№ 365.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

*В. А. Гернетомъ*

подъ редакціей

*Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.*

XXXI-го Семестра № 5-й.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 66.
1904

XXXI Сем. № 5.

# Вѣстникъ Опытной Физики
## и
## элементарной математики.

15 Марта № 365. 1904 г.

**Содержаніе:** Современныя теоріи матеріи. Осуществленіе мечты. Докладъ сэра *В. Крукса* на конгрессѣ прикладной химіи въ Берлинѣ, 5-го іюня 1903 года — Закономѣрности въ рядѣ величинъ $b_{n+1}$ и $a_{n+1}$, получаемыхъ при отысканіи знаменателей непрерывной дроби, выражающей значеніе $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$. —Научная хроника: Маркони и безпроволочная телеграфія въ Германіи. Опыты телеграфированія по системѣ профессора А. С. Попова. — Рецензіи: Основы философіи химіи. А. Ю. Гольдштейна. *Проф. С. Танатара.* — Задачи для учащихся №№ 454—459 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 378, 379, 380, 382, 383. — Поправка. — Объявленія.

## СОВРЕМЕННЫЯ ТЕОРІИ МАТЕРІИ.

### Осуществленіе мечты.

Докладъ сэра В. Крукса на конгрессѣ прикладной химіи въ Берлинѣ 5-го іюня 1903 года.

Уже скоро вѣкъ, какъ люди, посвятившіе себя наукѣ, мечтаютъ объ атомахъ, молекулахъ, ультра-малыхъ частицахъ и предаются догадкамъ о происхожденіи матеріи; а въ настоящее время уже начинаютъ допускать возможность разложенія химическихъ элементовъ на болѣе простыя формы матеріи и даже готовы видѣть въ нихъ лишь колебанія эѳира или электрической энергіи.

Это—чисто британская мечта и та смѣлость, съ которой мы ринулись въ область умозрѣній и гипотезъ, заставила почти забыть нашу старую репутацію исключительно практическаго народа. Мы устранили понятіе о недоступныхъ тайнахъ. Тайна—это проблема, которую слѣдуетъ рѣшить,—*и только человѣкъ мо-*

*жетъ стать господиномъ невозможнаго.* Былъ данъ новый, могучій толчокъ къ работѣ. Наши физики совершенно измѣнили свои теоріи о строеніи вещества, о сложности и даже о разложимости химическихъ элементовъ. Чтобъ показать, какъ далеко мы ушли по этому новому и странному пути, какія ослѣпительныя чудеса поражаютъ взоръ изслѣдователя, намъ достаточно напомнить четвертое состояніе матеріи, генезисъ элементовъ, диссоціацію химическихъ элементовъ, существованіе болѣе мелкихъ, чѣмъ атомы, тѣлецъ, атомную природу электричества, теорію электроновъ,—не говоря о другихъ чудесахъ, которыя уже появляются на горизонтѣ и которыя далеки отъ обычныхъ проторенныхъ англійской химіей дорожекъ.

Только въ прошломъ столѣтіи осмѣлились впервые высказать мнѣніе о возможности того, что металлы на самомъ дѣлѣ сложныя тѣла,—это было сдѣлано въ докладѣ, прочитанномъ въ 1809 г. сэромъ Г. Дэви „Королевскому Институту". Въ этомъ достопамятномъ докладѣ великій химикъ, признавъ возможнымъ существованіе нѣкоторой субстанціи, общей всѣмъ элементамъ, прибавилъ: „Если эти обобщенія будутъ оправданы фактами, то изъ нихъ возникнетъ новая философія, равно простая и великая. Строеніе вещества во всемъ его разнообразіи можно будетъ приписывать двумъ или тремъ родамъ вѣсомой матеріи, скомбинированнымъ въ различныхъ пропорціяхъ".

Въ 1811 г. онъ говорилъ также: „Трудно себѣ представить всѣ послѣдствія, которыя повлекло бы за собой въ химіи успѣшное разложеніе или сложеніе металловъ.... Долгъ химика быть отважнымъ въ преслѣдованіи своей цѣли. Онъ не долженъ считать невозможными вещи на томъ только основаніи, что онѣ еще не были сдѣланы. Онъ не долженъ считать ихъ нелѣпыми потому только, что онѣ расходятся съ обычнымъ мнѣніемъ. Онъ долженъ помнить, какъ часто наука впадаетъ въ разногласіе съ тѣмъ, что мы принимаемъ за фактъ.... Изслѣдовать, могутъ ли быть разлагаемы и слагаемы металлы,—это великолѣпная и истинно философская задача".

Около 1809 г. Дэви впервые употребилъ терминъ: *лучистая матерія*, но онъ примѣнялъ его преимущественно къ тому, что мы теперь называемъ излученіемъ. Онъ употреблялъ его также въ другомъ смыслѣ, напр., въ слѣдующемъ отрывкѣ, гдѣ онъ ясно предвидитъ современный электронъ: „Еслибы частицы газа были приведены въ движеніе въ пространствѣ съ безконечно большой скоростью, иначе говоря, еслибы ихъ превратили въ лучистую матерію, то онѣ могли бы производить разнаго рода лучи, отличающіеся своими особенными дѣйствіями".

Въ своихъ докладахъ „Королевскому Институту", въ 1816 году, *объ общихъ свойствахъ вещества*, другой предшественникъ, Фарадей, выражался почти въ тѣхъ же словахъ: „Если мы себѣ представимъ измѣненіе, которое идетъ дальше парообразнаго состоянія настолько же, насколько это послѣднее удалено отъ жидкаго состоянія, если мы примемъ также во вниманіе и порціональное возрастаніе модификацій, происходящихъ вмѣстѣ съ этими измѣненіями, то мы, несомнѣнно, очень приблизимся—насколько можно составить себѣ понятіе объ этомъ предметѣ—къ представленію о лучистой матеріи; и подобно тому, какъ мы наблюдали исчезновеніе многихъ качествъ при испареніи, мы замѣтимъ исчезновеніе еще бо́льшаго числа ихъ при томъ измѣненіи вещества, которое насъ теперь занимаетъ". А въ одной изъ своихъ первыхъ лекцій онъ говорилъ еще: „Въ настоящее время мы начинаемъ желать съ живѣйшимъ нетерпѣніемъ открытія новаго состоянія химическихъ элементовъ. Разложеніе металловъ, ихъ сложеніе, осуществленіе нѣкогда абсурдной идеи о превращеніи вещества—таковы проблемы, которыя новая химія призвана разрѣшить".

Но Фарадей всегда отличался смѣлостью и оригинальностью своихъ взглядовъ на общепринятыя теоріи. Онъ говорилъ въ 1814 году: „Теорія, которую вынуждена была принять физическая химія относительно атомовъ, теперь очень сложна и обширна; на первомъ мѣстѣ большое количество элементарныхъ атомовъ; затѣмъ сложные атомы; такая запутанная система, подобная системѣ звѣзднаго неба, *можетъ быть истинной....* но *можетъ быть и абсолютно ложной*".

Годъ спустя Фарадей изумилъ міръ открытіемъ, которому онъ далъ названіе: „*Магнитное строеніе свѣта и освѣщеніе магнитныхъ линій силъ*". Въ продолженіе полувѣка это названіе плохо понимали и приписывали его отчасти энтузіазму, отчасти неяснымъ идеямъ ученаго. Теперь только мы начинаемъ догадываться о всемъ значеніи мечты Фарадея.

Въ 1879 г. въ докладѣ, читанномъ въ засѣданіи „Британской Ассоціаціи", въ Шеффильдѣ, на мою долю выпала честь воскресить идею *лучистой матеріи*. Я высказалъ гипотезу, что въ явленіяхъ, имѣющихъ мѣсто въ трубкахъ, изъ которыхъ выкачанъ воздухъ, частички, составляющія катодный потокъ, ни тверды, ни жидки, ни газообразны, что онѣ не состоятъ изъ атомовъ, двигающихся черезъ трубку и производящихъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ онѣ ударяются о стѣнку, свѣтовыя, механическія или электрическія явленія, „но что онѣ состоятъ изъ чего-то, значительно меньшаго, чѣмъ атомъ,—изъ обрывковъ матеріи, ультра-атомныхъ тѣлецъ, гораздо болѣе мелкихъ и легкихъ, чѣмъ атомъ (которыя, повидимому, являются даже основой атомовъ *)

Я доказывалъ, между прочимъ, что физическія свойства лучистой матеріи общи всякому веществу, доведенному до этой степени разрѣженія. „Пусть испытуемый газъ будетъ водородомъ, двуокисью углерода или атмосфернымъ воздухомъ,—явленія фосфоресценціи, магнитнаго отклоненія и пр. одни и тѣ же". Вотъ подлинныя выраженія, которыя я употреблялъ почти четверть

---

*) „Матерія только видъ движенія" (Proc. Roy. Soc.) № 205, с. 472.

вѣка тому назадъ: „Поистинѣ, мы достигли границы, гдѣ матерія и силы какъ бы сливаются другъ съ другомъ, достигли таинственнаго царства, простирающагося между извѣстнымъ и неизвѣстнымъ. Я имѣю основанія полагать, что величайшія научныя проблемы будущаго найдутъ свое разрѣшеніе на этой именно границѣ или даже за ней; тамъ, кажется мнѣ, находятся конечныя, чудесныя, чреватыя послѣдствіями истины“.

Только въ 1881 г. Дж. Дж. Томсонъ установилъ основы электродинамической теоріи. Въ замѣчательной статьѣ, появившейся въ Philosophical Magazine, онъ объяснилъ фосфоренцію стекла, производимую катоднымъ токомъ, почти мгновенными измѣненіями, происходящими въ магнитномъ полѣ, вслѣдствіе внезапной остановки катодныхъ частичекъ.

