Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XI Сем. **№ 123.** № 3.

ПРИБЛИЖЕННОЕ СУММИРОВАНІЕ
РЯДОВЪ СЪ ДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ.

Положимъ, что имѣемъ сходящійся рядъ

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \qquad (1)$$

и пусть $\qquad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

и $\qquad R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$

такъ что $\qquad S = S_n + R_n.$

Посмотримъ, какъ найти сумму S ряда (1) съ точностью до $\frac{1}{10^m}$.

Проще всего достигнуть этого, вычисляя достаточное число первыхъ членовъ ряда (1) въ видѣ приближенныхъ десятичныхъ дробей съ достаточнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, суммируя эти приближенныя величины членовъ и отбрасывая въ полученной такимъ образомъ суммѣ лишніе десятичные знаки. При этомъ является вопросъ, сколько первыхъ членовъ ряда слѣдуетъ взять для суммы и съ какою точностью слѣдуетъ каждый дробный членъ вычислить въ видѣ приближенной десятичной дроби.

Положимъ, что нужно взять n членовъ и вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^h}$ каждый изъ дробныхъ членовъ, которыхъ въ суммѣ S_n пусть будетъ p. Постараемся найти для n и h наименьшія значенія, при которыхъ абсолютная величина ошибки, которую мы дѣлаемъ при такомъ приближенномъ суммированіи, будетъ меньше $\frac{1}{10^m}$. Замѣтимъ, что полная ошибка слагается изъ трехъ слѣдующихъ ошибокъ.

Первую ошибку мы дѣлаемъ, пренебрегая остаткомъ R_n ряда. Пусть абсол. велич. $R_n < \frac{1}{10^l}$; въ такомъ случаѣ абсолютная величина первой ошибки меньше $\frac{1}{10^l}$.

Вторую ошибку мы дѣлаемъ, вычисляя каждый дробный членъ суммы S_n приближенно съ точностью до $\frac{1}{10^h}$. При этомъ абсолютная величина ошибки при вычисленіи каждаго дробнаго члена меньше $\frac{1}{10^h}$, а такъ какъ сумма S_n содержитъ p дробныхъ членовъ, то абсолютная величина ошибки при вычисленіи S_n, очевидно, будетъ меньше $\frac{p}{10^h}$. Пусть $10^{k-1} < p \leqq 10^k$, тогда $\frac{p}{10^h} \leqq \frac{10^k}{10^h}$ или $\frac{p}{10^h} \leqq \frac{1}{10^{h-k}}$. Слѣдовательно абсолютная величина второй ошибки меньше $\frac{1}{10^{h-k}}$.

Третью ошибку мы дѣлаемъ, ограничиваясь въ полученной приближенной величинѣ суммы S_n только m десятичными знаками, остальные же отбрасывая. Чтобы уменьшить эту ошибку, будемъ увеличивать на единицу m-й десятичный знакъ, когда $(m+1)$-ый $\geqq 5$. Въ такомъ случаѣ абсолютная величина третьей ошибки меньше $\frac{1}{2.10^m}$.

Итакъ абсолютная величина полной ошибки, очевидно, меньше суммы $\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{h-k}} + \frac{1}{2.10^m}$; но требуется, чтобы абсолютная величина полной ошибки была меньше $\frac{1}{10^m}$. Очевидно, что это требованіе будетъ удовлетворено, если

$$\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{h-k}} + \frac{1}{2.10^m} < \frac{1}{10^m}. \qquad (2)$$

Перенося $\frac{1}{2.10^m}$ во вторую часть неравенства (2) и замѣчая, что

$$\frac{1}{10^m} - \frac{1}{2.10^m} = \frac{1}{2.10^m},$$

получаемъ $$\frac{1}{10^t} + \frac{1}{10^{h-k}} < \frac{1}{2.10^m}. \quad (3)$$

Умножая обѣ части неравенства (3) на 2.10^m и сокращая дроби, получаемъ $$\frac{2}{10^{t-m}} + \frac{2}{10^{h-k-m}} < 1. \quad (4)$$

Неравенство (4) будетъ имѣть мѣсто при цѣлыхъ значеніяхъ m, k, t и h только, если одновременно

$$t - m \geqq 1 \quad \text{и} \quad h - k - m \geqq 1,$$

откуда $$t \geqq m + 1 \quad \text{и} \quad h \geqq m + k + 1.$$

Наименьшія значенія для t и h будутъ:

$$t = m + 1 \quad \text{и} \quad h = m + k + 1.$$

Итакъ получаемъ слѣдующее правило:

Чтобы вычислить сумму ряда $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *съ точностью до* $\frac{1}{10^m}$, *надо взять столько членовъ, чтобы абсолютная величина остатка ряда была меньше* $\frac{1}{10^{m+1}}$, *такъ что, если абсолютная величина* $R_n < \frac{1}{10^{m+1}}$, *то надо взять n первыхъ членовъ ряда. Пусть въ суммѣ* S_n *будетъ p дробныхъ членовъ; если* $10^{k-1} < p \leqq 10^k$, *то каждый дробный членъ суммы* S_n *надо вычислить съ точностью до* $\frac{1}{10^{m+k+1}}$. *Вычисливъ затѣмъ* S_n, *надо въ приближенной величинѣ, полученной для* S_n, *удержать только m первыхъ десятичныхъ знаковъ, а остальные отбросить, увеличивъ на единицу m-ый десятичный знакъ, если* $(m+1)$*-ый* $\geqq 5$.

