Обложка
ищется

Обложка
ищется

XXV Сем. № 10.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

31 Мая № 298. 1901

О причинѣ полярныхъ сіяній.

Svante Arrhenius'а.

Переводъ съ нѣмецкаго *Д. Шора*.

Когда Ньютонъ, въ 1686 году, обнародовалъ свои „Philosopiae naturalis principia mathematica", его современники, а впослѣдствіи и потомство, вполнѣ оцѣнили его систему тяготѣнія, такъ какъ она дала возможность описывать движеніе всѣхъ небесныхъ тѣлъ.

Весь матеріальный міръ проникнутъ по Ньютону внутреннимъ свойствомъ, въ силу котораго, какъ мельчайшія частички, такъ и величайшія небесныя тѣла стремятся падать другъ на друга съ силою обратно-пропорціональною квадрату ихъ разстоянія. Это свойство разсматривалось и разсматривается до сихъ поръ, какъ присущее матеріи, такъ что его примѣняютъ для измѣренія количества вещества, ибо это количество оказывается пропорціональнымъ силѣ притяженія.

Отталкиваніе между матеріальными частицами казалось немыслимымъ—точно такъ же, какъ невозможно представить себѣ отрицательное вещество. Позже въ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ нашли много примѣровъ отталкиванія. Эти силы отталкиванія принадлежатъ собственно не матеріи; коль скоро электрическіе заряды, токи или намагничиваніе устраняются, отталкиваніе исчезаетъ. Это заставило допускать существованіе электрическихъ и магнитныхъ свойствъ у матеріальныхъ частицъ всегда, когда между ними наблюдается отталкиваніе.

Большое количество фактовъ привело астрофизиковъ къ предположенію, что солнце представляетъ собою не только источникъ огромныхъ силъ притяженія вслѣдствіе его громадной массы, но что оно при нѣкоторыхъ условіяхъ можетъ отталкивать сосѣднія тѣла. Рѣзче всего это наблюдается на хвостахъ кометъ, для которыхъ *Olbers* нашелъ, что они отталкиваются отъ солнца съ силою, которая обратно пропорціональна разстоянію отъ этого свѣтила. Для объясненія этого явленія принимаютъ обыкновенно, что солнце и кометы сильно заряжены электричествомъ. Кромѣ того допускаютъ существованіе отталкивающихъ электрическихъ или магнитныхъ силъ ещед ля объясненія явленій солнечной короны, зодіакальнаго свѣта и т. д.

Но не всегда пользовались этимъ объясненіемъ. Первое объясненіе отталкивающихъ силъ солнца, которыя замѣчаются при образованіи хвостовъ кометъ, принадлежитъ *Кеплеру* [1]). *Кеплеръ* основывается на господствовавшей въ то время теоріи истеченія свѣта, по которой изъ солнца (или другого источника свѣта) извергаются съ громадною скоростью маленькія свѣтовыя тѣльца. Когда эти свѣтовыя тѣльца наталкиваются на легко подвижныя части въ атмосферѣ кометы, то они уступаютъ имъ часть своей скорости; одна изъ слагающихъ сообщеннаго этимъ частичкамъ движенія будетъ направлена отъ солнца, по продолженію радіуса послѣдняго. Вслѣдствіе этого хвосты кометъ получаютъ присущее имъ направленіе отъ солнца.

Отношеніе современныхъ астрономовъ-изслѣдователей къ этой гипотезѣ опредѣляется слѣдующими словами *Ньюкомба:* „Если бы свѣтъ представлялъ собою истеченіе матеріальныхъ частичекъ, какъ полагалъ *Ньютонъ*,то нельзя было бы отказать этому взгляду въ вѣроятности. Но, насколько намъ извѣстно, свѣтъ возникаетъ отъ колебанія эфирной среды, и нѣтъ возможности представить себѣ, какъ такія колебанія въ состояніи привести матерію въ движеніе“ [2]). Кажется, что шаткость этихъ послѣднихъ словъ, со времени опубликованія въ 1873 г. Максвелломъ его электромагнитной теоріи свѣта, ускользала до сихъ поръ отъ вниманія астрономовъ и астрофизиковъ [3]). Это одно изъ тѣхъ въ высшей степени странныхъ явленій, которыя встрѣчаются въ этой области на каждомъ шагу.

---

[1]) *Kepler:* Principia mathematica т. III, Prop. 41. Цитата по *De Mairan'y*, Traité physique et historique de l'Aurore boréal, 356, 2-е, éd. Paris. 1754.

[2]) *Newcomb*, Populäre Astronomie, нѣм. переводъ *Rud. Engelman'a* 445, Leipzig 1881 *).

*) Русскій переводъ, съ II нѣмецкаго изданія, Н. Дрентельна Спб. 1896.
Прим. пер.

[3]) Опытъ *Лебедева* соединить Максвеллеву теорію свѣта съ кометной теоріей *Бредихина*, очевидно, прошелъ незамѣченнымъ (Wied. Ann. **45**, 292, 1892). То обстоятельство, что онъ (согласно *Бредихину*) принимаетъ хвосты кометъ за газообразныя тѣла, можетъ быть, воспрепятствовало распространенію его воззрѣнія, такъ какъ газы въ столь тонкихъ слояхъ, какъ въ хвостахъ кометъ, не обладаютъ замѣтной способностью поглощенія и отраженія.

Другая странность — это отношеніе Ньютона къ этому вопросу.

Въ то самое время, когда онъ работалъ надъ своей теоріей тяготѣнія, онъ для объясненія свѣтовыхъ явленій принялъ издавна господствовавшую теорію истеченія. Поэтому было бы естественно, если бы онъ раздѣлялъ вышеупомянутое воззрѣніе *Кеплера*. Но *Ньютонъ* не хотѣлъ допустить такого дѣйствія свѣтовыхъ тѣлецъ и отвергалъ данное *Кеплеромъ* объясненіе формы хвостовъ кометъ. Вмѣсто этого онъ принималъ, что послѣдніе движутся въ направленіи противоположномъ дѣйствію солнечнаго тяготѣнія потому, что они находятся въ такихъ же условіяхъ, какъ горячій воздухъ и дымъ, которые подымаются изъ дымовой трубы; вещество кометныхъ хвостовъ такъ же точно окружено болѣе плотной средой.

Недавно *J. Rudberg* высказалъ мнѣніе, которое сильно напоминаетъ Ньютоново [4]). Мы считаемъ и здѣсь достаточнымъ передать взглядъ астрономовъ на это объясненіе въ формулировкѣ *Ньюкомба:* „Въ планетномъ пространствѣ не существуетъ, насколько намъ извѣстно, такой среды, которая могла бы вызвать процессъ, подобный поднятію хвостовъ кометъ, а слѣдовательно гипотеза *Ньютона* не можетъ быть принята во вниманіе“ [5]). Кометы, какъ напр. 1843 и 1882-го годовъ, проходили такъ близко отъ поверхности солнца (приблизительно на разстояніи 0,3—0,6 солнечнаго радіуса), что порядочную часть пути онѣ должны были пройти внутри солнечной короны. И несмотря на это, въ ихъ путяхъ не замѣтно было никакихъ возмущеній, что необходимо должно было бы произойти, будь на ихъ пути атмосфера, давленіе которой измѣрялось бы хоть одною милліонною долей миллиметра.

Взгляды *Кеплера* и *Ньютона* были, вообще говоря, скоро оставлены. Очень страннымъ является при этомъ, что единственный значительный противникъ теоріи истеченія въ 18-омъ столѣтіи, *Leonard Euler* [6]), придерживался воззрѣнія, что свѣтовыя волны, которыя онъ считалъ продольными колебаніями свѣтового эфира, оказываютъ на освѣщенныя тѣла давленіе. Но онъ не былъ въ состояніи удовлетворительно обосновать этотъ взгядъ, который подвергся строгой критикѣ со стороны *De Mairan'a* [7]) и былъ вскорѣ оставленъ. И несмотря на это, *Эйлеръ* былъ правъ; господствующая нынѣ Максвеллева теорія электромагнитной природы свѣтовыхъ колебаній дѣйствительно приводитъ къ заключенію, что волны свѣта производятъ давленіе на тѣла, на которыя

[4]) *J. R. Rudberg*, Grundzüge einer Kometentheorie. Schriften der physiogr. Ges. zu Lund. 1898.

[5]) *Newcomb*, l. c., 445.

[6]) *Euler:* Mémoires de l'Académie de Berlin. 1746, Vol. 2, 121 и 135 и сл.

[7]) *De Mairan*, l. c., 308, 341, 367 и сл.

