Обложка
ищется

Обложка
ищется

XI Сем. № 7.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 247.

Къ теоріи машины Wimshurst'a *)

Машина Wimshurst'a съ двумя вращающимися кругами представляетъ собою, какъ извѣстно, ни что иное, какъ видоизмѣненную машину Гольца второго рода и принадлежитъ къ числу машинъ самозаряжающихся.

Причина самозаряженія подобныхъ машинъ точно не извѣстна; ее приписываютъ:

1, остаточному заряду въ кругахъ,

2, электризаціи круговъ чрезъ треніе о воздухъ,

3, электризаціи металлическихъ частей машинъ естественнымъ электричествомъ земли вслѣдствіе того, что потенціалъ въ различныхъ точкахъ земного электрическаго поля различенъ,

4, электризаціи чрезъ соприкосновеніе.

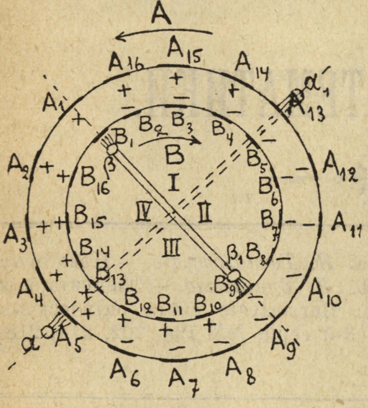
Какая изъ этихъ гипотезъ наиболѣе близка къ истинѣ, сказать трудно.

Такъ какъ невозможно отрицать существованія какой-нибудь изъ указанныхъ причинъ въ любомъ частномъ случаѣ, то намъ кажется наиболѣе вѣроятнымъ принять ихъ совмѣстное и одновременное существованіе.

Впрочемъ, какую бы изъ гипотезъ мы ни приняли, теорія дѣйствія электрофорной машины отъ этого не измѣнится. Постараемся поэтому дать теорію машины Wimshurst'a, не основываясь ни на одной изъ указанныхъ гипотезъ, чтобы не связывать себя, такъ сказать, ни-

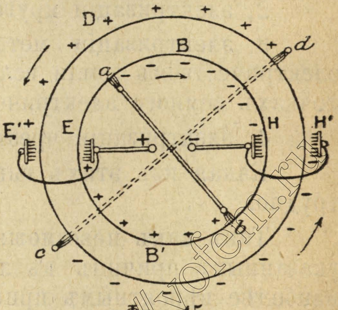
*) Настоящая замѣтка служила рефератомъ въ Математическомъ Отдѣленіи Новорос. Общ. Естеств. 28 февраля 1897 года.

какими гипотетическими допущеніями. Положимъ вмѣстѣ съ Pellissier*), что машина заряжается извнѣ при помощи какого-нибудь наэлектризованнаго (положительно, напр.) тѣла, помѣщеннаго противъ щеточки β (фиг. 44)**). Такъ какъ щеточка β касается наклейки B_1 и находится въ сообщеніи съ землею, то B_1 по индукціи зарядится отрицательно и, двигаясь вмѣстѣ съ дискомъ, придетъ въ B_5; въ это же время къ этому мѣсту подойдетъ наклейка A_9 второго круга, коснется щеточки α, и зарядится по индукціи (вслѣдствіе присутствія B_1 въ B_5) положительно; идя далѣе, B_1 придетъ въ B_8 и чрезъ вліяніе зарядитъ B_2, находящееся въ это время въ B_9 и въ соприкосновеніи, слѣдовательно, со щеточкой β_1, положительно; наконецъ, придя въ B_9, коснется кисточки β_1 и потеряетъ свой отрицательный зарядъ. Что же касается B_2, то оно при прохожденіи передъ кисточкой α зарядитъ отрицательно ту наклейку круга A, которая въ это время будетъ находиться въ соприкосновеніи съ этой кисточкой. Повторяя тождественныя разсужденія относительно остальныхъ наклеекъ, найдемъ то именно распредѣленіе электрическихъ массъ, которое изображено на фиг. 44, т. е. въ I и III квадрантахъ на кругахъ A и B находятся разноименныя электрическія массы, слѣдовательно онѣ должны притягиваться; на II и IV—одноименныя,—должны отталкиваться. Если теперь въ рединѣ квадрантовъ II и IV помѣстить гребенки, то на нихъ и будетъ собираться электричество: во II—отрицательное, въ IV—положительное.



Фиг. 44.

Къ совершенно тождественному результату мы пришли бы, исходя изъ любой изъ указанныхъ гипотезъ. Способомъ, указаннымъна фиг. 44, дѣйствительно распредѣляются электрическія массы на дискахъ машины Wimshurst'а до тѣхъ поръ, пока нѣтъ гребенокъ. Назначеніе гребенокъ, какъ извѣстно, состоитъ въ собираніи, если можно такъ выразиться, электричества съ дисковъ, поэтому на машинѣ съ двумя діаметральными кондукторами и двумя подковообразными гребенками электрическія массы должны распредѣлиться такъ, какъ указано на фиг. 45, т. е. секторы, находящіеся въ промежуткѣ Ea и Hb на одномъ изъ дисковъ и $E'c$ и $H'd$—на другомъ, должны находиться въ нейтральномъ состояніи.



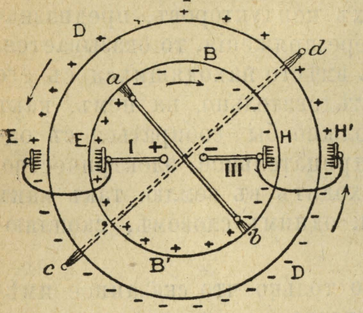
Фиг. 45.

---

*) John Gray, les machines électriques à influence, traduction de G. Pellissier, Appendice p. 205.

**) На схематическомъ рисункѣ (ф. 44) цилиндрическія сѣченія A и B по Bertin'у представляютъ собою два диска: B—передній, A—задній; $\alpha\alpha_1$ и $\beta\beta_1$ — соотвѣтственные діаметральные коннукторы.

На самомъ же дѣлѣ нейтральныхъ частей на дискѣ нѣтъ, а электрическія массы располагаются такъ, что въ частяхъ E*c* и H*d* (фиг. 46) I и III-го квадрантовъ находятся электрическія массы различныхъ знаковъ. Это явленіе не согласуется съ приведенной выше теоріей и подало поводъ Shaffers'у*) заняться детальнымъ изслѣдованіемъ машины Wimshurst'а. Распредѣленіе электричества, указанное на фиг. 46 и найденное опытнымъ путемъ, показываетъ, что гребенки дѣйствуютъ только на одинъ изъ круговъ, причемъ не нейтрализуютъ круга (DD′), на который дѣйствуютъ, а перезаряжаютъ его, въ то время, какъ кругъ BB′ перезаряжается діаметральнымъ кондукторомъ; такимъ образомъ часть гребенки противъ круга BB′ и діаметральный кондукторъ *cd* не участвуютъ въ дѣйствіи машины.



Фиг. 46.

Слѣдовательно, если удалить кажущіяся лишними части машины, то ея производительность не должна измѣниться.

Производительность машины при *n* оборотахъ въ минуту измѣрялась количествомъ (*e*) искръ въ банкѣ Lane, и оказалось, что 1) обыкновенная машина Wimshurst'а, 2) машина Wimshurst'а безъ гребенокъ передъ однимъ изъ круговъ и наконецъ, 3) — безъ гребенокъ передъ однимъ изъ круговъ и безъ діаметральнаго кондуктора передъ другимъ, даютъ тождественные результаты.

Вотъ приблизительныя значенія, полученныя Schaffers'омъ:

	n	*e*
первый типъ	43	132
	44	140
второй типъ	45	137
	43	131
	31	129
третій типъ	45	145
	47	151
	49	152
	47	147

Итакъ, новая теорія вполнѣ подтверждается опытомъ.

Изъ сказаннаго можно заключить, что либо одинъ изъ діаметральныхъ кондукторовъ машины, либо гребенки передъ однимъ изъ дисковъ не соотвѣтствуютъ своему назначенію.

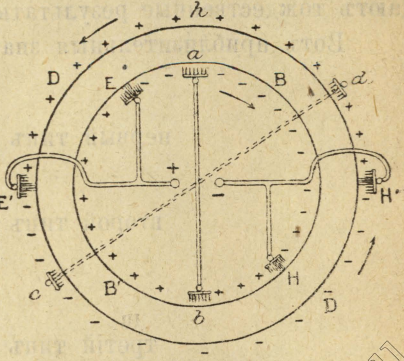
Ближайшія изслѣдованія показали, что гребенки должны не только собирать электричество съ дисковъ, но и перезаряжать ихъ. Опытъ

*) V. Schaffers, sur la théorie de la machine Wimshurst. Ann. de chim. et de phys., série VII, t. V p. 132.

показалъ, что въ обыкновенной машинѣ работаютъ только гребенки передъ однимъ изъ вращающихся дисковъ, передъ другимъ же не только не участвуютъ въ дѣлѣ собиранія электричества, но часто являются даже помѣхой. Что касается діаметральныхъ кондукторовъ, предназначенныхъ для обезпеченія невозможности перезаряженія, то оказывается, что одному изъ нихъ приходится работать вмѣсто находящихся съ его стороны гребенокъ: перезаряжать дискъ; слѣдовательно, на немъ, какъ на работающихъ половинахъ гребенокъ, должно бы собираться съ одной стороны положительное, съ другой—отрицательное электричество, которое отчасти нейтрализуется, отчасти уходитъ въ землю, такъ какъ діаметральные кондукторы не изолированы; однимъ словомъ, скопляющееся на немъ электричество пропадаетъ.