Для примѣра вычислимъ по выведенному нами правилу основаніе e Неперовыхъ логариѳмовъ съ точностью до $\frac{1}{10^6}$.

Извѣстно, что

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots, \quad (5)$$

гдѣ $n! = 1.2.3\ldots n$.

Изъ теоріи сходимости рядовъ извѣстно, что если въ ряду съ положительными членами, начиная съ нѣкотораго члена u_i отношеніе каждаго послѣдующаго члена къ своему предыдущему постоянно меньше единицы и стремится къ предѣлу меньшему единицы, то рядъ сходящійся и остатокъ R_n для $n \geqq i$ будетъ меньше $u_n \cdot \frac{q}{1-q}$, гдѣ q означаетъ наибольшее изъ отношеній $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, ... и т. д.

Пусть $q_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ и $Q_n = u_n \cdot \frac{q_n}{1-q_n}$. (6)

Если $$q_i < q_{i+1} < q_{i+2} < \cdots < q_n < \cdots < 1,$$

то $q = [\, lim q_n \,]_{n=\infty}$ и $R_n < u_n \cdot \frac{q}{1-q}$; если же

$$1 > q_i > q_{i+1} > q_{i+2} > \cdots > q_n > \cdots,$$

то $q = q_n$ и $R_n < Q_n$.

Для ряда (5) имѣемъ:

$$q_1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4},$$

$$q_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \text{ для } n \geqq 2. \tag{7}$$

Отсюда видимъ, что отношеніе q_n всегда < 1 и съ возрастаніемъ n отъ $n = 2$ безпредѣльно убываетъ. Слѣдовательно рядъ (5) сходящійся и для него $R_n < Q_n$ при $n \geqq 2$. Изъ равенствъ (6) и (7) легко вывесть, что $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$ и $Q_n = \frac{u_n}{n}$. (8)

Пользуясь формулами (8) и замѣчая, что $\frac{1}{10^{m+1}} = \frac{1}{10^7}$, ибо $m = 6$, вычисляемъ въ видѣ простыхъ дробей величины u_2 и Q_2, u_3 и Q_3 и т. д., пока не получимъ $Q_n < \frac{1}{10^7}$, тогда тѣмъ болѣе будетъ $R_n < \frac{1}{10^7}$. Оказывается $n = 10$; въ самомъ дѣлѣ:

$$u_2 = \frac{1}{2}, \qquad Q_2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{10^7},$$

$$u_3 = \frac{1}{6}, \qquad Q_3 = \frac{1}{18} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_4 = \frac{1}{24}, \qquad Q_4 = \frac{1}{96} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_5 = \frac{1}{120}, \qquad Q_5 = \frac{1}{600} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_6 = \frac{1}{720}, \qquad Q_6 = \frac{1}{4320} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_7 = \frac{1}{5040}, \qquad Q_7 = \frac{1}{35280} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_8 = \frac{1}{40320}, \qquad Q_8 = \frac{1}{322560} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_9 = \frac{1}{362880}, \qquad Q_9 = \frac{1}{3265920} > \frac{1}{10^7};$$

$$u_{10} = \frac{1}{3628800}, \qquad Q_{10} = \frac{1}{36288000} < \frac{1}{10^7}.$$

Итакъ просуммировать надо только 10 первыхъ членовъ ряда (5). Такъ какъ между ними дробныхъ членовъ только 9 и такъ какъ $10^0 < 9 < 10^1$, то $k = 1$ и каждый дробный членъ суммы S_{10} надо вычислить съ точностью до $\frac{1}{10^8}$, ибо $m + k + 1 = 8$. Вычисливъ, суммируемъ:

$$\begin{array}{r}
2{,}00000000 \\
0{.}50000000 \\
0{.}16666666 \\
0{.}04166666 \\
0{.}00833333 \\
+\ 0{.}00138888 \\
0{.}00019841 \\
0{.}00002480 \\
0{.}00000275 \\
0{,}00000027 \\
\hline
2{,}71828176
\end{array}$$

Ограничиваясь въ полученной суммѣ только требуемыми 6-ю десятичными знаками и увеличивъ 6-й знакъ на 1, ибо 7-й знакъ > 5, получаемъ $e = 2{,}718282$, что отъ болѣе точной величины $e = 2{,}7182818285$ разнится дѣйствительно менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{10^6}$.

Учит. Варш. реальн. учил. *С. Гирманъ.*

О ДЛИНѢ.

(Окончаніе).

§ 22. Перейдемъ теперь къ общему доказательству о независимости предѣла отъ закона вписыванія *)

Разсмотримъ какую угодно выпуклую кривую (еслибы она была не выпуклая, то разбили бы ее на выпуклыя части и разсмотрѣли каждую часть отдѣльно).

Построимъ вписанную линію ABCD и соотвѣтствующую ей описанную AA'BB'CC'D **) и докажемъ, что разность этихъ линій есть величина безконечно малая, *каковъ бы ни былъ законъ, по которому стороны ихъ приближаются къ нулю.*

Если изъ точекъ A_1, B_1 и C_1 опустимъ перпендикуляры A_1K, B_1L и C_1M на хорды, то отношеніе $\frac{P}{p}$ можно выразить такъ:

$$\frac{P}{p}=\frac{AA_1+A_1B+BB_1+B_1C+CC_1+C_1D}{AK+KB+BL+LC+CM+MD}$$

Изъ алгебры извѣстно, что величина дроби $\frac{P}{p}$ заключается между наибольшей и наименьшей изъ дробей:

$$\frac{AA_1}{AK},\ \frac{A_1B}{KB},\ \frac{BB_1}{BL}\ \text{и пр.}$$

Поэтому, если докажемъ, что предѣлъ каждой изъ этихъ дробей равенъ 1, то тоже самое заключимъ и о предѣлѣ дроби $\frac{P}{p}$.