Еще въ 1888 г., когда я былъ президентомъ Химическаго Общества, по поводу одной теоріи генезиса элементовъ, я горячо защищалъ, можно сказать, общепринятую нынѣ гипотезу, согласно которой наши химическіе элементы образованы изъ одной и той же начальной субстанціи. Я говорилъ тогда о „безконечномъ множествѣ крайнихъ — или даже ультра-крайнихъ — частичекъ, безконечно-малыхъ, зарождающихся постепенно изъ скопленія *безформенной туманности* и двигающихся съ невообразимой быстротой во всѣхъ направленіяхъ“.

Касаясь нѣкоторыхъ свойствъ этихъ элементовъ, я пытался доказать, что сами элементарные атомы могли измѣниться съ перваго момента своего возникновенія, что первичныя движенія, къ которымъ сводится самое существованіе атома, могли испытать медленную, непрерывную модификацію, и что даже вторичныя движенія, производящія всѣ наблюдаемыя нами дѣйствія,— тепловыя, химическія, электрическія и т. д.—могли въ извѣстной мѣрѣ потерпѣть подобныя же измѣненія. Я доказывалъ вѣроятность того, что атомы химическихъ элементовъ не имѣютъ вѣчнаго существованія и, какъ и все остальное въ мірозданіи, проходятъ чрезъ фазы одряхлѣнія и смерти.

Та же идея была развита мною въ докладѣ Королевскому Институту въ 1887 г., въ которомъ я высказалъ гипотезу объ измѣнчивости атомныхъ вѣсовъ.

Я могъ бы привести имена Герб. Спенсера, сэра Бенжамена Броди, мистера Грээма, сэра Дж. Стокса, сэра В. Томсона (нынѣ лорда Кельвина), сэра Н. Локіера, мистера Гладстона и многихъ другихъ англійскихъ ученыхъ, чтобъ показать, что идея—если не разложимости, то, во всякомъ случаѣ, сложности того, что обыкновенно называютъ элементами—давно уже носится въ воздухѣ и что остановка лишь за тѣмъ, чтобъ точнѣе опредѣлить и подробнѣе развить ее. Мы привыкли мало по малу къ мысли о возникновеніи элементовъ, и многіе изъ насъ пытаются стать, наконецъ, лицомъ къ лицу съ проблемой о разложеніи химическаго атома. Мы всѣ сгораемъ желаніемъ увидать, какъ передъ нами раскроются двери таинственной области, которой слишкомъ поспѣшно дали имя „*Неизвѣстнаго*“ и „*Непознаваемаго*“.

Теперь я обращу Ваше вниманіе на другой фазисъ этой мечты. Я дошелъ до первыхъ зародышей электрической теоріи матеріи.

Я миную теоріи Фарадея, которымъ не хватаетъ точности, а также теоріи сэра В. Томсона, но упомяну о статьѣ, появившейся въ іюнѣ 1875 г. въ Fortnightly Review, въ которой эта теорія чуть ли не впервые выражена точнымъ образомъ. Авторъ ея—В. К. Клиффордъ, человѣкъ, раздѣляющій съ другими піонерами *благородное несчастіе быть рожденнымъ прежде времени*. „Надо полагать“, говоритъ Клиффордъ: „что каждый матеріальный атомъ является носителемъ маленькаго электрическаго тока или даже *состоитъ цѣликомъ изъ этого тока*“.

Въ 1886 г., когда я былъ предсѣдателемъ химической секціи Британской Ассоціаціи, въ работѣ о происхожденіи матеріи я далъ картину постепеннаго образованія химическихъ элементовъ, вслѣдствіе вліянія трехъ формъ энергіи—электричества, химическаго сродства и теплоты—на первичный (protyle) *) *безформенный туманъ*, въ которомъ заключалась вся матерія въ своемъ до-атомномъ, скорѣе потенціальномъ, чѣмъ актуальномъ, состояніи. Согласно изложенной мною тогда теоріи, химическіе элементы обязаны своей устойчивостью тому, что они представляютъ собой результатъ борьбы за существованіе: дарвинова теорія на почвѣ химической эволюціи, переживаніе болѣе устойчиваго индивидуума. Элементы съ наименьшимъ атомнымъ вѣсомъ образовались первыми, за ними явились элементы съ среднимъ вѣсомъ и, наконецъ, тѣ, у которыхъ наибольшій атомный вѣсъ, какъ торій и уранъ. Я говорилъ о *точкѣ диссоціаціи* элементовъ: „Чтò придетъ за ураномъ?“ спрашивалъ я. И я отвѣчалъ: „Результатомъ нашихъ ближайшихъ открытій будетъ.... образованіе сложныхъ тѣлъ, для производства диссаціаціи которыхъ хватитъ силы тѣхъ источниковъ теплоты, которыми мы располагаемъ на землѣ“. Менѣе двадцати лѣтъ тому назадъ это было мечтой; теперь эта мечта съ каждымъ днемъ быстро приближается къ своему полнѣйшему осуществленію. Я ниже покажу, что, дѣйствительно, радій, который слѣдуетъ за ураномъ, диссоціируется самопроизвольно.

Идея объ единицахъ или атомахъ электричества—идея, которая до сихъ поръ носилась въ воздухѣ незамѣтно, подобно гелію на солнцѣ—можетъ теперь быть подвергнута опытной провѣркѣ. Фарадэй, В. Веберъ, Лорентцъ, Гауссъ, Цёлльнеръ, Герцъ,

*) Намъ не достаетъ слова, аналогичнаго съ протоплазмой, чтобъ выразить идею первобытной матеріи, какой она была до эволюціи химическихъ элементовъ. Мой неологизмъ состоитъ изъ словъ πρό (передъ) и ὕλη (то, изъ чего сдѣланы вещи).

Гельмгольцъ, Джонстонъ Стони, сэръ О. Лоджъ *) — всѣ способствовали развитію этой идеи; — эта идея, принадлежащая Веберу, приняла конкретную форму, когда Стони показалъ, что фарадеевскій законъ электролиза требуетъ признанія опредѣленнаго заряда электричества, связаннаго съ іонами матеріи. Онъ назвалъ этотъ опредѣленный зарядъ „электрономъ". Только черезъ нѣкоторое время послѣ того, какъ установилось это названіе, было найдено, что электроны могутъ существовать отдѣльно.

Въ 1891 г. въ привѣтственной рѣчи, которую я произнесъ въ качествѣ президента Института инженеровъ-электриковъ, я показалъ, что потокъ катодныхъ атомовъ возлѣ отрицательнаго полюса всегда наэлектризованъ отрицательно, а остальная часть трубки — положительно; я утверждалъ, что „раздѣленіе молекулы на группы электроположительныхъ и электроотрицательныхъ атомовъ необходимо для удовлетворительнаго объясненія генезиса элементовъ". Въ трубкѣ, въ которой произведена пустота, отрицательный полюсъ есть мѣсто вхожденія атомовъ, а положительный — мѣсто ихъ выхожденія. Падая на фосфоресцирующее тѣло, напр., иттрій — своего рода скопленія молекулярныхъ герцовскихъ резонаторовъ — электроны даютъ около 550 билліоновъ колебаній въ секунду, производя эѳирныя волны, длиной приблизительно въ 5,75 десятимилліонныхъ миллиметра и вызывая въ глазу свѣтовое ощущеніе лимоннаго цвѣта. Однако, если электроны падаютъ на тяжелый металлъ или другое нефосфоресцирующее тѣло, то они порождаютъ эѳирныя волны меньшаго періода, чѣмъ свѣтъ; это уже не непрерывныя колебанія, но, по мнѣнію сэра Дж. Стокса, простые толчки, которые можно сравнить скорѣе съ негармоническими шумами, чѣмъ съ музыкальными тонами.

---

*) „Эквивалентные вѣса тѣлъ — это просто количества этихъ тѣлъ, содержащія равныя количества электричества... Электричество *опредѣляетъ* эквивалентное число, *потому что оно* опредѣляетъ комбинирующую силу. Или, если мы примемъ атомную теорію или фразеологію, атомы тѣлъ, эквивалентные другъ другу въ своемъ обычномъ химическомъ дѣйствіи, имѣютъ равныя количества электричества, естественно связанныя съ ними". *Экспериментальныя изслѣдованія по электричеству*, § 869, январь 1834 г.

„Мы назовемъ это опредѣленное количество электричества молекулярнымъ зарядомъ. Еслибы оно было извѣстно, оно было бы самой естественной единицей электричества". Клэркъ Максуэлль, *Трактатъ объ электричествѣ и магнитизмѣ*, 1 изданіе, т. I, 1873, стр. 311.

„Природа даетъ намъ только одно хорошо опредѣленное количество электричества.... При всякой нарушенной внутри электролита химической связи, извѣстное — и во всѣхъ случаяхъ одинаковое — количество электричества проходитъ по электролиту". Дж. Стони, *О физическихъ единицахъ природы*, British Association Meeting, секція А, 1874.

„Одно и то же опредѣленное количество электричества — положительнаго или отрицательнаго — постоянно приходитъ въ движеніе со всякимъ одноатомнымъ іономъ или со всякой единицей сродства многоатомнаго іона", Гельмгольцъ, Фарадеевская лекція, 1881.

„Каждый атомъ — монада имѣетъ опредѣленное количество электричества, связаннаго съ нимъ; каждая діада имѣетъ двойное количество его; каждая тріада тройное и т. д.", О. Лоджъ, Объ электролизѣ. British Associat. Report. 1885.