Впрочемъ, надо сдѣлать оговорку, что только что сказанное имѣетъ мѣсто въ громадномъ большинствѣ случаевъ, но не всегда; именно, когда соблюдена абсолютная симметрія въ расположеніи гребенокъ передъ тѣмъ и другимъ дискомъ, то возможно, что будутъ дѣйствовать всѣ гребенки совмѣстно, но самое ничтожное нарушеніе этой симметріи мгновенно доставляетъ перевѣсъ въ сторону гребенокъ передъ однимъ изъ круговъ, а передъ другимъ начинаетъ дѣйствовать діаметральный кондукторъ.

Разъ электричество дѣйствительно собирается на діаметральномъ кондукторѣ, лежащемъ со стороны недѣйствующихъ гребенокъ, то, раздѣливъ этотъ кондукторъ на двѣ части, изоливавъ ихъ и присоединяя къ гребенкамъ соотвѣтствующаго знака, можно ждать увеличенія производительности машины. Опытъ дѣйствительно вполнѣ подтвердилъ такое предположеніе: производительность машины значительно увеличилась, хотя машина потеряла одно изъ главныхъ своихъ достоинствъ: способность хорошо сохранять полюсы. Поэтому Schaffers, оставляя оба діаметральные кондуктора, разъединилъ гребенки, т. е. вмѣсто подковообразной онъ взялъ двѣ прямыхъ, помѣщенныхъ на нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга. Передѣланную такимъ образомъ машину схематически можно представить такъ:



Фиг. 47.

на концахъ горизонтальнаго діаметра одного изъ круговъ находятся двѣ гребенки E' и H' (фиг. 47); отъ этихъ гребенокъ на разстояніи 60° находятся двѣ другія гребенки E и H противъ другого круга. E и E' соединены съ однимъ электродомъ, H и H' — съ другимъ; на разстояніи же около 30° отъ каждой изъ гребенокъ находится кисточка (или гребенка) соотвѣтственнаго діаметральнаго кондуктора (*a*, *b*, *c*, *d*). Разстояніе между діаметральными кондукторами, такимъ образомъ, около 50°.

На каждой изъ гребенокъ соединенныхъ съ кондукторами, находятся кисточки, облегчающія перезаряженіе наклеекъ.

Собранная такимъ образомъ машина не перезаряжается, хорошо самозаряжается, а что касается увеличенія ея производительности, то изъ нижеслѣдующей таблицы мы видимъ, что производительность передѣланной машины вдвое больше сравнительно съ машиною Wimshurst'а обыкновеннаго типа.

	n	e
Обыкновенный типъ Wimshurst'а	25	90
	27,5	99
	27	101
новый типъ	25,5	180
	26	189
	25,5	186

Аналогичнымъ образомъ была передѣлана и машина Bonetti и оказалось, что и здѣсь, замѣнивъ подковообразныя гребенки четырьмя прямыми, помѣщенными совершенно такъ, какъ указано на фиг. 47, можно увеличить вдвое производительность и этой машины.

При помощи указанныхъ видоизмѣненій, какъ мы видѣли, производительность машины Wimshurst'а увеличилась вдвое, а способность машины легко самозаряжаться, хорошо сохранять полюсы и дѣйствовать почти во всякую погоду ставитъ эту машину въ настоящее время на ряду съ машинами Voss'а, Holtz'а и другихъ.

И. Точидловскій (Одесса).

Нѣкоторыя приложенія математической логики къ ариѳметикѣ.

1. Собраніе какихъ-нибудь элементовъ, отличающихся чѣмъ-либо другъ отъ друга, мы будемъ называть многообразіемъ или классомъ.

Въ частномъ случаѣ къ числу классовъ мы отнесемъ также классъ, вовсе лишенный элементовъ. Этотъ пустой классъ называется логическимъ нулемъ.

Различные классы мы будемъ обозначать различными буквами, а логическій нуль обозначимъ черезъ 0.

Числа, указывающія, сколько различныхъ элементовъ содержится въ классахъ A, B, C..., мы будемъ обозначать соотвѣтственно черезъ N(A), N(B), N(C)...

Въ частномъ случаѣ

$$N(0) = 0 \qquad (1)$$

Едва ли нужно прибавлять, что нуль имѣетъ не одинаковое значеніе въ обѣихъ частяхъ равенства (1).

2. Два класса называются равными, если всякій элементъ одного класса входитъ въ составъ другого, и наоборотъ.

Равенство классовъ обозначается также, какъ и равенство величинъ въ алгебрѣ —

$$A = B.$$

3. Логическою суммою двухъ классовъ называется классъ, заключающій въ себѣ всѣ элементы каждаго изъ данныхъ классовъ и только эти элементы.

Логическую сумму двухъ классовъ A и B обозначаютъ черезъ $A+B$.

4. Логическимъ произведеніемъ двухъ классовъ называется классъ, содержащій въ себѣ всѣ элементы, общіе обоимъ классамъ, и только эти элементы. Логическое произведеніе классовъ A и B обозначается черезъ AB. При нахожденіи логическаго произведенія возможны три случая.

1) Классы A и B не имѣютъ ни одного общаго элемента. Въ этомъ случаѣ

$$AB = 0,$$

т. е. произведеніе двухъ классовъ равно логическому нулю (напримѣръ, A—классъ окружностей, B—классъ треугольниковъ).

2) Часть класса A совпадаетъ съ частью класса B. Тогда

$$AB = C,$$

гдѣ C отлично отъ логическаго нуля. Напримѣръ, A — классъ всевозможныхъ ромбовъ, B — классъ всевозможныхъ прямоугольниковъ; тогда C—классъ квадратовъ.

3) Одинъ изъ классовъ, напримѣръ, A, цѣликомъ входитъ въ составъ другого класса; тогда

$$A.B = A.$$

Напримѣръ, A—всевозможные прямоугольники; B—всевозможные параллелограммы.

5. Логическое сложеніе и умноженіе обладаютъ, подобно ариѳметическимъ дѣйствіямъ того же имени, свойствами перемѣстительности и сочетательности; кромѣ того, логическое умноженіе обладаетъ свойствомъ распредѣлительности по отношенію къ логическому сложенію. Указанныя свойства логическихъ дѣйствій выражаются формулами:

$$A+B=B+A$$

$$AB=BA$$

$$A+(B+C)=A+B+C;\ A(BC)=ABC;\ A(B+C)=AB+BC$$

6. Вообще съ внѣшней стороны логическія формулы весьма похожи на алгебраическія. Но есть и разница между нами.

Такъ, согласно съ опредѣленіемъ логическихъ дѣйствій, въ случаѣ $A=B$ имѣемъ:

$$A+A=A \qquad (2)$$

$$AA=A \qquad (3)$$

7. При логическихъ вычисленіяхъ весьма важную роль играетъ классъ, содержащій въ себѣ всѣ разсматриваемые элементы. Классъ

этотъ обозначаютъ буквою T. Изъ самаго опредѣленія этого класса вытекаетъ равенство:

$$AT = A \tag{4}$$

8. Отрицательнымъ классомъ по отношенію къ классу A называется такой классъ, въ составъ котораго входятъ всѣ разсматриваемые элементы, не входящіе въ составъ класса A, и только эти элементы.

Назовемъ этотъ классъ словами „не A“ и условимся обозначать его малою буквою, соотвѣтствующею прописной буквѣ, которой обозначенъ классъ A, т. е. буквою a.

Тогда имѣемъ:

$$A + a = T \tag{5}$$

$$Aa = 0 \tag{6}$$

9. Примѣняя къ логическому нулю опредѣленія логическихъ дѣйствій, имѣемъ: *)

$$A + 0 = A \tag{7}$$

$$A0 = 0 \tag{8}$$

10. Разсмотримъ два класса A и B, для которыхъ имѣетъ мѣсто равенство

$$AB = 0.$$

т. е. два такихъ класса, которые не имѣютъ ни одного общаго элемента.

Для двухъ такихъ классовъ справедливо уравненіе

$$N(A + B) = N(A) + N(B), \tag{9}$$

показывающее, что число элементовъ въ логической суммѣ двухъ такихъ классовъ равно суммѣ чиселъ элементовъ въ каждомъ изъ классовъ.

Допустивши справедливость формулы (9) въ случаѣ двухъ классовъ, ее легко распространить, пользуясь методомъ индукціи, на произвольное число классовъ.

Дѣйствительно, пусть для всякихъ n классовъ

$$A_1, A_2 \ldots\ldots A_{n-1}, A_n,$$

никакіе два изъ которыхъ не имѣютъ ни одного общаго элемента, справедливо уравненіе

$$N(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_{n-1}) + N(A_n). \tag{10}$$

Тогда и для всякихъ $n + 1$ классовъ

$$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n, A_{n+1}, \tag{11}$$

*) Изложенныя здѣсь вкратцѣ основы математической логики знакомы уже читателямъ „Вѣстника“ по статьѣ профессора Слешинскаго „Логическая машина Джевонса“.