Разсмотримъ, напримѣръ, дробь:

$$\frac{AA_1}{AK}.$$

Числитель ея есть гипотенуза, а знаменатель катетъ прямоугольнаго треугольника AA_1K, острый уголъ котораго AA_1K составленъ хордою и касательною.

---

*) Если въ среднихъ классахъ не дѣлалось никакихъ разъясненій, относящихся къ новому опредѣленію, то къ изложенному въ этомъ параграфѣ придется сдѣлать нѣкоторыя добавленія, заимствованныя изъ предыдущихъ параграфовъ.

**) Просимъ читателя сдѣлать чертежъ.

При безграничномъ приближеніи сторонъ ломаной линіи къ нулю, уголъ между хордой и касательной безгранично уменьшается, а, слѣдовательно, гипотенуза по величинѣ безгранично приближается къ катету (разность ихъ равна безконечно малой величинѣ).

Поэтому:

$$Пр. \frac{AA_1}{AK} = 1.$$

Противъ этого доказательства можно возразить такъ: конечно, разность между AA_1 и AK есть величина безконечно малая α, но вѣдь и самые члены разности безконечно малы, а поэтому, изъ равенства:

$$AA_1 - AK = \alpha$$

нельзя вывести заключенія, что предѣлъ отношенія $\frac{AA_1}{AK}$ равенъ 1.

Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части этого равенства на AK получимъ:

$$\frac{AA_1}{AK} - 1 = \frac{\alpha}{AK}$$

Такъ какъ AK безконечно малая величина, то отношеніе $\frac{\alpha}{AK}$ можетъ быть равно и конечной, и безконечно большой, и безконечно малой величинѣ, а слѣдовательно мы не вправѣ заключить, что предѣлъ $\frac{AA_1}{AK} = 1$.

Чтобы устранить это возраженіе, строютъ треугольникъ AMN конечныхъ размѣровъ подобный треугольнику AA_1K и говорятъ:

$$\frac{AA_1}{AK} = \frac{AM}{AN},$$

$$Пр. \frac{AM}{AN} = 1$$

слѣдовательно:

$$Пр. \frac{AA_1}{AK} = 1.$$

Въ переводѣ на аналитическій языкъ мы этимъ разсужденіемъ доказываемъ, что разность $AA_1 - AK$ есть безконечно малая величина, порядка высшаго, чѣмъ AK.

Дѣйствительно: такъ какъ

$$Пр. \frac{AM}{AN} = 1,$$

то:

$$\frac{AM}{AN} = 1 + \omega,$$

гдѣ ω безконечно малая величина.

Слѣдовательно:

$$\frac{AA_1}{AK} = 1 + \omega$$

и поэтому:

$$AA_1 = AK + AK.\omega.$$

Итакъ доказано, что:

$$Пр.\frac{P}{p} = 1$$

Слѣдовательно:

$$\frac{P}{p} = 1 + \alpha,$$

гдѣ α безконечно малая величина.

Отсюда: $P - p = p\alpha.$

Такъ какъ p величина конечная, а α безконечно малая, то разность периметровъ есть величина безконечно малая.

Изберемъ теперь какой нибудь опредѣленный законъ вписыванія, при которомъ периметры вписанныхъ ломаныхъ линій безгранично возрастаютъ: напримѣръ, каждую дугу, стягиваемую хордою, будемъ дѣлить на n равныхъ частей.

Тогда получимъ рядъ вписанныхъ периметровъ, которые, на основаніи аксіомы § 22, стремятся къ извѣстному предѣлу L.

Къ тому же предѣлу, на основаніи предыдущаго доказательства, стремятся периметры соотвѣтствующихъ описанныхъ ломаныхъ линій *).

Вообразимъ наконецъ совершенно произвольный законъ вписыванія и докажемъ, во первыхъ, что периметры и въ этомъ случаѣ имѣютъ предѣлъ и что предѣлъ этотъ равенъ прежнему L.

Для доказательства придется почти буквально повторить сужденія § 21.

Если p' и P' обозначаютъ периметръ вписанной ломаной линіи и соотвѣтствующей ей описанной при произвольномъ законѣ вписыванія, то, какъ мы доказали, разность $P' - p'$ есть величина безконечно малая.

*) Если разность двухъ перемѣнныхъ величинъ безконечно мала и одна изъ нихъ имѣетъ предѣлъ, то и другая имѣетъ тотъ же предѣлъ.

То же относится и къ разности $P-p$, а слѣдовательно и къ суммѣ этихъ разностей:

$$(P-p)+(P'-p').$$

Сумма эта можетъ быть представлена такъ:

$$(P-p')+(P'-p).$$

Такъ какъ члены ея положительны, то оба слагаемыя безконечно малы: назовемъ ихъ черезъ α и β.

Тогда:
$$P-p'=\alpha$$
и
$$P'-p=\beta$$
Но:
$$P=L-\alpha'$$
$$p=L+\beta',$$
гдѣ α' и β' тоже безконечно малыя величины.

Подставляя и дѣлая перенесенія, получимъ:

$$L-p'=\alpha+\alpha'$$
$$P'-L=\beta+\beta'$$

Отсюда и заключаемъ, что P' и p' имѣютъ предѣлъ и что предѣлъ этотъ равенъ L.