Во время этого доклада былъ произведенъ опытъ, имѣвшій цѣлью показать распаденіе серебра на электроны и положительные атомы. Передъ полюсомъ изъ серебра была помѣщена слюдяная пластинка съ дырочкой въ центрѣ ея. Воздухъ выкачали самымъ тщательнымъ образомъ; когда полюсы были соединены съ катушкой—при чемъ серебро служило отрицательнымъ полюсомъ—то изъ него понеслись во всѣ стороны электроны, которые, пройдя черезъ отверстіе слюдяного экрана, образовали блестящее фосфоресцирующее пятно на противоположной сторонѣ трубки. Катушку заставили работать нѣсколько часовъ, чтобъ дать улетучиться извѣстной части серебра. Тогда оказалось, что серебро отложилось на слюдяномъ экранѣ только въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ полюсомъ; противоположная часть трубки, которая въ продолженіе цѣлыхъ часовъ свѣтилась отъ бомбардировки электронами, не обнаружила ни признака серебра. Мы, значитъ, имѣемъ здѣсь дѣло съ двумя одновременными дѣйствіями. Электроны или лучистая матерія, выбрасываемые изъ отрицательнаго полюса, заставляли фосфоресцировать стекло, о которое они ударялись. И въ то же время іоны серебра, имѣющіе нѣкоторый вѣсъ, освобожденные отъ отрицательныхъ электроновъ, подъ вліяніемъ электрической силы, также выбрасывались и отлагались въ видѣ металлическаго осадка возлѣ полюса. Во всѣхъ этихъ случаяхъ въ отложившихся такимъ образомъ іонахъ металла была констатирована положительная электризація.

Съ 1893 до 1895 г. былъ данъ внезапный толчокъ работамъ по электричеству въ пустотѣ опубликованными въ Германіи замѣчательными результатами, полученными Ленаромъ и Рентгеномъ Оказалось, что явленія, наблюдаемыя внутри трубки, далеко уступаютъ по своему интересу тѣмъ, которыя происходятъ внѣ ея.... Съ этого времени то, что казалось лишь научной гипотезой, говоря безъ преувеличенія, стало фактомъ, реальностью.

Съ 1862 г. Фарадей настойчиво и упорно пытался установить связь между магнитизмомъ и свѣтомъ, которую онъ провидѣлъ въ 1845 г. Но онъ не располагалъ достаточно точными инструментами, и только въ 1896 г. Зееманнъ показалъ, что магнитное поле имѣетъ извѣстное вліяніе на спектральныя линіи. Движеніе электроновъ порождаетъ спектральную линію. Магнитное поле разлагаетъ это движеніе на другія послѣдовательныя движенія, одни медленныя, другія быстрыя, и, подъ вліяніемъ ихъ, простая спектральная линія расщепляется на другія линіи бо́льшей или меньшей преломляемости, чѣмъ первоначальная линія.

Теоретическое пониманіе этихъ явленій сдѣлало крупный шагъ впередъ, благодаря Дьюару, который занялъ мѣсто Фарадея при химической лабораторіи Королевскаго Института. Вскорѣ послѣ открытія Рëнтгена Дьюаръ нашелъ, что сравнительная непрозрачность разныхъ тѣлъ для рентгеновскихъ лучей пропорціональна атомному вѣсу ихъ, и онъ же первый примѣнилъ этотъ принципъ къ разрѣшенію одного спорнаго пункта относительно аргона. Аргонъ относительно менѣе прозраченъ для лучей Рентгена, чѣмъ кислородъ, азотъ или натрій. Отсюда Дьюаръ заключилъ, что атомный вѣсъ аргона равняется двойной плотности его относительно водорода. Блестящія новыя изслѣдованія относительно строенія атомовъ постоянно подтверждаютъ важность этого открытія.

Въ 1896 г. Беккерель, продолжая классическія изслѣдованія своего знаменитаго отца о фосфоресценціи, показалъ, что соли урана испускаютъ постоянно эманацію (истеченіе), имѣющую свойство проникать черезъ непрозрачныя вещества, дѣйствовать въ полнѣйшей темнотѣ на фотографическую пластинку и разряжать электрометръ. Эта эманація, извѣстная подъ именемъ беккерелевыхъ лучей, въ извѣстномъ отношеніи имѣютъ сходство со свѣтовыми лучами, но она похожа также и на рентгеновскіе лучи. Ея истинный характеръ былъ установленъ только въ послѣднее время, да и теперь еще остается не мало неясныхъ и сомнительныхъ пунктовъ въ объясненіи ея строенія и ея дѣйствія.

Вскорѣ послѣ работъ Беккереля появились блестящія изслѣдованія супруговъ Кюри о радіоактивности тѣлъ, сопровождающихъ уранъ.

До сихъ поръ мы имѣли передъ собой разрозненные примѣры научныхъ изслѣдованій, имѣющихъ, повидимому, мало общаго между собой. Существованіе матеріи въ ультра-газообразномъ состояніи; матеріальныя частички, меньшія, чѣмъ атомъ; существованіе электрическихъ атомовъ или электроновъ; строеніе рентгеновскихъ лучей и прохожденіе ихъ черезъ непрозрачныя тѣла; эманація урана, распаденіе элементовъ, — всѣ эти изолированные факты соединяются теперь въ одинъ пучекъ, въ одну гармоническую гипотезу, благодаря открытію радія.

Нѣтъ открытія, вліяніе котораго не простиралось бы во всѣхъ направленіяхъ и которое не объясняло бы громаднаго числа остававшихся до тѣхъ поръ непонятными фактовъ; но въ наше время врядъ ли найдется открытіе, слѣдствія котораго шли бы такъ далеко и которое бы бросало столько свѣта на цѣлыя области остававшихся до него необъясненными явленій, какъ открытіе г-на и г-жи Кюри и г. Бемона. Съ необычайнымъ терпѣніемъ и трудолюбіемъ они прошли тотъ трудный путь, на которомъ другіе, какъ и я самъ, слѣдуя по такимъ же запутаннымъ извилинамъ научной работы, нашли лишь непреодолимыя преграды. Вѣнцомъ всѣхъ этихъ изслѣдованій былъ радій.

Да будетъ мнѣ позволено разсказать Вамъ вкратцѣ о нѣкоторыхъ свойствахъ радія и показать Вамъ, какъ онъ придаетъ конкретную форму гипотезамъ и мечтамъ, ускользавшимъ, повидимому, отъ всякаго доказательства.

*(Продолженіе слѣдуетъ).*

# Закономѣрности въ рядѣ величинъ $b_{n+1}$ и $a_{n+1}$, получаемыхъ при отысканіи знаменателей непрерывной дроби, выражающей значеніе $\dfrac{b+\sqrt{R}}{a}$.

*Г. Жураховскаго.*

Въ № 360 „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат." нами былъ указанъ практическій пріемъ для вычисленія знаменателей непрерывной дроби, выражающей значеніе $\dfrac{b+\sqrt{R}}{a}$. Найти по этому пріему знаменатель $m_{n+1}$ возможно лишь послѣ предварительнаго опредѣленія вспомогательныхъ величинъ $b_{n+1}$ и $a_{n+1}$. Величины $b_{n+1}$, $a_{n+1}$ и $m_{n+1}$ съ предшествующими имъ $b_n$, $a_n$ и $m_n$ связаны слѣдующими формулами:

$$b_{n+1} = a_n m_n - b_n \qquad (1),$$

$$a_{n+1} = \frac{a^2R - b_{n+1}^2}{a_n} \qquad (2)$$

и

$$m_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{b_{n+1} + a\sqrt{R}}{a_{n+1}} \qquad (3).$$

Въ рядѣ величинъ $b_{n+1}$ и $a_{n+1}$ существуютъ нѣкоторыя закономѣрности, которыя мы и разсмотримъ.

§ 1. Пусть $b_n$, абсолютную величину котораго условимся обозначать символомъ $|b_n|$, превосходитъ по абсолютной своей величинѣ $a\sqrt{R}$, такъ что $|b_n| > a\sqrt{R}$. Пусть также $|b_{n+1}| > a\sqrt{R}$. Такъ какъ величина $a\sqrt{R}$ и знаменатели непрерывной дроби больше нуля, то изъ формулы (3) убѣждаемся, что $b_n$ и $a_n$ должны имѣть одинаковые знаки; равнымъ образомъ, одинаковые знаки должны имѣть $b_{n+1}$ и $a_{n+1}$. Но изъ формулы (2) при $|b_{n+1}| > a\sqrt{R}$ слѣдуетъ, что $a_n a_{n+1} < 0$, т. е. что $a_n$ и $a_{n+1}$ обладаютъ разными знаками. Въ такомъ случаѣ $b_n$ и $b_{n+1}$ также имѣютъ знаки разные. Принявъ въ соображеніе знакъ $b_{n+1}$ и обратные ему знаки $b_n$ и $a_n$, на основаніи формулы (1), выведемъ неравенство $|b_n| > |b_{n+1}|$. Оно позволяетъ намъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: если при разложеніи въ непрерывную дробь выраженія $\dfrac{b+\sqrt{R}}{a}$ полученъ рядъ величинъ $b_n b_{n+1} \ldots b_{p-1} b_p \ldots$, превосходящихъ $a\sqrt{R}$ по своей абсолютной величинѣ, то 1) этотъ рядъ—знакоперемѣнный, 2) соотвѣтственно знакоперемѣннымъ будетъ и рядъ соотвѣтственныхъ величинъ $a_n a_{n+1} \ldots a_{p-1} a_p \ldots$ и 3) имѣетъ мѣсто неравенство $|b_n| > |b_{n+1}| > \ldots |b_{p-1}| > |b_p| > \ldots a\sqrt{R}$.