ннѣ падаютъ. Кромѣ того, это слѣдствіе подтверждается примѣ-Пеніемъ механической теоріи теплоты къ лучистымъ явленіямъ. теоэтому не можетъ быть сомнѣнія въ томъ, что это требованіе сторіи совпадаетъ съ дѣйствительностью, хотя это дѣйствіе, вслѣд-тевіе его малости, не было доказано экспериментальнымъ пу-очмъ [8]). Максвеллева теорія имѣетъ то большое преимущество, нто можно точно вычислить величину искомаго давленія, если дзвѣстна сила лучеиспусканія, какъ это имѣетъ, напримѣръ, мѣсто (ля солнечныхъ лучей.

По этой теоріи „въ средѣ, въ которой распространяется электрическая или свѣтовая) волна, должно дѣйствовать давленіе, численно равное въ каждомъ мѣстѣ всей существующей тамъ энергіи, отнесенной къ единицѣ объема“ [9]). Такъ называемая постоянная солнца, т. е. количество энергіи, которое падаетъ въ минуту на квадратный центиметръ поверхности, перпендикулярной солнечнымъ лучамъ и отстоящей отъ солнца на такое-же разстояніе, какъ земля—эта постоянная достигаетъ приблизительно значенія 2,5 калорій. Слѣдовательно количество энергіи въ секунду $= 2{,}5:60 = 0{,}0417$ cal. $sec^{-1}\,cm^{-2} = 42600\,.\,0{,}0417 = 1775g$ — cm. $sec^{-1}cm^{-2}$. Далѣе, такъ какъ солнечные лучи распространяются со скоростью $3\,.\,10^{10}$ cm. $sec.^{-1}$, то количество энергіи въ кубическомъ центиментрѣ$=1775:3\,.\,10^{10}=592\,.\,10^{-10}$g.$cm.^{-2}$. Такъ какъ это давленіе существуетъ только на сторонѣ тѣла, обращенной къ солнцу, то это тѣло будетъ какъ бы отталкиваться солнечными лучами въ направленіи ихъ распространенія. Концентрированный свѣтъ, вѣроятно, производитъ еще болѣе сильное давленіе и очень вѣроятно, что лучи такого свѣта, когда они падаютъ на тонкую металлическую пластинку, подвѣшенную въ пустотѣ, способны вызвать въ ней замѣтный механическій эффектъ“ [10]).

---

[8]) Въ сообщеніи на физическомъ конгрессѣ въ Парижѣ (Августъ 1900 г.) *Лебедевъ* доказалъ справедливость этого требованія Максвеллевой теоріи опытнымъ путемъ. Онъ вывелъ также нѣкоторыя заключенія относительно хвостовъ кометъ, которыя до извѣстной мѣры сходны съ нижеизложенными.

[Прим. Ред. Объ этомъ изложено на стр. 160 въ № 295 „Вѣстника“].

[9]) *Maxwell*, A treatise of electricity and magnetisme. Art. 792. 1873. Цитировано по нѣмецкому переводу Weinstein'a. (Berlin. 1883).

[10]) *Maxwell*, l. c. Art. 733. Дѣйствительно, многіе физики старались доказать такимъ путемъ существованіе механическаго эффекта. Но, если этотъ опытъ и удается съ качественной стороны, онъ не имѣетъ рѣшающаго значенія, пока количественныя измѣренія въ различныхъ условіяхъ не дадутъ результатовъ согласныхъ съ теоріей. Дѣло состоитъ въ томъ, что отъ освѣщенія всегда нагрѣвается оставшійся въ пустотѣ воздухъ, а отъ этого возникаютъ движенія того же рода, какъ въ Круксовомъ радіометрѣ, дѣйствіе котораго объясняется нагрѣваніемъ воздуха.

Очень странно, что *Euler* (l. c. 121) приводитъ произведенный *Homberg'омъ* опытъ съ зажигательнымъ зеркаломъ, какъ подтвержденіе своего воззрѣнія: “Nous voyons en effet que les rayons du soleil ressemblés par le miroir ardent écartent et dissipent avec une grande force les plus petits corpuscules, qui sont placés au fayer“. (Дѣйствительно, мы видимъ, что солнечные лучи, собранные зажигательнымъ зеркаломъ, разгоняютъ съ боль-

Это отталкиванiе солнечными лучами освѣщенныхъ предметовъ вблизи земли въ высшей степени мало; но у самой поверхности солнца оно значительно больше, такъ что оно дѣйствительно въ состоянiи оказывать замѣтное дѣйствiе. Радiусъ земной орбиты равенъ 23440 земнымъ радiусамъ, или (такъ какъ радiусъ солнца въ 108 разъ больше земного) 215,7 солнечнымъ радiусамъ. Слѣдовательно, лучеиспусканiе на поверхности солнца въ 46518($=215{,}7^2$) разъ больше, чѣмъ вычисленное выше, а слѣдовательно лучи оказываютъ тамъ на освѣщенные предметы давленiе, равное $46518 . 59210^{-10} = 2{,}75 . 10^{-3}$g.cm.$^{-2}$.

Но на поверхности солнца вѣсъ нѣкоторой данной массы, напр. cm^3 воды, въ 27,47 разъ больше, чѣмъ на поверхности земли. Вслѣдствiе этого вѣсъ cm^3 воды на поверхности солнца въ 10^4 разъ больше, чѣмъ давленiе, производимое солнечными лучами на поверхность 1 cm^2. Поэтому, если бы на поверхности солнца находилось кубическое тѣло, ребро котораго было бы 1 cm., и которое было бы расположено такъ, что ребра были бы вертикальны и горизонтальны, то это тѣло потеряло бы, вслѣдствiе солнечнаго освѣщенiя, одну десятитысячную часть своего вѣса. При этомъ предполагается, что данное тѣло совершенно непрозрачно для солнечныхъ лучей; въ противномъ случаѣ необходимо изъ падающей части лучей вычесть пропущенные. Лучи же, отраженные въ направленiи прямо противоположномъ направленiю падающихъ, слѣдуетъ считать вдвойнѣ. Такъ какъ бóльшая часть твердыхъ и жидкихъ тѣлъ, даже и въ очень тонкихъ слояхъ, непрозрачны и отчасти отражаютъ солнечные лучи, то мы примемъ ради простоты, такъ какъ намъ интересно знать только порядокъ искомой величины, что дѣйствiе такъ велико, какъ если бы всѣ лучи поглощались освѣщенными тѣлами.

Представимъ себѣ далѣе кубъ названнаго выше вещества, который орiентированъ, какъ сказано выше, и ребро котораго равно 10^{-4} cm; его вѣсъ будетъ въ 10^{12} разъ меньше, чѣмъ въ описанномъ выше случаѣ, а давленiе, производимое освѣщенiемъ, зависитъ отъ поверхности и будетъ въ 10^8 разъ меньше. Слѣдовательно, это давленiе какъ разъ равно вѣсу тѣла, т. е. его кажущiйся вѣсъ равенъ нулю.

шою силой мельчайшiя частички, которыя расположены въ фокусѣ). *De Mairan* объясняетъ это движенiе дѣйствiемъ токовъ воздуха, возникающихъ отъ нагрѣванiя. Для большей достовѣрности онъ повторилъ эти опыты и варiировалъ ихъ разоообразными способами (l. c., 371). Наконецъ, вмѣстѣ съ знаменитымъ физикомъ *Du Fay'емъ*, онъ построилъ приборъ подобный радiометру; одно крыло радiометра освѣщалось солнечнымъ свѣтомъ, который собирался чечевицею въ 7—8 дюймовъ въ дiаметрѣ; движенiе, которое они получали, могло быть объяснено только движенiемъ воздуха, нагрѣтаго лучами. Кромѣ того, *De Mairan* предполагалъ помѣстить свой приборъ подъ колоколъ воздушнаго насоса; но онъ не выполнилъ этой интересной идеи, такъ какъ ему казалось труднымъ достигнуть необходимой степени пустоты, и такъ какъ онъ полагалъ, что въ воздухѣ заключается особая жидкость, способная проникать сквозь стѣнки колокола. Поэтому причина этого явленiя никогда не была однозначна.

По этимъ даннымъ не трудно вычислить, какъ великъ долженъ быть діаметръ капли, удѣльный вѣсъ которой = 1, чтобы сила притяженія со стороны солнца была бы какъ разъ равна отталкиванію послѣдняго, вслѣдствіе лучеиспусканія. Это значеніе діаметра оказывается равнымъ 1,5μ *). Капля вещества иного удѣльнаго вѣса должна обладать діаметромъ, уменьшеннымъ пропорціонально плотности для того, чтобы вѣсъ ея былъ равенъ отталкиванію солнечныхъ лучей. Такъ напримѣръ, для тѣла, удѣльный вѣсъ котораго = 5, діаметръ долженъ быть равенъ 0,3μ.

