Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXV Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

10 Іюля № 300. 1901 г.

О причинѣ полярныхъ сіяній.

Svante Arrhenius'а.

Переводъ съ нѣмецкаго *Д. Шора*.

*(Продолженіе *).*

Проще всего, конечно, объясненіе 11-ти-лѣтняго и вѣковыхъ періодовъ, которые стоятъ въ связи съ количествомъ солнечныхъ пятенъ. Чѣмъ больше встрѣчается солнечныхъ пятенъ, тѣмъ энергичнѣе становится образованіе капель во внѣшнихъ слояхъ солнца, и соотвѣтственно этому, солнечные лучи пригоняютъ къ землѣ большее количество отрицательно заряженныхъ частичекъ. Легко также объяснить двойной годичный періодъ. Дѣятельность солнца, какъ извѣстно, имѣетъ minimum на солнечномъ экваторѣ, откуда она возрастаетъ въ обѣ стороны и достигаетъ приблизительно подъ 15⁰ сѣверной и южной широтъ наибольшаго размѣра. Земля же находится противъ солнечнаго экватора въ двухъ положеніяхъ: 6-го декабря и 4-го іюня. Затѣмъ она отдаляется отъ солнечнаго экватора, ибо плоскость послѣдняго образуетъ съ эклиптикой уголъ въ 7⁰, такъ что 5-го марта земля находится противъ точки, лежащей подъ 7⁰ сѣверной, а 3-го сентября противъ точки, лежащей подъ 7⁰ южной отъ солнечнаго экватора ши-

*) См. № 299 „Вѣстника".

роты. Такъ какъ заряженныя частички движутся отъ солнца главнымъ образомъ по путямъ, перпендикулярнымъ къ нему, то земля 5-го марта и 3-го сентября подвергается болѣе сильному дѣйствію солнца, чѣмъ въ другія времена года; а вслѣдствіе этого и получается въ это время maximum. Согласно этому, одинъ minimum долженъ будетъ приходиться на 6-ое декабря, другой на 4-ое іюня, такъ какъ въ это время проходитъ солнечный экваторъ. Вышеизложенное находится въ полномъ соотвѣтствіи съ годичнымъ ходомъ измѣненія количества сѣверныхъ сіяній. Точно также въ іюнѣ minimum долженъ быть слабѣе выраженъ, чѣмъ въ декабрѣ, такъ какъ въ первомъ случаѣ земля находится вблизи афелія, а во второмъ вблизи перигелія. По имѣющемуся въ настоящее время матеріалу, это, очевидно, соотвѣтствуетъ дѣйствительности, такъ какъ въ среднемъ отношеніе количества полярныхъ сіяній въ іюнѣ къ количеству ихъ въ декабрѣ для обоихъ полушарій меньше единицы. Далѣе здѣсь играютъ роль и времена года. Чѣмъ выше стоитъ солнце для нѣкоторой точки земли, тѣмъ больше солнечныхъ частичекъ падаетъ на нее. Слѣдовательно, лѣтомъ полярныя сіянія должны происходить чаще, чѣмъ зимою. Это также имѣетъ мѣсто, если только яркое освѣщеніе не слишкомъ ослабляетъ свѣтовой эффектъ полярныхъ сіяній. Въ странахъ, гдѣ ночи лѣтомъ не настолько свѣтлы, чтобы препятствовать наблюденію полярныхъ сіяній, т. е. въ точкахъ, лежащихъ не очень далеко отъ экватора, это тоже справедливо, какъ это видно изъ наблюденій въ Америкѣ и въ южномъ полушаріи. По той же причинѣ количество полярныхъ сіяній должно достигать наибольшаго значенія черезъ нѣсколько часовъ послѣ полудня, приблизительно когда и температура воздуха наибольшая, такъ какъ въ это время въ верхнихъ слояхъ атмосферы накопляется больше всего солнечной пыли. Но такъ какъ въ это время полярныя сіянія невидимы, то можно только ожидать, что полярныя сіянія должны происходить предъ полуночью чаще, чѣмъ послѣ нея, а это повсюду совпадаетъ съ дѣйствительностью. Слѣдуетъ замѣтить, что *Gyllenskiöld*, введя поправку на освѣщеніе, нашелъ дѣйствительно maximum количества сѣверныхъ сіяній около 3-хъ часовъ по-полудни.

Полярныя сіянія производятъ магнитныя пертурбаціи, которыя, разумѣется, не зависятъ отъ того, видимы ли полярныя сіянія или нѣтъ. Изученіе пертурбацій земного магнитизма дастъ, вѣроятно, много данныхъ для объясненія природы полярныхъ сіяній. Эти пертурбаціи регистрировались фотографически въ Батавіи, и снимки впослѣдствіи были изучены *van Benmelen'омъ* [25]). Изъ этого изслѣдованія вытекаетъ, что магнитныя пертурбаціи обладаютъ полугодовымъ періодомъ, одинъ maximum котораго приходится на мартъ, другой на сентябрь; одинъ minimum — на январь, другой на іюнь. Эти пертурбаціи зависятъ отъ солнеч-

[25]) *van Benmelen:* Verslagen en Mededeelingen d. Kon. Ak. v. Wetenschappen te Amsterdam. Nov. 22. 1899.

ныхъ пятенъ—оба явленія одновременно убываютъ и увеличиваются. Эти два обстоятельства даютъ право принять, что магнитныя пертурбаціи являются результатомъ дѣйствія полярныхъ сіяній. Дневной періодъ этихъ пертурбацій имѣетъ maximum около 3-хъ часовъ по-полудни и minimum приблизительно за часъ до полудня. Поэтому, очень вѣроятно, что полярныя сіянія давали бы maximum черезъ нѣсколько часовъ по полудни, какъ этого требуетъ теорія, если бы дневной свѣтъ не мѣшалъ наблюденію ихъ.

Теперь перейдемъ къ мѣсячнымъ періодамъ. Изъ нихъ 26-ти-дневный совпадаетъ съ синодическимъ оборотомъ солнца, именно—солнечнаго экватора. Прежде трудно было понять, почему надо считаться съ солнечнымъ экваторомъ, такъ какъ принималось, что полярныя сіянія вызываются солнечными пятнами, и такъ какъ maximum солнечныхъ пятенъ лежитъ на 15^0 сѣвернѣе и южнѣе экватора. Поэтому казалось, что, соотвѣтственно такому положенію вещей, количество полярныхъ сіяній должно было бы зависѣть отъ синодическаго времени оборота этой максимальной области, которое достигаетъ 26,8 дней. По нашему же воззрѣнію, нужно считаться со временемъ оборота солнечнаго экватора, такъ какъ земля очень мало отклоняется отъ него и дважды въ годъ возвращается къ нему. Оборотъ солнечныхъ пятенъ на экваторѣ продолжается 26,8 дней, а солнечныхъ факеловъ—26,06 дней. Понятно, слѣдуетъ принять во вниманіе время оборота послѣднихъ, такъ какъ изъ нихъ исходятъ изверженія, высылающія въ міровое пространство солнечную пыль. И дѣйствительно, время оборота факеловъ очень мало отличается отъ 25,93 дней — періода, вычисляемаго изъ наблюденія полярныхъ сіяній. Эта разница станетъ еще меньше, если примемъ во вниманіе, что времена оборота высоколежащихъ частей солнечной атмосферы короче, чѣмъ тѣхъ частей, которыя лежатъ глубже; слѣдовательно, скорость вращенія верхнихъ факеловъ превышаетъ среднюю скорость вращенія ихъ. Естественно, что факелы, лежащіе выше, посылаютъ больше частичекъ пыли, чѣмъ тѣ, которые лежатъ ниже. Слѣдовательно, мы можемъ принять періодъ въ 25,93 дней тождественнымъ, въ предѣлахъ ошибки наблюденія, съ временемъ оборота верхнихъ факеловъ. Объясненіе 25,93-дневнаго періода такимъ образомъ дано.

Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ объясненіемъ періода полярныхъ сіяній, соотвѣтствующаго тропическому обращенію луны вокругъ земли. Самое простое объясненіе этого періода, тѣсно примыкающее къ тому, которое далъ Ekholm и которое я прежде приводилъ, состоитъ, по моему мнѣнію, въ томъ, что необходимо допустить существованіе сильнаго отрицательнаго заряда луны. Послѣдній, какъ и зарядъ верхнихъ слоевъ земной атмосферы, происходитъ отъ отрицательно-заряженныхъ частичекъ, исходящихъ отъ солнца. Когда луна находится надъ заряженнымъ одноименнымъ электричествомъ слоемъ воздуха, то паденіе потенціала будетъ уменьшаться въ направленіи отъ нея, и разряды не будутъ такъ легко происходить, какъ въ томъ случаѣ, когда луны нѣтъ. На это можно было бы возразить, что луна находится на слишкомъ большомъ разстояніи, чтобы быть въ состояніи оказывать замѣтное вліяніе. Поэтому, я указываю на вычисленія, произведенныя *Ekholm'омъ и мною* [26]), согласно которымъ зарядъ луны вовсе не долженъ быть столь большимъ (приблизительно въ 10000 разъ больше заряда земной поверхности), чтобы вызвать сильное измѣненіе электрическаго поля вблизи земли. Когда не было ничего извѣстно о зарядѣ внѣшнихъ слоевъ земной атмосферы, этотъ зарядъ луны являлся слишкомъ большимъ, по сравненію съ зарядомъ внутренней поверхности *) земного шара. Но если принять во вниманіе, какъ возникаетъ зарядъ твердожидкой земли (см. значительно ниже), то окажется очень вѣроятнымъ, что онъ составляетъ лишь незначительную часть заряда верхнихъ слоевъ атмосферы. А именно съ послѣднимъ слѣдуетъ сравнивать зарядъ луны, такъ какъ оба заряда возникаютъ отъ одной и той же причины. Поэтому, вовсе нельзя считать невѣроятнымъ, что зарядъ луны столь великъ, что онъ въ состояніи замѣтнымъ образомъ препятствовать разряду въ верхнихъ слояхъ атмосферы, надъ которыми находится луна. Когда же послѣдняя находится подъ горизонтомъ, ея дѣйствіе значительно ослабляется, такъ какъ земля играетъ при этомъ роль экрана. Итакъ, если луна находится къ сѣверу отъ экватора, то она мѣшаетъ разряду, главнымъ образомъ, на сѣверномъ полушаріи; когда же она находится къ югу отъ экватора, она производитъ обратное дѣйствіе. Другими словами, луна будетъ уменьшать число сѣверныхъ сіяній, когда она находится къ сѣверу отъ экватора, и число южныхъ сіяній, когда она находится къ югу отъ него.

Съ этимъ взглядомъ согласуется также вліяніе луны на атмосферное электричество. Когда катодные лучи полярныхъ сіяній проникаютъ въ расположенную подъ ними атмосферу, то они іонизируютъ находящійся тамъ воздухъ; понятно, іонизація будетъ происходить въ верхнихъ слояхъ атмосферы. По недавно опубликованнымъ изслѣдованіямъ *Elster'а* и *Geitel'я* [27]), а также и *Lenard'а*, воздухъ въ верхнихъ слояхъ атмосферы долженъ быть іонизированъ; это совпадаетъ съ предположеніемъ, которое я высказалъ уже въ моемъ теоретическомъ изслѣдованіи асмосфернаго электричества [28]). *J. J. Thomson* первый вывелъ слѣдствіе

---

[26]) *Ekholm* и *Arrhenius*, Bihang t. K. Sv. Vet. Ak. Handl. 19, Afd. I, 35, **1894**.

*) Авторъ разумѣетъ поверхности самаго земного шара, не считая атмосферы. *Прим. Ред.*

[27]) *Elster* и *Geitel*, Terrestrial magnetism and atmospheric decticity, Dec. **1899** (Physikalische Zeitschrift I, **245**, **1900**). Сравн. *Lenard:* Ann. d. Physik. **(4)** I, **535**, **1900**.

[28]) S. *Arrhenius*, Meteorol. Zeitschr. **5**, **1888**.

изъ факта существованія такой іонизаціи [29]). Водяной паръ конденсируется преимущественно на отрицательныхъ іонахъ воздуха, и эти послѣднія падаютъ на землю, въ то время какъ положительный зарядъ остается въ верхнихъ слояхъ. Итакъ, чѣмъ больше число полярныхъ сіяній, тѣмъ больше долженъ быть положительный зарядъ въ верхнихъ слояхъ атмосферы и отрицательный на поверхности земли. Къ сожалѣнію, изъ произведенныхъ до сихъ поръ наблюденій нельзя доказать справедливости этого заключенія, согласно которому электрическое состояніе земной поверхности должно было бы измѣняться вмѣстѣ съ количествомъ солнечныхъ пятенъ. Напротивъ того, измѣренія при аэростатическихъ полетахъ въ послѣднее время констатировали [30]), что въ воздухѣ надъ поверхностью земли господствуетъ столь сильный положительный зарядъ, что приблизительно на высотѣ 3000 метровъ нейтрализуетъ дѣйствіе отрицательнаго заряда наружу.

Когда луна стоитъ высоко, то число полярныхъ сіяній уменьшается, а вслѣдствіе этого также уменьшается величина отрицательнаго заряда земли и положительнаго заряда воздуха. Это также справедливо, а именно извѣстны дневной и тропическій періоды этого явленія. Такъ какъ для достиженія вышеназваннаго эффекта необходимо болѣе продолжительное дѣйствіе — отрицательное электричество должно быть сначала переведено конденсаціей къ поверхности земли,— то не трудно понять, что дневной періодъ можетъ развиваться очень слабо, сравнительно съ мѣсячнымъ. Прежде было труднѣе всего объяснить это обстоятельство, такъ какъ самымъ существеннымъ считалось непосредственное дѣйствіе наведенія луны на землю. На самомъ же дѣлѣ, этому дѣйствію слѣдуетъ приписать лишь второстепенную роль. Наблюденія на Cap Horn и Cap Thordsen подтверждаютъ существованіе именно такихъ періодовъ. Въ мѣстахъ, лежащихъ южнѣе, найдено своеобразное передвиженіе фазъ, но мы оставимъ его безъ обсужденія до тѣхъ поръ, пока не будетъ собрано достаточнаго количества матеріала.

Другое явленіе атмосфернаго электричества, о которомъ упоминаетъ *Paulsen* [31]) въ своей теоріи полярныхъ сіяній, состоитъ въ слѣдующемъ: сейчасъ же послѣ того, какъ отрицательныя электрическія массы проникаютъ отъ катодныхъ лучей въ нижніе слои атмосферы, отрицательный зарядъ лежащей подъ ними поверхности земли замѣтно ослабляется; это понятно само собой. Вообще приведенный здѣсь взглядъ на возникновеніе полярныхъ сіяній вполнѣ согласуется съ теоріей полярныхъ сіяній *Paulsen'a*, такъ какъ онъ удовлетворяетъ допущеніямъ этой теоріи.

Вслѣдствіе того, что катодные лучи способны вызывать кон-

---

[29]) *J. J. Thomson*, Phil. Mag. [5], 46, 533, 1898.

[30]) По измѣреніямъ *André, Le Cadet, Börnstein'a* и *Baschin'a* (Meteorolog. Zeitschr. 11, 351, 1894).

[31]) *Paulsen*: l. c., 7.

денсацію, полярныя сіянія будутъ, какъ заключаетъ *Paulsen*, сопровождаться образованіемъ облаковъ. Вообще уже давно извѣстно, что въ годы многочисленныхъ полярныхъ сіяній количество высоко-лежащихъ облаковъ значительно больше, чѣмъ въ годы, бѣдные полярными сіяніями. То же, по наблюденіямъ *Vogel'я*, справедливо и для Юпитера. Въ годы большо́го числа солнечныхъ пятенъ, эта планета свѣтитъ бѣловатымъ свѣтомъ, въ годы малаго числа солнечныхъ пятенъ—красноватымъ. Такъ какъ принимается, что Юпитеръ является тѣмъ болѣе краснымъ, чѣмъ глубже можно видѣть его атмосферу, то вышесказанное согласуется съ тѣмъ, что на Юпитерѣ въ годы большого числа солнечныхъ пятенъ образованіе облаковъ сильнѣе. На Юпитеръ также падаетъ съ солнца космическая пыль, заряженная отрицательнымъ электричествомъ, а потому въ верхнихъ слояхъ атмосферы этой планеты должно происходить съ электричествомъ то же, что происходитъ въ верхнихъ слояхъ земной атмосферы. Я не буду обсуждать своеобразныхъ свѣтовыхъ явленій на Венерѣ, которыя аналогичны полярнымъ сіяніямъ, такъ какъ многіе астрономы сомнѣваются въ реальности этихъ явленій. Нельзя отрицать, что Венера, вслѣдствіе ея близости къ солнцу и ея плотной атмосферы, даетъ въ высшей степени благопріятныя условія для развитія полярныхъ сіяній.

Конечно необходимо принять, что капельки въ хвостахъ кометы также конденсируются по преимуществу на отрицательныхъ частичкахъ, откуда вытекаетъ, что онѣ заряжены отрицательно. Слѣдовательно, когда земля проходитъ сквозь хвостъ кометы, въ атмосферѣ должны происходить явленія, подобныя сѣвернымъ сіяніямъ. И это заключеніе подтверждается; такъ *Lowe* говоритъ: „Въ этотъ день (при прохожденіи земли сквозь хвостъ кометы) небо имѣло особенный блескъ, такъ что, если бы былъ въ это время вечеръ, я бы полагалъ, что вижу полярное сіяніе". Также *Lias* и *Secchi* наблюдали подобныя явленія [32]).