никакіе два изъ которыхъ не имѣютъ ни одного общаго элемента, имѣетъ мѣсто уравненіе

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=N(A_1)+N(A_2)+\ldots+N(A_n)+N(A_{n+1}) \quad (12)$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=N[(A_1+A_2+\ldots+A_n)+A_{n+1}]$$

и такъ какъ логическое произведеніе классовъ

$$A_1+A_2\ldots+A_n \text{ и } A_{n+1},$$

вообще равное

$$A_1A_{n+1}+A_2A_{n+1}+\ldots+A_nA_{n+1},$$

сводится къ нулю, благодаря сдѣланному нами предположенію, что никакая пара изъ классовъ (11) не имѣетъ ни одного общаго элемента, то, по формулѣ (9),

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=N(A_1+A_2+\ldots+A_n)+N(A_{n+1}),$$

или, подставляя

$$N(A_1+A_2\ldots+A_n)$$

въ это уравненіе изъ уравненія (10), получимъ:

$$N(A_1+A_2+\ldots+A_n+A_{n+1})=N(A_1)+N(A_2)+\ldots+N(A_n)+N(A_{n+1}) \quad (13)$$

11. Разсмотримъ теперь два какихъ-нибудь класса A и B, которые могутъ имѣть общіе элементы.

Такъ какъ (ур. 4)

$$A.T=A$$

и T (ур. 5) равно $B+b$, то

$$A=A(B+b),$$

откуда

$$A=AB+Ab \quad (14)$$

Точно также найдемъ

$$B=AB+Ba \quad (15)$$

Такъ какъ логическое произведеніе классовъ AB и Ab равно нулю, то къ суммѣ ихъ, равной (см. ур. 14) A, примѣнима формула (9). Поэтому

$$N(A)=N(AB)+N(Ab) \quad (16)$$

Точно также найдемъ, что

$$N(B)=N(AB)+N(Ba) \quad (17)$$

Складывая уравненія (16) и (17), находимъ:

$$N(A)+N(B)=2N(AB)+N(Ab)+N(Ba) \quad (18)$$

Сложимъ теперь два логическихъ равенства (14) и (15). Сумма ихъ даетъ:

$$A + B = AB + AB + Ab + Ba,$$

или, такъ какъ $AB + AB = AB$ (см. ур. 2), то

$$A + B = AB + Ab + Ba \qquad (19)$$

Такъ какъ произведенія классовъ AB, Ba и Ab по два сводятся къ нулю, то, согласно съ уравненіемъ (10),

$$N(A + B) = N(AB) + N(Ab) + N(Ba) \qquad (20)$$

Вычитая почленно ур-іе (20) изъ ур-ія (18), получимъ:

$$N(A) + N(B) - N(A + B) = N(AB),$$

откуда

$$N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB) \qquad (21)$$

12. Обратимся теперь къ суммѣ какихъ-либо трехъ классовъ A, B, C. Разсматривая ее, какъ сумму двухъ классовъ $A + B$ и C, согласно съ ур. (21), находимъ:

$$N(A + B + C) = N(A + B) + N(C) - N[(A + B) . C],$$

или

$$N(A + B + C) = N(A + B) + N(C) - N(AC + BC) \qquad (22)$$

Примѣняя снова формулу 21 къ классу $AC + BC$, получимъ:

$$N(AC+BC)=N(AC)+N(BC)-N[(AC)(BC)]=N(AC)+N(BC)-N(ABC).$$

Подставляя полученное выраженіе для $N(AC+BC)$ въ ур-іе 22, а также преобразуя $N(A + B)$ при помощи ур-ія 21, находимъ:

$$N(A+B+C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(BC)-N(CA)+N(ABC) \qquad (23).$$

13. Формулы 21 и 23 представляютъ собою частные случаи общей формулы:

$$N\left(\sum_{k=1}^{k=n} A_k\right)=\Sigma N({}_nP_1)-\Sigma N({}_nP_2)+\ldots+(-1)^{m-1}\Sigma N({}_nP_m)+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\Sigma N({}_nP_n) \qquad (24)$$

въ которой ${}_nP_m$ обозначаетъ произведеніе какихъ-либо m классовъ, взятыхъ среди классовъ $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}, A_n$, при указателѣ $m > 1$; что же касается ${}_nP_1$, то оно обозначаетъ просто какой-нибудь изъ n выше указанныхъ классовъ; знакъ Σ, стоящій впереди $N({}_nP_m)$, показываетъ, что надо взять сумму выраженій $N({}_nP_m)$ при всевозможныхъ ${}_nP_m$, какія только можно составить; при послѣднемъ членѣ — , $(-1)^{n-1}\Sigma N({}_nP_n)$, знакъ Σ стоитъ лишь для симметріи, а можно было бы написать и просто $(-1)^{n-1}N({}_nP_n)$, такъ какъ возможно составить лишь одно выраженіе ${}_nP_n$, равное $A_1A_2 \ldots A_n$.

Чтобы доказать справедливость формулы (24) при какомъ угодно n, достаточно прибѣгнуть къ методу индукціи, т. е. показать, что если формула эта имѣетъ мѣсто для n классовъ, то она справедлива и для $n + 1$ классовъ.

Для этого возьмемъ сумму какихъ либо $n+1$ классовъ

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1}$$

и, представивъ ее въ видѣ суммы двухъ классовъ

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k \text{ и } A_{n+1},$$

примѣнимъ къ ней формулу (21). Тогда получимъ:

$$N\left(\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k\right) = N[(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) + A_{n+1}] =$$

$$= N\left(\sum_{k=1}^{k=n} A_k\right) + N(A_{n+1}) - N[(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)A_{n+1}] =$$

$$= N\left(\sum_{k=1}^{k=n} A_k\right) + N(A_{n+1}) - N(A_1 A_{n+1} + A_2 A_{n+1} + \ldots + A_n A_{n+1}) \quad (25)$$

Выраженіе

$$A_1 A_{n+1} + A_2 A_{n+1} + \ldots + A_n A_{n+1}$$

представляетъ собою сумму n классовъ, а потому къ нему, по предположенію, примѣнима формула (21). Поэтому.

$$N(A_1 A_{n+1} + A_2 A_{n+1} + \ldots + A_n A_{n+1}) = \Sigma N({}_nQ_1) - \Sigma N({}_nQ_2) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{m-2} \Sigma N({}_nQ_{m-1}) + \ldots + (-1)^{n-1} \Sigma N({}_nQ_n) \quad (26)$$

Въ этомъ уравненіи ${}_nQ_1$ обозначаетъ просто одинъ изъ классовъ

$$A_1 A_{n+1},\ A_2 A_{n+1}, \ldots A_n A_{n+1}, \qquad (27)$$

всѣ же остальныя ${}_nQ_m$, при любомъ $m > 1$, означаютъ всевозможныя произведенія изъ классовъ (27) по m классовъ.

Знакъ Σ имѣетъ выше указанное значеніе.

Остановимся подробнѣе на составѣ какого-нибудь изъ произведеній ${}_nQ_m$.

Произведеніе ${}_nQ_m$ имѣетъ вообще видъ

$$(A_{l_1} A_{n+1})(A_{l_2} A_{n+1})(A_{l_3} A_{n+1}) \ldots (A_{l_m} A_{n+1}), \qquad (28)$$

гдѣ указатели $l_1, l_2 \ldots l_m$ представляютъ собою какихъ-либо m чиселъ изъ ряда $1, 2, \ldots n-1, n$.

Выраженіе (28), пользуясь свойствами сочетательности и перемѣстительности логическаго умноженія, можно представить въ видѣ

$$A_{n+1} \cdot A_{n+1} \ldots A_{n+1}\ A_{l_1} A_{l_2} \ldots A_{l_m},$$

или же (ур-іе 3) въ видѣ

$${}_nQ_m = A_{n+1} \cdot A_{l_1} A_{l_2} \ldots A_{l_m} = A_{n+1} \cdot {}_nP_m,$$

гдѣ ${}_nP_m$ имѣетъ такое же значеніе, какъ и въ ур-іи (24).

Наоборотъ, логическое произведеніе A_{n+1} на какую-нибудь изъ группъ ${}_nP_m$ представляетъ собою одну изъ группъ ${}_nQ_m$, такъ какъ это произведеніе можно преобразовать къ виду

$$A_{n+1}A_{l_1} \,.\, A_{n+1}A_{l_2} \ldots A_{n+1}A_{l_m},$$

гдѣ

$$l_1, l_2 \ldots l_m$$

суть какія-либо m чиселъ, взятыхъ въ ряду

$$1, 2 \ldots n-1, n.$$

Такимъ образомъ совокупность всѣхъ произведеній ${}_nQ_m$ можетъ быть тожественно замѣнена совокупностью всевозможныхъ произведеній вида

$$A_{n+1} \,.\, {}_nP_m,$$

а потому*)

$$\Sigma N({}_nQ_m) = \Sigma N(A_{n+1\,n}P_m) \tag{29}$$

Замѣняя каждый членъ формулы 26 на основаніи ур-ія 29, внеся полученное при этомъ значеніе $N(A_1A_{n+1} + A_2A_{n+1} + \ldots + A_n A_{n+1})$ въ ур-іе 25 и подставляя въ это же ур-іе 25

$$N\sum_{k=1}^{k=n} A_k$$

изъ уравненія 24, получимъ:

$$N\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k = \tag{30}$$

$$= \Sigma N({}_nP_1) - \Sigma N({}_nP_2) + \ldots + (-1)^{m-1}\Sigma N({}_nP_m) + \ldots + (-1)^{n-1}\Sigma N({}_nP_n) +$$

$$+ N(A_{n+1}) - \Sigma N(A_{n+1\,n}P_1) + \ldots + (-1)^{m-1}\Sigma N(A_{n+1\,n}P_{m-1}) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\Sigma N(A_{n+1\,n}P_{n-1}) + (-1)^n\Sigma N(A_{n+1\,n}P_n).$$

