

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 100.

IX Сем.

21 Сентября 1890 г.

№ 4.

РОЛЬ МАШИНЫ АТВУДА

въ воображаемомъ опытномъ доказательствѣ второго закона Ньютона.

Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду остановиться на двухъ частныхъ фактахъ въ ходѣ развитія нашихъ понятій о явленіяхъ природы и пояснить ими шаткость нѣкоторыхъ разсужденій, основанныхъ на смѣшеніи истинъ апіорныхъ съ истинами опытными.

Для нашей цѣли мы остановимся на двухъ истинахъ:

- 1) Всѣ тѣла падаютъ одинаково (1-й законъ Галлилея).
- 2) Сила измѣряется произведеніемъ изъ массы и ускоренія тѣла, на которое она дѣйствуетъ (2-й законъ Ньютона).

Первая истина есть результатъ опыта и безъ помощи этого послѣдняго установлена быть не можетъ.

Вторая истина есть наше условіе о томъ, какую силу намъ считать больше другой и во сколько разъ. Будучи нашимъ условіемъ, второй законъ Ньютона никакими опытами доказанъ быть не можетъ. Попытки опытнаго доказательства этого закона были-бы однозначущи съ желаніемъ доказать опытомъ, что въ кругѣ всѣ радіусы равны или что треугольникъ имѣетъ три стороны. Только тогда второй законъ Ньютона не былъ-бы опредѣленіемъ, когда мы имѣли-бы другіе признаки существованія силы помимо производимыхъ ею дѣйствій, т. е. сообщенія ускореній массамъ; но тогда мы и силою называли-бы не то, что дается опредѣленіемъ, заключающимся въ первомъ законѣ Ньютона.

Однако исторія науки указываетъ намъ на существованіе совершенно обратныхъ представленій относительно обѣихъ выведенныхъ истинъ: законъ Галлилея старались вывести изъ апіорныхъ опредѣленій, а второй законъ Ньютона—оправдать и доказать опытомъ.

Замѣчательно, что самъ Галлилей, выведшій изъ своихъ опытовъ первый законъ паденія тѣлъ, въ то же время старался дать этому закону апіорное доказательство. Упомянутое доказательство основано на томъ, что предположеніе Аристотеля о большей скорости паденія болѣе тяжелыхъ тѣлъ ведетъ будто-бы къ противорѣчію самому себѣ. Если тѣло M , будучи тяжелѣе тѣла m , падаетъ скорѣе этого послѣдняго, то оба тѣла M и m , связанные другъ съ другомъ и представляющія новое тѣло $M+m$, еще болѣе тяжелое, должны-бы были по Аристотелю падать еще скорѣе, между тѣмъ, съ другой стороны, тѣло $M+m$ должно падать

медленнее чѣмъ M и скорѣе чѣмъ m , ибо тѣла, обладающія разными скоростями, будучи связаны вмѣстѣ, должны двигаться съ нѣкоторою среднею скоростію, при чемъ тѣло, обладавшее прежде большею скоростью, ускорить движеніе тѣла, обладавшаго меньшею скоростію, а это послѣднее замедлить движеніе перваго. Такимъ образомъ, говоритъ Галлилей, предположеніе, что большая тяжесть движется скорѣе чѣмъ меньшая, приводитъ къ слѣдствію, что большая-же тяжесть (другой разъ) движется медленнѣе *).

Кажущійся апріорный характеръ вышеприведеннаго разсужденія вытекаетъ изъ предположенія очевидности того, что двѣ отдѣльныя массы, получающія отъ дѣйствія земли различныя ускоренія, должны замедлять и соотвѣтственно ускорять одна другую, когда онѣ будутъ связаны вмѣстѣ. Заключение о такого рода замедленіи и ускореніи было-бы очевидно, если было-бы доказано, что дѣйствіе тяжести на данную массу остается безъ измѣненія, когда эта послѣдняя связана съ другою. Какъ на примѣръ возможности подобнаго измѣненія можно указать на случай двухъ нѣкоторыхъ кусковъ мягкаго желѣза A и B , находящихся подъ дѣйствіемъ нѣкотораго магнита M : этотъ послѣдній вообще обнаруживаетъ различныя дѣйствія на A и B , взятые порознь или вмѣстѣ, ибо въ послѣднемъ случаѣ A и B намагничиваютъ другъ друга дополнительнымъ образомъ и измѣняютъ свои отношенія къ магниту M .