Полезно замѣтить, что въ послѣднемъ случаѣ выраженіе „законъ вписыванія“ относится какъ къ самому процессу вписыванія, такъ и къ начальной ломаной линіи. Напримѣръ, два совершенно тождественные процесса вписыванія, отправляющіеся отъ различныхъ ломаныхъ линій слѣдуетъ считать неодинаковыми „законами вписыванія“.

§ 23. Только теперь, когда установлено точное понятіе о длинѣ кривой, можно показать, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

Вообразимъ между двумя данными точками прямую и какую угодно кривую и впишемъ въ послѣднюю произвольную ломаную линію.

Говоримъ: ломаная больше прямой (это было доказано ранѣе).

Начнемъ теперь удваивать число сторонъ ломаной линіи—периметръ ея будетъ увеличиваться и, слѣдовательно, она все время будетъ оставаться болѣе прямой, а потому и предѣлъ ломаной линіи—длина кривой, больше длины прямой.

Подобнымъ же образомъ легко было бы доказать и болѣе общую теорему: выпуклая линія (ломаная или кривая) короче всякой объемлющей ее линіи, проведенной между концами первой.

§ 24. Въ какой мѣрѣ идеи *Каталана* раздѣляются современной педагогической литературой?

Что касается до нѣмецкихъ учебниковъ, то объ нихъ было уже отчасти упомянуто и, сколько мнѣ извѣстно, значительное большинство ихъ построено на принципѣ *Архимеда*.

Во всѣхъ, мнѣ извѣстныхъ французскихъ учебникахъ, приняты принципы *Каталана*.

Въ нашей литературѣ большинство элементарныхъ учебниковъ придерживаются принциповъ *Архимеда*.

Какъ на исключенія можно указать на руководства *Билибина*, *Гика* и *Муромцева*, *Глаголева*, *Малинина* и *Егорова*, *Волкова* и нѣкоторыя другія.

Въ русскихъ учебникахъ высшей математики господствуютъ взгляды *Каталана*.

Я почти незнакомъ съ англійской математической литературой и потому ничего не могу сказать о ней; замѣчу только, что *Тотгентеръ* въ своемъ сочиненіи о дифференціальномъ исчисленіи приводитъ оба метода, выражаясь о новѣйшемъ такъ: „предыдущіе выводы можно получить еще другимъ способомъ, который предпочитаютъ нѣкоторые писатели.

§ 25. Въ интересахъ справокъ приводимъ бѣглый очеркъ литературы предмета.

1) *Дюгамель*. Методы Геометріи.

Въ этомъ сочиненіи читатель найдетъ развитіе взглядовъ *Bonnet* и доказательство необходимыхъ теоремъ.

Доказательство теоремы о независимости предѣла отъ закона вписыванія у Дюгамеля слишкомъ кратко, требуетъ большихъ развитій и едва ли доступно ученикамъ.

Такой же характеръ имѣетъ изложеніе этого предмета въ другомъ сочиненіи того же автора „Основанія исчисленія безконечно малыхъ“ и почти во всѣхъ курсахъ высшей математики, напримѣръ, у *Бертрана* въ его Traité de calcul different. et de calcul integral, у *Тотгентера* въ его „Дифференціальномъ исчисленіи“, у *Рощина* въ „Запискахъ по дифференц. и интегр. исчисленію.“

Тѣмъ не менѣе, полезно познакомиться со всѣми этими авторами, такъ какъ въ изложеніяхъ ихъ есть нѣкоторыя особенности.

2) *Rouché* et *Comberousse*. Traité de Géomterie. Здѣсь находится полное, ясное и простое изложеніе трактуемаго вопроса. Это самое лучшее, что я могу указать.

3) *Бось* и *Ребьеръ*. Элементарная геометрія. Изложеніе простое и толковое.

3) *Vacquant*. Cours de Géométrie élémentaire. Оригинальное, но нѣсколько сложное доказательство (1890 г.), примѣнимое и къ кривымъ двоякой кривизны.

5) *Билибинъ*. Элементарная геометрія. Обстоятельное, но осложненное изложеніе.

6) Le père *Henri Lacouture*. Géométrie élémentaire. (1891 г.)

7) *Houel*. Essai critique sur les principes fondamentaux de géométrie élémentaire. Здѣсь можно найти общія соображенія, относящіяся къ трактуемому вопросу.

М. Попруженко (Оренбургъ).

О КОЭФФИЦІЕНТАХЪ

ТРЕХЧЛЕНА $px^2 + qx + r$.

Въ 1888 году въ собраніи учителей математиковъ, въ Педагогическомъ музеѣ В. У. З., мной предложены и рѣшены были слѣдующіе вопросы относительно коэффиціентовъ p, q и r трехчлена $px^2 + qx + r$.

Въ трехчленѣ $px^2 + qx + r$ при измѣненіи x отъ a до b опредѣлить p, q и r такъ: 1) чтобы трехчленъ имѣлъ maximum или minimum равный данной величинѣ, 2) чтобы maximum или minimum былъ при значеніи x между a и b, 3) чтобы maximum или minimum былъ при значеніи x внѣ a и b, 4) чтобы значенія трехчлена не превосходили $-D$ и $+D$, 5) чтобы одинъ изъ коэф. p, q и r имѣлъ наибольшее численное значеніе, 6) чтобы при данномъ p наибольшее значеніе трехчлена было наименьшимъ.