Замѣчая, что совокупность всевозможныхъ логическихъ произведеній вида ${}_nP_m$ и вида $A_{n+1}\ {}_nP_{m-1}$ даетъ, по извѣстной теоремѣ изъ теоріи соединеній, всевозможныя произведенія изъ $n+1$ классовъ

$$A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}, A_n, A_{n+1}$$

по m классовъ, и обозначая такія произведенія черезъ ${}_{n+1}P_m$, мы можемъ сумму выраженій

$$(-1)^{m-1}\Sigma N({}_nP_m) \text{ и } (-1)^{m-1}\Sigma N(A_{n+1\,n}P_{m-1})$$

замѣнить однимъ выраженіемъ

$$(-1)^{m-1}\,\Sigma N({}_{n+1}P_m).$$

---

*) Формула 29, выведенная для $m > 1$, остается вѣрною и при $m = 1$, такъ какъ ${}_nQ_1 = A_{n+1} \,.\, A_l$, гдѣ l цѣлое число, равною одному изъ чиселъ $1, 2 \ldots n$; т. е. ${}_nQ_1 = A_{n+1} \,.\, {}_nP_1$.

Тогда уравненіе (30) принимаетъ видъ

$$N\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k = \Sigma N({}_{n+1}P_1) - \Sigma N({}_{n+1}P_2) + \ldots + (-1)^{m-1}\,\Sigma N({}_{n+1}P_m) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{(n+1)-1}\,\Sigma N({}_{n+1}P_{n+1}).$$

Это уравненіе можетъ быть получено изъ уравненія 24 замѣною n на $n+1$, что и доказываетъ справедливость ур-ія (24) при какомъ угодно цѣломъ положительномъ n.

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

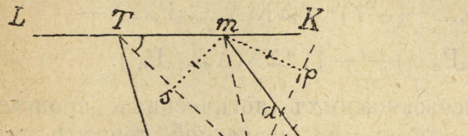
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника“).

(*Продолженіе* *).

VI. Діаметры.

§ 52. **Теорема.** Произвольная касательная отсѣкаетъ отъ двухъ параллельныхъ касательныхъ отрѣзки, произведеніе которыхъ постоянно (отрѣзки отсчитываются отъ точекъ прикосновенія); отношеніе тѣхъ же отрѣзковъ равно отношенію, въ которомъ отрѣзокъ произвольной касательной между двумя параллельными касательными дѣлится точкою прикосновенія.



Фиг. 48.

Пусть LK и L'K'—двѣ параллельныя касательныя, точки прикосновенія которыхъ суть соотвѣтственно T и T'; пусть произвольная третья касательная, точку прикосновенія которой обозначимъ черезъ a, отсѣкаетъ отъ параллельныхъ касательныхъ отрѣзки Tm и $T'm'$ (черт. 48). Соединимъ одинъ изъ фокусовъ F съ точками T, m, a, T' и m'. Сумма девяти угловъ трехъ треугольниковъ $T'Fm'$, $m'Fm$ и mFT равна шести прямымъ. Но вслѣдствіе параллельности прямыхъ Tm и $T'm'$ имѣемъ:

$$\angle TmF + \angle Fmm' + \angle Fm'm + \angle Fm'T' = \angle Tmm' + \angle mm'T' = 2d.$$

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 239, 240, 242, 243, 244, 245 и 246.

Поэтому сумма оставшихся пяти угловъ изъ указанныхъ выше девяти даетъ:

$$\angle m\mathrm{TF} + \angle \mathrm{TF}m + \angle m\mathrm{F}m' + \angle m'\mathrm{FT}' + \angle m'\mathrm{T}'\mathrm{F} = 4d,$$

или

$$(\angle m\mathrm{TF} + \angle m'\mathrm{T}'\mathrm{F}) + (\angle \mathrm{TF}m + \angle m\mathrm{F}a) + (\angle a\mathrm{F}m' + \angle m'\mathrm{FT}') = 4d.$$

Такъ какъ (§ 44, слѣд.) $\angle m\mathrm{TF} = \angle m'\mathrm{T}'\mathrm{F}$, и, кромѣ того, (§ 38) углы $\mathrm{TF}m$ и $m'\mathrm{FT}'$ равны соотвѣтственно угламъ $m\mathrm{F}a$ и $a\mathrm{F}m'$, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$2\angle m\mathrm{TF} + 2\angle \mathrm{TF}m + 2\angle m'\mathrm{FT}' = 4d,$$

откуда

$$\angle m\mathrm{TF} + \angle \mathrm{TF}m + \angle m'\mathrm{FT}' = 2d;$$

слѣдовательно, уголъ $m'\mathrm{FT}'$ равенъ третьему углу треугольника $m\mathrm{TF}$— углу $\mathrm{F}m\mathrm{T}$. Итакь въ треугольникахъ $\mathrm{T}m\mathrm{F}$ и $\mathrm{T}'\mathrm{F}m'$ углы $m\mathrm{TF}$ и $\mathrm{F}m\mathrm{T}$ равны соотвѣтственно угламъ $m'\mathrm{T}'\mathrm{F}$ и $m'\mathrm{FT}'$, и потому изъ подобія этихъ треугольниковъ имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{T}m}{\mathrm{T}'\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{TF}}{\mathrm{T}'m'},$$

откуда

$$\mathrm{T}m\,.\,\mathrm{T}'m' = \mathrm{TF}\,.\,\mathrm{T}'\mathrm{F}, \qquad (31)$$

величина же $\mathrm{TF}\,.\,\mathrm{T}'\mathrm{F}$ остается неизмѣнной при замѣнѣ одной произвольной касательной другою.

Перейдемъ ко второй части теоремы. Опустивъ перпендикуляры ms и $m's'$ соотвѣтственно на прямыя FT и FT', а также перпендикуляры mp и $m'p'$ на одну и ту же прямую $\mathrm{F}a$, получимъ—принимая во вниманіе, что

$$\angle m\mathrm{TF} = \angle m'\mathrm{T}'\mathrm{F} \text{ и } \angle map = \angle m'ap' —$$

двѣ пары подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ:

$$m\mathrm{TS} \text{ и } m'\mathrm{T}'\mathrm{S}',\ map \text{ и } m'ap'.$$

Изъ ихъ подобія находимъ:

$$\frac{\mathrm{T}m}{\mathrm{T}'m'} = \frac{ms}{m's'} \text{ и } \frac{ma}{m'a} = \frac{mp}{m'p'},$$

а потому,—принимая во вниманіе, что точки m и m' лежатъ соотвѣтственно на биссекторахъ (§ 38) угловъ $\mathrm{TF}a$ и $\mathrm{T}'\mathrm{F}a$, откуда вытекаютъ равенства:

$$ms = mp;\ m's' = m'p', —$$

$$\frac{\mathrm{T}m}{\mathrm{T}'m'} = \frac{ma}{m'a} \qquad (32)$$

§ 53. **Теорема.** Прямая $m'm$, соединяющая концы m и m' отрѣзковъ $\mathrm{T}m$ и $\mathrm{T}'m'$, отложенныхъ на двухъ параллельныхъ касательныхъ отъ ихъ точекъ прикосновенія T и T′ въ одномъ направленіи и удовлетворяющихъ уравненію (31)

$$Tm \, . \, T'm' = TF \, . \, T'F,$$

касается эллипса.

Предположимъ, что прямая mm' (черт. 00) не касается эллипса; такъ какъ точка m взята на касательной LK, то она лежитъ внѣ (§ 24, слѣд. 3) эллипса, а потому черезъ нее можно провести (§ 33) еще вторую касательную. Пусть эта касательная встрѣчаетъ вторую параллельную касательную L′K′ въ нѣкоторой точкѣ l. Тогда, (ур-е 31)

$$Tm \, . \, T'l = TF \, . \, T'F.$$

Но намъ дано, что

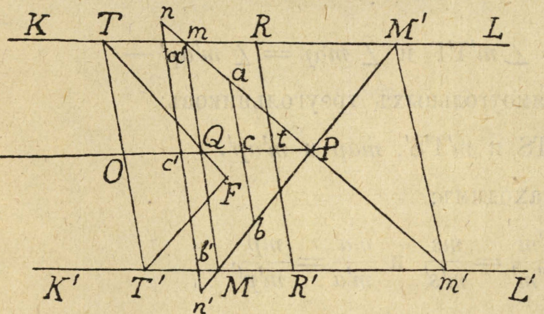
$$Tm \, . \, T'm' = TF \, . \, T'F,$$

а потому $T'l = T'm'$; слѣдовательно точки l и m' совпадаютъ, а значитъ и прямая mm' сливается съ касательною ml, что противно сдѣланному предположенію.

§ 54. **Теорема.** Средины всѣхъ хордъ эллипса, параллельныхъ одной и той же прямой, находятся на одной прямой, проходящей черезъ центръ эллипса.