Если капельки еще меньше, то сила отталкиванія превышаетъ вѣсъ. Напримѣръ, если діаметръ какъ-разъ вдвое меньше критическаго значенія, то отталкивающая сила вдвое больше притягивающей; поэтому такія капельки какъ бы отталкиваются отъ солнца силою, равною ихъ вѣсу. Если размѣры капелекъ будутъ еще меньше, то результирующая сила будетъ, понятно, еще больше.

Эти разсужденія примѣнимы собственно только къ случаю неподвижныхъ тѣлъ. Очевидно, что дѣйствіе отталкиванія было бы равно нулю, если бы эти тѣльца удалялись отъ солнца со скоростью свѣта или съ еще большею скоростью. Если бы скорость частичекъ достигала значительной части скорости свѣта, то для того, чтобы получить силу отталкиванія, слѣдовало бы вычесть эту скорость. Но такъ какъ эта скорость совершенно ничтожна въ сравненіи со скоростью свѣта, то я не принимаю во вниманіе относящейся сюда поправки. Другія осложненія при вычисленіи являются въ томъ случаѣ, когда размѣры капельки значительно меньше, чѣмъ длина волны солнечныхъ лучей. Но не смотря на это, при капелькахъ не чрезмѣрно малыхъ, величина силы отталкиванія того же порядка, какъ силы, вычисленныя выше.

По движенію хвостовъ кометъ, въ особенности по ихъ кривизнѣ, можно вычислить величину отталкивающей силы солнца. Такъ, по вычисленію *Бредихина*, она превосходитъ силу тяжести въ 18,5, 3,2, 2,0 или 1,5 разъ [11]). Для существованія такой силы необходимо допустить существованіе капелекъ, діаметръ которыхъ какъ разъ во столько разъ (18,5, 3,2, 2,0 или 1,5) меньше критическаго значенія *). По всѣмъ даннымъ слѣдуетъ принять, что главная, и именно летучая часть кометъ состоитъ изъ углеводородовъ. Удѣльный вѣсъ этихъ тѣлъ нѣсколько меньше удѣльнаго

---

*) Буквой μ принято обозначать микронъ т. е. 0,001 долю миллиметра.

[11]) *Bredichin*, Revision des valeurs numériques de la force répulsive. Leipzig. Voss. 1885.

*) Т. е. той величины, при которой давленіе свѣтовой волны равно вѣсу тѣла, плотность котораго равна 1.

вѣса воды и колеблется около числа 0,8. Слѣдовательно, для образованія наблюдавшихся хвостовъ необходимо допустить существованіе капелекъ діаметра 0,1, 0,59, 0,94 или 1,25μ.

Нѣкоторые хвосты кометъ обращены даже къ солнцу, и изъ ихъ кривизны *Бредихинъ* вычислилъ, что отталкиваніе ихъ достигаетъ только 0,3 ихъ вѣса; а слѣдовательно діаметръ ихъ долженъ быть равенъ приблизительно 6μ.

Но наблюдались ли когда нибудь столь малыя твердыя или жидкія тѣла? Китайская тушь содержитъ зерна, которыхъ нельзя открыть даже при помощи микроскопа вслѣдствіе ихъ малости. Существуютъ даже организованныя существа, которыя не могли быть, по своей малости, открыты, хотя они обнаруживаютъ свое присутствіе другими явленіями. Такъ, напримѣръ, обстоитъ дѣло съ бацилами копытной чумы у рогатаго скота, съ бацилами одной болѣзни табака и т. п.; эти болѣзни обнаруживаютъ присутствіе особенныхъ микроорганизмовъ, которые ускользаютъ, вслѣдствіе своей малости (меньше 0,3μ), отъ наблюденія при помощи микроскопа. Если же встрѣчаются сложныя живыя существа такой величины, то навѣрное возможно существованіе еще меньшихъ неорганическихъ тѣлъ. Искусственно воспроизводились жидкія пленки, которыя обладали толщиною только въ 10—20$\mu\mu$, а въ послѣднее время даже только — 5$\mu\mu$ ($= 0,005\mu$). Не трудно представить себѣ, что могутъ существовать капельки столь же малаго діаметра. Послѣдній приблизительно въ 20 разъ меньше того, который надо принять, для объясненія образованія наименѣе искривленныхъ хвостовъ кометъ.

Когда комета приближается къ солнцу, то со стороны ея, обращенной къ послѣднему, наблюдается родъ изверженія матеріи, напоминающій развитіе паровъ при кипѣніи. Объясненіе причины этого явленія врядъ ли можетъ представить значительныя затрудненія. Затѣмъ эти пары конденсируются въ маленькія капли углеводорода, болѣе высокой точки кипѣнія (отдавая свой водородъ) или, какъ продуктъ наибольшей конденсаціи, даютъ сажу. Величина образовавшихся такимъ путемъ частичекъ или капелекъ будетъ зависѣть отъ способности конденсаціи извергаемаго газа, отъ силы солнечнаго свѣта и, можетъ быть, также отъ количества космической пыли, которая, въ мѣстѣ образованія хвоста, даетъ необходимыя для конденсаціи зерна. Такъ или иначе не трудно представить себѣ различныя условія, которыя могутъ влять на величину капель: и эти условія могутъ быть различны въ различныхъ мѣстахъ струи пара, такъ что образующіяся капельки могутъ быть различной величины. Самыя большія падаютъ понятно обратно на ядро кометы или, если онѣ образовались на бо́льшемъ отъ него разстояніи, образовываютъ хвосты обращенные къ солнцу. Болѣе мелкія частички производятъ хвосты, направленные отъ солнца. Въ томъ случаѣ, когда, вслѣдствіе извѣстныхъ условій, капельки нѣкоторой величины встрѣчаются чаще всего, то могутъ возникнуть хорошо извѣстные, рѣзко разграниченные хвосты различныхъ кривизнъ. Конечно могутъ также возникнуть нѣсколько хвостовъ, вообще говоря, одинаковой природы, вслѣдствіе того, что ядро кометы не однородно и изверженія происходятъ въ различныхъ мѣстахъ. Такъ напримѣръ, комета 1744-го года имѣла не менѣе пяти хвостовъ.

Съ такимъ воззрѣніемъ согласуется также тотъ фактъ, что кажущееся отталкиваніе хвоста не всегда остается обратно пропорціональнымъ квадрату разстоянія отъ солнца: во время движенія кометы физическія условія (въ особенности лучеиспусканіе солнца) измѣняются, а слѣдовательно мѣняется и величина капелекъ. Если бы послѣдняя оставалась постоянной, то обѣ дѣйствующія силы, тяжесть и солнечное отталкиваніе, пропорціональное лучеиспусканію, были бы обратно пропорціональны квадрату разстоянія отъ солнца, а слѣдовательно и результирующая сила строго подчинялась бы этому закону. Когда же величина капельки измѣняется, то правильность нарушается.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О числѣ рѣшеній

неопредѣленныхъ уравненій первой степени.

Преподавателя Кѣлецкой гимназіи А. Веребрюсова.

1. Неопредѣленное уравненіе первой степени приводится къ виду

$$ax+by+cz+\ldots+lv=m$$

гдѣ a, b, c, ... m цѣлыя числа. О числѣ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній этого уравненія можетъ быть рѣчь только въ томъ случаѣ, если всѣ коэффиціенты a, b, c, ... имѣютъ одинаковые знаки, которые можно считать положительными; въ противномъ случаѣ, число этихъ рѣшеній, если таковыя существуютъ, безконечно велико. Для того-же, чтобы *цѣлыя* рѣшенія существовали, необходимо и достаточно, чтобы всѣ коэффиціенты не имѣли общаго дѣлителя, на котораго не дѣлится m.

Необходимость этого условія очевидна, достаточность можетъ быть доказана индуктивнымъ методомъ; допустимъ, что теорема справедлива для уравненія съ n неизвѣстными. Докажемъ, что она справедлива и для уравненія съ $(n+1)$ неизвѣстными. Пусть коэффиціенты уравненія съ $(n+1)$ неизвѣстными

$$ax+by+\ldots+ku+lv=m$$

не имѣютъ общаго дѣлителя, не принадлежащаго числу m. Мы можемъ, слѣдовательно, принять, что эти коэффиціенты вовсе не имѣютъ общаго дѣлителя,—ибо, если бы таковой существовалъ, то мы могли бы сократить на него уравненіе, такъ какъ, согласно условію, свободный членъ дѣлился бы на него. Пусть теперь h общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b, $c \dots k$, т. е. первыхъ n коэффиціентовъ. Тогда h и l суть числа первыя между собой; если же мы положимъ

$$a=ha',\ b=hb', \dots k=hk',$$

то числа $a', b', \dots k'$ также не имѣютъ общаго множителя. Такъ какъ h и l суть числа первыя между собой, то можно найти цѣлыя значенія t_1 и v_1, удовлетворяющія соотношенію

$$ht_1+lv_1=m.$$

Съ другой стороны, согласно допущенію, сдѣланному относительно уравненія, содержащаго n неизвѣстныхъ, найдутся цѣлыя значенія $x_1 y_1 \dots u_1$, удовлетворяющія уравненію

$$a'x+b'y+\dots k'u=t_1,$$

такъ что
$$a'x_1+b'y_1+\dots k'u_1=t_1.$$

Слѣдовательно

$$h(a'x_1+b'y_1+\dots k'u_1)+lv_1=ht_1+lv_1=m$$

или иначе

$$ax_1+by+\dots ku_1+lv_1=m.$$

Иными словами числа $x_1, y_1, \dots v_1$ удовлетворяютъ нашему уравненію, содержащему $(n+1)$ неизвѣстныхъ.