(Окончаніе слѣдуетъ).

Объ одной ариѳметической задачѣ.

А. Мошковича.

Для доказательства одного важнаго предложенія въ теоріи субституцій Ж. Бертранъ допустилъ слѣдующій постулатъ: „*Если а есть цѣлое число, большее единицы, то между а и 2а всегда заключается по крайней мѣрѣ одно цѣлое число*". Допущеніе въ области чистаго анализа—явленіе столь исключительное, что доказатель-

[32]) *Lowe*: The englisch mechanic and world of science, Vol. 34, 275, 1881. Сравн. *J. C. Hauseau*: Vademecum de l'Astronomie, Brüxelles, 1882, 784. Этою цитатою я воспользовался благодаря г. *Dr. J. B. Rydlerg'y*.

ство постулата Бертрана послужило предметомъ многихъ изслѣдованій. Наконецъ П. Л. Чебышеву въ знаменитомъ мемуарѣ, посвященномъ изслѣдованію числа простыхъ чиселъ, заключающихся въ данныхъ предѣлахъ удалось доказать это положеніе.

Съ помощью этого предложенія С. О. Шатуновскій рѣшилъ любопытную ариѳметическую задачу, которую онъ затѣмъ предложилъ для рѣшенія въ № 159 „Вѣстника“ подъ № 446 (II-ой серіи), формулировавъ ее слѣдующимъ образомъ:

„*Бертранъ допустилъ, а Чебышевъ доказалъ, что при $a>1$ между числами a и $2a$ содержится простое число. Зная это, требуется опредѣлить maximum цѣлаго числа N подъ условіемъ, чтобы всякое цѣлое число, меньшее N и взаимно простое съ N, было числомъ абсолютно простымъ*“.

Такъ какъ въ редакціи не было получено ни одного рѣшенія этой задачи, то въ № 12 сем. XV (т. е. въ № 180-мъ) было помѣщено рѣшеніе автора.

Значительно позже эта задача появляется вновь въ ноябрской книжкѣ журнала „Intermédiaire de mathématiciens“ за 1899 г., но уже безъ ссылки на постулатъ Бертрана. Ее предлагаетъ нѣкто de Rocquigny, высказывая только *предположеніе*, что наибольшее число, обладающее требуемымъ свойствомъ, есть 30. Задача вызвала три новыхъ рѣшенія. Во первыхъ г. Maillet въ томъ же журналѣ (1900 г. стр. 284) предложилъ рѣшеніе, также основанное на теоремѣ Бертрана—Чебышева. Въ „Mathematische Annalen“ за текущій годъ г. Wolfskehl независимо отъ Maillet предлагаетъ аналогичное рѣшеніе, также основанное на томъ же предложеніи. Наконецъ въ недавно вышедшей книжкѣ „Archiv für Mathematik und Physik“ E. Landau помѣстилъ небольшую статью, подъ заглавіемъ „Ueber einen zahlentheoretischen Satz“, которая содержитъ доказательство того же предложенія, но не зависящее отъ теоремы Чебышева.

Какъ самая задача, такъ и пріемы ея рѣшенія, изложенные въ первоклассныхъ европейскихъ журналахъ, заслуживаютъ, на нашъ взглядъ, вниманія, и мы удѣлимъ ей нѣсколько страницъ.

Два предложенія лежатъ въ основѣ всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденій.

Пусть рядъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$$

представляетъ собой совокупность всѣхъ простыхъ чиселъ, расположенныхъ въ возрастающемъ порядкѣ, такъ что

$$a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7,\ a_5=11 \text{ и т. д.} \ldots$$

Составляя произведеніе

$$a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n,$$

мы легко убѣждаемся, что для значеній n, меньшихъ нежели 4, оно меньше, нежели a^2_{n+1}, и—наоборотъ—при $n = 4$, оно больше, чѣмъ a^2_{n+1}:

$$2 < 3^2, \quad 2.3 < 5^2, \quad 2.3.5 < 7^2.$$

$$2.3.5.7 < 11^2.$$

Основываясь на постулатѣ Бертрана можно доказать, что разсматриваемое произведенiе остается больше a^2_{n+1} и при *всякомъ n большемъ* 4-хъ. Мы формулируемъ это предложенiе нѣсколько иначе.

Лемма I. *Произведенiе всѣхъ послѣдовательныхъ абсолютно простыхъ чиселъ ($a_1.a_2.a_3...a_n$) меньше квадрата слѣдующаго простого числа (a^2_{n+1}) въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $n < 4$.*

Въ самомъ дѣлѣ, — изъ постулата Бертрана слѣдуетъ, что между a_n и $2a_n$ имѣется простое число; поэтому число a_{n+1}, т. е. слѣдующее за a_n простое число, непремѣнно заключается въ этомъ промежуткѣи, стало быть, оно меньше, нежели $2a_n$. Такъ какъ по той же причинѣ $a_n < 2a_{n-1}$, то

$$a_{n+1} < 2a_n < 4a_{n-1}.$$

Отсюда

$$a^2_{n+1} < 2a_n.4a_{n-1}, \quad a^2_{n+1} < 8a_n.a_{n-1}. \qquad (1)$$

Съ другой стороны, коль скоро $n > 4$, то произведенiе $a_1.a_2.a_3 \; . \; . \; . \; a_{n-2}$ равно или больше, чѣмъ $a_1.a_2.a_3$ — т. е. 2.3.5; поэтому мы имѣемъ право утверждать, что оно больше 8. Слѣдовательно при $n > 4$

$$a_1.a_2.a_3....a_{n-2}.a_{n-1}.a_n > 8a_{n-1}a_n.$$

Принимая же во вниманiе неравенство (1) мы находимъ, согласно высказанному утвержденiю, что при $n > 4$

$$a_1.a_2.a_3....a_{n-1}.a_n > a^2_{n+1} \qquad (2).$$

Всѣ опирающiяся на постулатъ Бертрана доказательства основываются на это положенiе.

Лемма II. *Если число N удовлетворяетъ условiямъ задачи*, т. е., *если всякое число, меньшее N и простое относительно него, есть число абсолютно простое*, и *если*

$$a^2_k < \mathrm{N}, \qquad (4)$$

то a_k есть дѣлитель числа N. Иными словами, число N, удовлетворяющее условiямъ задачи, дѣлится на всякое простое число a_k, которое меньше нежели $\sqrt{N}$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ, т. е. еслибы a_k не оказалось дѣлителемъ числа N, то a^2_k было бы число простое относительно N. Съ другой стороны a^2_k есть число составное, и будучи меньше N, согласно условiю, не можетъ быть простымъ относительно него.

Это предложеніе есть непосредственный выводъ изъ заданія и не зависитъ отъ постулата Бертрана; къ нему прибѣгаетъ и г. Landau, доказательство котораго отъ этого постулата не зависитъ.

Теперь мы обратимся къ разсужденіямъ г. Maillet. Если число N удовлетворяетъ условіямъ задачи и a_ν есть *наибольшее* простое число, удовлетворяющее неравенству (4), то—согласно леммѣ II—N дѣлится на каждое изъ чиселъ a_1, a_2, $a_3 \ldots a_\nu$; а такъ какъ это различныя простыя числа, то N дѣлится на ихъ произведеніе. Поэтому

$$a_1 . a_2 . a_2 \ldots . a_\nu \leqslant N \qquad (5).$$

Съ другой стороны, такъ какъ a_ν есть наибольшее простое число, квадратъ котораго меньше N, то

$$N < a^2_{\nu+1} \qquad (6).$$

Изъ неравенствъ (5) и (6) слѣдуетъ, что

$$a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_\nu < a^2_{\nu+1}.$$

Согласно леммѣ I это неравенство можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если $\nu < 4$. Принимая поэтому неравенство (6), мы можемъ утверждать, что всякое число N, удовлетворяющее условію задачи, непремѣнно меньше, нежели 49; или иначе: *числа, удовлетворяющія условіямъ задачи, не могутъ превосходить 48.*

Нетрудно, однако, убѣдиться непосредственно, что число 30 удовлетворяетъ условіямъ задачи. Теперь допустимъ, что существуетъ число X большее, чѣмъ 30, и удовлетворяющее условіямъ задачи. Такъ какъ въ такомъ случаѣ X больше 2^2, 3^2, 5^2, то это число нао сновании леммы II кратно 2, 3 и 5, а потому кратно 30. Слѣдовательно $X \geqslant 60$, что противорѣчитъ доказанному положенію о несущество-ваніи подобныхъ чиселъ за предѣлами 48. Итакъ

Наибольшее изъ чиселъ N, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ числа, меньшія N и простыя относительно него, суть числа, абсолютно простыя, есть число 30.