Замѣтимъ прежде всего, что въ каждомъ эллипсѣ можно провести безконечное множество хордъ, параллельныхъ данной прямой. Дѣйствительно, только двѣ касательныя къ эллипсу параллельны данной прямой (§ 40), а потому всякая прямая, проходящая чрезъ точку эллипса, отличную отъ точекъ прикосновенія вышеупомянутыхъ касательныхъ, встрѣтитъ эллипсъ еще и во второй точкѣ.

Пусть точка a представляетъ собою одинъ изъ концовъ одной изъ хордъ, параллельныхъ данному направленію (черт. 49). Проведемъ черезъ центръ эллипса O хорду TT′, параллельную общему направленію хордъ. Въ точкахъ T и T′ проведемъ касательныя KL и K′L′, которыя, какъ мы знаемъ (§ 44), будутъ параллельны. Въ точкѣ a также проведемъ касательную къ эллипсу; обозначимъ соотвѣтственно черезъ m и m' точки встрѣчи этой касательной съ касательными KL и K′L′. Тогда по теоремѣ (§ 52) имѣемъ:



Фиг. 49.

$$Tm \, . \, T'm' = TF \, . \, T'F \qquad (33)$$

Такъ какъ касательная mm' не можетъ совпадать по направленію съ хордой, проходящей черезъ точку a и параллельной прямой TT′, то эта касательная навѣрно не параллельна прямой TT′, а потому отрѣзки Tm и $T'm'$ не равны по длинѣ. Отложимъ теперь на касательной KL отрѣзокъ $TM'=T'm'$, а на касательной $K'L'$ отрѣзокъ $T'M=Tm$. Тогда (ур. 33)

$$TM \,.\, TM' = Tm \,.\, T'm' = TF \,.\, T'F,$$

а потому (§ 54) прямая MM' касается эллипса въ нѣкоторой точкѣ его b. Соединимъ точку m прямою съ точкой M и точку M' съ точкой m'. Такъ какъ отрѣзокъ Tm равенъ и параллеленъ отрѣзку $T'M'$ и отрѣзокъ TM' равенъ и параллеленъ отрѣзку $T'm'$, то всѣ три прямыя

$$TT',\ mM \text{ и } m'M'$$

параллельны между собою. Изъ параллельности прямыхъ mM и $m'M'$ слѣдуетъ, что фигура $mM'm'M$ есть параллелограммъ, а потому отрѣзки mm' и MM' пересѣкаются и дѣлятся взаимно пополамъ въ нѣкоторой точкѣ P. Поэтому

$$Pm = Pm' \text{ и } PM = PM' \tag{34}$$

На основанiи теоремы § 52 находимъ:

$$\frac{ma}{m'a} = \frac{Tm}{T'm'} \text{ и } \frac{Mb}{M'b} = \frac{T'M}{TM'},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{ma}{m'a} = \frac{Mb}{M'b};$$

составивъ производную пропорцiю, имѣемъ:

$$\frac{ma}{ma + m'a} = \frac{Mb}{Mb + M'b},$$

или

$$\frac{ma}{mm'} = \frac{Mb}{MM'},$$

откуда получаемъ:

$$\frac{ma}{\left(\frac{mm'}{2}\right)} = \frac{MB}{\left(\frac{MM'}{2}\right)},$$

или (ур. 34)

$$\frac{ma}{mP} = \frac{Mb}{MP}.$$

Эта пропорцiя показываетъ, что хорда эллипса ab параллельна прямой mM, а слѣдовательно она параллельна и прямой TT', т. е. общему направленiю всѣхъ параллельныхъ хордъ; слѣдовательно точка b совпадаетъ съ другимъ концомъ хорды, проходящей черезъ точку a и параллельной данной прямой. Соединимъ точку P съ центромъ O прямою; пусть Q и c обозначаютъ соотвѣтственно точки встрѣчи этой прямой съ отрѣзками mM и ab. Какъ средняя линiя трапецiи $Tmm'T'$, прямая OP параллельна прямымъ LK и $L'K'$, а потому она дѣлитъ отрѣзокъ mM въ точкѣ Q пополамъ. Но, какъ выше доказано, хорда ab параллельна прямой mM, откуда слѣдуетъ:

$$\frac{mQ}{MQ} = \frac{ac}{cb},$$

а потому точка c есть средина хорды ab. Изъ всего вышесказаннаго слѣдуетъ, что, соединяя средину c какой-нибудь хорды съ центромъ, мы получаемъ прямую, параллельную касательнымъ, проведеннымъ въ концахъ хорды TT', параллельной хордѣ ab и проходящей черезъ центръ. Такъ какъ положеніе точекъ T и T' зависитъ лишь отъ направленія хорды ab, то и направленіе прямой, соединяющей центръ съ срединой хорды, будетъ одинаково для всѣхъ параллельныхъ хордъ, откуда и вытекаетъ справедливость предложенной теоремы.

Слѣдствіе 1-е. Обозначимъ буквами t и t' (черт. 49) точки встрѣчи прямой OP съ эллипсомъ. Точка c — средина одной изъ хордъ ab, параллельныхъ данному направленію, лежитъ внутри (§ 9) эллипса; поэтому точка эта, находясь на прямой OP, не можетъ выйти за предѣлы хорды tt' или же совпадать съ одной изъ точекъ t или t'.

Хорды, проходящія черезъ центръ, какова, напримѣръ, хорда tt', носятъ названіе діаметровъ. Такъ какъ мы только что показали, что точка c лежитъ на діаметрѣ tt', то теорему этого § можно выразить слѣдующимъ образомъ: средины всѣхъ хордъ, параллельныхъ данной прямой, лежатъ на одномъ діаметрѣ эллипса.

Слѣдствіе 2-е. Касательныя, проведенныя въ концахъ хорды, не проходящей черезъ центръ, пересѣкаются на продолженіи діаметра, дѣлящаго эту хорду пополамъ.

Дѣйствительно, касательныя mm' и MM' въ точкахъ a и b эллипса (черт. 49) пересѣкаются въ точкѣ P, лежащей на продолженіи діаметра tt', дѣлящаго хорду ab пополамъ.

Слѣдствіе 3-е. Прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ съ центромъ, дѣлитъ пополамъ хорду, соединяющую точки касанія.

Это слѣдствіе есть лишь другое выраженіе предыдущаго слѣдствія и выводится изъ него безъ труда по способу доказательства отъ противнаго.

Слѣдствіе 4-е. Касательныя въ концахъ хорды отсѣкаютъ отъ продолженной параллельной хорды равные отрѣзки. Пусть $a'b'$ (черт. 49) нѣкоторая хорда, параллельная хордѣ ab. Пусть c' —точка встрѣчи діаметра tt' съ хордой $a'b'$, а точки n и n' — точки пересѣченія касательныхъ mm' и MM' съ продолженіемъ этой хорды по обѣ стороны. Такъ какъ точка Q есть средина отрѣзка mM, и такъ какъ прямыя mM и nn' — будучи параллельны порознь прямой ab — параллельны между собою, то и точка c' есть средина отрѣзка nn'. Поэтому

$$c'n = c'n'.$$

Вычитая изъ этого равенства почленно равенство

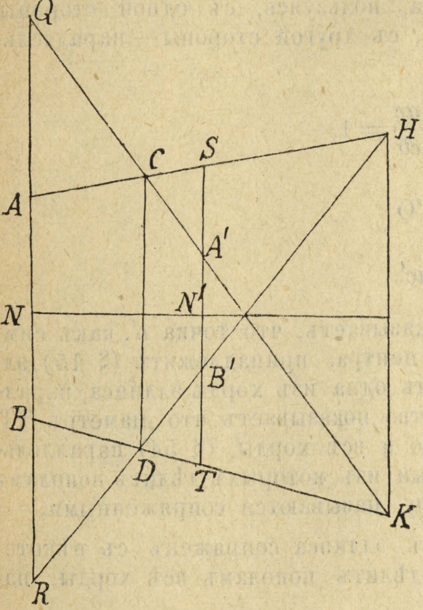
$$c'a' = c'b',$$

находимъ, что

$$a'n = b'n'.$$

Слѣдствіе 5-е. Прямая, соединяющая точку пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ концахъ двухъ параллельныхъ хордъ, съ точкою пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ другихъ концахъ тѣхъ же хордъ, параллельна самимъ хордамъ.

Пусть AB и A′B′ — двѣ параллельныя хорды. Проведемъ черезъ центръ эллипса O діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды AB и A′B′ въ точкахъ N и N′ (черт. 50). Изъ четырехъ концовъ хордъ AB и A′B′ два — A и A′ — находятся по одну сторону прямой NN′, а два другихъ — B и B′ — по другую сторону той же прямой; слѣдовательно хорды AA′ и BB′ не проходятъ черезъ центръ эллипса, лежащій на прямой NN′, а потому касательныя въ точкахъ A и A′ пересѣкутся (§ 45) въ нѣкоторой точкѣ C, и касательныя въ точкахъ B и B′ пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ D. Продолжимъ отрѣзки A′C и B′D до пересѣченія ихъ съ продолженной хордой AB въ точкахъ Q и R, а также отрѣзки AC и BD — до пересѣченія въ точкахъ S и T съ продолженной хордой A′B′. Такъ какъ прямыя AB и A′B′, по предположенію, параллельны, то треугольники AQC и RBD подобны соотвѣтственно треугольникамъ SA′C и B′TD; поэтому



Фиг. 50.

$$\frac{AC}{SC}=\frac{AQ}{A'S} \text{ и } \frac{BD}{TD}=\frac{BR}{B'T}.$$

Вторыя части этихъ двухъ равенствъ равны, такъ какъ (см. предыдущее слѣдствіе) AQ = BR и A′S = B′T. Слѣдовательно

$$\frac{AC}{SC}=\frac{BD}{TD}.$$

Итакъ три прямыя AB, CD и ST дѣлятъ отрѣзки AC и BT на части пропорціональныя и притомъ двѣ изъ нихъ — AB и ST параллельны; поэтому и прямая CD параллельна прямымъ AB и ST.