Предлагаемые вопросы представляются обратными прямому основному вопросу, во всѣхъ эл. курсахъ алгебры излагаемому, что когда даны p, q и r, то трехчленъ $px^2 + qx + r$ имѣетъ maximum или minimum равный $r - \frac{q^2}{4p}$ при $x = \frac{-q}{2p}$ и притомъ если $p > 0$, то получается minimum, а при $p < 0$ будетъ maximum. Конечно, я не буду приводить доказательства рѣшенія этого прямого основного вопроса, но буду ссылаться на него.

(Далѣе счетъ задачъ и предложеній общій).

1) *Задача.* Если трехчленъ $px^2 + qx + r$ при $x = a$ получаетъ значеніе А, при $x = b$ получаетъ значеніе В, то опредѣлить p, q и r такъ, чтобы maximum или minimum былъ равенъ данной величинѣ С.

Рѣшеніе. Изъ условія задачи имѣемъ:

$$pa^2 + qa + r = A \quad (1)$$

$$pb^2 + qb + r = B \quad (2)$$

$$r - \frac{q^2}{4p} = C \quad (3)$$

Въ этихъ трехъ уравненіяхъ три неизвѣстныхъ p, q и r; рѣшая уравненія относительно p, q и r, получимъ

$$p = \frac{(\sqrt{A - C} \pm \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2}, \text{ (1-я формула)}$$

$$q = -\frac{2(\sqrt{A-C} \pm \sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C} \pm a\sqrt{B-C})}{(a - b)^2} \text{ (2-я форм.)}$$

$$r = \frac{(b\sqrt{A - C} \pm a\sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2} + C. \text{ (3-я форм.)}$$

2) *Предложеніе.* Когда $(A - C) > 0$ и $(B - C) > 0$, то, взявши въ 1-й, 2-й и 3-й формулахъ 2-й радикалъ съ верхнимъ знакомъ, получимъ коэффиціенты $p_1 = \frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a - b)^2}$,

$$q_1 = -\frac{2(\sqrt{A-C} + \sqrt{B - C})(b\sqrt{A-C} + a\sqrt{B-C})}{(a - b)^2}$$

$r_1 = \frac{(b\sqrt{A-C} + a\sqrt{B-C})^2}{(a - b)^2} + C$ трехчлена, имѣющаго minimum С при $x = c_1$, лежащемъ между a и b.

Доказательство.

Такъ какъ $p_1 = \frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a - b)^2}$ есть квадратъ, слѣд. $p_1 > 0$, а на основаніи прямого основного вопроса трехчленъ долженъ имѣть minimum. Чтобы показать, что c_1 находится между a и b, составимъ разности

$$a - c_1 = a + \frac{q_1}{2p_1} = \frac{(a-b)\sqrt{A - C}}{\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C}}$$

и $b - c_1 = b + \frac{q_1}{2p_1} = \frac{(b-a)\sqrt{B - C}}{\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C}}$ которыя, очевидно, разныхъ знаковъ, слѣд. c_1 находится между a и b. Чтобы показать, что здѣсь minimum трехчлена $=$ C, нужно составить выраженіе $r_1 - \frac{q_1^2}{4p_1}$, изъ коего послѣ подстановки получимъ C.

3) *Предложеніе.* Когда $(A-C) > 0$ и $(B-C) > 0$, то взявши въ 1-й, 2-й и 3-й формулахъ 2-й радикалъ съ нижнимъ знакомъ, получимъ коэффиціенты $p_2 = \frac{(\sqrt{A - C} - \sqrt{B - C})^2}{(a - b)^2}$,

$$q_2 = -\frac{2(\sqrt{A-C} - \sqrt{B-C})(b\sqrt{A-C} - a\sqrt{B-C})}{(a - b)^2},$$

и $r_2 = \frac{(b\sqrt{A-C} - a\sqrt{B-C})^2}{(a - b)^2} + C$ трехчлена, имѣющаго minimum C при $x = c_2$, лежащемъ внѣ a и b.

Доказ.

Такъ какъ p_2 есть квадратъ, слѣд. $p_2 > 0$ и слѣд. трехчленъ долженъ имѣть minimum. Чтобы показать, что c_2 лежитъ внѣ a и b, составимъ разности

$$a - c_2 = a + \frac{q_2}{2p_2} = \frac{(a - b)\sqrt{A - C}}{\sqrt{A - C} - \sqrt{B - C}}$$

и $b - c_2 = b + \frac{q_2}{2p_2} = \frac{(a - b)\sqrt{B - C}}{\sqrt{A - C} - \sqrt{B - C}}$, которыя, очевидно, одного знака, слѣд. c_2 лежитъ внѣ a и b. Чтобы показавъ, что здѣсь minimum трехчлена равенъ C, нужно составить выраженіе $r_2 - \frac{q_2^2}{4p_2}$, изъ коего послѣ подстановки получимъ C.

4) *Предложеніе.* Если въ трехчленѣ $p_1x^2 + q_1x + r_1$ у всѣхъ коэффиціентовъ перемѣнимъ знакъ на обратный, то получимъ трехчленъ $p_3x^2 + p_3x + r_3$, имѣющій maximum $(-C)$ при $x = c_3$, лежащемъ между a и b.

Доказ.