Но требуемое доказательство того, что тяжесть дѣйствуетъ на каждую часть массы независимо отъ остальныхъ частей этой послѣдней, и есть ничто иное, какъ слѣдствіе опытнаго закона одинаковости паденія тѣлъ, ведущаго къ заключенію о пропорціональности вѣса массъ, а слѣдовательно — и къ независимости дѣйствія тяжести на отдѣльныя части тѣла. Такимъ образомъ въ разсужденіи Галлилея предполагается уже доказаннымъ тотъ самый законъ паденія, который изъ разсужденій долженъ быть выведенъ.

Можно было-бы замѣтить, что заключеніе о дѣйствіи тяжести на каждую часть массы независимо отъ прочихъ ея частей, однозначно съ заключеніемъ о независимости вѣса тѣла отъ его формы, и что такое заключеніе могло-бы быть выведено изъ опытовъ со взвѣшиваніемъ. Въ такомъ случаѣ законъ одинаковости паденія могъ-бы быть выведенъ безъ непосредственнаго опыта. Но и подобное разсужденіе было-бы не вполне строго, ибо непосредственный опытъ съ паденіемъ тѣлъ доказывалъ-бы тогда, что независимость вѣса отъ формы тѣлъ, существующая въ равновѣсіи, сохраняется при всякой ихъ скорости. Примѣръ возможности обратнаго явленія представляетъ намъ дѣйствіе нѣкотораго тока I на два другіе тока i и i' : въ положеніяхъ равновѣсія (т. е. безъ измѣненія взаимнаго расположенія) дѣйствіе I на i не зависитъ отъ присутствія i' ; но во время движенія возникаютъ индуктивные токи, при которыхъ упомянутая независимость уже не имѣетъ мѣста.

*) Это доказательство помѣщено въ книгѣ Галлилея: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica etc.* Leida. 1638. Законы паденія излагаются въ видѣ разговора трехъ лицъ, и идеи Галлилея вложены въ реплики Сальвіати.

Что касается теперь до второго закона Ньютона, то мы находимъ во многихъ, весьма солидныхъ въ другихъ отношеніяхъ, курсахъ физики такое положеніе, что упомянутые законы могутъ быть провѣрены съ помощью машины Атвуда *). Такъ какъ второй законъ Ньютона (подобно первому и третьему) представляетъ собою произвольно поставленное опредѣленіе, то при всякой опытной провѣркѣ доказываться будетъ не этотъ законъ, а тѣ условія, существованіе которыхъ при опытѣ принято за доказанное прежде или за очевидное. Подобно тому, если бы мы пожелали провѣрить непосредственнымъ измѣреніемъ, напримѣръ, свойства сѣкущихся круга, то провѣрили-бы только правильность сдѣланнаго чертежа круга и сѣкущихся, а не правильность самой теоремы.

Провѣрка машиною Атвуда законовъ дѣйствія силы обыкновенно предлагается въ слѣдующемъ видѣ:

1) Наблюденіемъ равномѣрно ускореннаго движенія, обусловливаемого прибавочнымъ грузомъ, будто-бы должно подтверждаться то, что одна и та же сила, дѣйствуя непрерывно, производитъ одно и то же ускореніе. Существованіе неизмѣнной силы предполагается при этомъ несомнѣннымъ. Между тѣмъ упомянутымъ опытомъ именно это послѣднее и доказывается, т. е. то, что вѣсъ тѣла при паденіи, въ предѣлахъ опыта, не измѣняется, чего заранѣе предсказать было-бы нельзя. Если-бы раньше было установлено, съ помощью вѣсовъ, что, при незначительной разности высотъ надъ землею, вѣсъ тѣла не мѣняется, то опытъ съ Атвудовой машиной показалъ-бы, что вѣсъ не зависитъ отъ скорости, какъ это случается со взаимодействіемъ двухъ движущихся токовъ или тока и магнита. Или наконецъ тотъ-же опытъ свидѣтельствовалъ-бы намъ о томъ, на сколько въ данномъ случаѣ незамѣтна роль тренія частей машины.

2) Увеличивая массу прибавочнаго груза вдвое, втрое и т. д. такимъ образомъ, чтобы масса всѣхъ подвижныхъ частей машины оставалась неизмѣнною, мы замѣчаемъ, что скорости, приобретаемыя подвижными частями къ концу одного и того-же промежутка времени, будутъ соотвѣтственно вдвое, втрое и т. д. болѣе. Такого рода опытъ разсматривается, какъ провѣрка того закона, что силы, считаемыя нами вдвое, втрое и т. д. большими, должны одной и той-же массѣ въ одинъ и тотъ-же промежутокъ времени сообщать во столько-же разъ большія скорости. При этомъ допускается очевидность предположенія, что прибавочный грузъ, имѣющій въ n разъ большую массу, будетъ во столько-же разъ тяжелѣе, что однако слѣдуетъ только изъ опытнаго факта одинаковости паденія тѣлъ. Такимъ образомъ, желая провѣрить упомянутымъ способомъ законъ Ньютона, мы собственно провѣряемъ законъ Галлилея.

