MB}=1$, а потому $AM=MB$ (4), $DK=KC$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ извѣстному свойству трапеціи: точка пересѣченія діагоналей трапеціи, точка встрѣчи непараллельныхъ сторонъ и средины параллельныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой (это предложеніе вытекаетъ также изъ извѣстной теоремы, дающей основное проективное свойство полнаго четыреугольника; достаточно примѣнить эту теорему къ полному четыреугольнику, вершины котораго суть D, P, C, O,) Отсюда вытекаетъ построеніе: при концахъ A и B даннаго отрѣзка $AB=l$ строимъ соотвѣтственно по одну сторону отъ него углы α и β (см. (1)); пусть стороны этихъ угловъ пересѣкаются въ точкѣ P; затѣмъ строимъ на отрѣзкѣ $AB=l$ сегментъ, вмѣщающій уголъ γ (см. (1)), и соединяемъ P прямой съ срединой M отрѣзка AB; пусть O—точка встрѣчи дуги сегмента съ прямой PM; наконецъ, продолжаемъ AO и BO до встрѣчи съ PB и PA соотвѣтственно въ точкахъ C и D. Четыреугольникъ $ABCD$ есть искомая трапеція.

С. Конюховъ (Никитовка); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *А. П.* (Сосновицы).

№ 679 (4 сер.). *По даннымъ діагоналямъ* m *и* n *построить ортодіагональный четыреугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса* R, *и вычислить его стороны.*

Пусть $ABCD$ искомый ортодіагональный (т. е. такой, діагонали котораго перпендикулярны) четыреугольникъ, O—центръ круга описаннаго; по условію, $AC=m$, $BD=n$, $OA=R$, гдѣ m, n и R—данные отрѣзки. Проведемъ радіусы OS и OT, перпендикулярные соотвѣтственно къ хордамъ AC и BD и назовемъ точки встрѣчи AC и OS, BD и OT соотвѣтственно черезъ M, N. Тогда $AM=\frac{AC}{2}=\frac{m}{2}$ (1), $BN=\frac{BD}{2}=\frac{n}{2}$ (2). Отсюда вытекаетъ построеніе: описываемъ окружность радіуса R и проводимъ изъ центра ея O взаимно перпендикулярные радіусы OS и OT; въ точкахъ S и T строимъ касательныя къ окружности $SA'=\frac{m}{2}$ и $TB'=\frac{n}{2}$ и проводимъ изъ A' и B' прямыя, соотвѣтственно параллельныя радіусамъ OS и OT, до встрѣчи съ окружностью соотвѣтственно въ точкахъ A и B; затѣмъ проводимъ хорды AC и BD, соотвѣтственно параллельныя OT и OS. Четыреугольникъ $ABCD$ есть искомый. Назовемъ точку пересѣченія діагоналей AC и BD черезъ P и предположимъ для большей опредѣленности, что точки A, C и B, D расположены на чертежѣ такъ, что обѣ точки D и C лежатъ внутри центральнаго угла SOT. Тогда находимъ

$$AP=AM+MP=AM+ON=AM+\sqrt{OB^2-BN^2}=\frac{m}{2}+\sqrt{R^2-\frac{n^2}{4}} \quad (3).$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$BP=BN+NP=BN+OM=\frac{n}{2}+\sqrt{R^2-\frac{m^2}{4}} \quad (4),$$

$$PC=AC-AP=\frac{m}{2}-\sqrt{R^2-\frac{n^2}{4}} \ (5), \quad PD=BD-BP=\frac{n}{2}-\sqrt{R^2-\frac{m^2}{4}} \ (6),$$

откуда (см. (3), (4), (5), (6))

$$AB=\sqrt{AP^2+BP^2}=\sqrt{2R^2+\frac{m\sqrt{4R^2-n^2}+n\sqrt{4R^2-m^2}}{2}},$$

$$BC=\sqrt{BP^2+PC^2}=\sqrt{2R^2+\frac{n\sqrt{4R^2-m^2}-m\sqrt{4R^2-n^2}}{2}},$$

$$CD=\sqrt{PC^2+PD^2}=\sqrt{2R^2-\frac{m\sqrt{4R^2-n^2}+n\sqrt{4R^2-m^2}}{2}},$$

$$AD=\sqrt{AP^2+PD^2}=\sqrt{2R^2-\frac{n\sqrt{4R^2-m^2}-m\sqrt{4R^2-n^2}}{2}}.$$

Для возможности задачи (см. (3), (4), (5), (6)) необходимо и достаточно соблюденіе условій $0<m\leqslant 2R$, $0<n\leqslant 2R$.

Э. Лейнъкъ (Рига); *Н. С.* (Одесса).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера. ул. Новосельскаго, д. № 66.

ПРОГРАММА

ЕЖЕМѢСЯЧНАГО ЖУРНАЛА

„ПРИРОДА ВЪ ШКОЛѢ",

посвященнаго вопросамъ преподаванія **физики, химіи** и **естествознанія** въ средней и начальной школѣ.

---

1. Руководящія статьи по выясненію общаго плана и частностей преподаванія физико-химическихъ и естественныхъ наукъ.
2. Статьи научнаго характера по отдѣльнымъ вопросамъ физики, химіи и естествознанія—главнымъ образомъ примѣнительно къ цѣлямъ преподаванія.
3. Статьи и замѣтки, касающіяся различныхъ учебно-вспомогательныхъ пособій, кабинетовъ, лабараторій и т. п.
4. Статьи и замѣтки, относящіеся къ практическимъ занятіямъ учениковъ.
5. Свѣдѣнія о постановкѣ преподаванія физики, химіи и естествознанія въ различныхъ учебныхъ заведеніяхъ Россіи и другихъ странъ.
6. Разборъ учебныхъ, популярно-научныхъ и научныхъ книгъ.
7. Обзоръ статей по преподаванію физики, химіи и естествознанія, помѣщенныхъ въ главнѣйшихъ русскихъ и иностранныхъ журналахъ.
8. Разныя извѣстія.
9. Письма въ редакцію.
10. Объявленіе.

Журналъ будетъ выходить въ 1907 году ежемѣсячно книжками въ 4 печатн. листа.

ЦѢНА съ пересылкою 3 руб. въ годъ.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ: МОСКВА, Петровка, д. Матвѣева, Товарищество И. Д. Сытина, а также въ главныхъ книжныхъ магазинахъ.

ДОПУСКАЕТСЯ РАЗСРОЧКА:

1 р. при подпискѣ, **1** р.—не позже 1 апрѣля и **1** р.—не позже 1 іюля.