Пусть теперь H обозначаетъ точку встрѣчи касательныхъ въ точкахъ A и B′ и K — точку встрѣчи касательныхъ къ эллипсу въ точкахъ B и A′ *). Пользуясь надлежащимъ образомъ парами подобныхъ треугольниковъ AHR и SHB′ и QKB и A′KT, мы найдемъ, что прямая HK также параллельна хордамъ AB и A′B′.

*) Если хорда AB′ проходитъ черезъ центръ, то касательныя въ точкахъ A и B′ параллельны; въ этомъ случаѣ касательныя въ точкахъ A′ и B также параллельны.

§ 55. **Теорема.** Если одинъ діаметръ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, то и обратно, второй діаметръ раздѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя первому.

Пусть точка O—центръ эллипса и пусть (черт. 51) діаметръ tt' дѣлитъ пополамъ въ точкѣ c хорду ab, параллельную діаметру TT'. Проведемъ черезъ точку a прямую, параллельную діаметру tt' и продолжимъ ее до пересѣченія съ прямою bO въ точкѣ b'. Точку встрѣчи прямыхъ TT' и ab' обозначимъ черезъ c'. Тогда, пользуясь, съ одной стороны, параллельностью прямыхъ ab и TT' и, съ другой стороны — параллельностью прямыхъ ab' и tt', получимъ:

$$\frac{b'c'}{ac'} = \frac{b'O}{bO} = \frac{ac}{cb} = 1,$$

откуда

$$bO = b'O$$

и

$$b'c' = ac'.$$

Первое изъ этихъ равенствъ показываетъ, что точка b', какъ симметричная съ точкой b относительно центра, принадлежитъ (§ 15) эллипсу; слѣдовательно отрѣзокъ ab' есть одна изъ хордъ эллипса, параллельныхъ діаметру tt'. Второе равенство показываетъ что діаметръ TT' дѣлитъ пополамъ хорду ab', а съ нею и всѣ хорды, (§ 54) параллельныя діаметру tt'. Два діаметра, каждый изъ которыхъ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому діаметру, называются сопряженными.

Слѣдствіе 1-е. Каждый діаметръ эллипса сопряженъ съ нѣкоторымъ другимъ діаметромъ и потому дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя нѣкоторому направленію.

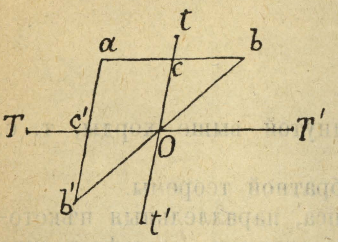
Дѣйствительно, пусть tt' (черт. 51)—данный діаметръ. Проведемъ какую-нибудь хорду ab', параллельную этому діаметру и построимъ діаметръ TT', дѣлящій хорду ab' пополамъ; данный діаметръ tt', какъ сопряженный съ діаметромъ TT', дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя діаметру TT'.

Слѣдствіе 2-е. Касательная въ концѣ діаметра параллельна діаметру, сопряженному съ даннымъ діаметромъ, а потому параллельна хордамъ, дѣлимымъ даннымъ діаметромъ пополамъ.

При доказательствѣ теоремы (§ 54) мы видѣли, что касательныя въ концахъ T и T' нѣкотораго діаметра TT' параллельны діаметру tt', дѣлящему пополамъ хорды, параллельныя діаметру TT', и поэтому сопряженному съ даннымъ діаметромъ TT'. Діаметръ tt' параллеленъ хордамъ, дѣлимымъ пополамъ діаметромъ TT', а значитъ касательныя въ точкахъ T и T' параллельны также этимъ хордамъ (черт. 2).

Примѣчаніе. Итакъ концы діаметра не служатъ уже срединами нѣкоторыхъ хордъ, параллельныхъ сопряженному діаметру, но являются точками прикосновенія касательныхъ, параллельныхъ ему. Всѣ же остальныя точки діаметра служатъ срединами хордъ, параллельныхъ сопряженному діаметру.

Слѣдствіе 3-е. Половина діаметра есть средняя пропорціональная длина между прямыми, соединяющими фокусъ съ концами сопряженнаго діаметра.



Фиг. 51.

Разсмотримъ нѣкоторый діаметръ tt' и сопряженный съ нимъ діаметръ TT′. Пусть KL и K′L′ (черт. 49) будутъ касательныя къ эллипсу въ точкахъ T и T′, параллельныя, какъ только что доказано, діаметру tt'. Обозначимъ черезъ R и R′ точки встрѣчи касательной къ эллипсу въ точкѣ t съ касательными KL и K′L′. Касательная RR′ параллельна діаметру TT′, сопряженному съ діаметромъ tt'. Поэтому четыреугольники TOtR и T′OtR′ суть параллелограммы, а слѣдовательно

$$\mathrm{TR} = \mathrm{T'R'} = \mathrm{O}t.$$

По теоремѣ § 52

$$\mathrm{TR}\,.\,\mathrm{T'R'} = \mathrm{TF}\cdot\mathrm{T'F},$$

откуда

$$\mathrm{O}t^2 = \mathrm{TF}\,.\,\mathrm{T'F},$$

что можно записать въ видѣ

$$\frac{\mathrm{TF}}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{O}t}{\mathrm{T'F}}.$$

§ 56. Двѣ хорды, пересѣкающіяся на эллипсѣ, называются дополнительными, если діаметръ, параллельный одной изъ нихъ, дѣлитъ другую пополамъ. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что двѣ дополнительныя хорды параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.

Теорема. Двѣ хорды, пересѣкающіяся на эллипсѣ и опирающіяся на діаметръ, суть дополнительныя.

Пусть a — точка эллипса, въ которой пересѣкаются хорды ab' (черт. 51) и ab, опирающіяся на діаметръ bb'. Пусть c' будетъ точка пересѣченія діаметра, параллельнаго хордѣ ab съ хордою ab'. Тогда

$$\frac{ac'}{b'c'} = \frac{b\mathrm{O}}{b'\mathrm{O}} = 1,$$

откуда слѣдуетъ, что точка c' есть средина хорды ab'. Итакъ, діаметръ, параллельный одной изъ хордъ ab' или ab, дѣлитъ другую пополамъ.

Обратныя теоремы. 1) Прямыя, проведенныя черезъ концы нѣкотораго діаметра параллельно двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, пересѣкаются на эллипсѣ. 2) Прямая, соединяющая концы хордъ проведенныхъ черезъ нѣкоторую точку a параллельно двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, проходитъ черезъ центръ эллипса. Пусть ba и $b'a$ будутъ прямыя, проведенныя въ концахъ діаметра bb' параллельно нѣкоторымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ. Проведемъ черезъ центръ эллипса O діаметръ, которому параллельна хорда ab, и пусть c' будетъ точка встрѣчи этого діаметра съ хордою ab'. Такъ какъ прямая ab', по предположенію, параллельна второму сопряженному діаметру, то она въ пересѣченіи съ эллипсомъ, должна дать нѣкоторую хорду, дѣлящуюся въ точкѣ c' пополамъ. Одинъ изъ концовъ этой хорды есть точка b'; такъ какъ изъ параллельности прямыхъ oc' и ab слѣдуетъ, что

$$\frac{b'c'}{ac'} = \frac{b'O}{bO} = 1,$$

то

$$b'c' = ac',$$

а потому точка a есть другой конецъ упомянутой выше хорды, т. е. точка эллипса.

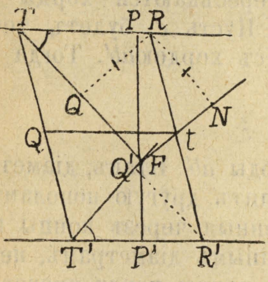
Перейдемъ къ доказательству второй обратной теоремы.

Пусть ab и ab' будутъ двѣ хорды эллипса, параллельныя нѣкоторымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ c', c и O средины отрѣзковъ ab', ab и bb'. Діаметръ, параллельный хордѣ ab, дѣлитъ пополамъ хорду ab', такъ какъ она параллельна, по предположенію, діаметру, сопряженному съ первымъ; наоборотъ, прямая c'O, проходящая чрезъ средину хорды ab' и параллельная хордѣ ab, должна при пересѣченіи съ эллипсомъ дать діаметръ, параллельный хордѣ ab. Итакъ прямая c'O есть не что иное, какъ прямая, дѣлящая пополамъ всѣ хорды, параллельныя хордѣ ab', а потому она проходитъ черезъ центръ (§ 54) эллипса. Точно также убѣдимся, что и прямая cO проходитъ черезъ центръ эллипса. Поэтому точка O есть центръ, а хорда bb'—діаметръ эллипса.