3) Увеличивая массу подвижныхъ частей машины и оставляя прибавочный грузъ однимъ и тѣмъ-же, мы наблюдаемъ къ концу одного и того-же промежутка времени приращенія скоростей обратно пропорціональныя движущимся массамъ. Этимъ опытомъ предполагается провѣрять то положеніе, что одна и та же сила разнымъ массамъ къ концу одного и

*) Напримѣръ, подобное разсужденіе приводится въ извѣстномъ курсѣ физики Pellat.

того-же промежутка времени сообщаетъ тѣмъ меньшія скорости, чѣмъ больше массы. Въ дѣйствительности-же здѣсь провѣряется тотъ фактъ, что при условіяхъ опыта мы имѣемъ право сдѣлать предположеніе о дѣйствіи одной и той-же силы; другими словами, доказывается только, что, при измѣняющихся обстоятельствахъ, вѣсь прибавочнаго груза остается неизмѣннымъ и что на него не имѣетъ вліянія ни скорость его движенія, ни его скрѣпленіе съ болѣею массою.

Проф. Н. Шиллеръ.

КЪ РЕФОРМѢ УЧЕБНИКА ФИЗИКИ.

ВНѢШНІЯ ДѢЙСТВІЯ ТОКА.

(Продолженіе)*).

§ 30. *Установившееся и неустановившееся электронатяженіе.* Говоря до сихъ поръ объ электронатяженіи, какъ объ особомъ состояніи среды, окружающей токъ (или магнитъ), мы предполагали его *стационарнымъ* т. е. уже установившимся и неизмѣннымъ. На самомъ дѣлѣ такое стационарное состояніе среды можетъ существовать лишь при условіи, когда токи (и магниты), которыми оно вызвано, не измѣютъ своего относительнаго положенія, и когда сила токовъ (и магн. моменты магнитовъ) остаются абсолютно неизмѣнными. Итакъ *стационарное электронатяженіе возможно только при постоянствѣ вѣсхъ силъ токовъ и геометрискаго коэффиціента системы.*—При нарушеніи одного изъ этихъ условій, или обоихъ вмѣстѣ, внѣшнія силы тока въ каждой данной точкѣ измѣняются какъ функціи времени, и электронатяженіе вообще называется *неустановившимся* или *перемѣннымъ*. (Примѣры).

§ 31. *Возникающее электронатяженіе.* Путемъ опыта мы не можемъ рѣшить вопроса, которое изъ двухъ явленій: тока въ проводникѣ и электронатяженія внѣ проводника—предшествуетъ другому; для насъ эти нераздѣльно связанныя явленія кажутся возникающими одновременно**). Возникшее электронатяженіе, распространяясь во всѣ стороны отъ своего проводника съ очень большою скоростью, устанавливается однакожь не мгновенно, а—какъ показываетъ опытъ—въ нѣкоторый конечный промежутокъ времени, въ теченіе котораго оно *усиливается* (понимая подъ этимъ вообще процессъ увеличенія потенциальной энергіи среды). Слѣдовательно всякое возникающее электронатяженіе можно называть еще *усиливающимся*.

§ 32. *Усиливающееся электронатяженіе бываетъ:*

1) Въ теченіе весьма короткаго промежутка времени τ , непосредственно слѣдующаго за моментомъ замыканія цѣпи, содержащей проводникъ и источникъ тока постоянной силы; въ этомъ случаѣ періодъ уси-

*) См. „Вѣстникъ“ № 97 и 98.

**) Есть основанія предполагать, что не токъ вызываетъ электронатяженіе, а наоборотъ—самый токъ есть только слѣдствіе электронатяженія. Но вопросъ этотъ, какъ гипотетическій, оставимъ въ сторонѣ.

ленія электронатяженія τ прямо пропорціоналенъ геометрическому коэф-
фициенту цѣпи и обратно пропорціоналенъ ея сопротивленію.

2) Въ теченіе времени t , въ которое geometr. коэффициентъ про-
водника (или системы) съ постояннымъ токомъ (или токами) по какой бы
то ни было причинѣ увеличивается (§ 20).

3) Въ теченіе времени t_1 , въ которое въ проводникѣ, не мѣняющемъ
своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ увеличи-
вается (§ 7).