Разсужденіями, подобными только что изложенному, или же простымъ обзоромъ чиселъ отъ 1 до 30, мы легко приходимъ къ заключенію, что условіямъ задачи вообще удовлетворяютъ только слѣдующія числа:

2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

По существу рѣшеніе, предложенное г. Walfskehl'емъ, мало отличается отъ предыдущихъ соображеній. Онъ ставитъ вопросъ такъ:

Для того, чтобы число N удовлетворяло условіямъ задачи, необходимо и достаточно, чтобы

$$N < a^2_{n+1}, \qquad (7)$$

если a_{n+1} есть наименьшее простое число, не служащее дѣлителемъ N.

Въ самомъ дѣлѣ, это условіе необходимо, ибо, согласно леммѣ II, если N удовлетворяетъ условіямъ задачи и превышаетъ a_{n+1}^2, то a_{n+1} и всѣ меньшія простыя числа дѣлятъ N. Но это условіе также достаточно. Дѣйствительно, еслибы число N не удовлетворяло условіямъ задачи, то существовало бы составное число M, меньшее N и простое относительно него. Въ составъ числа M должно входить по крайней мѣрѣ два простыхъ числа, одинаковыхъ или различныхъ; пусть это будетъ a_l и a_m, при чемъ мы будемъ считать $l \leqq m$. Такъ какъ $N > M$, то $N > a_l . a_m$ и $N > a_l^2$. Съ другой стороны, такъ какъ a_{n+1} есть *наименьшее* простое число, которое не дѣлитъ N, то $a_l \geqq a_{n+1}$, а потому $N > a_{n+1}^2$, что противорѣчило бы неравенству (7).

Такъ какъ N при этомъ кратно произведенія $a_2.a_3.a_4.....a_n$, то мы вновь приходимъ къ неравенству N

$$a_1.a_2.a_3.\ldots a_n < N \leqq a_{n+1}^2,$$

анализъ котораго у Wolfskehl'я тождественъ съ анализомъ, составляющимъ рѣшеніе г. Maillet.

Наконецъ 3-е и первое по времени рѣшеніе принадлежитъ, какъ мы уже говорили выше, г. С. О. Шатуновскому. Такъ какъ оно мало отличается отъ двухъ предыдущихъ рѣшеній и было уже изложено въ „Вѣстникѣ“ въ указанномъ мѣстѣ, то мы не станемъ его повторять.

Несомнѣнно однако, что наибольшій интересъ для нашихъ читателей должно представить рѣшеніе E. Landau—и именно потому, что оно не опирается на постулатъ Бертрана, доказательство котораго, принадежащее Чебышеву, основывается на соображеніяхъ далеко не элементарнаго характера. E. Landau замѣнилъ предложеніе Бертрана—Чебышева другимъ, которое достаточно для даннаго изслѣдованія, но опирается на гораздо болѣе простыя разсужденія.

Условимся называть *линейнымъ числомъ* всякое цѣлое число, которое состоитъ изъ *различныхъ не повторяющихся* простыхъ множителей, или иначе, не кратное никакого цѣлаго квадрата. Такимъ образомъ общій видъ линейнаго числа есть

$$a_{k_1}.a_{k_2}.a_{k_3}\ldots.a_{k_s},\ \text{гдѣ}\ k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \ldots. \neq k_s.$$

Теорема г. Landau. *Если вещественное число $Q \geqq 7$, то между числами $^5/_8 Q$ и Q, исключая нижній и включая верхній предѣлы, содержится по меньшей мѣрѣ два линейныхъ числа; иными словами, существуетъ два линейныхъ числа l и m, удовлетворяющихъ неравенствамъ*

$$^5/_8 Q < l \leqq Q, \quad ^5/_8 Q < m \leqq Q.$$

Доказательство. Всякое нелинейное число, не превышающее Q, должно дѣлиться на квадратъ какого либо цѣлаго числа Q_1; это число Q_1 не превышаетъ $[\sqrt{Q}]$ *), ибо если $Q_1 > [\sqrt{Q}]$, то $Q_1{}^2 > Q$. Для удобства будемъ обозначать $[\sqrt{Q}]$ черезъ q.

Пусть r будетъ какое либо цѣлое число, отличное отъ 1 и не превышающее q. Подсчитаемъ, сколько имѣется чиселъ, кратныхъ r^2 и не превышающихъ Q. Очевидно, если ихъ имѣетъ n, то числа

$$1.r^2,\ 2.r^2,\ \ldots\ n.r^2$$

не превышаютъ Q, а $(n+1)r^2$ больше Q. Иными словами

$$nr^2 \leqslant Q < (n+1)r^2 \text{ или } n \leqslant \frac{Q}{r^2} < n+1$$

т. е.

$$n = \left[\frac{Q}{r^2}\right].$$

Такимъ же образомъ чиселъ, не превышающихъ $^5/_8Q$ и кратныхъ r^2, будетъ $\left[\frac{^5/_8Q}{r^2}\right]$. Слѣдовательно, чиселъ, кратныхъ r^2, большихъ, нежели $^5/_8Q$, и не превышающихъ Q, имѣется

$$\left[\frac{Q}{r^2}\right] - \left[\frac{^5/_8Q}{r^2}\right].$$

Теперь замѣтимъ, что при всякомъ x

$$x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Поэтому

$$\left[\frac{Q}{r^2}\right] - \left[\frac{^5/_8Q}{r^2}\right] < \frac{Q}{r^2} - \left(\frac{^5/_8Q}{r^2} - 1\right) = \frac{^3/_8Q}{r^2} + 1.$$

Иными словами, число, выражающее, сколько между $^5/_8Q$ и Q (исключая нижнiй и включая верхнiй предѣлъ) **) имѣется чиселъ кратныхъ r^2, меньше, нежели

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{Q}{r^2} + 1.$$

Составимъ теперь таблицу, написавъ въ первой строкѣ всѣ числа, заключающiяся между $^5/_8Q$ и Q и кратныя 2^2,—во второй всѣ числа, заключающiяся въ тѣхъ же предѣлахъ и кратныя 3^2 и т. д., наконецъ въ послѣдней строкѣ,—числа (въ тѣхъ же предѣлахъ) кратныя q^2. Тогда, на основанiи изложенныхъ выше со-

---

*) Подъ символомъ $[x]$, какъ это часто дѣлаютъ, мы здѣсь обозначаемъ, *наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x*. Такъ $[\sqrt{5}] = 2$.

**) Мы это всегда будемъ подразумѣвать.

ображенiй, въ первой строкѣ окажется чиселъ меньше, нежели $\frac{3}{8}\frac{Q}{2^2}+1$,—во второй меньше, нежели $\frac{3}{8}\frac{Q}{3^2}+1$,—въ r-*той* меньше, нежели $\frac{3}{8}\frac{Q}{r^2}+1$, въ послѣдней—меньше нежели $\frac{3}{8}\frac{Q}{q^2}+1$.

Во всей таблицѣ будетъ чиселъ меньше, нежели

$$\sum_{r=2}^{r=q}\left\{\frac{3}{8}\frac{Q}{r^2}+1\right\}=q-1+\frac{3}{8}Q\sum_{r=2}^{r=q}\frac{1}{r^2}<q-1+\frac{3}{8}Q\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{r^2}.$$

Но извѣстно, что

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6},\text{ слѣдовательно }\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6}-1.$$

Такъ какъ $\frac{\pi^2}{6}-1$ меньше $^2/_3$, то предыдущее неравенство усилится, если мы въ послѣдней части замѣнимъ Σ черезъ $^2/_3$. *) Мы можемъ поэтому утверждать, что въ нашей таблицѣ меньше

---

*) Какъ легко замѣтить равенство

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

вводится въ текстѣ для доказательства неравенства

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{r^2}<{}^2/_3. \qquad (\alpha)$$

Поэтому для читателей, незнакомыхъ съ выраженiемъ суммы ряда

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{r^2},$$

мы предлагаемъ слѣдующiй выводъ неравенства (α):

Пусть S_k сумма k членовъ ряда $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{r^2}$, а t_k сумма k членовъ ряда

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(r-1).r}=\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}. \qquad (\beta)$$

Тогда

$$[S_{n+m}-S_n]<[t_{n+m}-t_n], \qquad (\gamma)$$

такъ какъ

$$\frac{1}{(r-1)r}>\frac{1}{r^2}.$$

Но

$$\lim_{k=\infty} t_k=\lim_{k=\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1.$$

чиселъ, нежели

$$q-1+\frac{Q}{4}.$$

Такъ какъ всякое, содержащееся между $^5/_8Q$ и Q, нелинейное число дѣлится на квадратъ одного изъ чиселъ отъ 2 до q, то оно фигурируетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ въ нашей таблицѣ. Слѣдовательно, число *нелинейныхъ* чиселъ, содержащихся въ интервалѣ отъ $^5/_8Q$ до Q, меньше, нежели

$$q-1+\frac{Q}{4}.$$

Такъ какъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ въ томъ же интервалѣ имѣется

$$[Q]-[^5/_8Q],$$

то число L линейныхъ чиселъ въ томъ же интервалѣ

$$L>[Q]-[^5/_8Q]-\left\{q-1+\frac{Q}{4}\right\}.$$

Это неравенство еще усилится, если мы замѣнимъ $[Q]$ черезъ $Q-1$, $[^5/_8Q]$ черезъ $^5/_8Q$ и $q=[\sqrt{Q}]$ черезъ $\sqrt{Q}$. Стало быть,

$$L>\frac{Q}{8}-\sqrt{Q}.$$

Итакъ, число выражающее, сколько въ интервалѣ отъ $^5/_8Q$

т. е. рядъ (β) есть сходящійся, а слѣдовательно въ силу неравенства (γ) и рядъ $\sum_2^\infty \frac{1}{r^2}$.