Такъ какъ $p_3 = -p_1 = -\frac{(\sqrt{A-C} + \sqrt{B-C})^2}{(a - b)^2}$, то $p_3 < 0$, слѣд. трехчленъ долженъ имѣть maximum. Чтобы показать, что c_3 лежитъ между a и b составимъ разности:

$$a - c_3 = a + \frac{q_3}{2p_3} = \frac{(a-b)\sqrt{A-C}}{\sqrt{A-C}+\sqrt{B-C}}$$

и $b - c_3 = b + \dfrac{q_3}{2p_3} = \dfrac{(b-a)\sqrt{B-C}}{\sqrt{A-C}+\sqrt{B-C}}$, которыя, очевидно, разныхъ знаковъ, слѣд. c_3 лежитъ между a и b. Чтобы показать, что maximum равенъ $(-C)$, нужно составить выраженіе $r_3 - \dfrac{q_3^2}{4p_3}$, изъ коего послѣ подстановки получимъ $(-C)$.

5) *Предложеніе.* Если въ трехчленѣ $p_2x^2+q_2x+r_2$ у всѣхъ коэффиціентовъ перемѣнимъ знакъ на обратный, то получимъ трехчленъ $p_4x^2+q_4x+r_4$, имѣющій maximum $(-C)$ при $x=c_4$, лежащемъ внѣ a и b.

Доказательство подобно предыдущему.

Замѣчаніе. Изъ предыдущаго видно, что при одинаковыхъ значеніяхъ x трехчлены $p_1x^2+q_1x+r_1$ и $p_3x^2+q_3x+r_3$, а также ихъ коэффиціенты имѣютъ численныя значенія равныя, но знаковъ противоположныхъ; точно также $p_2x^2+q_2x+r_2$ и $p_4x^2+q_4x+r_4$. Слѣдующія задачи касаются только численныхъ значеній трехчлена и его коэффиціентовъ, а потому для рѣшенія ихъ слѣдуетъ изслѣдовать только $p_1x^2+q_1x+r_1$ и $p_2x^2+q_2x+r_2$.

6) *Задача.* Если въ трехчленѣ px^2+qx+r мѣнять значенія x отъ a до b, то требуется опредѣлить p, q и r такъ, чтобы значенія трехчлена не превышали $\pm D$,

Рѣшеніе.

На основаніи предыдущаго замѣчанія только для каждаго $p_1x^2+q_1x+r_1$ и $p_2x^2+q_2x+r_2$ нужно найти необходимыя и достаточныя условія, удовлетворяющія задачѣ.

Въ трехчленѣ $p_1x^2+q_1x+r_1$ коэффиціенты зависятъ отъ A, B и C, гдѣ A и B суть значенія трехчлена при a и b, C же есть minimum при $x=c_1$, лежащемъ между a и b. Чтобы трехчленъ удовлетворялъ условіямъ задачи, необходимо и достаточно подчинить A, B и C неравенствамъ $-D < A < +D$, $-D < B < +D$ и $-D < C < +D$. Необходимость этихъ неравенствъ ясно видна изъ условія задачи; потому что, если хотя одно изъ значеній A, B и C будетъ превышать $\pm D$, то это будетъ противорѣчить условію задачи. Чтобы убѣдиться въ достаточности указанныхъ неравенствъ, прослѣдимъ измѣненіе трехчлена при переходѣ x отъ a до b. Пусть $A = +D = B$ и $C = -D$. Такъ какъ $p_1x^2+q_1x+r_1$ имѣетъ minimum C при $x=c_1$, лежащемъ между a и b, то при переходѣ отъ a до b, x пройдетъ непремѣнно черезъ c_1. Значитъ, когда x мѣняетъ значенія отъ a до c_1, то значенія трехчлена убываютъ отъ $+D$ до $-D$; откуда ясно, что промежуточныя значенія трехчлена не превышаютъ $\pm D$. Далѣе, при измѣненіи x отъ c_1 до b значенія трехчлена будутъ возростать отъ $-D$ до $+D$; такъ что промежуточныя значенія трехчлена также содержатся между $-D$ и $+D$. Изъ всего этого ясно, что при переходѣ x отъ a до b значенія $p_1x^2+q_1x+r_1$ не превышаютъ $\pm D$.

Теперь возьмемъ $p_2x^2+q_2x+r_2$, въ которомъ p_2, q_2 и r_2 зависятъ такъ же отъ A, B и C, имѣющемъ тотъ же смыслъ, но только C есть minimum при $x=c_2$, лежащемъ внѣ a и b. Чтобы трехчленъ $p_2x^2+q_2x+r_2$ удовлетворялъ условію задачи, необходимо и достаточно только A и B подчинить неравенствамъ $-D<A<+D$, $-D<B<+D$, а C можетъ превосходить D. Необходимость этихъ неравенствъ вытекаетъ изъ условія задачи. А чтобы убѣдиться въ достаточности ихъ, прослѣдимъ измѣненіе трехчлена при переходѣ x отъ a до b. Пусть $A=+D$, $B=-D$, а C можетъ принимать значенія $-D$, $-2D$, ... $-\infty$. Такъ какъ c_2 находится внѣ a и b, то x при переходѣ отъ a до b не пройдетъ чрезъ c_2 и, слѣд., значенія трехчлена будутъ все убывать отъ $+D$ до $-D$, т. е. не превзойдутъ $\pm D$.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Преп. мат. 5-й Спб. гимн. *И. Травчетовъ.*

НОВЫЯ КНИГИ,

ПРИСЛАННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ.

(Продолженіе.)

7) **Руководство къ практикѣ физическихъ измѣреній** съ прибавленіемъ статьи объ абсолютной системѣ мѣръ. *Ф. Кольрауша*, проф. Страсбургскаго университета. Переводъ съ 6-го изданія *П. С. Дрентельна* съ приложеніемъ, сдѣланнымъ подъ редакціею проф. *И. И. Боргмана*. (Съ 83 рисунками

въ текстѣ) Спб. 1891. Изданіе К. Л. Риккера. Цѣна 3 рубля (съ перес. 3 руб. 30 коп.).