Когда проводникъ тока съ установившимся уже электронатяженіемъ
перемѣщается весь подъ вліяніемъ какихъ нибудь силъ, то вмѣстѣ съ
нимъ переносится и электронатяженіе. Само по себѣ оно остается въ
этомъ случаѣ неизмѣннымъ, но относительно неподвижныхъ въ про-
странствѣ точекъ, къ которымъ постоянный токъ приближается, оно
становится усиливающимся. А потому:

4) Въ данной точкѣ электронатяженіе усиливается въ теченіе вре-
мени t_2 , въ которое къ этой точкѣ приближается не мѣняющій своей
формы проводникъ съ постояннымъ токомъ (такъ что увеличивается
тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ этой точки контуръ тока).

§ 33. *Исчезающее электронатяженіе.* Когда въ проводникѣ съ по-
стояннымъ токомъ и установившимся электронатяженіемъ токъ мгновенно
будетъ уничтоженъ, то электронатяженіе, которое само по себѣ суще-
ствовать не можетъ, тоже уничтожается, но при этомъ исчезаетъ не
мгновенно, а въ нѣкоторый промежутокъ времени, въ который оно по-
степенно ослабѣваетъ (понимая подъ этимъ вообще процессъ уменьше-
нія потенциальной энергіи среды). Слѣдовательно всякое исчезающее
электронатяженіе можно назвать *ослабѣвающимъ*.

§ 34. *Ослабѣвающее электронатяженіе* бываетъ:

1) Въ теченіе весьма короткаго промежутка времени τ' , непосред-
ственно слѣдующаго за моментомъ размыканія цѣпи, содержащей про-
водникъ и источникъ тока постоянной силы. (Ниже будетъ разъяснено
почему этотъ промежутокъ времени τ' при одинаковыхъ условіяхъ обык-
новенно бываетъ меньше τ (§ 32)).

2) Въ теченіе времени t' , въ которое geometr. коэффициентъ про-
водника (или системы) съ постояннымъ токомъ (или токами) по какой бы
то ни было причинѣ уменьшается.

3) Въ теченіе времени t'_1 , въ которое въ проводникѣ, не мѣняющемъ
своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ уменьшается.

4) Въ данной точкѣ электронатяженіе ослабѣваетъ въ теченіе вре-
мени t'_2 , въ которое отъ этой точки удаляется не мѣняющій своей формы
проводникъ съ постояннымъ токомъ (такъ что уменьшается тѣлесный
уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ этой точки контуръ тока).

§ 35. *Характерное свойство усиливающейся электронатяженія* за-
ключается въ стремленіи какъ будто вытолкнуть вонъ изъ сферы своего
распространенія всякій встречаемый по пути посторонній проводникъ,
независимо отъ его размѣровъ, вещества, формы, расположенія, а также
отъ того, существуетъ ли въ немъ другой токъ или нѣтъ *).

*) Въ пользу такого допущенія говорятъ *отчасти* опыты Э. Томсона (оттал-
киванія металлическихъ колецъ) и И. Боргмана (вращеній ртуті) надъ механиче-

номъ случаѣ (не подлежащемъ опытной провѣркѣ) абсолютно подвижнаго и лишеннаго инерціи проводника, онъ былъ бы отброшенъ усиливающимся электронатяженіемъ со скоростью его распространенія, при чемъ въ самомъ проводникѣ не произошло бы никакихъ перемѣнъ. Въ дѣйствительности, усиливающееся электронатяженіе не въ состояніи побѣдить представляемаго реальнымъ постороннимъ проводникомъ сопротивленія его перемѣщенію: онъ остается поэтому—вообще говоря—на прежнемъ мѣстѣ, но за то *работа электронатяженія, затраченная противъ всѣхъ сопротивленій проводника, поглощается этимъ послѣднимъ и обнаруживается въ видѣ несогласнаго тока*, т. е. въ видѣ тока такого направленія, что по законамъ электродинамики (§§ 22, 24) посторонній проводникъ стремится удалиться отъ того основного тока, которымъ вызвано усиленіе электронатяженія *).

§ 36. *Характерное свойство ослабляющаго электронатяженія* заключается въ стремленіи какъ будто втянуть внутрь всякій посторонній проводникъ; въ идеальномъ случаѣ абсолютно подвижный и лишенный инерціи посторонній проводникъ, подъ вліяніемъ ослабляющаго электронатяженія слился бы съ основнымъ проводникомъ. Въ дѣйствительности, посторонній реальный проводникъ—вообще говоря—остается на прежнемъ мѣстѣ, но за то *работа электронатяженія, затраченная противъ всѣхъ силъ сопротивленія проводника*, поглощается этимъ послѣд-

скими дѣйствіями альтернативныхъ и прерывистыхъ токовъ. (См. статьи И. Борзмана въ № 96 „Вѣстника“ и въ 6-мъ Вып. Ж. Р. Ф.-Х. Общ. за тек. годъ). Но эти явленія гораздо сложнѣе.