Съ другой стороны

$$[t_{n+m}-t_n]=\left[1-\frac{1}{n+m}-1+\frac{1}{n}\right]=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right]=\left[\frac{m}{n(n+m)}\right]=\left[\frac{1}{n+\frac{n^2}{m}}\right]<\frac{1}{10},$$

коль скоро $n\geqq 10$ и потому (нерав. (γ))

$$[S_{10+m}-S_{10}]<\frac{1}{10}.$$

Откуда

$$\sum_2^\infty \frac{1}{r^2}=\lim_{m=\infty} S_{n+m}<S_{10}+\frac{1}{10}.$$

Но

$$S_{10}=\frac{428.790.420}{2^6.3^4.5^2.7^2.11^2}=\frac{428.790.420}{768.398.400}=\frac{16\frac{1897794}{2561328}}{30}<\frac{17}{30}$$

и слѣдовательно a fortiori

$$\sum_2^\infty \frac{1}{r^2}<\frac{17}{30}+\frac{1}{10}={}^2/_3.$$

до Q имѣется линейныхъ чиселъ, больше, нежели

$$\frac{Q}{8}-\sqrt{Q}=\sqrt{Q}\left\{\frac{\sqrt{Q}}{8}-1\right\}.$$

Это выраженіе возрастаетъ вмѣстѣ съ Q; при $Q=81$ оно больше 1. Слѣдовательно для всѣхъ значеній $Q>81$ въ интервалѣ отъ $^5/_8Q$ до Q имѣется, по крайней мѣрѣ, два линейныхъ числа.

Чтобы теорема Landau было доказана вполнѣ, нужно еще обнаружить, что она справедлива для значеній Q, содержащихся между 7 и 81. Въ этомъ можно убѣдиться непосредственнымъ обзоромъ этихъ чиселъ.

Таково предложеніе, которое въ разсужденіяхъ г. Landau замѣняетъ теорему Бертрана—Чебышева. Съ помощью его онъ рѣшаетъ задачу г. Шатуновскаго слѣдующимъ образомъ. Пусть N будетъ линейное число, удовлетворяющее условіямъ задачи г. Шатуновскаго. Пусть l будетъ какое нибудь линейное же число, меньшее нежели $\sqrt{N}$. Тогда, на основаніи второй леммы, $\frac{N}{l}$ есть число цѣлое. Это частное больше, нежели l, ибо будь $\frac{N}{l}\leq l$, то мы бы имѣли $l^2\geq N$, что противно условію. Слѣдовательно, $\frac{N}{l}-l$ есть цѣлое положительное число, меньшее, нежели N. Теперь не трудно обнаружить, что $\frac{N}{l}-l$ есть число, простое относительно N. Дѣйствительно, допустимъ, что α есть *простое* число, дѣлящее оба эти числа; такъ какъ α дѣлитъ число

$$\frac{N}{l}-l=\frac{N-l^2}{l}$$

то оно дѣлитъ также $(N-l^2)$, дѣлитъ разность $N-(N-l^2)=l^2$, а слѣдовательно, дѣлитъ l и наконецъ дѣлитъ число $\left(\frac{N}{l}-l\right)+l=\frac{N}{l}$. Итакъ, α дѣлитъ $\frac{N}{l}$ и l; это возможно лишь въ томъ случаѣ, если α входитъ въ N по крайней мѣрѣ во второй степени; а это невозможно, потому что N, по условію, число линейное.

Такъ какъ всѣ числа, меньшія N и простыя относительно него, суть числа абсолютно простыя, то $\frac{N}{l}-l$ есть число абсолютно простое.

Итакъ, если N есть линейное число, удовлеворяющее требованіямъ задачи, а l линейное же число, меньшее, нежели $\sqrt{N}$, то $\frac{N}{l}-l$ есть абсолютно простое число.

Теперь нетрудно обнаружить, что линейное число N, удовлетворяющее условіямъ задачи, не можетъ быть больше 48. Въ самомъ дѣлѣ, пусть линейное число $N \geqslant 49$ и удовлетворяетъ условіямъ задачи г. Шатуновскаго. Тогда $\sqrt{N} \geqslant 7$, а потому между $\frac{5}{8}\sqrt{N}$ и $\sqrt{N}$ по теоремѣ г. Landau имѣется, по крайней мѣрѣ, два линейныхъ числа; обозначимъ черезъ λ одно изъ нихъ. Тогда, съ одной стороны, $\frac{N}{\lambda} - \lambda$ должно быть числомъ простымъ, какъ относительно N, такъ и абсолютно; съ другой стороны

$$\frac{N}{\lambda}-\lambda<\frac{N}{{}^5/_8\sqrt{N}}-\frac{5}{8}\sqrt{N} \text{ т. е. } \frac{N}{\lambda}-\lambda<\frac{39}{40}\sqrt{N}<\sqrt{N};$$

между тѣмъ по леммѣ II простое число, меньшее $\sqrt{N}$, должно дѣлить N и, стало быть, не можетъ быть простымъ относительно него. Утвержденіе такимъ образомъ доказано.

Положимъ теперь, что N_1 есть произвольное нелинейное число, удовлетворяющее условіямъ задачи, а N есть линейное число, составленное изъ всѣхъ различныхъ дѣлителей числа N_1. Мы докажемъ, что въ этомъ случаѣ N также удовлетворяетъ условіямъ нашей задачи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть Q произвольное число, меньшее, чѣмъ N, и простое относительно него; тогда оно также меньше N_1 и простое относительно него; слѣдовательно Q число абсолютно простое.

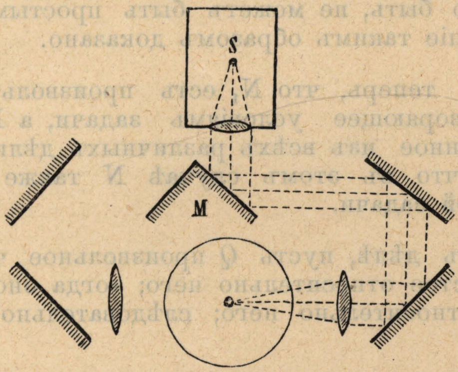
Замѣтивъ это, предположимъ, что существуетъ *нелинейное* число, большее 48 и удовлетворяющее условіямъ задачи. Согласно леммѣ II-й это число должно дѣлиться на 2, 3, 5 и 7. Если мы составимъ линейное число, имѣющее тѣхъ же простыхъ дѣлителей, то и оно должно удовлетворять условіямъ задачи, какъ это сейчасъ было доказано. Между тѣмъ и оно должно содержать множителей 2, 3, 5 и 7. Стало быть, мы такимъ образомъ получимъ *линейное* число, равное или большее, или $2.3.5.7=210$ и удовлетворяющее условіямъ задачи. Мы однако доказали, что такихъ чиселъ нѣтъ, а слѣдовательно и вообще *нѣтъ чиселъ, удовлетворяющихъ условіямъ задачи г. Шатуновскаго и превышающихъ 48.*

Для окончательнаго рѣшенія задачи остается повторить несложныя разсужденія г. Maillet.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О давленіи, оказываемомъ свѣтовыми лучами.

Въ № 295 „Вѣстника“ была помѣщена краткая замѣтка объ изслѣдованіяхъ проф. Лебедева надъ давленіемъ, производимымъ лучистой энергіей. Изъ статьи проф. Аррениуса читатели могутъ усмотрѣть, какъ велика важность изслѣдуемаго г. Лебедевымъ явленія. Мы считаемъ поэтому умѣстнымъ въ настоящемъ номерѣ войти въ нѣсколько большія подробности и познакомить читателей съ самой схемой опыта г. Лебедева. Мы имѣемъ въ виду нѣсколько подробнѣе остановиться на способахъ, помощью которыхъ удалось устранить эффектъ пертурбирующихъ силъ, вліяніе которыхъ дѣлаетъ давленіе свѣтовыхъ лучей мало уловимымъ.