Можно ограничиться разсмотрѣніемъ того случая, когда всѣ коэффиціенты, *кромѣ одного*, не имѣютъ общаго дѣлителя, на котораго не дѣлится m, потому что если есть такой общій дѣлитель, то уравненіе приводится къ другому, въ которомъ дѣлителя нѣтъ. Это нужно доказать.

Положимъ, что мы имѣемъ уравненіе вида

$$a\alpha x+b\alpha y+\dots k\alpha u+lv=m, \qquad (1)$$

гдѣ α цѣлое число, простое относительно l и m.

Составимъ неопредѣленное уравненіе

$$m+ls=\alpha t.$$

Такъ какъ коэффиціенты l и α суть числа первыя между собой, то это уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія, при чемъ s не можетъ быть нулемъ, такъ какъ m не дѣлится на α. Пусть σ наименьшее положительное значеніе s, а τ соотвѣтствующее значеніе t, такъ что

$$m+l\sigma=\alpha\tau, \qquad (2)$$

при чемъ
$$0<\sigma<\alpha.$$

Замѣнимъ теперь неизвѣстное v новымъ неизвѣстнымъ v', которое связано съ нимъ такимъ образомъ, что

$$v = \alpha v' - \sigma. \qquad (3)$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (1), мы представимъ его въ видѣ

$$a\alpha x + b\alpha y + \ldots k\alpha u + l\alpha v' = l\sigma + m$$

или на основаніи соотношенія (2)

$$ax + by + \ldots ku + lv' = \tau. \qquad (1')$$

Теперь легко обнаружить, что каждой системѣ положительныхъ значеній неизвѣстныхъ $x_1\, y_1 \ldots u_1\, v'_1$, удовлетворяющихъ уравненію (1′), соотвѣтствуетъ одна и только одна система положительныхъ значеній неизвѣстныхъ $x_1\, y_1 \ldots u_1,\, v'$, удовлетворяющихъ уравненію (1′) и обратно. Что цѣлому положительному значенію v' отвѣчаетъ цѣлое и положительное значеніе, это вытекаетъ непосредственно изъ соотношенія (3), такъ $v' > 1$, а $\sigma < \alpha$. Обратно, цѣлому положительному значенію v отвѣчаетъ цѣлое значеніе v'. Въ самомъ дѣлѣ, что v' положительно, видно непосредственно изъ соотношенія (3), что v имѣетъ цѣлое значеніе, если v удовлетворяетъ уравненію (1), вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній.

Изъ уравненія (1) видно, что

$$lv = m - \alpha q,$$

гдѣ q цѣлое число; на основаніи соотношенія (2) мы можемъ замѣнить m черезъ $\alpha\tau - l\sigma$ и тогда получимъ

$$l(v + \sigma) = \alpha(\tau - q).$$

Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе $l(v+\sigma)$ дѣлится на α; а такъ какъ l есть число простое относительно α, то сумма $v+\sigma$ дѣлится на α. Поэтому $v' = \dfrac{v+\sigma}{\alpha}$ есть число цѣлое.

Если коэффиціенты $a, b, c \ldots k$ имѣютъ общаго дѣлителя α, котораго не имѣетъ коэффиціентъ l, но который входитъ въ составъ свободнаго числа m, то отъ него можно освободить уравненіе, положивъ

$$v = \alpha v'.$$

При положительномъ m разсматриваютъ рѣшенія положительныя; при отрицательномъ m — рѣшенія отрицательныя. Къ числу положительныхъ рѣшеній обыкновенно не относятъ рѣшеній нулевыхъ, когда одно или нѣсколько неизвѣстныхъ имѣютъ значенія, равныя нулю, а прочія положительны. При отрицательномъ m мы будемъ однако относить такія рѣшенія къ отрицательнымъ.

2. Для обозначенія числа положительныхъ рѣшеній уравненія

$$ax + by + cz + \ldots + lu = m$$

мы будемъ употреблять знакъ $\left(\dfrac{m}{a.b.c \ldots l}\right)$.

Такимъ образомъ для двучленнаго уравненія $ax+by=m$ число рѣшеній будетъ изображаться символомъ:

$$\left(\frac{m}{a\,.\,b}\right).$$

Для одночленнаго уравненія $ax=m$ число цѣлыхъ рѣшеній будетъ $\left(\frac{m}{a}\right)$; откуда видно, что символъ $\left(\frac{m}{a}\right)$ долженъ быть принимаемъ за 0, если m не дѣлится на a и за 1, если дѣлится.

Чтобы построить формулу числа рѣшеній двучленнаго уравненія, положимъ, что оно рѣшено и нашли

$$ax+by=m \qquad a\gamma+b\beta=m$$

$$x=\gamma+bt \qquad y=\beta-at.$$

Если γ будетъ наибольшее положительное значеніе x, β будетъ наименьшее положительное значеніе y, такъ что всѣ рѣшенія будутъ

$$x=\gamma \quad \gamma-b \quad \gamma-2b \; .\;.\;. \; \gamma-(\mathrm{N}-1)b$$

$$y=\beta \quad \beta+a \quad \beta+2a \; .\;.\;. \; \beta+(\mathrm{N}-1)a,$$

гдѣ N число рѣшеній.

Назовемъ первое отрицательное значеніе x черезъ $-\alpha$, то есть

$$\gamma-\mathrm{N}b=-\alpha;$$

тогда

$$\mathrm{N}=\frac{\gamma+\alpha}{b} \qquad \gamma=\frac{m-b\beta}{a}$$

и потому

$$\mathrm{N}=\frac{a\gamma+a\alpha}{ab}=\frac{m-b\beta+a\alpha}{ab}.$$

Въ этомъ видѣ мы и будемъ употреблять формулу числа положительныхъ рѣшеній уравненія $ax+by=m$:

$$\left(\frac{m}{a\,.\,b}\right)=\frac{m-b\beta+a\alpha}{ab},$$

гдѣ α *и* β *наименьшія цѣлыя положительныя числа, такія, что* $m-b\beta$ *дѣлится на* a, *а частное* $\frac{m-b\beta}{a}$, *сложенное съ* α, *дѣлится на* b. Чтобы избѣжать нулевыхъ рѣшеній, не надо брать $\beta=0$, а также $\alpha=b$, потому что при $\beta=0$ первое рѣшеніе $(0, \beta)$ будетъ нулевое; а если $\alpha=b$, то $\gamma=(\mathrm{N}-1)b$ или $\gamma-(\mathrm{N}-1)b=0$, т. е. послѣднее рѣшеніе нулевое.

Итакъ въ формулѣ (1) надо брать β изъ ряда $1.2.3\,.\,.\,.\,a$, α изъ ряда $0.1.2.3\,.\,.\,.\,b-1$.

Можно взять и такъ:

$$\left(\frac{m}{a\,.\,b}\right)=\frac{m-a\beta+b\alpha}{ab}$$

гдѣ $\beta=1\,.\,2\,.\,3\ldots b$, $\alpha=0\,.\,1\,.\,2\ldots a-1$.

Примѣръ. Число рѣшенiй уравненiя $3x+5y=100$ равно

$$\left(\frac{100}{3\,.\,5}\right)=\frac{190-5\beta+3\alpha}{5\,.\,5}=\frac{30+\alpha}{5}=6,$$

гдѣ взято $\beta=2$ и $\alpha=0$, слѣд. 6 рѣшенiй, которыя сейчасъ и найдутся:

$$x=30\,.\,25\,.\,20\,.\,15\,.\,10\,.\,5$$

$$y=2\,.\,5\,.\,8\,.\,11\,.\,14\,.\,17.$$

Изъ этого правила легко вывести, что если m дѣлится на a или b, то число рѣшенiй будетъ меньше $\frac{m}{ab}$; такъ, въ этомъ примѣрѣ $\frac{m}{ab}=6\,\frac{2}{3}$, слѣд. число рѣшенiй 6. Если же m дѣлится на произведенiе ab, то число рѣшенiй есть $\frac{m}{ab}-1$.