§ 2. Въ послѣднее неравенство входятъ величины цѣлыя и конечныя; войти сюда въ неограниченномъ количествѣ онѣ, очевидно, не могутъ. Но выраженіе $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$ содержитъ ирраціональную величину $\sqrt{R}$; слѣдовательно, непрерывная дробь, въ которую оно развертывается, простирается въ безконечность. Поэтому, послѣ ряда величинъ, превосходящихъ по абсолютной своей величинѣ $a\sqrt{R}$, мы неизбѣжно должны встрѣтить $|b_r| < a\sqrt{R}$. Допустимъ, что такая величина встрѣчена нами. Тогда, на основаніи формулы (3), выведемъ неравенство $b_r + a\sqrt{R} > a_r > 0$. Тѣмъ болѣе, слѣдовательно, справедливо:

$$2a\sqrt{R} > a_r > 0 \qquad (4).$$

Изъ формулы (3) найдемъ: $\frac{a_r}{x_{r+1}} = \frac{b_r + a\sqrt{R}}{m_r x_{r+1} + 1}$. Такъ какъ минимальное значеніе $m_r$, какъ знаменателя непрерывной дроби, есть 1, а $x_{r+1}$ больше $m_{r+1}$, слѣдовательно, больше 1, то $m_r x_{r+1} + 1 > 2$. Поэтому, $\frac{a_r}{x_{r+1}} < \frac{b_r + a\sqrt{R}}{2}$, откуда, въ виду того, что $|b_r| < \sqrt{R}\ \frac{a_r}{x_{r+1}} < a\sqrt{R}$. Но изъ формулъ (1) и (3) легко найти, что

$$b_{r+1} = a\sqrt{R} - \frac{a_r}{x_{r+1}} \qquad (5).$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенствъ $a_r > 0$ и $\frac{a_r}{x_{r+1}} < a\sqrt{R}$, заключаемъ, что

$$a\sqrt{R} > b_{r+1} > 0 \qquad (6).$$

Итакъ, при условіи $|b_r| < a\sqrt{R}$, оказывается, что $a_r$ удовлетворяетъ неравенству (4), а $b_{r+1}$ — неравенству (6). Но изъ неравенства (6) слѣдуетъ, что $|b_{r+1}| < a\sqrt{R}$. Слѣдовательно, $a_{r+1}$ должно удовлетворять неравенству (4), а $b_{r+2}$ — неравенству (6) и т. д. Очевидно, мы вправѣ заключить, что послѣ $|b_r| < a\sqrt{R}$ встрѣчаются въ разложеніи величины $a_r a_{r+1} \ldots a_{u-1} a_u \ldots$, удовлетворяющія неравенству (4), и величины $b_{r+1} \ldots a_{u-1} a_u \ldots$, удовлетворяющія неравенству (6).

§ 3. На основаніи второй формулы, имѣемъ: $a_r a_{r+1} + b_{r+1}^2 = a^2 R$. Послѣ $|b_r| < a\sqrt{R}$ въ лѣвую часть этого уравненія будутъ входить величины, удовлетворяющія неравенствамъ (4) и (6). Поэтому, $b_{r+1}^2$ и $a_r a_{r+1}$ будутъ цѣлыя положительныя числа. Такъ какъ сумма ихъ равна опредѣленному количеству $a^2 R$, то $b_{r+1}$ и $a_r$, а слѣдовательно, и $a_{r+1}$ могутъ принять лишь ограниченное число значеній. Слѣдовательно, ограниченно и число комбинацій, въ какихъ они могутъ войти въ разсматриваемое уравненіе. Но непрерывная дробь, выражающая значеніе $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$, безконечна. Поэтому, повтореніе встрѣчавшихся уже комбинацій неизбѣжно. Достаточно же повториться одной комбинаціи, чтобы за нею въ прежнемъ порядкѣ повторились и другія. Отсюда слѣдуетъ, что непрерывная дробь, въ которую развертывается выраженіе вида $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$, непремѣнно періодическая. Періодически повторяться могутъ, очевидно, лишь такія величины $b_{r+1}$ и $a_r$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ (6) и (4).

§ 4. Изслѣдуемъ выраженіе $\frac{b_{u+1}+a\sqrt{R}}{a_u}$. На основаніи формулы (1), его можно представить въ видѣ: $m_u+\frac{-b_u+a\sqrt{R}}{a_u}$. Но, въ виду формулы (5), $\frac{-b_u+a\sqrt{R}}{a_u}=\frac{a_{u-1}}{a_u x_u}$, а такъ какъ изъ формулы (1)—(3) слѣдуетъ, что $a_u x_u=b_u+a\sqrt{R}$, то $\frac{b_{u+1}+a\sqrt{R}}{a_u}=m_u+\frac{a_{u-1}}{b_u+a\sqrt{R}}$. Вслѣдствіе же формулы (1), $\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}=m_{u-1}+\frac{-b_{u-1}+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$. Если $|b_{u-1}|<a\sqrt{R}$, то $a_{u-1}$ удовлетворяетъ неравенству (4). Слѣдовательно, $\frac{-b_{u-1}+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$ есть число положительное. Отсюда вытекаетъ неравенство: $\frac{a_{u-1}}{b_u+a\sqrt{R}}<1$. Въ такомъ случаѣ $\frac{b_{u+1}+a\sqrt{R}}{a_u}$ отличается отъ $m_u$ меньше, чѣмъ на 1. Итакъ, при условіи $|b_{u-1}|<a\sqrt{R}$, цѣлое число, заключающееся въ выраженіяхъ $\frac{b_{u+1}+a\sqrt{R}}{a_u}$ и $\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_u}$ одно и то же, именно, $m_u$. Опираясь на это, легко, при существованіи разложенія:

$$\begin{array}{r|l|r|l|r|l}
b_r & b_{r+1} & b_{u-1} & b_u & b_v & b_{v+1} \\
\ldots a_r & a_{r+1} & \ldots a_{u-1} & a_u & \ldots a_v & a_{v+1}\;\ldots, \\
\hline
m_r & m_{r+1} & m_{u-1} & m_u & m_v & m_{v+1}
\end{array}$$

показать справедливость слѣдующаго разложенія:

$$\begin{array}{r|l|r|l|r|l}
b_{v+1} & b_v & b_u & b_{u-1} & b_{r+2} & b_{r+1} \\
\ldots a_v & a_{v-1} & \ldots a_{u-1} & a_{u-2} & \ldots a_{r+1} & a_r\;\;\ldots \\
\hline
m_v & m_{v-1} & m_{u-1} & m_{u-2} & m_{r+1} & -
\end{array}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дана группа $\left|\begin{matrix} b_{v+1} \\ a_v \\ m_v \end{matrix}\right.$ и требуется найти слѣдующую группу. Поступая по общему правилу, для величины, слѣдующей за $b_{v+1}$, найдемъ выраженіе $a_v m_v - b_{v+1}$: очевидно, эта величина есть $b_v$. Величина, слѣдующая за $a_v$, опредѣлится изъ выраженія $\dfrac{a^2 R - b_v}{a_v}$; очевидно, это—$a_{v-1}$. Наконецъ, для слѣдующаго за $m_v$ знаменателя будемъ имѣть выраженіе $\dfrac{b_v + a\sqrt{R}}{a_{v-1}}$, такъ что, въ случаѣ $|b_{v-2}| < a\sqrt{R}$, искомый знаменатель будетъ $m_{v-1}$. Итакъ, за группой $\left|\begin{matrix} b_{v+1} \\ a_v \\ m_v \end{matrix}\right.$ слѣдуетъ группа $\left|\begin{matrix} b_v \\ a_{v-1} \\ m_{v-1} \end{matrix}\right.$. Такъ же поступаемъ и въ дальнѣйшемъ.

Изъ сравненія обоихъ приведенныхъ разложеній убѣждаемся, что, если первое изъ нихъ намъ дано, то найти второе не представляетъ затрудненій: для этого достаточно выписать въ обратномъ порядкѣ величины, входящія въ составъ перваго разложенія, начиная съ $b_{v+1}$, $a_v$ и $m_v$. При чемъ, однако, необходимо имѣть въ виду, что изъ того условія, при которомъ было выведено второе разложеніе, слѣдуетъ, что 1) въ него входитъ всякая пара величинъ $b_{u+1}$ и $a_u$ перваго разложенія, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ (6) и (4), и 2) если въ первомъ разложеніи $a_r$ есть первая величина, удовлетворяющая неравенству (4), то пара величинъ $\left|\begin{matrix} b_{r+1} \\ b_r \end{matrix}\right.$ войдетъ послѣднею во второе разложеніе; такъ что $b_r$ и $a_{r-1}$,—а тѣмъ болѣе, предшествующія имъ въ первомъ разложеніи величины,—во второе разложеніе уже не войдутъ.

Закономѣрностью, въ которой слѣдуютъ другъ за другомъ величины второго разложенія, можно пользоваться для практическихъ цѣлей. Дѣйствительно, встрѣтивъ $a_{v+1}$, равное $a_v$, или $b_{v+2}$, равное $b_{v+1}$, мы въ обоихъ случаяхъ получимъ группу $\left|\begin{matrix} b_{v+1} \\ a_v \\ m_v \end{matrix}\right.$, а это даетъ намъ возможность написать слѣдующіе за $m_v$ знаменатели непрерывной дроби, если не всѣ, то ближайшіе, безъ предварительнаго опредѣленія величинъ 1-ой и 2-ой строкъ разложенія. Этимъ вычисленія иногда значительно ускоряются. Такъ, напр.:

$$\frac{6+\sqrt{37}}{7} = \frac{42}{1813}\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|ccccccc|c|c} 42 & 7 & 29 & 25 & 19 & 14 & 35 & 37 & 37 & - & - & - & - & - & - & 42 & 42 \\ 49 & 36 & 27 & 44 & 33 & 49 & 12 & 37 & & & & & & & 49 & 1 & 49; \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 6, & 1, & 1, & 1, & 2, & 1, & 1 & 84 & \end{array}\right.$$

$$\frac{3+\sqrt{13}}{11}=\frac{39}{1573}\left|\begin{array}{c|c||c|c|c|c|c|c|c}33 & -33 & 37 & 14 & 13 & 39 & 39 - - 37 & 39 & 39\\ 121 & 4 & 51 & 27 & 52 & 1 & \overline{\phantom{1,}}\ \overline{\phantom{1,}}\ \overline{\phantom{1,}}\ \overline{4} & 13 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 78 & 1,\ 1,\ 1, 19 & 6 & 19\end{array}\right\|;$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{7}=\frac{15}{245}\left|\begin{array}{c|c||c|c|c|c|c}7 & -7 & 15 & 15\ 13 & 6 & 5 & 15 & 15 - - - -\\ 49 & 4 & 5 & \overline{\phantom{7,}}\ \overline{19} & 11 & 20 & 1 & \\ \hline 0 & 2 & 6 & 7,\ 1 & 1 & 1 & 30 & 1,\ 1,\ 1,\ 7\end{array}\right\|.$$

§ 5. Докажемъ, что всякая комбинація величинъ $b_{r+1}$ и $a_r$, удовлетворяющихъ неравенствамъ (6) и (4), принадлежитъ къ комбинаціямъ, періодически повторяющимся въ разложеніи $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$.