8) **Изъ исторіи и философіи понятія о цѣломъ положительномъ числѣ.** Проф. *А. Васильева.* Казань 1891. *)

9) **Ученіе о положительныхъ и отрицательныхъ числахъ** въ алгебраическомъ анализѣ. Въ помощь учащимся составилъ преподаватель математики *В. К. Горизонтовъ.* Симбирскъ. 1891 г. Цѣна 40 коп. съ пересылкой. **).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

▬ **Метрическая система** мѣръ и вѣсовъ оффиціально вводится съ будущаго года въ Египтѣ. А у насъ когда?

▬ Празднованіе 70-лѣтняго **юбилея Гельмгольца** отложено до дня 2-го ноября тек. года.

▬ 11 мая (н. с.) въ Парижѣ скончался извѣстный французскій физикъ **Эдмундъ Беккерель.**

▬ 2-го августа скончался одинъ изъ наиболѣе выдающихся современныхъ нашихъ физиковъ **Робертъ Андреевичъ Колли,** бывшій профессоръ Казанскаго университета, потомъ Петровской Академіи и въ послѣднее время—Московскаго университета.

▬ 1-го іюня тек. года скончался всѣми уважаемый Директоръ Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній, генералъ-лейтенантъ **Всеволодъ Порфирьевичъ Коховскій,** благодаря энергіи и неутомимой дѣятельности котораго Музей дѣйствительно сдѣлался столичнымъ центромъ распространенія полезныхъ свѣдѣній, посредствомъ публичныхъ чтеній, демонстрацій, педагогическихъ собраній и т. д. Болѣе подробная оцѣнка заслугъ покойнаго была помѣщена во многихъ газетахъ и журналахъ въ теченіе лѣтнихъ мѣсяцевъ. См. напр. Іюльскую книжку „Педагогическаго Сборника“, №№ 6—7 журнала „Русскій Начальный Учитель“ и др.

---

*) Отдѣльный оттискъ изъ № 1 «Извѣстій Физико-Мат. Общества при Имп. Казанскомъ Университетѣ. Весьма подробное извлеченіе изъ этой рѣчи проф. А. Васильева, произнесенной 28 окт. 1890 г. при открытіи Казанскаго Физико-Математическаго Общества, было помѣщено въ № 120 «Вѣстника» (см. Сем. X стр. 221—228).

**) Имѣется для продажи въ книжномъ складѣ редакціи.

КЛАССНЫЯ УПРАЖНЕНІЯ.

(Геометрія.)

При общепринятомъ способѣ преподаванія геометріи, вслѣдствіе злоупотребленія чертежемъ, зрѣніе учащихся работаетъ болѣе, чѣмъ ихъ воображеніе. Впослѣдствіи, недостаточное развитіе этой способности обнаруживается трудностью пониманія различныхъ механическихъ, физич. и др. явленій. Въ виду этого я полагалъ бы необходимымъ при классномъ преподаваніи геометріи посвящать всякій урокъ хоть по нѣсколько минутъ на переспрашиваніе учениковъ по вопросамъ въ родѣ нижеслѣдующихъ, предлагаемымъ всему классу.

1. Данъ треугольникъ ABC (на доскѣ). $AB < BC < CA$. (*Читать* фигуру условимся всегда по направленію движ. часовой стрѣлки). Пусть △ нарисованъ такъ, что AC горизонтально. Поверните △ въ его плоскости по направл. дв. час. стр. (въ обратномъ направленіи) около A (около B, около C) такъ, чтобы AC опять было горизонтально, чтобы AB (или BC) стало горизонтально (вертикально) и пр. Гдѣ тогда будетъ вершина угла A (или B, или C), какъ будетъ направлена сторона AB (BC, CA)? И пр. (Всѣ отвѣты—словесные, безъ чертежа).

2. Поворачиваніе плоскости фигуры. Напримѣръ: поверните △ ABC на 90°, (180°, 270°, 360°) около стороны AB (BC, CA) около высоты его BD и пр. (Конусы, двойные и простые). Поверните △ такъ, чтобы къ намъ была обращена задняя сторона его плоскости. (Симетрія фигуръ). Поверните △ около прямой MN, проходящей черезъ его вершину B параллельно (или непараллельно) основанію AC. Какое получится тѣло вращенія? Поверните △ около оси PQ, лежащей въ его плоскости и внѣ его. Какое получится тѣло вращенія? И пр.

3. Перенесеніе *плоской* фигуры на другія поверхности. Перенести △ ABC на поверхность даннаго цилиндра такъ, чтобы: такая то его сторона не согнулась, чтобы она превратилась въ дугу круга и пр. Измѣнится ли при этомъ периметръ треугольника, его площадь, длина его сторонъ, величина его угловъ? Из-

мѣнится ли разстояніе между его вершинами? Какъ надо поступать на практикѣ, чтобы данный на плоскости △ перечертить на боковую поверхность цилиндра въ требуемомъ мѣстѣ и положеніи? (И обратно). Перенесите на бок. пов. цилиндра острый уголъ такъ, чтобы одна изъ его сторонъ превратилась въ окружность; во что превратится тогда другая сторона? (Винты). И пр.

Перенесеніе плоскаго треугольника на боковую поверхность призмъ.