*) Вышеизложенное гипотетическое, повидимому, свойство усиливающагося электронатяженія есть лишь слѣдствіе изъ явленій индукціи. Въ самомъ дѣлѣ, если подъ вліяніемъ тока А въ постороннемъ неподвижномъ проводникѣ В вызывается несогласный индуктивный токъ, а съ другой стороны извѣстно, что удаленіе отъ А проводника В вызываетъ въ немъ согласный инд. токъ, то существуетъ такая скорость, съ которою удаляемый отъ А проводникъ В не обнаружитъ никакого индуктивнаго тока. Допущеніе, что эта скорость v меньше или больше скорости распространенія самого электронатяженія w , неминуемо привело бы насъ къ противорѣчіямъ, а именно въ 1-мъ случаѣ пришлось бы принять, что въ проводникѣ В подъ вліяніемъ усиливающагося электронатяженія не обнаруживается никакихъ перемѣнъ, а во 2-мъ, при $v > w$, т. е. при $v = w + a$ пришлось бы принять, что при удаленіи проводника В со скоростью $v - (a - a)$, гдѣ $a < a$, т. е. въ проводникѣ, находящимся внѣ всякаго электронатяженія, вызывается индуктивный токъ. Слѣдовательно остается принять, что при удаленіи всякаго посторонняго проводника со скоростью распространенія самого электронатяженія въ немъ не обнаружится никакого индукт. тока, т. е. никакого поглощенія энергіи. Отсюда видимъ, что ничто намъ не мѣшаетъ принять такое положеніе: „возникновеніе индуктивныхъ токовъ есть слѣдствіе инерціи массы проводника, и было бы невозможнымъ въ проводникахъ лишенныхъ инерціи и выталкиваемыхъ электронатяженіемъ по мѣрѣ его распространія“. Впрочемъ, если включеніе въ учебный курсъ такого положенія, которое не можетъ быть доказано опытомъ, покажется неумѣстнымъ, можно всю первую часть § 35 пропустить и сказать только, что характерное свойство усиливающагося электронатяженія заключается въ фактѣ возбужденія въ каждомъ постороннемъ проводникѣ несогласнаго тока.

нимъ и обнаруживается въ видѣ согласнаго тока, т. е. въ видѣ тока такого направленія, что по законамъ электродинамики (§§ 22, 24) посторонній проводникъ стремится приблизиться къ тому основному току, которымъ обуславливается ослабваніе электронатяженія*).

§ 37. *Индуктивные токи.* Вышеизложенное вліяніе усиливающагося и ослабвующаго электронатяженія на всякій ими обнимаемый проводникъ (§§ 35, 36) называется вообще *индукціей* (гальванической въ отличіе отъ индукціи электростатической, см. на § 00); несогласные и согласные (по отношенію къ основному) токи, возникающіе въ постороннемъ проводникѣ въ усиливающемся и въ ослабвующемъ электронатяженіяхъ, называются вообще *индуктивными токами* или *наведенными*. Основной токъ, благодаря которому происходитъ (по какой либо причинѣ (§§ 32, 34)) усиленіе или ослабленіе электронатяженія, называется часто *индуцирующимъ токомъ* или *наводящимъ*.

§ 38. *Молекулярные индуктивные токи.* Такъ какъ при указанныхъ условіяхъ индуктивные токи возникаютъ всегда и во всякомъ проводникѣ, независимо отъ его величины, то нужно принять, что они возникаютъ въ *каждой отдельной молекулѣ проводника*, въ моменты, соотвѣтствующіе разстоянію каждой молекулы отъ центровъ, вызывающихъ усиленіе или ослабваніе электронатяженія. Иными словами, нужно принять, что явленіе индукціи сводится въ результатъ къ раздѣленію обоихъ электричествъ въ каждой молекулѣ проводника по направленіямъ параллельнымъ наводящему проводнику. Если концы такъ заряженной противоположными электричествами молекулы, при посредствѣ другихъ молекулъ того же проводника, находятся между собою въ сообщеніи, то индуктивный зарядъ молекулы обнаружится токомъ въ проводникѣ. Такіе токи будемъ называть *молекулярными* индуктивными. Если же заряженные концы молекулы не сообщены между собою при посредствѣ другихъ молекулъ, то тока не обнаружится, явленіе будетъ имѣть во все время процесса индукціи характеръ электростатическаго заряда, а по окончаніи процесса вліянія на молекулу, она разрядится черезъ себя.