Положимъ, что мы имѣемъ разложеніе:

$$\frac{b+\sqrt{R}}{a}=\left|\begin{array}{c|c c c c||c|c c c c c|c}b_0 & b_1 & & b_r & & b_{u-1} & b_u & b_{u+1} & & b_{u+n} & & b_{v-1} & b_v\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r & \cdots & a_{u-1} & a_u & a_{u+1} & \cdots & a_{u+n} & \cdots & a_{v-1} & a_v\\ \hline m_0 & m_1 & & m_r & & m_{u-1} & m_u & m_{u+1} & & m_{u+n} & & m_{v-1} & m_v\end{array}\right\|\begin{array}{c}b_u\\ a_u\end{array} \quad (7).$$

На основаніи его, можемъ написать:

$$\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_u}=\left\|\begin{array}{c|c c c c c|c}b_u & b_{u+1} & & b_{u+n} & & b_{v-1} & b_v\\ a_u & a_{u+1} & \cdots & a_{u+n} & \cdots & a_{v-1} & a_v\\ \hline m_u & m_{u+1} & & m_{u+n} & & m_{v-1} & m_v\end{array}\right\|\begin{array}{c}b_u\\ a_u\end{array} \quad (8),$$

откуда, по § 4, найдемъ:

$$\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_v}=\left\|\begin{array}{c|c|c c c c c}b_u & b_v & b_{v-1} & & b_{u+n+1} & & b_{u+1}\\ a_v & a_{v-} & & \cdots & a_{u+n} & \cdots & a_u\\ \hline m_v & m_{v-1} & & & m_{u+n} & & m_u\end{array}\right\|\begin{array}{c}b_u\\ a_v\end{array} \quad (9).$$

Но легко показать, что $a_v=a_{u-1}$. Дѣйствительно, въ разложеніи (7) комбинаціи $\left|\begin{array}{c}b_u\\ a_u\end{array}\right.$ въ первомъ періодѣ предшествуетъ $a_{u-1}$, вслѣдствіе чего $a_u=\frac{a^2R-b_u^2}{a_{u-1}}$, а той же комбинаціи во второмъ періодѣ предшествуетъ $a_v$, такъ что $a_u=\frac{a^2R-b_u^2}{a_v}$. Очевидно, $a_{u-1}$ и $a_v$ есть одна и та же величина. Отсюда слѣдуетъ, что разложеніе (9) выражаетъ собою значеніе $\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$. Но для той же величины $\frac{b_u+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$ можно найти изъ разложенія (7) другое выраженіе, а именно:

$$\frac{b_u + a\sqrt{R}}{a_{u-1}} = \left|\begin{array}{c|cccc|cc} b_u & b_{u-1} & & b_{r+2} & & b_{r+1} & \\ a_{u-1} & a_{u-2} & \cdots & a_{r+1} & & a_r & \cdots \\ \hline m_{n-1} & m_{u-2} & & m_{r+1} & & — & \end{array}\right. \quad (10).$$

Какъ мы уже видѣли, въ такое разложеніе входитъ всякая пара величинъ $b_{r+1}$ и $a_r$ разложенія (7), удовлетворяющихъ неравенствамъ (6) и (4). Такъ какъ одна и та же величина $\frac{b_u + a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$ не можетъ быть развернута въ непрерывную дробь различнымъ образомъ, то разложеніе (10) должно быть, кромѣ того, тождественно съ разложеніемъ (9). Но послѣднее, какъ это видно изъ непосредственнаго его разсмотрѣнія, заключаетъ въ себѣ только періодически повторяющіяся величины $b_{u+1}$ и $a_u$. Слѣдовательно, и въ составъ разложенія (10) входятъ величины $b_{r+1}$ и $a_r$, періодически повторяющіяся. Итакъ, высказанное положеніе справедливо. Оно можетъ имѣть то практическое значеніе, что даетъ возможность опредѣлить ближайшій пунктъ, съ котораго начнется періодъ дроби, еще до окончанія вычисленій: такимъ пунктомъ будетъ группа, слѣдующая за первой величиной $a_r$, удовлетворяющей неравенству (4).

§ 6. Изъ доказаннаго положенія вытекаютъ, между прочимъ, такія слѣдствія:

a) На основаніи разложенія (7), имѣемъ:

$$\frac{b_{u-1} + a\sqrt{R}}{a_{u-1}} = \left|\begin{array}{c|c|ccccc|c|c} b_{u-1} & b_u & b_{u+1} & & b_{u+n} & & b_{v-1} & b_v & b_u \\ a_{u-1} & a_u & a_{u+1} & \cdots & a_{u+n} & \cdots & a_{v-1} & a_v & a_u \\ \hline m_{u-1} & m_u & m_{u+1} & & m_{u+n} & & m_{v-1} & m_v & \end{array}\right. \quad (11).$$

Опредѣлимъ, какъ разложится $\frac{-b_{u-1} + a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$. Вслѣдствіе формулы (1), можемъ написать: $\frac{-b_{u-1} + a\sqrt{R}}{a_{u-1}} = \frac{b_u + a\sqrt{R}}{a_{u-1}} - m_{u-1}$.

Такъ такъ разложеніе (9) выражаетъ собою значеніе $\frac{b_u + a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$, то разложеніе $\frac{-b_{u-1} + a\sqrt{R}}{a_{u-1}}$ найдется, если подставить въ разложеніе (9) вмѣсто $m_v$ величину $m_v - m_{u-1}$, а вмѣсто первой комбинаціи $\left|\begin{array}{c} b_u \\ a_v \end{array}\right.$ комбинацію $\left|\begin{array}{c} -b_{u-1} \\ a_v \end{array}\right.$ и перенести большія скобки, заключающія періодъ, на одинъ столбецъ вправо, такъ что:

$$\frac{-b_{u-1}+a\sqrt{R}}{a_{u-1}}=\left|\begin{array}{c\|c|c c c c c|c\|c} b_{u-1} & b_v & b_{v-1} & & b_{u+n+1} & & b_{u+1} & b_u & b_v \\ a_v & a_{v-1} & a_{v-2} & \cdots & a_{u+n} & \cdots & a_u & a_v & \\ m_v-m_{u-1} & m_{v-1} & m_{v-2} & & m_{u+n} & & m_u & m_v & \end{array}\right. \qquad (12).$$

Допустимъ теперь, что $b_{u-1}=0$; тогда оба разложенія (11) и (12) должны быть, разумѣется, тождественны. Сравнивъ ихъ, найдемъ рядъ тождествъ, которыя приведутъ насъ къ слѣдующему разложенію:

$$\frac{a\sqrt{R}}{a_{u-1}}=\left|\begin{array}{c\|c|c c c|c c c|c c c|c|c\|c} 0 & b_u & b_{u+1} & & b_{u+n-1} & b_{u+n} & & b_{u+n} & b_{u+n-1} & & b_{u+2} & b_{u+1} & b_u & b_v \\ a_{u-1} & a_u & a_{u+1} & \cdots & a_{u+n-1} & a_{u+n} & \cdots & a_{u+n-1} & a_{u+n-2} & \cdots & a_{u+1} & a_u & a_{u-1} & . \\ m_{u-1} & m_u & m_{u+1} & & m_{u+n-1} & m_{u+n} & & m_{u+n-1} & m_{u+n-2} & & m_{u+1} & m_u & 2m_{u-1} & \end{array}\right.$$

Разсматривая его, замѣчаемъ, что входящія сюда величины 1-ой, 2-ой и 3-ей строкъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, повторяются въ обратномъ порядкѣ и что послѣдній изъ входящихъ въ періодъ дроби знаменателей равенъ удвоенному знаменателю, стоящему въ одной группѣ съ $\left|\begin{array}{c} 0 \\ a_{u-1} \end{array}\right.$. Слѣдовательно, получивъ при производствѣ вычисленій $b_{u-1}$, равное нулю, и $a_{u-1}$, удовлетворяющее неравенству (4), достаточно довести дальнѣйшія вычисленія лишь до половины, такъ какъ дописать недостающую половину знаменателей не составитъ уже никакихъ затрудненій. Это заключеніе, въ отношеніи ускоренія вычисленій, имѣетъ большое практическое значеніе. Оно всегда, очевидно, примѣнимо къ выраженіямъ вида $\frac{\sqrt{R}}{a}$. Что касается того, какъ узнать, доведены ли вычисленія до желаемаго пункта, то отвѣтомъ на это служитъ появленіе $b_{u+n+1}$, равнаго $b_{u+n}$, или появленіе $a_{u+n+1}$, равнаго $a_{u+n}$. Пояснимъ сказанное на примѣрахъ.