Подобные же вопросы относительно перенесенія △ на бок. поверхность прямого конуса и пирамидъ.

4. Предполагая, что стороны △-а нерастяжимы и несократимы, перенесите его на поверхность шара такъ, чтобы всѣ три стороны были дугами большихъ круговъ. Какъ измѣнится при этомъ величина угловъ и площади △-а? При какомъ условіи равносторонній △ превращается при такомъ перенесеніи въ треугольникъ съ тремя прямыми углами? Во что превращается на поверхности шара такъ перенесенный уголъ? И пр.

Перенесите плоскій △ на поверхность сферы такъ, чтобы величина трехъ его угловъ не измѣнилась. Что сдѣлается тода со сторонами? Какъ измѣнится площадь? И пр.

(Географическій глобусъ и ландкарты. Что въ послѣднихъ невѣрно?)

5. Заламываніе фигуръ до совмѣщенія. Данный △ ABC загнемъ по высотѣ его BD до совмѣщенія плоскостей ABD и DBC. Что получится? Частные случаи △-овъ равнобедр., равносторон. Что произойдетъ, когда высота BD лежитъ внѣ △-а? Заламываніе около биссектора BE. Что произойдетъ? Частные случаи. Тоже около медіаны BF. Что произойдетъ? Откуда при этомъ послѣднемъ заламываніи видно, что медіана дѣлитъ площадь треугольника пополамъ? Заламываніе △-а около перпендикуляра FG, возстановленнаго изъ середины стороны AC. Что произойдетъ? Заламываніе △-а около произвольно проведенной сѣкущей. И пр. Такіе же вопросы относительно складыванія параллелограма, ромба, четыреугольника, трапеціи, антипараллелограма (т. е. вписуемаго въ кругъ четыреугольника), около ихъ діагоналей и пр.

6. Разчлененіе фигуръ и преобразованіе переложеніемъ частей. Разсѣченіе △-а по высотамъ (напр. по BD, потомъ по DH

и DI, далѣе по HK, HL, IM и IN и т. д. вообще на 2^n прямоугольныхъ треугольниковъ), по биссекторамъ и медіанамъ. Пересѣченіе различныхъ четыреугольниковъ по ихъ діагоналямъ. Дѣленіе многоугольниковъ на треугольники и пр. Образованіе новыхъ фигуръ переложеніемъ полученныхъ частей даетъ весьма богатый и удобный матеріалъ для подобнаго рода умственныхъ упражненій въ классѣ. Напр. превратить данный параллелограмъ въ прямоугольникъ, этотъ послѣдній въ равнобед. $\triangle$; затѣмъ этотъ $\triangle$ разбить на трапецію и одинаковой съ нею высоты равноб. $\triangle$, изъ которыхъ перестановкой получить опять параллелограммъ. И т. д.

NB. При всѣхъ сюда относящихся упражненіяхъ рекомендуется прибѣгать къ пособію нагляднаго чертежа лишь въ самыхъ необходимыхъ случаяхъ.

Б. У. (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 235. Данъ безконечный рядъ

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots.$$

Разобьемъ его на два ряда

$$S' = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

$$\text{и } S'' = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

Изъ почленнаго сравненія, очевидно, что

$$S' > S'' \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Но рядъ S'' можно написать и такъ:

$$S'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots\right)$$

т. е. $$S'' = \frac{1}{\sqrt{2}} S = \frac{1}{\sqrt{2}}(S' + S'')$$

Отсюда: $$S''(\sqrt{2} - 1) = S'$$

т. е. $$S'' > S' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
что прямо противорѣчитъ неравенству (1).

Требуется разъяснить этотъ парадоксъ.

(Заимств.) *П. П.* (Одесса).

№ 236. Биссекторы внутреннихъ угловъ параллелограмма ABCD образуютъ своимъ пересѣченіемъ прямоугольникъ P, а биссекторы внѣшнихъ угловъ—прямоугольникъ Q. По даннымъ сторонамъ параллелограмма AB $= a$ и BC $= b$ требуется опредѣлить: 1) радіусы круговъ, описанныхъ около прямоугольниковъ P и Q и 2) отношеніе площадей P и Q къ площади ABCD.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 237. Даны двѣ окружности радіусовъ R и r, касающіяся внутренне въ точкѣ A. Въ этой-же точкѣ A находится одна изъ вершинъ треугольника ABC, двѣ другія вершины котораго B и C лежатъ на большей окружности, при чемъ сторона BC касательна къ меньшей окружности и въ точкѣ касанія D дѣлится въ отношеніи $m : n$. По этимъ даннымъ требуется вычислить стороны треугольника. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 238. Данный треугольникъ ABC пересѣчь сѣкущей XYZ (X—на AB, Y — на BC и Z—на продолженіи AC) такъ, чтобы разность отрѣзковъ YX и ZY была равна данной длинѣ и чтобы сѣкущая имѣла данное направленіе. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

№ 239. Опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{Sin}^2 a\right)\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{Sin}^2\frac{a}{3}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{Sin}^2\frac{a}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{Sin}^2\frac{a}{3^{n-1}}\right)$$

при увеличеніи n до безконечности. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 240. Тѣло, имѣющее массу въ m гр. и удѣльную теплоту c, движется со скоростью v цм. въ секунду. Опредѣлить на сколько градусовъ могло бы оно нагрѣться при внезапной остановкѣ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 2 Октября 1891 г.
Типо-литографія Штаба Одесскаго военнаго Округа. Тираспольская, № 14.

Обложка
пщется

Обложка
ищется