Молекулярные индуктивные токи, параллельные и одновременно возникающіе, суммируются совершенно такъ, какъ токи гальваническихъ элементовъ, соединенныхъ параллельно (см. на § 00); числомъ такихъ параллельныхъ молек. инд. токовъ (при прочихъ равныхъ условіяхъ) обуславливается количество электричества, приведеннаго въ движеніе индукціею въ данный очень малый промежутокъ времени. — Молекулярные индуктивные токи, возникающіе одновременно въ молекулахъ послѣдовательно расположенныхъ (въ плоскости параллельной плоскости наводящаго проводника), суммируются совершенно такъ, какъ токи гальваническихъ элементовъ, соединенныхъ послѣдовательно (§ 00); числомъ такихъ совмѣщающихся молек. инд. токовъ обуславливается электровозбудительная сила общаго индуктивнаго тока въ данный очень малый промежутокъ времени. (Чертежи для иллюстр. вышеизложеннаго). Отсюда видимъ, что существуетъ полная аналогія между гальваническими элементами, соединяемыми въ батарею, и молекулами проводника, въ которомъ возникаютъ индуктивные токи.

*) См. примѣчаніе къ предыдущему § 35.

§ 39. *Понятіе о силѣ индуктивнаго тока.* Молекулярные инд. токи, одновременно возникающіе, суммируются въ одинъ общій индуктивный токъ только въ замкнутомъ проводникѣ, (напр. въ кольцѣ, расположенномъ параллельно наводящему кольцевому проводнику). Если поперечный разрѣзъ такого проводника не особенно великъ (какъ напр. въ проволоочномъ кольцѣ), то можно принять, что во всѣхъ молекулахъ каждаго разрѣза инд. токи равносильны и одновременны; если при этомъ проводникъ расположенъ по отношенію къ наводящему вполне симметрично, т. е. если всѣ его разрѣзы находятся въ совершенно одинаковыхъ условіяхъ преобразованія поглощаемой энергіи въ индуктивные токи (что напр. имѣетъ мѣсто при концентрическомъ или вообще параллельномъ расположеніи), то и послѣдовательные молекулярные токи будутъ равносильны и одновременны. Въ такомъ случаѣ, на основаніи § 38, можемъ сказать, что *электровозбудительная сила общаго индуктивнаго тока, возникающаго въ данный моментъ*) въ замкнутомъ проводникѣ, пропорціональна его длинѣ, а количество электричества, приведенное въ этотъ моментъ въ движеніе, пропорціонально площади разрѣза проводника (предполагая таковой одинаковымъ по всей длинѣ)**)* (потому что число параллельныхъ молек. токовъ будетъ въ этомъ случаѣ пропорціонально толщинѣ проводника, а число послѣдовательно соединяющихся параллельныхъ группъ—будетъ пропорціонально его длинѣ). А такъ какъ пропорціонально увеличенію длины возрастаетъ и сопротивленіе проводника, то при этихъ условіяхъ *сила индуктивнаго тока не зависитъ отъ длины проводника (а стало быть и отъ электровозб. силы), а только отъ площади его разрѣза и—наоборотъ—электровозбудительная сила индуктивнаго тока не зависитъ отъ толщины проводника, а только отъ его длины.* (Полная аналогія съ выводами (§ 00): сила тока батареи, составленной изъ послѣдовательно соединенныхъ гальван. элементовъ и замкнутой проводникомъ нулевого сопротивленія, не зависитъ отъ числа элементовъ, а лишь отъ величины каждаго, и—наоборотъ—электровозб. сила батареи не зависитъ отъ величины элементовъ, а только отъ ихъ числа).

*) Точнѣе—въ данный очень малый промежутокъ времени.

**) Необходимо разъяснить учащимся, что эта зависимость имѣетъ мѣсто, строго говоря, лишь при указанныхъ условіяхъ, и лишь въ томъ случаѣ, когда во всѣхъ частяхъ проводника индуктируются одинаковые токи. Если-же въ индуктивную цѣпь вводится какое нибудь *внѣшнее* сопротивленіе R , въ которомъ индуктивные токи не возбуждаются, то, очевидно, въ этомъ случаѣ электровозб. сила индуктивнаго тока не будетъ зависѣть отъ *длины* этой внѣшней части проводника и—наоборотъ—общая сила тока (индуктивнаго) въ цѣпи съ увеличеніемъ этой длины, т. е. съ увеличеніемъ R , будетъ уменьшаться. Однимъ словомъ, при такихъ условіяхъ подверженную индукціи часть проводника надо разсматривать какъ батарею, а неподверженную индукціи, внѣшнюю часть проводника—какъ вводимое въ цѣпь внѣшнее сопротивленіе. Не трудно видѣть, что и въ этомъ случаѣ наибъгуднѣйшее дѣйствіе индуктивнаго тока въ этой внѣшней части проводника, будетъ въ случаѣ равенства сопротивленій активной и пассивной частей проводника (ср. на §§ 00 о наибъгуднѣйшихъ соединеніяхъ гальв. элементовъ).