$$\frac{19+\sqrt{7}}{59}=\frac{156}{24367}\left|\begin{array}{c|c|c|c\|c|c|c c} 1121 & -1121 & 413 & 0 & 118 & 59 & 59 & - \\ 3481 & -354 & 413 & 59 & 177 & 118 & & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1, & 4, \end{array}\right\Vert;$$

$$\frac{\sqrt{7}}{10}=\frac{26}{700}\left|\begin{array}{c|c\|c|c|c|c|c|c|c c c c c c} 0 & 0 & 21 & 16 & 20 & 5 & 22 & 26 & 26 & - & - & - & - & - \\ 100 & 7 & 37 & 12 & 25 & 27 & 8 & 3 & & & & & & \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 6 & 14 & 6, & 1, & 1, & 3, & 1, & 6, \end{array}\right\Vert;$$

$$\sqrt{13}=\frac{9}{13}\left|\begin{array}{c\|c|c|c c c} 0 & 3 & 1 & 2 & - & - \\ 1 & 4 & 3 & 3 & & \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1, & 6, \end{array}\right\Vert;$$

$$\frac{\sqrt{37}}{9}=\frac{54}{2997}\left|\begin{array}{c|c\|c|c|c|c|c|c|c c c c c c} 0 & 0 & 37 & 51 & 48 & 29 & 27 & 54 & 54 & - & - & - & - & - \\ 81 & 37 & 44 & 9 & 77 & 28 & 81 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 1 & 2 & 1 & 108 & 1, & 2, & 1, & 11, & 2, & 2 \end{array}\right\Vert.$$

б) Разложенія (11) и (12) находятся въ томъ, между прочимъ, соотношеніи другъ съ другомъ, что ихъ періоды имѣютъ одинъ и тотъ же составъ знаменателей, но послѣдніе идутъ въ обратномъ порядкѣ; положивъ въ этихъ разложеніяхъ $u=1$ и принявъ въ соображеніе, что $b_0=ab$ и $a_0=a^2$, мы получимъ разложенія для такихъ выраженій $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$ и $\frac{-b+\sqrt{R}}{a}$, гдѣ $|b|<a\sqrt{R}$ и $|b|+\sqrt{R}>a$. Посмотримъ, какъ разложится выраженіе $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$, гдѣ $|b|<a\sqrt{R}$, но $|b|+\sqrt{R}<a$. Въ этомъ случаѣ $m_0$ равно, очевидно, нулю, а потому $b_1$ удовлетворяетъ неравенству (6), и $a_1$—неравенству (4). Но тогда $\frac{b_1+a\sqrt{R}}{a_1}$ разложится по схемѣ (12), если $b>0$, или по схемѣ (11), если $b<0$. Слѣдовательно, разложеніе для $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$ намъ извѣстно.

Итакъ, при условіи $|b|<a\sqrt{R}$, независимо отъ того, будетъ ли $|b|+\sqrt{R}$ больше или меньше $a$, выраженія $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$ и $\frac{-b+\sqrt{R}}{a}$ развертываются въ такія непрерывныя дроби, что составъ ихъ періодически повторяющихся знаменателей одинъ и тотъ же, но послѣдніе идутъ въ обратномъ порядкѣ, и именно такъ, какъ показано въ разложеніяхъ (11) и (12). Это обстоятельство имѣетъ практическое значеніе въ томъ отношеніи, что позволяетъ написать непрерывную дробь, выражающую $\frac{-b+\sqrt{R}}{a}$, если таковая для $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$ извѣстна, не производя вычисленій, и наоборотъ, для $\frac{b+\sqrt{R}}{a}$, если извѣстна дробь для $\frac{-b+\sqrt{R}}{a}$. Пояснимъ это на примѣрахъ:

$$\frac{1+\sqrt{21}}{3}=\frac{13}{189}\left|\begin{array}{c||c|c|c|c||c} 3 & 6 & 11 & 13 & 12 & 6 \\ 9 & 17 & 4 & 5 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 6 & 5 & 2 & \end{array}\right.;\qquad \frac{3+\sqrt{18}}{4}=\frac{16}{288}\left\|\begin{array}{c|c|c|c||c} 12 & 4 & 13 & 15 & 12 \\ 16 & 17 & 7 & 9 & 16 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & \end{array}\right..$$

Найти непрерывную дробь для $\frac{-1+\sqrt{21}}{3}$ легко, если имѣть предъ глазами схемы (11) и (12). Искомая дробь, очевидно, имѣетъ цѣлое число (2—1), т. е. 1, за которымъ слѣдуетъ періодъ (5, 6, 1, 2).

Чтобы найти дробь для $\frac{-3+\sqrt{18}}{4}$, переносимъ большія скобки на одинъ столбецъ вправо; подводя такимъ образомъ разложеніе подъ схему (11), заключаемъ, что $\frac{-3+\sqrt{18}}{4}$ развернется въ непрерывную дробь съ цѣлымъ числомъ (1—1), т. е. 0 и періодомъ (3, 4, 1, 1).

$$\frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{10}{112}\left|\begin{array}{c|c||c|c|c|c||c} 4 & -4 & 10 & 10 & 8 & 8 & 10 \\ 16 & 6 & 2 & 6 & 8 & 6 & 2\,. \\ \hline 0 & 1 & 10 & 3 & 2 & 3 & \end{array}\right.$$

Найти, какъ разложится $\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, можно лишь послѣ предварительнаго опредѣленія разложенія для $\frac{-b_1+a\sqrt{R}}{a_1}$. Это дѣлается, какъ въ предыдущихъ случаяхъ. Очевидно, $\frac{-b_1+a\sqrt{R}}{a_1}$ развертывается въ непрерывную дробь съ цѣлымъ числомъ (3—1), т. е. 2 и періодомъ (2, 3, 10, 3). Поэтому, въ непрерывной дроби, выражающей $\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, за цѣлымъ числомъ 0 слѣдуетъ знаменатель $(3-1)=2$ и періодъ (2, 3, 10, 3).

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Маркони и безпроволочная телеграфія въ Германіи.** Германія имѣетъ своихъ творцовъ безпроволочной телеграфіи Слаби и Арко. Эти послѣдніе въ сотрудничествѣ съ фирмой Сименсъ и Гальске устраиваютъ цѣлый рядъ станцій для безпроволочнаго телеграфа въ Германіи. Маркони вначалѣ нисколько не былъ обезпокоенъ успѣхами его противниковъ. Онъ доказывалъ, что аппараты Слаби-Арко не въ состояніи будутъ воспринимать телеграммъ, отправленныхъ со станціи Маркони. При такихъ условіяхъ германскія пріемныя станціи потеряли бы всякое значеніе, такъ какъ онѣ не могли бы служить для сообщенія черезъ Атлантическій океанъ. Маркони далѣе утверждалъ, что аппараты, установленные въ Германіи, нисколько не могутъ помѣшать правильному функціонированію его станцій. Теперь этотъ оптимизмъ Маркони, по словамъ англійскихъ газетъ, падаетъ. Сотруднику „Daily Mail“ Маркони сказалъ, что и германскія станціи въ состояніи будутъ принимать телеграммы, отправленныя изъ Англіи. На одномъ только продолжаетъ настаивать Маркони. Онъ утверждаетъ, что мѣшать правильному функціонированію англійскихъ станцій аппараты Слаби-Арко только тогда будутъ въ состояніи, когда у нихъ будутъ установлены свои аппараты въ Англіи. А это, по словамъ Маркони, едва ли возможно.

**Опыты телеграфированія по системѣ профессора А. С. Попова.** Минувшимъ лѣтомъ на судахъ учебно-миннаго отряда Балтійскаго моря, между прочимъ, произведены были опыты телеграфированія безъ проводовъ по системѣ профессора электротехническаго института А. С. Попова. Результаты опытовъ оказались блестящими. Депеши отчетливо передавались на значительное разстояніе—слишкомъ на 100 верстъ. Въ виду такихъ осязательныхъ результатовъ, морское министерство въ недалекомъ будущемъ рѣшило установить приборы для телеграфированія безъ проводовъ на всѣхъ крупныхъ военныхъ судахъ, а также на нѣкоторыхъ береговыхъ пунктахъ. Для обученія обращенію съ приборами телеграфированія по этому способу и управленію ими въ Кронштадтѣ учреждается спеціальная школа морского вѣдомства.

# РЕЦЕНЗІИ.

*Основы философіи химіи* (150 стр.). **А. Ю. Гольдштейнъ.**

Книга эта представляетъ изложеніе основныхъ началъ и положеній химіи. Отличается она отъ многихъ появившихся въ послѣднее время сочиненій въ этомъ родѣ тѣмъ, что авторъ относится критически къ нѣкоторымъ основнымъ положеніямъ химіи. Это сочетаніе изложенія основъ химіи *для начинающихъ* съ критикой ихъ дѣлаетъ книгу неудобной и сбивчивой для начинающихъ заниматься химіей и желающихъ усвоить основныя начала этой науки. Съ другой стороны, и критика настолько поверхностна, что едва-ли можетъ представить интересъ для спеціалистовъ.

Первая и вторая главы книги касаются общихъ вопросовъ философіи. Здѣсь авторъ слегка затрагиваетъ вопросъ о предѣлахъ знанія и вопросъ о матеріи вобще. Въ третьей главѣ авторъ доказываетъ, что вполнѣ однородныхъ тѣлъ нѣтъ. Въ сущности, здѣсь повторяется старая истина, что всѣ наши *понятія и обобщенія* составляются при помощи отбрасыванія второстепенныхъ, неважныхъ моментовъ. Вся эта глава, мнѣ кажется, совершенно не идетъ къ дѣлу и могла бы быть опущена.