Пертурбирующія силы здѣсь бываютъ двоякаго происхожденія: во-первыхъ, силы переноса (конвекціи) частицъ газа и во-вторыхъ, радіометрическія силы. Силы конвекціи зависятъ отъ разности температуръ крылышка и стекляннаго баллона. Для устраненія дѣйствія этихъ силъ опытъ былъ расположенъ такъ, что пучекъ свѣта S помощью зеркалъ и стеколъ можно было направлять на ту или другую сторону крылышка, передвигая прямоугольное зеркало M; разница отклоненій въ томъ и другомъ случаѣ не зависитъ отъ силъ конвекціи *). Конвекція къ тому же ослаблялась въ значительной степени, благодаря разрѣженію воздуха въ баллонѣ. Кромѣ конвекціонныхъ силъ имѣютъ мѣсто радіометрическія силы, зависящія отъ кривизны кружковъ и разности температуръ освѣщенной стороны крылышка и находящейся въ тѣни.

*) Въ самомъ дѣлѣ, если ε есть отклоненіе, производимое конвекціей, а η отклоненіе, производимое лучами, то полное отклоненіе при одномъ направленіи лучей составляетъ $\varepsilon+\eta$, при другомъ $\varepsilon-\eta$; разность обоихъ отклоненій равна 2η.

Для подсчета дѣйствія этихъ силъ употреблялись двѣ пары крылышекъ, одинъ кружокъ каждой пары былъ блестящимъ съ обѣихъ сторонъ, другой—покрытъ платиновой чернью. Пары отличались другъ отъ друга только толщиной жести (0.10 mm. и 0,02 mm.). Предполагая, что разность терменатуръ для сторонъ болѣе толстаго кружка въ 5 разъ больше $\left(\frac{0.10 \text{ mm}}{0.02 \text{ mm}}=5\right)$ и сравнивая отклоненія, испытываемыя толстымъ и тонкимъ крылышкомъ, можно вычислить отклоненіе для весьма тонкаго крылышка, для котораго разность температуръ по обѣимъ сторонамъ равна 0 и для котораго, слѣдовательно, радіометрическія силы уничтожаются. Кружки были сдѣланы плоскими, такъ какъ радіометрическія силы обусловливаются также и кривизной кружковъ.

Механическое давленіе, производимое свѣтовыми лучами, измѣрялось угломъ отклоненія кружка и его разстояніемъ отъ оси вращенія. Моментъ крученія вычислялся въ абсолютныхъ единицахъ изъ наблюденій времени качанія системы крылышекъ.

Количество лучистой энергіи, производящей указанное выше давленіе, опредѣлялось слѣдующимъ образомъ: удалялся баллонъ, и на мѣсто крылышка ставилась круглая діафрагма, одинаковаго съ нимъ размѣра. Проходящіе черезъ нее лучи падали на закопченную поверхность маленькаго калориметра, снабженнаго термометромъ.

Опыты эти „показываютъ, что пучекъ свѣта, падая на отражающія или поглощающія плоскія поверхности, производитъ на нихъ давленія, которыя въ предѣлахъ погрѣшности наблюденія равны свѣтовому давленію по Maxwell-Bartoli".

Вл. Сболенскій.

Математическій ежегодникъ. Книгоиздательская фирма G. Carré и C. Naud издаетъ альманахъ подъ заглавіемъ „l'Annuaire des mathématiciens". Въ ежегодникъ войдетъ списокъ лицъ, научно-занимающихся математикой; этотъ списокъ будетъ содержать около 7000 именъ съ указаніемъ адресовъ; кромѣ того, тамъ будутъ помѣщены: перечень главныхъ ученыхъ обществъ, занимающихся математикой и перечень періодическихъ изданій, посвященныхъ математикѣ. Въ составъ книги войдетъ, кромѣ того, нѣсколько небольшихъ статей научнаго содержанія. Между авторами этихъ статей въ текущемъ году будутъ фигурировать Appel, Loria, Hilbert, Klein, Méray, Petersen.

Новый математическій органъ. Въ Италіи возникъ новый математическій органъ, подъ заглавіемъ „Le Matematiche pure ed applicate". Журналъ, повидимому, будетъ имѣть то же назначеніе, что и французскій и нѣмецкій органы, выходящіе подъ тождественнымъ почти заглавіемъ. Редакторомъ новаго журнала состоитъ проф. Cristoforo Alatia. Среди сотрудниковъ, обѣщавшихъ журналу свое содѣйствіе, фигурируютъ имена: Appell, Bettazzi, Brocard, Cesàro, Galdeano, Lemoine, Peano, Poincaré, A. Васильевъ. Первая книжка журнала уже вышла.

Термометръ для высокихъ температуръ. Въ послѣдніе годы фирма Schott u. Gen. въ Іенѣ изготовляетъ сортъ стекла, имѣющій весьма высокую точку плавленія. Съ помощью этого стекла Niehls построилъ ртутный термометръ для высокихъ температуръ. Верхнюю часть термометра, свободную отъ ртути, онъ наполняетъ углекислымъ газомъ, давленіемъ котораго значитольно повышается точка кипѣнія ртути. Германская „физико-техническая Палата („Physikalisch-technische Reichsanstalt") наноситъ на этихъ термометрахъ дѣленія до 575°C. Но дальнѣйшее повышеніе этихъ дѣленій врядъ ли возможно, такъ какъ, по мнѣнію названныхъ фабрикантовъ, врядъ ли можно надѣяться получить сортъ стекла съ еще болѣе высокой точкой плавленія.

Въ концѣ прошлаго года Dufour и Gautier опубликовали результаты своихъ попытокъ примѣнять для этой цѣли кварцъ, увѣнчавшихся полнымъ успѣхомъ. Извѣстно, что Boys'у удалось изготовлить изъ размягченнаго кварца нити, которыя часто употребляются вмѣсто коконовыхъ нитей. Такъ какъ кварцъ становится при этомъ мягкимъ, какъ накаленное стекло, то представлялось возможнымъ пользоваться имъ также для изготовленія другихъ предметовъ, которые обыкновенно приготовляются изъ стекла. Dufour попытался изготовить изъ кварца трубку для термометра. Однимъ такимъ термометромъ, наполненнымъ свинцомъ, онъ дѣйствительно пользуется для измѣренія температуръ отъ 240°—580°C. Но такъ какъ кварцъ размягчается лишь при 1000°C, то становится вѣроятнымъ, что термометрами этого рода можно будетъ пользоваться для измѣренія температуръ, достигающихъ 900°C. („Himmel u. Erde", тек. годъ. 3).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Построеніе правильнаго пятиугольника по данной сторонѣ.

Въ 5-ой книжкѣ „Boulletino di Matematiche" нѣкто A. Capuzzo указываетъ слѣдующій изящный способъ построенія правильнаго пятиугольника по данной сторонѣ.

Пусть AB будетъ данная сторона правильнаго пятиугольника. Изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ AB описываемъ окружность, а затѣмъ дѣлимъ радіусъ AB въ точкѣ H въ среднемъ и крайнемъ отношеніи такимъ образомъ, чтобы AH былъ большій отрѣзокъ. Изъ точки A, какъ изъ центра, растворомъ циркуля равнымъ AH засѣкаемъ нашу окружность въ точкѣ K, затѣмъ изъ точки K тѣмъ же растворомъ засѣкаемъ окружность въ точкѣ L и наконецъ изъ точки L тѣмъ же растворомъ засѣкаемъ ее въ точкѣ C. Соединяемъ точки K, L и C съ точкой B и наконецъ изъ точки C, какъ изъ центра, засѣкаемъ прямую BL въ точкѣ D растворомъ циркуля, равнымъ AB=BC и изъ A засѣкаемъ прямую BK въ точкѣ E тѣмъ же растворомъ циркуля. ABCDE представляетъ собой требуемый пятиугольникъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ AH есть сторона правильнаго вписаннаго въ нашу окружность радіуса AB десятиугольника, то дуги AK, KL и LC содержатъ по 36°. Уголъ ABC содержитъ слѣдовательно, 108°, т. е. это есть уголъ правильнаго пятиугольника. Поэтому A, B и C суть три вершины искомаго пятиугольника. Такъ какъ далѣе двѣ діагонали, выходящія изъ вершины правильнаго пятиугольника, дѣлятъ уголъ при вершинѣ на три равныя части, то остальныя вершины искомаго пятиугольника должны лежать на прямыхъ BK и BL. Этимъ опредѣляется дальнѣйшее построеніе.

ЗАДАЧИ.

XXIV. Цѣлое положительное число N относится къ числу всѣхъ положительныхъ чиселъ, взаимно простыхъ съ N и меньшихъ его, какъ 11339:7618. Найти всѣхъ первоначальныхъ дѣлителей числа N.

Е. Григорьевъ (Казань).

XXV. Доказать, что если квадраты сторонъ треугольника ABC образуютъ ариѳметическую прогрессію, средній членъ которой есть a^2, то 1) котангенсы угловъ треугольника образуютъ ариѳметическую прогрессію, 2) квадраты медіанъ треугольника также образуютъ ариѳметическую прогрессію, 3) точка Lemoine'a *) и центръ тяжести треугольника находятся на прямой, параллельной сторонѣ BC и 4) между углами треугольника существуетъ соотношеніе:

$$\cos(B+C)\cos(B-C)=\cos 2A.$$

М. Зиминъ (Варшава).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 64 (4 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ по радіусамъ r и r' круговъ, вписанныхъ въ треугольники, на которые искомый треугольникъ разбивается перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

М. Пучковскій (Умань).