Ниже увидимъ, что силы индуктивныхъ токовъ въ постороннемъ проводникѣ обуславливаются еще силою тока въ наводящемъ проводникѣ, быстрою измѣненіемъ электронатяженія и геометрическимъ коэффициентомъ системы проводниковъ (основного и посторонняго).

§ 40. *Частные случаи возникновенія индуктивныхъ токовъ.* Въ каждомъ постороннемъ проводникѣ, какъ мы сказали выше, несогласные инд. токи возникаютъ подѣ влияніемъ усиливающагося, а согласные—подѣ влияніемъ ослабѣвающаго электронатяженій. Потому, припоминая всѣ случаи когда электронатяженіе можетъ усиливаться или ослабѣвать (§§ 32, 34), имѣемъ:

1) Несогласный индукт. токъ возникаетъ въ постороннемъ проводникѣ всякій разъ, когда мгновенно замыкается цѣпь, заключающая основной проводникъ и источникъ тока постоянной силы; наоборотъ—при размыканіи, этой цѣпи, въ постороннемъ проводникѣ наводится согласный токъ. Оба эти индуктивные тока существуютъ въ теченіе весьма короткихъ промежутковъ времени, непосредственно слѣдующихъ за моментами замыканія и размыканія цѣпи (первый—въ теченіе τ , второй—въ теченіе τ'); промежутки эти—какъ ниже будетъ разъяснено—въ большинствѣ случаевъ не одинаковы, и согласный индуктивный токъ, по времени, короче несогласнаго.

(*Опытъ* съ индуктивной катушкой, безъ желѣзнаго сердечника).

2) Несогл. инд. токъ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего того времени (t), въ которое геометр. коэффициентъ основного проводника, съ токомъ постоянной силы, по какой бы то ни было причинѣ увеличивается; наоборотъ—при уменьшеніи этого коэффициента, въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится все время (t') согласный инд. токъ. Въ обоихъ случаяхъ *быстрота* измѣненій геом. коэффициента влѣяетъ одинаково на силу инд. токовъ: чѣмъ быстрѣе происходятъ эти измѣненія, тѣмъ больше бываетъ (въ теченіе соотв. имъ промежутковъ t и t') электровозб. силы инд. токовъ. (*Опытъ* *).

3) Несогл. инд. токъ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего времени (t_1), въ которое въ основномъ проводникѣ, не мѣняющемъ своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ увеличивается; наоборотъ—при уменьшеніи силы наводящаго тока, индук-

*) Доказать это положеніе на опытѣ, весьма не легко, и при помощи обычен. принадлежностей физ. кабинетовъ почти невозможно. Для этой цѣли пришлось бы имѣть особый приборъ, такъ устроенный, чтобы наводящій токъ можно было раздвигать и чтобы притомъ относительно внѣшняго проводника расположеніе его вообще не мѣнялось. Въ виду этого остается или *отложить* этотъ опытъ на послѣ, или-же показать его въ измѣненномъ видѣ, сдѣлавъ предварительную слѣдующую весьма важную оговорку: „Ниже будетъ показано, что *железо* обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, а именно, что *приближеніе железа къ проводнику тока оказываетъ на усиленіе электронатяженія точно такое-же вліяніе, какъ увеличеніе геом. коэффициента проводника*, и наоборотъ—удаленіе желѣза отъ тока равносильно уменьшенію геом. коэфф. его проводника.“ Послѣ этого опыта, о которомъ идетъ рѣчь, сведется на обнаруженіе индукт. токовъ во внѣшней катушкѣ при введеніи во внутреннюю катушку и выведеніи изъ нея желѣзнаго цилиндра, или пучка проволоки.

тируется въ постор. проводникѣ и длится все время (t'_1) согласный токѣ. Въ обоихъ случаяхъ быстрота измѣненій силы навод. тока влѣяетъ на силу инд. токовъ какъ и въ предыдущемъ случаѣ, (*Опытъ* *).

4) Несогл. инд. токѣ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего того времени (t_2), въ которое разстояніе его отъ наводящаго тока (постояннаго и неизмѣннаго) уменьшается; наоборотъ—при увеличеніи этого разстоянія, въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится все время (t'_2) согласный инд. токѣ. Въ обоихъ случаяхъ скорость перемѣщенія одного изъ проводниковъ влѣяетъ на силу инд. токовъ какъ и въ предыдущихъ случаяхъ. (*Опытъ*—вдвиганія и выдвиганія катушекъ.)