3. Имѣя эту формулу, можно рѣшить задачу: найти всѣ числа m, для которыхъ число рѣшенiй уравненiя $ax+by=m$ будетъ равно данному числу N.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$\mathrm{N}=\frac{m-b\beta+a\alpha}{ab}$$

находимъ

$$m=ab\mathrm{N}+b\beta-a\alpha.$$

Примѣръ. Найдемъ значенiя m, для которыхъ уравненiе $3x+5y=m$ имѣемъ 8 рѣшенiй. Такъ какъ въ этомъ случаѣ β можетъ имѣть значенiя отъ 1 до 3, а α отъ 0 до 4, то произведенiя $b\beta$ и $a\alpha$ могутъ имѣть слѣдующiя значенiя:

$$b\beta=5,\ 10,\ 15$$

$$a\alpha=0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12.$$

Составляя всевозможныя разности, получимъ 15 чиселъ:

$$-7.\ -4.\ -2.\ -1.\ +1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 9.\ 10.\ 12.\ 15;$$

прибавивъ сюда по $8ab=120$, получимъ искомыя числа:

113. 116. 118. 119. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 129. 130. 132. 135.

4. Опредѣленiе числа рѣшенiй n членнаго уравненiя можно свести на опредѣленiе числа рѣшенiй $(n-1)$ членныхъ уравненiй. Пусть

$$a\alpha+by+\ldots+cz+lu=m,$$

Чтобы найти всѣ рѣшенія этого уравненія, найдемъ тѣ, въ которыхъ $u=1$, затѣмъ тѣ, въ которыхъ $u=2$ и т. д. пока не дойдемъ до наибольшей величины u, которая должна быть меньше $\frac{m}{l}$, слѣдовательно рѣшеніе уравненія (1) замѣнимъ рѣшеніемъ системы уравненій

$$\begin{array}{ll} ax+by+\ldots+kz=m-l & u=1 \\ ax+by+\ldots+kz=m-2l & u=2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ ax+by+\ldots+kz=m-pl=\omega & u=p, \end{array}$$

гдѣ ω положительное число, меньшее l. Число рѣшеній уравненія (1) равно будетъ суммѣ чиселъ рѣшеній всѣхъ уравненій т. е.

$$\left(\frac{m}{a.b...kl}\right)=\left(\frac{m-l}{ab...k}\right)+\left(\frac{m-2l}{ab...k}\right)+\left(\frac{m-3l}{ab...k}\right)+\ldots+\left(\frac{\omega}{ab...k}\right).$$

Подобно этому будетъ также

$$\left(\frac{m-kl}{ab...kl}\right)=\left(\frac{m-(k+1)l}{ab...k}\right)+\left(\frac{m-(k+2)l}{ab...k}\right)+\ldots+\left(\frac{\omega}{ab...k}\right),$$

отчего

$$\left(\frac{m}{ab...kl}\right)=\left(\frac{m-kl}{ab...kl}\right)+\left(\frac{m-l}{ab...k}\right)+\left(\frac{m-2l}{ab...k}\right)+\ldots+\left(\frac{m-kl}{ab...k}\right) \quad (3)$$

гдѣ k произвольно, но $m-kl$ должно быть положительно.

Такъ можно взять

$$\left(\frac{m}{abcd}\right)=\left(\frac{m-d}{abcd}\right)+\left(\frac{m-d}{abc}\right)=\left(\frac{m-2d}{abcd}\right)+\left(\frac{m-d}{abc}\right)+\left(\frac{m-2d}{abc}\right)=\ldots$$

По этой формулѣ можно уже опредѣлить число рѣшеній для трехчленныхъ уравненій. Напримѣръ для уравненія

$$3x+5y+7z=73$$

$$\left(\frac{73}{3.5.7}\right)=\left(\frac{66}{3.5}\right)+\left(\frac{59}{3.5}\right)+\left(\frac{52}{3.5}\right)+\left(\frac{45}{3.5}\right)+\left(\frac{38}{3.5}\right)+\left(\frac{31}{3.5}\right)+$$
$$+\left(\frac{24}{3.5}\right)+\left(\frac{16}{3.5}\right)+\left(\frac{10}{3.5}\right)+\left(\frac{3}{3.5}\right).$$

Опредѣляя каждый членъ по формулѣ (1), получимъ

$$\left(\frac{23}{3.5.7}\right)=4+4+3+2+3+2+1+1+0+0=20.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Примѣненіе кабелей

для телеграфированія и телефонированія.

Д-ра Ѳ. Кудреса *).

Вскорѣ послѣ того, какъ былъ проведенъ первый кабель черезъ Атлантическій океанъ (приблизительно 50 лѣтъ тому назадъ), В. Томсонъ указалъ, что вслѣдствіе большой емкости кабеля, для него необходимо долженъ существовать нѣкоторый предѣлъ скорости передачи телеграфныхъ знаковъ. Это предсказаніе оправдалось, такъ какъ, несмотря на замѣчательныя улучшенія, достигнутыя въ дѣлѣ телеграфированія на континентѣ, до послѣдняго времени не было возможно передать по атлантическому кабелю болѣе пяти импульсовъ въ секунду.

Но затрудненія, которыя до сихъ поръ встрѣчали всѣ попытки телефонированія на большихъ разстояніяхъ, были еще гораздо существеннѣе.

При передачѣ рѣчи по длинному кабелю сильно сказывается то неудобство, что тембръ звука значительно больше скрадывается при телефонированіи по кабелю, нежели по воздушному проводу.

При передачѣ электрическихъ волнъ по кабелямъ, онѣ претерпѣваютъ измѣненія, какъ по амплитудѣ, такъ и по фазѣ; эти измѣненія бываютъ различной интенсивности въ зависимости отъ высоты передаваемаго звука. Такимъ образомъ, съ одной стороны, отдѣльныя гармоническія звуковыя волны человѣческой рѣчи ослабляются не одинаково при передачѣ по кабелю, такъ какъ ослабленіе это возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ колебаній звуковой волны; съ другой стороны, вліяніе предвиженія фазъ сказывается въ томъ, что оно сглаживаетъ отчетливую раздѣльность непосредственно слѣдующихъ другъ за другомъ звуковъ: именно, высшія гармоническія колебанія (обертоны) новаго звука сливаются съ нижними обертонами предшествующаго звука.

Это замедленіе и поглощеніе звуковъ при передачѣ человѣческой рѣчи дѣлало до сихъ поръ совершенно невозможнымъ телефонированіе по кабелю на большихъ разстояніяхъ.

Въ настоящее время проф. университета въ Колумбіи *J. Pupin* сообщаетъ, что ему удалось послѣ многочисленныхъ опытовъ, произведенныхъ въ его лабораторіи получить при передачѣ электрической энергіи значительно большій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, нежели это достигалось до сихъ поръ. Этимъ устраняется самое большее затрудненіе, которое техники до сихъ поръ встрѣчали въ дѣлѣ телеграфированія и телефонированія по кабелямъ.

---

*) „Physikalische Zeitschrift“ 1901. № 29.

Въ своихъ опытахъ Pupin употребляетъ такъ называемый „неоднородный“ проводъ, но построенный имъ своеобразно.

Какъ извѣстно, при передачѣ электрической энергіи по проводамъ, распространеніе волнъ затрудняется вслѣдствіе возрастанія самоиндукціи. Для устранія этого неудобства англійскій физикъ Oliver Heaviside еще раньше предложилъ включать въ цѣпь самоиндукціонныя катушки. Но вслѣдствіе отсутствія опредѣленнаго плана въ произведенныхъ имъ опытахъ, они не привели ни къ какому результату.

Проф. Pupin помощью математическаго изслѣдованія обнаружилъ, что вредное вліяніе большой емкости кабеля, можетъ быть въ значительной мѣрѣ устранено путемъ включенія въ проводъ ряда самоиндукціонныхъ катушекъ, размѣщенныхъ на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Съ возрастаніемъ числа частей, на которыя мы дѣлимъ проводъ, полезное дѣйствіе увеличивается; но имѣется maximum, за которымъ дальнѣйшее включеніе катушекъ безполезно.

Если волны, подлежащія передачѣ, сложны, какъ напримѣръ при человѣческой рѣчи, то достаточно разсчитать наивыгоднѣйшія условія, соотвѣтствующія самымъ короткимъ волнамъ; тѣ-же условія для болѣе низкихъ тоновъ тогда выполняются сами собой.

Въ примѣрѣ, разобранномъ въ описаніи, сопровождающемъ ходатайство о привилегіи, наименьшая длина волны принята въ двѣ англійскія мили.