---

*) См. № 236 „Вѣстника", „Новая геометрія треугольника", стр. 203, § 16.

№ 65 (4 сер.). Даны въ одной плоскости точка P и три прямыя L, L' и L'', первыя двѣ изъ которыхъ параллельны. Провести черезъ точку P прямую, пересѣкающую прямыя L, L' и L'' въ точкахъ A, B и C такъ, чтобы отношеніе AB къ PC равнялось данному отношенію $\frac{m}{n}$.

(Journal de Mathématiques élémentaires, publié par Longchamps et Lucien Léwy).

№ 66 (4 сер.). Найти цѣлое число x, зная, что сумма

$$1+2+3+\ldots+x$$

выражается по десятичной системѣ счисленія трехзначнымъ числомъ, три цыфры котораго одинаковы.

(Journal de Mathématiques élémentaires, publié par Vuibert).

№ 67 (4 сер.). Доказать, что многочленъ $x^{991}+x^{344}+1$ дѣлится безъ остатка на многочленъ x^2+x+1.

Н. С. (Одесса).

№ 68 (4 сер.). Три магнитныя массы одного знака α, β и γ, могущія перемѣщаться лишь по данной окружности, размѣщены въ положеніи равновѣсія соотвѣтственно въ точкахъ A, B и C этой окружности. Найти соотношенія между сторонами треугольника ABC и массами α, β и γ.

М. Зиминъ (Варшава).

№ 69 (4 сер.). Къ чашкамъ вѣсовъ привѣшены два куба; ребро одного равно 1 см., а другого 1 см. Въ безвоздушнымъ пространствѣ вѣсы находятся въ равновѣсіи. Въ воздухѣ же при температурѣ 15° равновѣсіе наступаетъ тогда, когда на большой кубъ наложимъ гирю въ 1 граммъ; опредѣлить давленіе этого воздуха, зная, что коэффиціентъ расширенія воздуха — $\alpha=0{,}004$, удѣльный вѣсъ $d=0{,}0013$.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

XIV. *Извѣстно, что корень квадратный изъ цѣлаго положительнаго числа A, которое не есть точный квадратъ, разлагается въ смѣшанную періодическую непрерывную дробь; періодъ этой дроби начинается непосредственно послѣ перваго частнаго, и послѣднее частное періода вдвое болѣе перваго частнаго непрерывной дроби.*

Пользуясь этимъ предложеніемъ, рѣшить слѣдующую задачу. Даны число N различныхъ дѣлителей цѣлаго числа m и число n неточныхъ квадратовъ, заключенныхъ между m^2 и $(m+1)^2$ и дающихъ при развертываніи корня квадратнаго изъ нихъ въ непрерывную дробь двѣ цыфры въ періодѣ. Найти наивысшую степень 2-хъ, на которую дѣлится m.

Пусть a—цѣлое число, заключенное между m^2 и $(m+1)^2$, и пусть $\sqrt{a}$ развертывается въ непрерывную дробь, дающую двѣ цыфры въ періодѣ. Тогда первое частное непрерывной дроби, въ которую развертывается $\sqrt{a}$, равно m, а потому, согласно съ теоремой, упомянутой въ условіи задачи,

$$\sqrt{a}=m+\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{2m+\ldots}}}} \qquad (1),$$

гдѣ v—нѣкоторое цѣлое число.

Изъ равенства (1) вытекаетъ:

$$\sqrt{a}-m=\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{2m+\ldots}}}}=\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{2m+(\sqrt{a}-m)}},$$

или

$$\sqrt{a}-m=\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{\sqrt{a}+m}}=\frac{\sqrt{a}+m}{v(\sqrt{a}+m)+1},$$

откуда

$$v(a-m^2)+\sqrt{a}-m=\sqrt{a}+m,$$

$$v(a-m^2)=2m \qquad (2).$$

Называя $a-m^2$ черезъ k, имѣемъ: $a=m^2+k$ и (см. 2)

$$vk=2m,$$

откуда слѣдуетъ, что число k есть дѣлитель числа $2m$. Наоборотъ, если k удовлетворяетъ этому условію, то число m^2+k заключается между m^2 и $(m+1)^2$, такъ какъ $(m+1)^2=m^2+2m+1$, а k, какъ дѣлитель $2m$ не болѣе $2m$; кромѣ того $\sqrt{m^2+k}$ при развертываніи въ непрерывную дробь даетъ въ этомъ случаѣ двѣ цыфры въ періодѣ, въ чемъ убѣждаемся, полагая во второй части равенства (1) $v=\frac{2m}{k}$ и находя предѣлъ второй части. Такимъ образомъ число n цѣлыхъ чиселъ, заключенныхъ между m^2 и $(m+1)^2$ и дающихъ при развертываніи корня квадратнаго изъ нихъ въ непрерывную дробь двѣ цыфры въ періодѣ, равно числу различныхъ дѣлителей числа $2m$. Пусть наивысшая степень 2-хъ, на которую дѣлится m, равна 2^x, гдѣ x нѣкоторое цѣлое положительное число, и пусть въ составъ числа m входятъ еще другія первоначальныя числа a, b, ... соотвѣтственно въ степеняхъ α, β, ... Тогда

$$m=2^x a^\alpha b^\beta \ldots,$$

$$2m=2^{x+1}a^\alpha b^\beta \ldots,$$

а потому

$$n=(x+2)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots \qquad (3),$$

число же N различныхъ дѣлителей числа m есть

$$N=(x+1)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots \qquad (4).$$

Дѣля почленно равенство (3) на равенство (4), имѣемъ:

$$\frac{x+2}{x+1}=\frac{n}{N},$$

откуда

$$x=\frac{2N-n}{n-N},$$

т. е. высшая степень 2-хъ, на которую дѣлится m, есть

$$2^{\frac{2N-n}{n-N}}.$$

Г. Григорьевъ (Казань).

№ 357 (3 сер.) *Треугольникъ ABC и описанную около него окружность пересѣчь прямою, параллельною BC, такъ, чтобы отрѣзки этой прямой, ограниченные окружностью и сторонами угла BAC, были въ данномъ отношеніи.*

Если въ треугольникѣ ABC стороны AB и AC равны, то задача возможна лишь тогда, когда данное отношеніе равно 1. Дѣйствительно, пусть хорда $B'C'$ будетъ параллельна основанію BC вписаннаго въ кругъ равнобедреннаго треугольника ABC; пусть AD—медіана треугольника; такъ какъ она будетъ и высотой, то прямая AD есть діаметръ. Пусть прямая $B'C'$ встрѣчаетъ прямыя AB, AD и AC соотвѣтственно въ точкахъ M, N и P. Вслѣдствіе параллельности прямыхъ $B'C'$ и BC діаметръ AD перпендикуляренъ къ хордѣ $B'C'$, и по той же причинѣ треугольникъ AMP оказывается равнобедреннымъ; поэтому

$$B'N=NC' \text{ и } MN=NP, \text{ а слѣдовательно } B'M=PC'.$$

Пусть теперь $AB \neq AC$, напримѣръ, $AB < AC$, и потому уголъ B треугольника ABC больше угла C. Предположимъ, что хорда $B'C'$ есть искомая; проведемъ BK такъ, чтобы уголъ KBC равнялся углу C. Пусть хорда $B'C'$ пересѣкаетъ прямыя BA, BK и CA соотвѣтственно въ точкахъ N, M и P. Разсуждая по предыдущему, найдемъ, что $B'M=PC'$. Пусть отношеніе $\frac{B'N}{PC'}$ равно $\frac{m}{n}$. Слѣдовательно

$$\frac{B'N}{PC'}=\frac{B'N}{B'M}=\frac{m}{n}.$$

Отсюда вытекаетъ построеніе (по методу подобія): черезъ произвольную точку M' прямой BK проведемъ прямую, параллельную основанію CB, до встрѣчи въ точкѣ N' съ прямой AB; на продолженіи прямой $M'N'$ построимъ точку B'' такъ, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{B''N'}{B''M'}=\frac{m}{n}.$$

Точка пересѣченія B' прямой BB'' съ окружностью есть оконечность искомой хорды.

Н. Соколовъ (Самара); *Н. С.* (Одесса).