Съ четвертой главы начинается собственно критика атомизма. Здѣсь кратко изложена исторія атомизма и высказывается взглядъ, что генезисъ атомизма обусловленъ психологическимъ процессомъ познанія. Если въ этомъ и есть доля правды, то, конечно, это не можетъ служить къ отрицанію атомизма. Глава пятая, хотя и озаглавлена „историческое и критическое разсмотрѣніе научнаго атомизма", представляетъ, въ сущности, только критику закона кратныхъ отношеній. Авторъ полагаетъ, кажется, что безъ обобщенія фактовъ, которое формулируется закономъ кратныхъ отношеній, и атомистической гипотезы не было бы. На самомъ дѣлѣ законъ кратныхъ отношеній былъ высказанъ Дальтономъ какъ слѣдствіе атомистической гипотезы, и немногіе извѣстные факты были приведены лишь какъ иллюстрація закона кратныхъ отношеній. Впослѣдствіи Берцеліусъ экспериментально провѣрялъ этотъ законъ. Авторъ находитъ, что проявленія этого закона въ нѣкоторыхъ случаяхъ такъ сложны, что по нимъ трудно было бы догадаться о существованіи закона кратныхъ отношеній. Непонятно, почему это обстоятельство должно возбуждать сомнѣнія въ существованіи этого закона. Весьма естественно, что законы подмѣчаются въ наиболѣе простыхъ ихъ проявленіяхъ и, если оказываются приложимыми и ко всѣмъ болѣе сложнымъ случаямъ, то пріобрѣтаютъ право на званіе закона. Авторъ указываетъ далѣе на то, что если бы въ дѣйствительности и не существовало закона кратныхъ отношеній, то и тогда всякое отношеніе можно выразить какъ отношеніе цѣлыхъ чиселъ и тѣмъ формально доказать законъ. Однако, въ дѣйствительности къ такимъ пріемамъ прибѣгать не приходится. Если бы законъ кратныхъ отношеній держался въ химіи только благодаря математическому пріему, то всѣ наши химическія формулы не выражали бы столькихъ соотношеній различныхъ соединеній между собою, и формулы наши не только не давали бы возможности оріентироваться въ массѣ химическихъ явленій, но, напротивъ, служили бы страшнымъ тормазомъ и обузой и давно бы были выброшены за бортъ вмѣстѣ съ закономъ кратныхъ отношеній.

Послѣднія главы содержатъ изложеніе принциповъ опредѣленія атомнаго вѣса, молекулярной гипотезы, кинетической теоріи газовъ (глава 6-ая) и періодической системы элементовъ Менделѣева (глава 7-ая). Изложеніе приправлено небольшой дозой критики, не мѣшающей пользоваться этой частью книги для ознакомленія съ основами химіи. Въ 8-й главѣ изложена исторія мысли о единствѣ матеріи, начиная съ гипотезы Прута, приведены работы Стаса по этому поводу. Оканчивается глава изложеніемъ гипотезы Крукса о генезисѣ элементовъ. Послѣдняя (9-ая) глава трактуетъ о валентности элементовъ въ связи съ системой Менделѣева, а также о нѣкоторыхъ другихъ свойствахъ элементовъ и простыхъ тѣлъ, обращая вниманіе читателя на нѣкоторые недостатки періодической системы. Глава эта интересна и полезна.

*Проф. С. Танатаръ.*

# ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

**Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.**

---

**№ 454** (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^3 + y^3 + z^3 = 36,$$

$$x + y + z = xyz = 6.$$

*Х. Рѣзницкій* (Казань).

**№ 455** (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{(n-1)xy}{x+y} = n+1, \quad \frac{(n-2)xz}{x+z} = n+2, \quad \frac{(n-3)yz}{y+z} = n+3.$$

*И. Коровинъ* (Екатеринбургъ).

**№ 456** (4 сер.). Отрѣзокъ $AB$ постоянной длины скользитъ своими концами $A$ и $B$ по сторонамъ прямого угла, въ плоскости котораго дана точка $C$. Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести треугольника $ABC$.

*В. Шлыгинъ* (Москва).

**№ 457** (4 сер.) Дано, что медіана $AM$ треугольника $ABC$ одинаково наклонена къ основанію $BC$ и къ биссектрисѣ $AD$ угла $BAC$.
Доказать, что

$$BM^2 = AB.AC,$$

$AM . \sqrt{2} = AB - AC$ (предположено, что $AB > AC$).

(Заимств.).

**№ 458** (4 сер.) Даны двѣ окружности, пересѣкающіяся въ точкахъ $A$ и $A'$. Черезъ точки $A$ и $A'$ проводятъ параллельныя сѣкущія, которыя встрѣчаютъ одну изъ окружностей въ точкахъ $C$ и $C'$, а другую—въ точкахъ $B$ и $B'$. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія $M$ прямыхъ $B'C$ и $BC'$.

(Заимств.).

**№ 459** (4 сер.). Два равныхъ вогнутыхъ сферическихъ зеркала, фокусное разстояніе которыхъ равно $f$, помѣщены на разстояніи $d$ одно отъ другого. Вогнутыя поверхности зеркалъ обращены одна къ другой, и главныя оси ихъ совпадаютъ. Въ какой точкѣ оси слѣдуетъ помѣстить свѣтящійся предметъ, чтобы лучи, отразившись послѣдовательно отъ обоихъ зеркалъ, дали изображеніе въ той же точкѣ? Вычислить отношеніе величины изображенія къ величинѣ предмета. Приложить найденныя формулы къ случаю когда $d = 1$ метръ, $f = 0{,}1$ метра.

(Заимств.).

---

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 378** (4 сер.). *Даны основаніе* a *треугольника и радіусы* R *и* r *круговъ описаннаго и вписаннаго. Требуется:* 1) *вычислить остальныя стороны треугольника и* 2) *построить треугольникъ.*

Называя черезъ $2p$ периметръ, черезъ $b$ и $c$ двѣ другія стороны и черезъ $S$ площадь треугольника, имѣемъ:

$$R=\frac{abc}{4S},\; S=pr,\; S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Возвышая послѣднее уравненіе въ квадратъ и подставляя вмѣсто $S$ изъ предыдущаго уравненія $pr$, получимъ:

$$p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p(p-a)\left[p^2-p(b+c)+bc\right] \qquad (1).$$

Но

$$bc=\frac{4SR}{a}=\frac{4prR}{a} \quad (2) \quad \text{и} \quad b+c=2p-a \qquad (3).$$

Поэтому (см. (1)):

$$p^2r^2=p(p-a)\left[p^2-p(2p-a)+\frac{4prR}{a}\right]=p^2(p-a)\left[p-(2p-a)+\frac{4rR}{a}\right],$$

откуда, замѣчая, что $p\neq 0$,

$$r^2=(p-a)\left(a+\frac{4rR}{a}-p\right),\; ar^2=(p-a)(a^2+4rR-ap),$$

$$ap^2+4Rrp-(4Rra+ra^2+a^3) \qquad (4).$$

Изъ уравненія (4), принимая во вниманіе *положительный* корень, имѣемъ:

$$p=\frac{\sqrt{4R^2r^2+4Rra^2+ra^3+a^4}-2Rr}{a},$$

откуда (см. (4))

$$b+c=2p-a=\frac{2\left(\sqrt{4R^2r^2+4a^2Rr+ra^3+a^4}-2Rr\right)}{a}-a \qquad (5),$$

$$bc=\frac{4Rrp}{a}=\frac{4Rr\left(\sqrt{4R^2r^2+4a^2Rr+ra^3+a^4}-2Rr\right)}{a^2} \qquad (6).$$

Называя вторыя части равенствъ (5) и (6) соотвѣтственно черезъ $P$ и $Q$, находимъ, что стороны $b$ и $c$ суть корни квадратнаго уравненія

$$z^2-Pz+Q=0,$$

такъ что $b$ и $c$ выражаются нѣкоторой квадраторадикальной функціей данныхъ отрѣзковъ $a$, $R$ и $r$; слѣдовательно, искомый треугольникъ можно построить при помощи циркуля и линейки.

Простое геометрическое построеніе вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній: опустивъ изъ центра $O'$ вписаннаго круга перпендикуляръ $O'K$ на $BC$, находимъ, что $O'K=r$ и что $\angle CO'B=180^0-\angle O'CB-\angle O'BC=180^0-\frac{B+C}{2}=180^0-\frac{180^0-A}{2}=90^0+\frac{A}{2}\cdot$ Слѣдовательно, для построенія искомаго треугольника достаточно изъ произвольной точки $O$ описать окружность радіусомъ $R$, отложить гдѣ-нибудь хорду $BC=a$ въ этой окружности, описать на $BC$ сегменты $\sigma$ и $\sigma_1$, вмѣщающіе углы $90+\frac{\alpha}{2}$ и $90+\frac{\alpha'}{2}$, гдѣ $\alpha$ и $\alpha'$ — вписанные углы, опирающіеся въ окружности $O$ на хорду $BC$ по каждую изъ ея сторонъ (при чемъ сегменты, вмѣщающіе углы $90+\frac{\alpha}{2}$ и $90+\frac{\alpha'}{2}$ должны лежать сооответственно внутри дугъ $2\alpha'$ и $2\alpha$ окружности $O$), а затѣмъ по обѣ стороны $BC$ провести отстоящія отъ нея на разстояніи $r$ параллельныя прямыя до встрѣчи съ дугами сегментовъ $\sigma$ и $\sigma_1$ въ нѣкоторыхъ точкахъ. Пусть $O'$ одна изъ этихъ точекъ; построимъ $\angle O'CX = \angle O'CB$, и пусть $CX$ пересѣкаетъ окружность во второй точкѣ $A$; треугольникъ $ABC$ есть искомый. Рѣшеній (въ случаѣ возможности) вообще два (собственно 4, но они симметричны по два относительно діаметра, перпендикулярнаго къ $BC$).

*А. Колегаевъ* (Короча); *Я. Дубновъ* (Вильна).