По разсчету Pupin'а, требуемыя условія наилучшимъ образомъ выполняются, если самоиндукціонныя катушки располагаются на разстояніяхъ, равныхъ $^1/_{16}$ части длины кратчайшей передаваемой волны. При упомянутомъ выше положеніи, на англійскую милю приходится восемь небольшихъ катушекъ Pupin'овой конструкціи.

Опыты, произведенные съ искусственнымъ кабелемъ, длина котораго соотвѣтствовала естественному кабелю въ 250 англійскихъ миль, подтвердили правильность разсчета Pupin'а. Въ упомянутомъ искусственномъ кабелѣ катушки располагались на разстояніи мили одна отъ другой.

Въ то время какъ безъ катушекъ Pupin'а кабель передавалъ только $\frac{1}{250000}$ часть энергіи, сообщаемой ему на станціи отправленія—при включеніи ихъ, на станціи назначенія получалось около $2^1/_2\%$ переданной энергіи.

Такимъ образомъ „неоднородный“ кабель передаетъ въ 6000 разъ больше тока, нежели однородный кабель.

Подобное различие обнаружилось и при телефонной передачѣ. Въ то время какъ при однородномъ кабелѣ на разстояніи 112 англійскихъ миль было уже невозможно различать рѣчь, при неоднородномъ кабелѣ голосъ передавался съ замѣчательной ясностью. Голосъ сохранялъ свою окраску и звучалъ явственно, точно говорили въ непосредственномъ сосѣдствѣ.

Американское общество „American Telephone and Telegraph Company" предприняло опыты описанной системы въ большихъ размѣрахъ, обязавшись въ случаѣ успѣха уплатить изобрѣтателю огромную сумму. Если эти опыты дѣйствительно приведутъ къ цѣли, то время, когда мы будемъ бесѣдовать съ заатлантическимъ континентомъ, быть можетъ уже не такъ далеко отъ насъ. Но и телеграфированію по кабелю методъ Pupin'а окажетъ важныя услуги.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Астрономическія Извѣстія.

Новая комета (1901 а). 25-го апрѣля (н. ст.) въ центральномъ пунктѣ всѣхъ астрономическихъ извѣстій — редакціи журнала „Astronomische Nachrichten" въ Килѣ—была получена телеграмма отъ астронома Gill'я изъ Капштата съ извѣстіемъ объ открытіи 23-го числа новой, очень свѣтлой кометы. На другой день послѣдовала другая телеграмма изъ Мельбурна, извѣщающая о независимомъ открытіи тамъ этой кометы. Обѣ телеграммы были переданы по телеграфу по всѣмъ обсерваторіямъ, и астрономы съ большимъ оживленіемъ приступили было къ наблюденіямъ обѣщавшей быть интересной кометы, но найти ее оказалось не такъ то легко; дѣло въ томъ, что она, для нашихъ сѣверныхъ обсерваторій по крайней мѣрѣ, восходила вмѣстѣ съ солнцемъ. Къ удивленію и съ обсерваторій, гдѣ она была открыта не приходило новыхъ извѣстій, такъ что совершенно нельзя было судить о направленіи движенія кометы. Только приблизительно черезъ недѣлю появились новыя наблюденія, указывающія, что комета находится уже по другую сторону отъ солнца, отъ котораго она постепенно удаляется все болѣе и болѣе, оставаясь тѣмъ не менѣе для нашихъ наблюденій недоступной. По Gill'ю въ кометѣ можно было различить дискъ, діаметромъ меньше 1 минуты, она имѣла хвостъ до 2 градусовъ, общая ея яркость равнялась 3-ьей величинѣ. По вычисленію Kreutz'а, орбита кометы опредѣляется слѣдующими элементами.

Время прохожденія черезъ перигелій = 1901 апрѣля 24.2614 ср. Берл. врем.

Долгота перигелія . . = 312°47'.2

Долгота узла восход. . = 109°57.2

Наклоненіе . . . . . . = 131°26.0.

Наименьшее разстояніе отъ солнца равнялось приблизительно $\frac{1}{4}$ разстоянія земли отъ солнца.

Комета быстро удаляется отъ земли и нѣтъ никакой надежды на интересныя наблюденія.

Свѣтящіяся ночныя облака. Обращаю вниманіе читателей на интересное загадочное явленіе, которое, быть можетъ, удастся кому-нибудь наблюдать въ іюнѣ или іюлѣ — яркія, серебристыя съ голубоватымъ отливомъ облака на сѣверномъ небосклонѣ ночью.

Впервые эти облака были замѣчены въ 1885 году, они появлялись нѣсколько лѣтъ подъ рядъ всегда въ одно и тоже время года. Въ концѣ восьмидесятыхъ годовъ ихъ интенсивность была очень велика, но потомъ отъ года къ году облака ослабѣвали и совсѣмъ даже пропали. Въ 1897 году они появились опять, въ Россіи они наблюдались и въ два предыдущихъ года: въ 1899 и 1900 г.г., при чемъ одно изъ появленій въ прошломъ году (въ ночь съ 7-го на 8-е іюля) было особенно интенсивно и красиво, со всѣми характерными подробностями. Уже въ 11 часовъ вечера они тянулись надъ горизонтомъ Юрьева широкой каймой съ причудливымъ волнистымъ строеніемъ съ сѣверо-востока на сѣверо-западъ почти на цѣлую окружность. Цѣлый рядъ столбовъ, изъ которыхъ каждый представлялъ какъ бы лѣстницу съ горизонтальными бѣлыми ступенями, выдѣлялся въ этой каймѣ. Вершины этихъ столбовъ окутаны голубоватымъ флеромъ, книзу господствуетъ желтый тонъ. Послѣ 12 часовъ по мѣрѣ поднятія солнца облака все болѣе и болѣе разростаются вверхъ, около часу лучи хватаютъ до яркой Капеллы, которая поднялась уже высоко, а затѣмъ они расползаются далеко на западъ и востокъ.

Это явленіе одновременно наблюдалось въ Юрьевѣ, Венденѣ, Петербургѣ, Новгородѣ и даже, повидимому, въ Саратовѣ. Очевидно, это совершенно иное, чѣмъ наши обыкновенныя облака, которыя не могутъ быть отождествлены даже съ двухъ пунктовъ, удаленныхъ другъ отъ друга верстъ на пять.

По прежнимъ наблюденіямъ высота свѣтящихся облаковъ надъ поверхностью земли достигала 82 километровъ и оставалась постоянной въ теченіе цѣлаго ряда лѣтъ.

Интересно было бы на этотъ пунктъ, такъ рѣзко выдѣляющій явленіе изъ круга обыкновенныхъ атмосферныхъ облаковъ, обратить вниманіе и теперь. Для этого нужно сфотографировать одновременно явленіе съ двухъ мѣстъ, отдаленныхъ одно отъ другого верстъ на 30 или 40. На пластинкѣ долженъ быть слѣдъ какой либо звѣзды, необходимо записать и время.

Фотографическая пластинка передастъ и структуру облаковъ.

Въ крайнемъ случаѣ можно, конечно, ограничиться болѣе или менѣе подробнымъ описаніемъ явленія, интересно просто даже отмѣтить фактъ появленія облаковъ.

Я просилъ бы всѣ подобныя свѣдѣнія присылать мнѣ по адресу юрьевской обсерваторіи. Интересующихся большими подробностями въ описаніи явленія и способахъ его наблюденія отсылаю къ своимъ статьямъ: 1) въ Извѣстіяхъ Русскаго Астрономическаго Общества 1896 г. Ноябрь. 2) въ Физико-Математическомъ Ежегодникѣ изданія кружка авторовъ „Сборника въ помощь самообразованію" № 1. 1900 г. 3) въ Трудахъ Саратовскаго Общества Естествоиспытателей т. II. вып. 4.

К. Покровскій.

Непосредственное опредѣленіе узловъ звучащей струны. V. v. *Lang* въ 28 тетради Physikalische Zeitscrift за текущій годъ описываетъ интересный опытъ, посредствомъ котораго ему удалось непосредственно ухомъ установить положеніе узловыхъ точекъ на звучащей струнѣ. Уже давно (въ 1878 г.) онъ показалъ возможность непосредственно находить узлы звучащаго воздушнаго стоба. Онъ употреблялъ для этой цѣли слуховую трубку, отъ которой шелъ каучуковый проводъ къ уху. Передвигая пріемное отвертіе слуховой трубки вдоль звучащей струны, онъ устанавливалъ положеніе узловъ по возрастающей въ нихъ силѣ звука. Онъ старался достигнуть того же для поперечныхъ колебаній звучащей струны. На обыкновенномъ монохордѣ это однако не удалось, потому что резонирующее дѣйствіе деревяннаго ящика сглаживало колебанія силы звука. Въ настоящее время, онъ однако достигъ въ этомъ дѣлѣ вполнѣ удовлетворительнаго результата. Онъ натянулъ струну въ оконной нишѣ, укрѣпивъ ее съ обѣихъ сторонъ въ стѣнѣ. Подъ струной былъ укрѣпленъ рельсъ по которому скользило у самой струны отверстіе слуховой трубки; отъ нея шла каучуковая трубка съ волнообразнымъ раздвоеніемъ, вѣтки которой вкладывались въ оба уха.