§ 57. Пусть TT$'$ и tt' (черт. 00) два сопряженныхъ діаметра. Половины ихъ, напримѣръ, OT и Ot, носятъ названіе сопряженныхъ радіусовъ.

Теорема. Прямыя, соединяющія фокусъ съ концами двухъ сопряженныхъ радіусовъ, находятся въ постоянномъ, — равномъ половинѣ малой оси разстояніи отъ точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ радіусовъ.

Пусть OT и Ot (черт. 00) два сопряженныхъ радіуса. Построимъ точку T$'$ эллипса, симметричную съ точкой T относительно центра эллипса O, и соединимъ фокусъ F съ точками T, T$'$ и t. Въ концахъ T и t данныхъ сопряженныхъ радіусовъ, а также въ точкѣ T$'$ проведемъ касательныя. Пусть касательныя въ точкахъ T и t пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ R, а касательныя въ точкахъ t и T$'$—въ точкѣ R$'$. Изъ точки R опустимъ перпендикуляры RQ и RN на прямыя FT и Ft, а изъ точки R$'$ — перпендикуляръ R$'$Q$'$ на прямую FT$'$; кромѣ того, черезъ точку F проведемъ общій перпендикуляръ PP$'$ къ параллельнымъ касательнымъ TR и T$'$R$'$. Прямоугольные треугольники TRQ и TFP, имѣющіе общій острый уголъ при вершинѣ T, подобны, а потому



Фиг. 52.

$$\frac{TR}{TF} = \frac{RQ}{FP}. \tag{35}$$

Подобнымъ же образомъ изъ подобія треугольниковъ T$'$Q$'$R$'$ и T$'$FP$'$ найдемъ, что

$$\frac{T'F}{T'R'} = \frac{FP'}{R'Q'} \tag{36}$$

Первыя части ур-ій 35 и 36 равны (§ 52), а потому

$$\frac{RQ}{FP}=\frac{FP'}{R'Q'},$$

откуда

$$RQ \,.\, R'Q' = FP \,.\, FP',$$

или (§ 41)

$$RQ \,.\, R'Q' = b^2 \qquad (37)$$

Такъ какъ (§ 55, слѣд. 2) прямыя TT' и RR' параллельны, и прямыя TR и $T'R'$ также параллельны, то

$$TR = T'R'.$$

Кромѣ того, (§ 44, слѣд.)

$$\angle QTR = \angle Q'T'R'.$$

Слѣдовательно прямоугольные треугольники QTR и $R'T'R'$ равны; изъ равенства ихъ имѣемъ, что

$$RQ = R'Q',$$

а потому (ур. 37)

$$RQ^2 = b^2,$$

откуда

$$RQ = b.$$

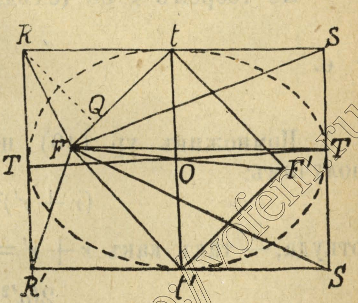
Такъ какъ точка R лежитъ (§ 38) на биссекторѣ угла TFt, то перпендикуляры RQ и RN равны.

Итакъ

$$RQ = RN = b.$$

§ 58. **Теорема** Площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ, есть величина постоянная.

Пусть TT' и tt' — два сопряженныхъ діаметра. Проведемъ касательныя къ эллипсу въ точкахъ T, T' t и t'; пусть R, S, S', R' (черт. 53) будутъ вершины параллелограмма, образованнаго этими четырьмя касательными. Соединяя одинъ изъ фокусовъ F прямыми съ точками R, T, R', t' S', T', S и t, мы разобьемъ параллелограммъ $RSS'R'$ на восемь треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ точкѣ F. Разсмотримъ площадь одного изъ этихъ треугольниковъ, напримѣръ, площадь треугольника RFt. Опустивъ изъ точки R перпендикуляръ RQ на прямую FT, имѣемъ (§ 57)



Фиг. 53.

$$RQ = b,$$

а потому

$$\Delta RFt = {}^1/_2\, tF \,.\, RQ = \frac{tF \,.\, b}{2}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\Delta SFt = \frac{tF \,.\, b}{2},$$

а потому

$$\Delta RFS = b \,.\, tF$$

Точно также

$$\Delta R'FS' = b \,.\, t'F.$$

Слѣдовательно

$$\Delta RFS + \Delta R'FS' = b \,.\, (tF + t'F) \qquad (38)$$

Изъ равенства треугольниковъ tFO и $t'OF'$ находимъ, что

$$tF = t'F'.$$

Поэтому уравненіе (38) принимаетъ видъ

$$\Delta RFS + \Delta R'FS' = b(t'F' + t'F) = b \,.\, 2a = 2ab.$$

При помощи такихъ же разсужденій получимъ, что

$$\Delta RFR' + \Delta SFS' = 2ab,$$

а слѣдовательно площадь цѣлаго параллелограмма равна $4ab$.

Слѣдствіе. Такъ какъ площадь параллелограмма $TtT't'$ равна половинѣ площади $RSS'R'$, то его площадь равна $2ab$.

§ 59. **Теорема.** Сумма квадратовъ сопряженныхъ радіусовъ есть величина постоянная.

Пусть OT и Ot — два сопряженныхъ радіуса. Соединимъ точку t съ фокусами и введемъ слѣдующія обозначенія:

$$tF = t'F' = r;\ tF' = r';\ OT = b';\ Ot = a'$$

и

$$FF' = 2c \text{ (см. § 1)}.$$

Тогда

$$r^2 + r'^2 = 2a'^2 + 2c^2 \qquad (39)$$

По теоремѣ § 55 (слѣд. 3-е)

$$OT^2 = tF \,.\, t'F,$$

т. е.

$$rr' = b'^2. \qquad (40)$$

Помноживъ ур. (40) на 2 и сложивъ его почленно съ ур. (39), получимъ:

$$(r + r')^2 = 2(a'^2 + b'^2) + 2c'^2,$$

откуда, — такъ какъ $r + r' = 2a$, находимъ:

$$2(a'^2 + b'^2) + 2c^2 = 4a^2.$$

Поэтому

$$a'^2 + b'^2 = 2a^2 - c^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2.$$

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Поглощеніе свѣта оптическими стеклами. — Въ слѣдующей табличкѣ указаны количества свѣта, проходящія сквозь объективъ оптическаго прибора; количество падающаго свѣта принято за единицу:

Толщина объектива cm.	Сила проходящаго свѣта: Въ разсчетъ принято только поглощеніе		Сила проходящаго свѣта: Въ разсчетъ принято поглощеніе и отраженіе	
	Оптическіе лучи	Химическіе лучи	Оптическіе лучи	Химическіе лучи
4	0,93	0,84	0,77	0,69
6	0,90	0,77	0,75	0,63
8	0,87	0,71	0,72	0,58
10	0,84	0,65	0,70	0,53
20	0,71	0,43	0,59	0,35
30	0,60	0,28	0,50	0,23
40	0,51	0,18	0,42	0,10

Phot. Corresp.

ЗАДАЧИ.

№ 403. Въ урнѣ находится 5000 шаровъ, перенумерованныхъ числами отъ 1 до 5000. Какъ велика вѣроятность событія, что вынутый изъ урны шаръ будетъ имѣть номеръ, кратный какого либо изъ чиселъ 14, 21, 10?

Е. Буницкій (Одесса).

№ 404. Даны двѣ окружности радіусовъ R и $R_1 (R > R_1)$. Въ окружности радіуса R проведена нѣкоторая хорда AB, соотвѣтствующая центральному углу AOB, и въ окружности радіуса R_1—хорда

$$CD = \frac{AB}{2},$$

причемъ центральный уголъ, ей соотвѣтствующій,

$$= \frac{AOB}{2}.$$

Опредѣлить AB. Рѣшить эту задачу безъ помощи тригонометріи.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 405. Найти площадь треугольника, образуемаго соединеніемъ точекъ D, E и F, въ которыхъ стороны треугольника ABC дѣлятся въ отношеніи $m:n$, если дана площадь треугольника ABC.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 406. Изъ уравненій

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2,$$

$$c^2\alpha^3-(c^2+a^2)a^2\alpha+a^4x=0,$$

$$c^2\beta^3-(c^2-b^2)b^2\beta-b^4y=0$$

исключить α и β.

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 407. Опредѣлить, какой изъ усѣченныхъ конусовъ, имѣющихъ данный объемъ v и данную высоту h, имѣетъ наибольшую поверхность.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 408. Доказать, что если сторона a треугольника ABC есть средняя пропорціональная между сторонами b и c, то прямая, соединяющая точки Брокара этого треугольника, проходитъ черезъ вершину A.

М. Зиминъ (Орелъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 194 (3 сер.). Даны двѣ параллели и на нихъ по точкѣ A и B. Черезъ внѣшнюю точку C провести даннымъ радіусомъ окружность, встрѣчающую параллели въ x и y такъ, чтобы отрѣзки Ax и By были равны между собою.

Строимъ на AB равнобедренный треугольникъ ABD, у котораго AD и BD равны данному радіусу; черезъ D проводимъ линію, параллельную даннымъ параллелямъ; изъ C описываемъ окружность даннымъ радіусомъ. Пересѣченіе полученной параллели съ этой окружностью даетъ искомый центръ. Задача допускаетъ вообще 4 рѣшенія.