№ 552 (3 сер.). *Два источника свѣта A и B одинаковой напряженности освѣщаютъ съ одной стороны весьма малую поверхность S. Оба источника можно перемѣщать по прямымъ SA и SB, одинаково наклоненнымъ къ поверхности S. Опредѣлить зависимость между $SA=x$ и $SB=y$ при условіи постояннаго освѣщенія поверхности S.*

Пусть f—сила освѣщенія, съ которой каждый изъ источниковъ свѣта можетъ освѣтить поверхность S перпендикулярными лучами, находясь отъ нея на единицѣ разстоянія. Пусть α—уголъ наклоненія прямыхъ SA и SB къ данной поверхности. Тогда освѣщеніе, сообщаемое поверхности S данными источниками свѣта выражается соотвѣтственно черезъ

$$\frac{f\sin\alpha}{x^2} \text{ и } \frac{f\sin\alpha}{y^2},$$

а общая сила освѣщенія есть

$$f\sin\alpha\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).$$

Для того, чтобы это выраженіе имѣло данное постоянное значеніе k, нужно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{f\sin\alpha}{k}=\text{const}.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону).

№ 626 (3 сер.). *Даны прямыя AB, AC и AD. Черезъ данную точку K провести окружность, встрѣчающую данныя прямыя въ трехъ точкахъ, образующихъ треугольникъ, подобный данному.*

Прежде всего построимъ треугольникъ mnp, подобный данному такъ, чтобы вершины его m, n и p лежали соотвѣтственно на прямыхъ AB, AC и AD. Предположимъ, что эта задача рѣшена; опишемъ около треугольника mnp окружность; пусть эта окружность пересѣкаетъ прямыя AB, AC и AD еще по разу соотвѣтственно въ точкахъ m', n' и p' *). Тогда углы $mn'n$ и mpn, какъ опирающіеся либо на одну и ту же дугу, либо на дуги, дополняющія одна другую до полной окружности, или равны, или въ суммѣ составляютъ $2d$; такимъ образомъ одинъ изъ угловъ, образуемыхъ прямыми mn' и AC равенъ углу p искомаго треугольника. Точно также докажемъ, что прямая mp' образуетъ съ прямой AD уголъ, равный углу n искомаго треугольника. Отсюда вытекаетъ построеніе: изъ произвольной точки m прямой AB проводимъ къ прямымъ AC и AD соотвѣтственно наклонныя mn' и mp' подъ углами, равными какимъ нибудь двумъ угламъ даннаго треугольника, а затѣмъ строимъ окружность, проходящую черезъ точки m, n' и p'; пусть эта окружность пересѣкаетъ второй разъ прямыя AC и AD соотвѣтственно въ точкахъ n и p. Тогда треугольникъ mnp есть искомый. Теперь легко закончить построеніе по методу подобія. Пусть K'—одна изъ точекъ пересѣченія прямой AK съ окружностью, описанной около треугольника mnp, и пусть O'—центръ окружности, описанной около этого треугольника. Соединимъ точки K' и O' прямой и черезъ точку K проведемъ прямую, параллельную прямой $K'O$ до пересѣченія съ прямой AO' въ точкѣ O; окружность описанная изъ этой точки, какъ изъ центра, радіусомъ OK, есть искомая.

Б. Мерцаловъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 641 (3 сер.). *Въ калориметръ съ 3 килограммами льда при 0^0 помѣщена катушка, на которой намотано 500 метровъ мѣдной проволоки вѣсомъ въ 2 килограмма. Сколько надо впустить въ калориметръ водяного пара при 100^0, чтобы окончательная температура была такая, при которой удлиненіе проволоки равно 8,5 см.?*

Коэффиціентъ расширенія мѣди $\alpha=0{,}000017$, удѣльная теплота ея $c=0{,}1$.

Найдемъ прежде всего температуру, которую надо сообщить 500 метрамъ проволоки, температура которой равна по предположенію 0^0 для того, чтобы эта проволока удлинилась на 8,5 см. $=0{,}085$ метр. Назвавъ искомую температуру черезъ t, имѣемъ:

$$500\alpha t=0{,}085,$$

откуда

$$t=\frac{0{,}085}{500\alpha}=\frac{0{,}085}{500.0{,}000017}=10.$$

Итакъ въ калориметръ надо впустить столько пара при 100^0, чтобы онъ своей теплотой расплавилъ 3 килограмма льда, нагрѣлъ воду, происшедшую отъ таянія льда, и проволоку до 10^0, а также самъ охладился до 10^0 (объемъ катушки и теплоемкость ея предполагаются незначительными). Пусть вѣсъ искомаго количества пара равняется x килограммамъ. Каждый килограммъ пара при 100^0 содержитъ $100+537$ большихъ калорій тепла, гдѣ 537—скрытая теплота испаренія воды. Охлаждаясь до 10^0, каждый килограммъ пара отдаетъ $100+537-10=627$ большихъ калорій; x же килограммовъ отдаютъ окружающей средѣ $627x$ большихъ калорій тепла. Часть этой теплоты, расплавляя 3 килограмма льда при 0^0 и нагрѣвая происшедшую отъ таянія воду до 10^0, сообщаетъ льду $3.(80+10)=270$ большихъ калорій, гдѣ 80—скры-

---

*) Двѣ изъ трехъ паръ точекъ m и m', n и n', p и p' могутъ и совпадать.

тая теплота плавленія; остальная часть этой теплоты идетъ на поднятіе температуры проволоки съ 0° до 10° въ количествѣ 2.0,1.10=2 большихъ калорій. Такимъ образомъ

$$627x=270+2=272,$$

откуда

$$x=0,43 \text{ килограммовъ}=430 \text{ граммовъ}.$$

П. Ламанскій (Петрозаводскъ); *Н. Ильинъ* (Энсо, Финляндія).

№ 652 (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$2x^4-8x^3-x^2+18x-5=0.$$

Полагая

$$x=z+1$$

приводимъ предложенное уравненіе къ виду:

$$2(z+1)^4-8(z+1)^3-(z+1)^2+18(z+1)-5=2z^4-13z^2+6=0.$$

Рѣшая это биквадратное уравненіе относительно z и прибавляя къ четыремъ корнямъ его по 1, находимъ четыре корня предложеннаго уравненія:

$$x_1=1+\sqrt{6},\ x_2=1-\sqrt{6},\ x_3=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ x_4=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

И. Кудинъ (Москва).

Списокъ лицъ, приславшихъ запоздавшія рѣшенія.

Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ позже напечатанія рѣшеній нижеуказанныхъ задачъ XXIV-го семестра на страницахъ журнала прислали правильныя рѣшенія тѣхъ же задачъ слѣдующія лица: № 583—*Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); № 584—*Б. Мерцаловъ* (Орелъ); № 601—*Ѳ. Дмитріевъ* (Новочеркасскъ), *П. Давидсонъ* (Житоміръ); № 602 — *Ѳ. Дмитріевъ* (Новочеркасскъ), *П. Полушкинъ* (с. Знаменка), *О. Е.* (Иваново-Вознесенскъ); № 603—*П. Давидсонъ* (Житоміръ), *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); № 605—*Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); № 621—*Б. Мерцаловъ* (Орелъ); № 628—*П. Давидсонъ* (Житоміръ), *В. Шлыгинъ* (Ст. Урюпинская); № 637—*Б. Мерцаловъ* (Орелъ); № 650—*Б. Мерцаловъ* (Орелъ).

ПОПРАВКИ. 1) Въ задачѣ **№ 54** (4 сер.) (см. № 298 „Вѣстника“) напечатано: гдѣ x=нѣкоторое цѣлое число, на 7; слѣдуетъ читать: гдѣ x—нѣкоторое цѣлое число. 2) Въ № 299 на стр. 258 стрк. 14 св. напечатано: „квадратовъ“; слѣд. читать: „координатъ“. 3) На стр. 208 на строкахъ 8, 12 и 14 напечатано:

$$t=\frac{AB}{\sqrt{2g.BD}},\ t=\sqrt{\frac{l}{g}},\ T=\sqrt{\frac{l}{g}}$$

должно быть:

$$t=\frac{2AB}{\sqrt{2g.BD}},\ t=2\sqrt{\frac{l}{g}},\ T=4\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ОТЪ РЕДАКЦІИ

Въ виду каникулярнаго времени № 301 выйдетъ 1-го августа.

Конецъ XXV семестра.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 5-го іюля 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
— И —
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

В. А. Циммермана.

Двадцать пятый семестръ.

№№. 289—300.

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.
1901.

Дозволено цензурою.—Одесса, 5-го Іюля 1901 г.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“

ЗА ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 289—300.

Статьи. *)

---

*) Отмѣченныя звѣздочкой статьи изданы отдѣльными брошюрами.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

АСТРОНОМИЧЕСКІЯ ИЗВѢСТІЯ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

ОПЫТЫ И ПРИБОРЫ.

НЕКРОЛОГИ.

РЕЦЕНЗІИ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

ЗАЯВЛЕНІЯ РЕДАКЦІИ.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Четвертой серіи.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Третьей серіи.

Четвертой серіи.

Списки лицъ, приславшихъ запоздавшія рѣшенія.

ЗАЯВЛЕНІЯ.

ПОПРАВКИ.

Обложка
ищется

Обложка
ищется