Помощникъ экспериментатора вызывалъ смычкомъ частичныя колебанія струны,—а онъ опредѣлялъ положеніе узловъ; при этомъ ему удавалось достигать большой точности.

Н. Р.

РЕЦЕНЗІИ.

Прямолинейная тригонометрія. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній съ собраніемъ задачъ. Составилъ *А. Воиновъ*, и. о. инспектора Корочанской гимназіи. 4-е изд. Москва. 1901 г. Ц. 70 к.

Учебникъ тригонометріи г. Воинова одобренъ Ученымъ Котетомъ Мин. Нар. Пр. и вышелъ уже 4-мъ изданіемъ; послѣднее обстоятельство указываетъ на то, что учебникъ вполнѣ удовлетворяетъ своему назначенію и одобряется г.г. преподавателями. Вслѣдствіе этого мы считаемъ лишнимъ распространяться о достоинствахъ книги и ограничимся лишь указаніемъ на то, что предметъ излагается въ ней хотя сжато, но понятно, доказательства просты и безыскуственны, задачи (болѣе 1000) хорошо подобраны, содержательны и нерѣдко оригинальны; почти на всѣ задачи въ концѣ книги даны отвѣты или указанія.

Гораздо полезнѣе, по нашему мнѣнію, остановиться на недостаткахъ книги; ибо это, быть можетъ, побудитъ автора серьезнѣе обдумать слабыя мѣста ея и сдѣлать исправленія въ новомъ изданіи.

Въ самомъ началѣ (§ 1) авторъ говоритъ, что геометрическій способъ рѣшенія треугольниковъ построеніемъ не точенъ, такъ какъ числовыя величины искомыхъ получаются чрезъ измѣреніе ихъ масштабомъ и транспортиромъ, которые не могутъ быть математически точны. Очевидно, здѣсь смѣшивается понятіе о геометріи, какъ наукѣ, съ ея практическими примѣненіями. Съ практической-же точки зрѣнія и результаты, полученные вычисленіемъ, въ большинствѣ случаевъ не точны, хотя они и могутъ быть найдены съ желаемою степенью точности. Но въ математикѣ неточнымъ рѣшеніемъ задачи можно назвать лишь то, которое или не полно, или не строго обосновано, — и наоборотъ, рѣшеніе вѣрно, а слѣдовательно и точно, если оно логично приводитъ отъ данныхъ къ искомымъ.

Въ § 3 встрѣчается равенство $2\pi r = 360^0$ и въ § 63 равенство $\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}\cdot$ Такія равенства логически невозможны (или, если угодно, не точны); если ихъ и можно допускать, то лишь условно и съ оговорками, а лучше совсѣмъ избѣгать.

При опредѣленіи тригонометрическихъ линій даннаго угла (§ 4) авторъ даетъ прямыя опредѣленія только для sin, tang и sec; cos'омъ-же, ctg'омъ и cosec'омъ того-же угла *называетъ* sin, tang и sec угла дополнительнаго до $90^0\cdot$ Такъ-какъ до этого и при этомъ не дано понятія объ углахъ отрицательныхъ, то, очевидно, что пока рѣчь идетъ только объ острыхъ углахъ, а, слѣдовательно, остается неизвѣстнымъ, какъ понимать cos, cotg и cosec тупаго угла, для котораго положительнаго дополнительнаго (до 90^0) угла не существуетъ. Понятіе объ углахъ отрицательныхъ и обобщеніе понятія о дополнительномъ углѣ для угла тупого дается только въ §§ 11 и 16; поэтому непослѣдовательно было говорить въ § 9 о тупомъ углѣ, имѣющемъ данный cos.

Кстати замѣтимъ, что при опредѣленіи sec авторъ впадаетъ въ противорѣчіе; онъ говоритъ: „линіей секанса называется *часть* конечнаго радіуса, считая отъ вершины угла до встрѣчи съ линіей тангенса“; отсюда слѣдуетъ, что линія sec'—са больше радіуса, будучи его частью.

Непослѣдовательно также и то, что въ § 29 дается понятіе объ „обратныхъ тригонометрическихъ (или круговыхъ) функціяхъ“, понятія-же *о тригонометрическихъ функціяхъ* нигдѣ раньше не дано, хотя выраженіе „тригонометрическія функціи“ встрѣчается въ § 9; только въ сноскѣ къ § 6 замѣчено, что тригонометрическія величины „иначе наз. тригонометрическими или круговыми функціями“; тутъ-же объясняется и математическое значеніе слова *функція*. Намъ кажется, что выясненію понятія о *тригонометрическихъ функціяхъ* слѣдовало-бы отвести видное мѣсто въ текстѣ учебника.

Во многихъ задачахъ, да и въ текстѣ (напр. въ 50), нерѣдко встрѣчаются тригонометрическія величины угловъ въ 30^0, 60^0, 45^0; между тѣмъ, во всей книгѣ ни слова не говорится ни объ этихъ углахъ, ни вообще объ углахъ, тригонометрическія величины которыхъ могутъ быть вычислены на основаніи теоріи правильныхъ многоугольниковъ. При изложеніи способа вычисленія тригонометрическихъ величинъ полезно было бы упомянуть о такихъ углахъ.

Наконецъ замѣтимъ, что въ учебникѣ г. Воинова попадаются неудачныя выраженія, которыя слѣдовало-бы исправить, напримѣръ „углы *обладаютъ формою* $\alpha+2k\pi$“ (§ 34), или „*беря* за скобки“ (§§ 50, 70).

Не мѣшаетъ также исправить и типографскіе недосмотры. На стр. 43 напечатано: $(\mathrm{tg}45^0 \pm \mathrm{tg}x)$ вм. $a(\mathrm{tg}45^0 \pm \mathrm{tg}x)$ и $a\sin 45 \pm x)$ вм. $a\sin(45^0 \pm x)$. На стр. 58: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin A}$ вм. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. На стр. 63: „противолежащей“ вм. „противолежащій“. На стр. 64: „удовлетворяетъ два тр-ка“ вмѣсто „удовлетворяютъ“. На стр. 80: $1-4\mathrm{ctg}x-1-4\frac{\mathrm{cs}x}{\sin x}=1=4.\frac{1}{0}=\infty$ вм. $1-4\mathrm{ctg}x=1-4\frac{\cos x}{\sin x}=1-4.\frac{1}{0}=\infty$. На стр. 81: „разностъ“ вм. „разность“. На стр. 89 въ отвѣтахъ № послѣдней задачи гл. III указанъ 123 вм. 124. Опечатка вкралась и въ задача № 150 (стр. 86), гдѣ дается сторона тр-ка $c=\cos^2 123^0 46'$. Ссылку въ § 2 на § 39, въ которомъ не имѣется ничего, относящагося къ § 2, также можно объяснить только опечаткой. Въ оглавленіи главы V, по недосмотру типографіи, дважды напечатано: „Зависимость между сторонами и углами треугольника“; слѣдовало поставить въ 1-мъ случаѣ „прямоугольнаго тр-ка“, а во второмъ „косоугольнаго тр-ка“.

Въ заключеніе выразимъ надежду, что г. Воиновъ не посѣтуетъ на насъ за эту, можетъ быть, нѣсколько одностороннюю рецензію на его учебникъ.

Дм. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 52 (4 сер.). Представить произведеніе

$$(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\ \ldots\ (x^2+a_n^2)$$

въ видѣ суммы квадратовъ двухъ цѣлыхъ многочленовъ.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 53 (4 сер.). Построить треугольникъ по высотѣ, разности отрѣзковъ, на которые дѣлится высотою основаніе и по углу, противолежащему основанію.

Н. С. (Одесса).

№ 54 (4 сер.). Найти остатокъ отъ дѣленія на 7 численнаго значенія выраженія

$$(x^9-3x^7-8x^3+24x+2),^{(x^3+5x+3)^2}$$

гдѣ x—нѣкоторое цѣлое число, на 7.

X.

№ 55 (4 сер.). Опредѣлить p и q такъ, чтобы дробь

$$\frac{3x^2+px+q}{x+1}$$

при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ могла принимать всѣ значенія между $+4$ и -3 и только эти значенія.

(Journal de Mathématiques élémentaires).