**№ 379** (4 сер.). *Данъ уголъ* ABC *и точка* O *на сторонѣ* AB. *Описать изъ точки* O, *какъ изъ центра, окружность, встрѣчающую сторону* BC *въ такихъ точкахъ* M *и* N, *чтобы отрѣзки* NM *и* MB *были равны.*

Задача возможна только тогда, если уголъ $ABC$ *не прямой*; дѣйствительно, если бы уголъ $ABC$ былъ прямой, то радіусы $OM$ и $ON$ оказались бы не равны, какъ наклонныя, основанія которыхъ не равно удалены отъ основанія перпендикуляра.

Опустивъ перпендикуляръ $OK$ на прямую $BC$, имѣемъ:

$$MK = MN = \frac{MN}{2} = \frac{BM}{2},$$

$$BK = BM + MK = 2MK + MK = 3MK,$$

такъ что

$$MK = \frac{BK}{3}.$$

Отсюда вытекаетъ построеніе: опустивъ перпендикуляръ $OK$ на прямую $BC$, дѣлимъ отрѣзокъ $KB$ въ точкѣ $M$ въ отношеніи $1:2$ (т. е. такъ, что $\frac{MK}{BM} = \frac{1}{2}$). Окружность, описанная изъ точки $O$ радіусомъ $OM$, есть искомая. Замѣтимъ еще, что если $\angle ABC$ тупой, то точки $M$ и $N$ могутъ быть найдены лишь на продолженіи $BC$; дѣйствительно, если бы точки $M$ и $N$ были построены на сторонѣ $BC$ тупого угла $ABC$, то уголъ $OMN$ при основаніи $MN$ равнобедреннаго треугольника $OMN$ оказался бы тупымъ (какъ внѣшній и несмежный по отношенію къ тупому углу $OBM$ треугольника $OBM$), что невозможно.

*М. Топеръ* (Одесса); *Р. Вольскій* (Варшава); *Б. Руткевичъ* (Варшава); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *А. Колегаевъ* (Короча); *Степановъ* (Александровскъ); *Н. Сагателовъ* (Шуша); *А. Чесскій* (Слуцкъ); *Н. Доброгаевъ* (Немировъ); *Н. Готлибъ* (Митава).

**№ 380** (4 сер.). *Найти цѣлое трехзначное число* N, *всякая цѣлая степень котораго имѣетъ такія же цифры сотенъ, десятковъ и единицъ, какъ и само число* N

(Заимств. изъ *L'Éducation Mathématique*).

Вычитая $N$ изъ $N^2$, получимъ, согласно съ условіемъ, число, оканчивающееся тремя нулями, такъ какъ $N^2$ и $N$ имѣютъ одинаковыя цифры сотенъ, десятковъ и единицъ. Слѣдовательно, $N^2 - N$ кратно 1000; такимъ образомъ, искомое число заключается среди такихъ трехзначныхъ чиселъ $N$, которыя удовлетворяютъ условію, чтобы выраженіе

$$N^2 - N = N(N-1) \qquad (1)$$

дѣлилось на $1000 = 5^3.2^3$. Такъ какъ числа $N$ и $N-1$ (см. (1)) взаимно простыя, то необходимо, чтобы $N$ дѣлилось на $5^3 = 125$, а $N-1$ — на $2^3 = 8$ или, наоборотъ, чтобы $N$ дѣлилось на 8, а $N-1$ на 125. Пусть $N$ дѣлится на 125. Всевозможныя трехзначныя числа, кратныя 125, суть 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 (2) и только одно изъ нихъ, 625, будучи уменьшено на 1, дѣлится на 8. Пусть $N$ дѣлится на 8; тогда $N-1$, дѣлясь на 125, не можетъ быть четырехзначнымъ, такъ какъ $N$ трехзначное число, а потому единственно возможныя значенія $N-1$ исчерпывается рядомъ чиселъ (2); но тогда $N$ должно, дѣлясь на 8, имѣть одно изъ значеній (см. (2)): 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Лишь одно изъ нихъ, 376, кратно 8. Итакъ, $N$ должно быть равно либо 625, либо 376. Наоборотъ, каждое изъ этихъ чиселъ даетъ правильный отвѣтъ; дѣйствительно, $N^{k-1}-1$ дѣлится при $K$ цѣломъ и положительномъ на $N-1$, а потому $N(N^{k-1}-1)=N^k-N$ дѣлится на $N(N-1)$; принимая $N=625$ или 376, находимъ, что разность $N^k-N$ дѣлится на $625.624$ или $376.375$, а каждое изъ этихъ произведеній оканчивается тремя нулями. Поэтому и разность $N^k-N$ кончается тремя нулями, такъ что числа $N^k$ и $N$ имѣютъ одинаковыя цифры сотенъ, десятковъ и единицъ.

*А. Колегаевъ* (Короча); *Я. Дубновъ* (Вильна); *Х. Мнацакановъ* (Тифлисъ).

**№ 382** (4 сер.). *Даны двѣ параллели и внѣ ихъ двѣ точки* A *и* B. *Изъ точки* A *провести сѣкущую, встрѣчающую параллели въ точкахъ* X *и* У *такъ, чтобы площадь* XBУ *была данной величины.*

Опустивъ изъ точки $A$ перпендикуляръ на одну изъ параллелей и назвавъ черезъ $M$ и и $N$ точки встрѣчи его съ параллелями, на которыхъ лежатъ соотвѣтственно точки $X$ и $У$, обозначимъ данную площадь $XBУ$ черезъ $k^2$. Предполагая, что задача рѣшена, имѣемъ:

$$\frac{\text{площ. } ABУ}{\text{площ. } XBУ}=\frac{AУ}{XУ}=\frac{AN}{MN},$$

откуда

$$\text{площ. } ABУ=\frac{AN}{MN}\cdot\text{площ. } XBУ=\frac{AN.k^2}{MN},$$

или

$$\frac{AB.УZ}{2}=\frac{AN.k^2}{MN} \quad (1),$$

гдѣ $УZ$ — высота треугольника $AУB$, проведенная къ сторонѣ $AB$. Изъ равенства (1) находимъ:

$$h=УZ=\frac{2AN.k^2}{MN.AB}=\frac{2AN.k}{MN}\cdot\frac{k}{AB} \quad (2).$$

Отрѣзокъ $h=УZ$ легко построить (см. (2)), строя раньше выраженіе $m=\frac{2AN.k}{MN}$, какъ четвертую пропорціональную къ отрѣзкамъ $2AN$, $k$ и $MN$ а потомъ опять строя четвертую пропорціональную къ $m$, $k$ и $MN$. Отсюда вытекаетъ построеніе: построивъ $h$, проводимъ по обѣ стороны прямой $AB$ на разстояніи $h$ отъ нея параллельныя ей прямыя; пусть $У$ — точка пересѣченія одной изъ этихъ прямыхъ съ той параллелью, на которой лежитъ точка $N$. Тогда сѣкущая $AУ$ есть одна изъ искомыхъ. Задача имѣетъ, такимъ образомъ, не болѣе двухъ рѣшеній, если $AB$ не параллельна заданнымъ параллелямъ. Если же $AB$ параллельна заданнымъ параллелямъ, то задача либо невозможна, либо $\left(\text{при } k^2=\frac{AB.MN}{2}\right)$ имѣетъ безконечное число рѣшеній.

*Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *В. Ковальскій* (Петербургъ); *Я. Дубновъ* (Вильна).

**№ 383** (4 сер.). *Доказать, что*

$$\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}\right)\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega_1}\right)=2,$$

*гдѣ* $\omega$ — *уголъ между медіаной и биссекторомъ, проведенными изъ вершины одного изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника, а* $\omega_1$ — *уголъ между аналогичными прямыми, проходящими черезъ вершину другого остраго угла.*

Пусть $B$ и $C$ — острые углы прямоугольнаго треугольника $ABC$, $BM$ и

$BD$ — медіана и биссекторъ, проведенные изъ вершины $B$, и $\angle MBD=\omega$. По свойству биссектора $DA < CD$ (такъ какъ $BA < BC$); поэтому

$$\angle MBD=\omega=\angle MBA-\angle DBA=\angle MBA-\frac{1}{2}\angle B \qquad (1).$$

Введя обозначенія

$$B=2\beta,\quad C=2\gamma,\quad \angle MBA=\beta' \qquad (2),$$

можно записать равенство (1) въ видѣ

$$\omega=\beta'-\beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\beta'-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta'} \qquad (3).$$

Но, вводя обычныя обозначенія катетовъ прямоугольнаго треугольника,

$$\operatorname{tg}MBA=MA:AB=\frac{b}{2}:c=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}B=(\text{см. }(2))=\frac{\operatorname{tg}2\beta}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta},$$

откуда (см. (3))

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}-\operatorname{tg}\beta}{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}=\operatorname{tg}^3\beta \qquad (4).$$

Аналогичнымъ путемъ найдемъ (см. (2)):

$$\operatorname{tg}\omega_1=\operatorname{tg}^3\gamma \qquad (5).$$

Поэтому (см. (4), (5)):

$$\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}\right)\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega_1}\right)=(1+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma)=1+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \qquad (6).$$

Но (см. (2))

$$B+C=2\beta+2\gamma=\frac{\pi}{2},\ \text{откуда}\ \beta+\gamma=\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

а потому

$$\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,\quad \operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1.$$

Подставляя въ равенство (6) вмѣсто $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ найденное только что значеніе это выраженія, а именно 1, имѣемъ:

$$\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega}\right)\left(1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}\omega_1}\right)=2.$$

*Л. Ямпольскій* (Braunschweig); *А. Колегаевъ* (Короча); *В. Винокуровъ* (Калязинъ); *Я. Дубновъ* (Вильна); *Х. Мкацакановъ* (Тифлисъ).

## Поправка.

Въ задачѣ № 444 въ № 363 „Вѣстника“ въ знаменателѣ предложеннаго выраженія слѣдуетъ читать $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, а не $\sqrt[3]{10+6\sqrt{9}}$.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 22-го Марта 1904 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.