М. Зиминъ (Орелъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Неизвѣстный* (Бѣлостокъ); *Уч. Кіево-Печ. гим.*, *Л* и *Р.*, *Э. Заторскій* (Вильно); *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 202 (3 сер.)—Построить треугольникъ, если извѣстно произведеніе двухъ сторонъ, медіана третьей стороны и разстояніе этой медіаны отъ одной изъ вершинъ треугольника.

Пусть ABC — искомый треугольникъ, а BM — данная медіана. Продоливъ медіану BM на разстояніе MA_1, равное BM, и соединивъ A_1 и C, мы получимъ треугольникъ A_1BC, который нетрудно построить, такъ какъ извѣстны сторона его A_1B, произведеніе двухъ другихъ сторонъ $BC.A_1C$, равное данному произведенію, высота его и, слѣдовательно, радіусъ описаннаго круга. Построивъ же треугольникъ A_1BC, мы безъ труда построимъ искомый тр-къ.

Д. Цельмеръ (Тамбовъ); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л.* и *Р.*; *Э. Заторскій* (Спб.).

№ 214 (3 сер.)—Построить треугольникъ ABC, когда даны $AC, \angle B$ и площадь треугольника BKC, гдѣ K ортоцентръ треугольника ABC.

На сторонѣ AC описываемъ дугу, вмѣщающую уголъ B; отъ точки C на прямой AC откладываемъ часть

$$CE = \frac{S^2}{OD},$$

гдѣ S^2 есть площадь $\triangle$-ка BKC, O — центръ описаннаго круга, а D середина AC; изъ E возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ B, которая и будетъ третьей вершиной искомаго треугольника.

Это построеніе основано на слѣдующей теоремѣ: ортоцентръ отстоитъ отъ какой-нибудь вершины тр-ка вдвое дальше, нежели центръ описываемаго круга отъ противоположной стороны.

Э. Заторскій (Спб.); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 218 (3 сер.) — Безъ помощи тригонометріи вычислить площадь четыреугольника, въ которомъ произведеніе прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ, равно a^2, а уголъ между этими прямыми равенъ 150^0.

Соединивъ середины сторонъ четыр-ка $ABCD$ прямыми MN, NP, PQ и QM, мы получимъ параллелограммъ $MNPQ$, площадь котораго равна половинѣ площади четыреугольника $ABCD$. Площадь же параллелограмма $MNPQ$ равна

$$\frac{a^2}{4},$$

такъ какъ высота NE $\triangle$-ка MNP равна

$$\frac{NQ}{4},$$

ибо острый уголъ между прямыми, соединяющими противоположныя стороны четыреугольника $ABCD$, равенъ, по условію, 30^0. Такимъ образомъ, площадь четыреугольника $ABCD$ равна

$$\frac{a^2}{2}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Э. Заторскій* (Спб.); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л.* и *Р.*

№ 220 (3 сер.) — Рѣшить систему уравненій:

$$\operatorname{tg}(y + x) = 4\sin x + 2\cos x;$$

$$\operatorname{tg}(y - x) = 4\sin x - 2\cos x.$$

Складывая и вычитывая данныя ур-нія, получимъ

$$\frac{\sin 2y}{\cos(y+x)\cos(y-x)}=8\sin x;\ \frac{\sin 2x}{\cos(y+x)\cos(y-x)}=4\cos x$$

или

$$\frac{\sin 2y}{\cos 2y+\cos 2x}=4\sin x\ldots(\alpha);\ \frac{\sin 2x}{\cos 2y+\cos 2x}=2\cos x\ldots(\beta).$$

Опредѣляя изъ (β) $\cos 2y+\cos 2x$ и подставляя въ (α), имѣемъ:

$$\sin 2y=4\sin^2 x;\ \cos 2y=\sqrt{1-16\sin^4 x}.$$

Подставляя послѣднее выраженіе въ (β), получимъ

$$\sin x=\cos 2x+\sqrt{1-16\sin^4 x}$$

или

$$2\sin^2 x+\sin x-1=\sqrt{1-16\sin^4 x},$$

$$(\text{такъ какъ } \cos 2x=1-2\sin^2 x).$$

Такимъ образомъ получаемъ уравненіе

$$\sin x(20\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-2)=0$$

или

$$\sin x(\sin x-{}^1\!/_2)(\sin^2 x-{}^7\!/_{10}\sin x+{}^1\!/_5)=0.$$

Не трудно видѣть, что изъ четырехъ наименьшихъ значеній x и y, даваемыхъ этимъ уравненіемъ, отвѣтомъ служитъ

$$x=30^0 \text{ и } y=45^0.$$

Э. Заторскій (Вильно); *В. Соковичъ* (Кіевъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Уч. Кгево-Печ. гимн. Л. и Р.*

№ 230 (3 сер.)—Даны двѣ точки A и B и двѣ параллели. Провести черезъ A и B окружность, встрѣчающую параллели въ x и y, такъ что $xy=AB$.

Описавъ изъ какой нибудь точки x_1, взятой на одной изъ параллелей, окружность радіусомъ AB, мы получимъ отрѣзки x_1y_1 и x_1y_1' опредѣляющіе направленіе искомаго отрѣзка xy и равные ему. Построивъ на AB равнобедренный треугольникъ ABC, такъ что AC равно AB и параллельно x_1y_1 и продолживъ BC до пересѣченія съ дальнѣйшей параллелью, мы опредѣлимъ точку x. Проведя черезъ x прямую xy параллельно x_1y_1, мы опредѣлимъ точку y на другой параллели. Окружность, проходящая черезъ A, B и x пройдетъ черезъ y, такъ какъ $ABxy$ есть равнобочная трапеція. Очевидно, что задача имѣетъ два рѣшенія.

С. Зайцевъ (Курскъ); *L.* (Тамбовъ); *Е. Заусцинскій* (Пинскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 233 (3 сер.) — Найти сумму рядовъ:

$$\frac{1}{\sin x.\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2x.\sin 3x}+\ldots+\frac{1}{\sin(n-1)x.\sin nx},$$

$$\frac{1}{\cos.x\cos3x}+\frac{1}{\cos3x.\cos5x}+\ldots+\frac{1}{\cos(2n-1)x.\cos(2n+1)x}.$$

Не трудно видѣть, что

$$\operatorname{ctg}(n-1)x-\operatorname{ctg}nx=\frac{\sin x}{\sin(n-1)x.\sin nx},$$

откуда

$$\frac{1}{\sin(n-1)x.\sin nx}=\operatorname{cosec}x[\operatorname{ctg}(n-1)x-\operatorname{ctg}nx].$$

Давая n значенія 2, 3, . . . n, имѣемъ

$$\frac{1}{\sin x.\sin 2x}=\operatorname{cosec}x(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x)$$

$$\frac{1}{\sin 2x.\sin 3x}=\operatorname{cosec}x(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}3x)$$

. . . .

$$\frac{1}{\sin(n-1)x.\sin nx}=\operatorname{cosec}x[\operatorname{ctg}(n-1)x-\operatorname{ctg}nx].$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ для суммы перваго ряда такое выраженіе:

$$S_1=\operatorname{cosec}x(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}nx)$$

или

$$S_1=\frac{\sin(n-1)x}{\sin^2x.\sin nx}.$$

Исходя изъ равенства

$$\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}(n-1)x=\frac{\sin 2x}{\cos(n-1)x.\cos(n+1)x},$$

можно очень легко найти для суммы 2-го ряда такое выраженіе

$$S_2=\operatorname{cosec}2x[\operatorname{tg}(2n+1)x-\operatorname{tg}(2n-1)x]$$

или

$$S_2=\frac{\sin 2nx}{\sin 2x.\cos x.\cos(2n+1)x}.$$

Э. Заторскій (Вильно); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Уч. Кіево-Печ. гим. Л.* и *Р.*

№ 337 (3 сер.). Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$a(\cos C+\cos B)+b(\cos C+\cos A)+c(\cos B+\cos A)=\frac{abc}{2Rr},$$

$$a(\cos C-\cos B)+b(\cos A-\cos C)+c(\cos B-\cos A)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2Rr};$$

гдѣ a, b, c суть стороны треугольника, R—радіусъ описаннаго, а r— вписаннаго круга.

Сложивъ почленно равенства:

$$a\,.\cos B+b\,.\cos A=c,$$
$$a\,.\cos C+c\,.\cos A=b,$$
$$b\,.\cos C+c\,.\cos B=a,$$

получимъ

$$a(\cos B+\cos C)+b(\cos C+\cos A)+c(\cos B+\cos A)=a+b+c=\frac{abc}{2Rr}.$$

Далѣе имѣемъ:

$$a\,.\cos C+b\,.\cos A+c\,.\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=$$
$$=\frac{a+b+c}{2}+\frac{a^3c-ac^3+ab^3-a^3b+bc^3-b^3c}{2abc}=$$
$$=\frac{a+b+c}{2}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{2abc}$$

или

$$a\,.\cos C+b\,.\cos A+c\,.\cos B=\frac{abc}{4Rr}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2Rr}.$$

Умноживъ послѣднее равенство на 2 и вычтя изъ полученнаго равенства первое изъ данныхъ въ задачѣ, получимъ второе, которое требовалось оправдать.

М. Зиминъ (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка): *Лежебокъ* и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ).

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 14-го Августа 1897 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 42.

Обложка
ищется

Обложка
ищется