№ 56 (4 сер.). Дана окружность радіуса R и два взаимно перпендикулярныхъ діаметра Ox и Oy этого круга; на діаметрѣ Ox дана точка P на разстояніи d отъ центра. Провести къ данной окружности касательную, пересѣкающую прямыя Ox и Oy соотвѣтственно въ такихъ точкахъ A и B, чтобы уголъ PAB былъ прямой. (Рѣшить задачу приложеніемъ алгебры къ геометріи).

(Bacc. lettres-math., Clermont, novembre 1900).

№ 57 (4 сер.). Къ одному изъ концовъ желѣзнаго стержня требуется прикрѣпить платиновую пластинку одинаковаго сѣченія съ стержнемъ такой длины, чтобы полученный снарядъ плавалъ въ ртутной ваннѣ вертикально, причемъ верхній конецъ стержня долженъ возвышаться на 50 сантиметровъ надъ поверхностью ртути. Опредѣлить длину платиновой пластинки, зная, что длина желѣзнаго стержня равна одному метру.

Плотности желѣза, платины и ртути равны соотвѣтственно

7,8, 21,5 и 13,6.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

VI, VIII. *(VI) Доказать, что удвоенная сумма всевозможныхъ произведеній, содержащихъ данное нечетное число различныхъ множителей, взятыхъ изъ ряда цѣлыхъ чиселъ*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

которыя составляютъ ариѳметическую прогрессію, дѣлится безъ остатка на u_1+u_n.

(VIII) Пусть

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi \ (1)$$

рядъ всевозможныхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, взаимно простыхъ съ цѣлымъ числомъ M и не большихъ M. Показать, что удвоенная сумма всевозможныхъ произведеній по данному нечетному числу множителей, взятыхъ изъ ряда (1), дѣлится на M.

Теорема остается вѣрной, если вмѣсто ряда чиселъ (1) подставимъ рядъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ, не большихъ M не взаимно простыхъ съ M.

Предложенныя для доказательства положенія суть частные случаи слѣдующей общей теоремы: *если рядъ цѣлыхъ чиселъ*

$$a_1, a_2, \ldots a_n \qquad (A)$$

обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма членовъ этого ряда, равноотстоящихъ отъ крайнихъ членовъ, равна суммѣ крайнихъ, то удвоенная сумма всевозможныхъ произведеній по данному нечетному числу сомножителей, взятыхъ изъ ряда (A), дѣлится безъ остатка на сумму крайнихъ членовъ.

Для доказательства этой общей теоремы, составимъ многочленъ

$$f(x)=x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^ns_n=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \quad (2),$$

гдѣ s_1—есть сумма, s_n—произведеніе чиселъ ряда (A), s_k—сумма всевозможныхъ произведеній по k сомножителей, взятыхъ изъ ряда (A).

Согласно съ условіемъ теоремы $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots=m$ (3), гдѣ m—общая численная величина разсматриваемыхъ суммъ.

Тогда (см. (2), (3))

$$f(x+m)=(x+m-a_1)(x+m-a_2)\ldots(x+m-a_n)=(x+a_n)(x+a_{n-1})\ldots(x+a_1)=$$

$$=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\ldots+s_n.$$

Поэтому

$$f(x+m)-f(x)=[(x+m)^n-x^n]-s_1[(x+m)^{n-1}-x^{n-1}]+s_3[(x+m)^{n-2}-x^{n-2}]-\ldots=$$

$$=2s_1x^{n-1}+2s_3x^{n-3}+2s_5x^{n-5}+\ldots.$$

Раскрывая въ этомъ тожествѣ $(x+m)^n$, $(x+m)^{n-1}$, $(x+m)^{n-2}$, ... по формулѣ бинома Ньютона и дѣлая приведеніе, мы найдемъ, что коэфиціенты всѣхъ членовъ кратны $m=a_1+a_n$; слѣдовательно коэффиціенты $2s_1$, $2s_3$, $2s_5$ ..., которые какъ разъ должны получиться послѣ приведенія при различныхъ нечетныхъ степеняхъ x, кратны m, что и требовалось доказать.

Члены ариѳметической прогрессіи обладаютъ свойствомъ, выраженнымъ равенствами (3); рядъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ, взаимно простыхъ съ M и меньшихъ M, равно какъ и рядъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ, не большихъ M и *не* взаимно простыхъ съ M_1—обладаетъ тѣмъ же свойствомъ при условіи, что члены этихъ рядовъ расположены въ возрастающемъ порядкѣ. Это видно изъ того, что числа x и $M-x$ суть одновременно либо взаимно простыя, либо *не* взаимно простыя съ M. Кромѣ того, первый изъ этихъ рядовъ начинается числомъ 1, а оканчивается числомъ $M-1$; второй же рядъ имѣетъ въ началѣ число y,—гдѣ y—наименьшій первоначальный дѣлитель числа M (не считая 1),—а въ концѣ—число $M-y$. Такимъ образомъ сумма крайнихъ членовъ въ разсматриваемыхъ рядахъ равна M. Изъ всего вышесказаннаго вытекаетъ справедливость предложенныхъ для доказательства положеній.

Примѣчаніе. Одно изъ доказательствъ теоремы Вильсона основывается на разсмотрѣніи тождественнаго сравненія *)

$$(x-1)(x-2)\ .\ .\ .\ (x-p+1)-x^{p-1}+1\equiv 0 \ (\text{мод. } p.)$$

при p простомъ нечетномъ, откуда выводятъ:

$$s_1\equiv 0,\ s_2\equiv 0,\ s_3\equiv 0,\ .\ .\ .\ .\ ,\ s_{p-1}\equiv -1 \quad (\text{мод. } p.) \qquad (4),$$

гдѣ s_1—сумма, s_{p-1} — произведеніе, и вообще s_k — сумма произведеній по k изъ ряда чиселъ 1, 2, 3, . . . , $p-1$. На основаніи вышеизложеннаго можно вывести, что сравненія нечетнаго порядка въ ряду сравненій (4) имѣютъ мѣсто не только при простомъ нечетномъ p, но и вообще при *нечетномъ* p.

Е. Григорьевъ (Казань); *Н. С.* (Одесса).

№ 592 (3 сер.). *Найти безъ помощи таблицъ значеніе выраженія*

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot$$

1. Такъ какъ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, то

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\cdot$$

Такъ какъ $\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{9}\right)=-\cos\frac{2\pi}{9}$, то

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cdot$$

Такимъ образомъ предложенное выраженіе приводится къ виду

$$\frac{1}{8}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{\pi}{9}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{9}-2\cos^2\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\left[1-\left(4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}\right)\right]\cdot$$

По формулѣ косинуса тройной дуги

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos 3\,\frac{\pi}{9}=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}\cdot$$

Поэтому

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}\cdot$$

---

*) См. *J. Serret.* Cours d'Algèbre Supérieure. T. II. § 302. Стр. 46.

2. Если двучленное уравненіе

$$z^9 - 1 = 0 \qquad (1)$$

освободить отъ корня, равнаго 1, то оно приводится къ возвратному уравненію

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (2).$$

Корни этого уравненія выражаются формулой

$$z = \cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9} \qquad (3)$$

гдѣ k надо давать значенія отъ 1 до 8.

Полагая (см. (3))

$$z + \frac{1}{z} = x = \left(\cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9}\right) + \left(\cos\frac{2k\pi}{9} - i\sin\frac{2k\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{2k\pi}{9} \qquad (4)$$

и дѣля обѣ части уравненія (2) на z^4, приводимъ его къ виду

$$\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \qquad (5).$$

Но (см. 4)

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2,\quad z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x,\quad z^4 + \frac{1}{z^4} = x^4 - 4x^2 + 2.$$

На основаніи этихъ тожествъ уравненіе (5) пріиметъ видъ

$$x^4 + \ldots\ldots + 1 = 0 \qquad (6).$$

Корнями этого уравненія явятся различныя значенія (см. (4)) выраженія $2\cos\frac{2k\pi}{9}$, для полученія которыхъ достаточно дать k значенія 1, 2, 3, 4.

Слѣдовательно свободный членъ уравненія (6) есть произведеніе этихъ четырехъ значеній выраженія $2\cos\frac{2k\pi}{9}$.

Итакъ

$$1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}\cdot 2\cos\frac{4\pi}{9}\cdot 2\cos\frac{6\pi}{9}\cdot 2\cos\frac{8\pi}{9} = 16\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= 16\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}, \text{ откуда}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}\ ^{*)}.$$

П. Полушкинъ (Знаменка); *Н. С.* (Одесса).

---

*) См. „Lehrbuch der Algebra" v. H. Weber, § 137.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 28-го мая 1901 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.

Обложка
ищется

Обложка
ищется