§ 41. *Инд. токи въ нелинейныхъ проводникахъ* возникаютъ точно такъ-же и при тѣхъ-же условіяхъ какъ и въ проводникахъ линейныхъ (напр. проволокахъ). И здѣсь тоже молекулярные инд. токи суммируются (§ 38) и—если они замкнуты—циркулируютъ по нѣкоторымъ линіямъ внутри самой массы проводника. Напр. въ сплошномъ металл. кружкѣ, расположенномъ параллельно кольцевому наводящему току, въ каждомъ изъ вышеперечисленныхъ 4-хъ случаевъ индуктируются совмѣстные параллельные токи, расположенные концентрически. (Чертежъ). Въ пустомъ цилиндрѣ, обнимающемъ напр. катушку наводящаго тока, индукт. токи располагаются параллельно по разрѣзамъ цилиндра. (Чертежъ). И пр.

(*Опытъ* ослабленія дѣйствія индукт. катушекъ, когда между ними вставленъ пустой металл. (не желѣзный) цилиндръ. Разъясненіе: работа возникающаго и исчезающаго электронатяженія поглощается въ большей части молекулами цилиндра и идетъ на возбужденіе индукт. токовъ въ цилиндрѣ; эти токи—въ свою очередь разсматриваемые какъ наводящіе по отношенію къ вѣншей катушкѣ—дѣйствуетъ прямо противоположно основнымъ наводящимъ токамъ внутренней катушки, т. е. при замыканіи цѣпи, уменьшаютъ, а при размыканіи увеличиваютъ геом. коэфф. основного наводящаго тока).

§ 42. *Индуктивные заряды незамкнутыхъ проводниковъ*. Если незамкнутый проводникъ (напр. кольцо съ разрѣзомъ) расположенъ по отношенію къ основному току такъ, что молекулярные заряды (§ 38), суммируясь, не могутъ образовать замкнутаго общаго инд. тока, то концы проводника заряжаются подѣ вліяніемъ индукціи противоположными электричествами, которыя—или соединяются обратно *черезъ самый проводникъ* послѣ того какъ процессъ индукціи окончится, и образуютъ тогда *миновенный токѣ* обратнаго направленія*), или-же—когда сопротивленіе, встрѣчаемое въ мѣстѣ разрѣза проводника не особенно велико—соединяются *черезъ изоляторъ* до окончанія процесса индукціи, замыкая такимъ образомъ индуктивный токѣ въ моментъ разряда.

*) Для этого опыта удобны элементы, или батареи съ опускающимися по желанію электродами.

*) При этихъ условіяхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ имѣть мѣсто такъ называемыя „электрическія колебанія“, зависящія отъ того, что незамкнутый проводникъ быстро и неоднократно перезаряжается.

(Опытъ съ индукт. катушками, когда между ними вставленъ пустой металл. (не желѣзный) цилиндръ съ разрывомъ по образующей. Разъясненіе: дѣйствія (напр. физиологическія) инд. токовъ въ этомъ случаѣ будутъ сильнѣе нежели въ предыдущемъ (опытъ § 41) ибо, хотя часть работы электронатяженія и поглощается цилиндромъ, но прежніе инд. токи въ немъ не циркулируютъ, а *разрядные токи*—если ихъ разсматривать какъ наводящіе по отношенію къ внѣшней катушкѣ—не ослабляютъ, а усиливаютъ явленіе индукціи).

(Опытъ—искры, между свободными концами внѣшней катушки въ воздухѣ).

(Опыты съ Гейслеровыми трубками. Разъясненія). III.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О ПРОЕКЦІЯХЪ ПРЯМОЙ И ТОЧКИ НА СТОРОНЫ

треугольника.

А. Проекціи прямой линіи.

1. Въ $\triangle ABC$ (фиг. 7) отъ вершины его В отложимъ по соответствующей высотѣ произвольный отрезокъ ВЕ и проектируемъ его на стороны данного треугольника,—получимъ проекціи ея: линіи ВF и ВG и точку D. Построимъ на АВ и ВС и соответствующихъ проекціяхъ ВF и ВG прямоугольники АН и СJ; тогда

плоч. прям. АН=плоч. прям. СJ.

Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ ВFЕ и ВAD, ВЕG и ВDС получаемъ:

$$BF \cdot BA = BE \cdot BD = BG \cdot BC$$

но

BF · BA выражаетъ площ. прям. АН,

BG · BC " " " СJ

такъ какъ

$$BF = BH, \quad BG = BJ.$$

Значитъ прям. АН равновѣренъ прям. СJ.

2. Теперь возьмемъ внутри треугольника АВС какую нибудь другую линію MN перпендикулярную къ АС и проектируемъ ее на стороны треугольника. Тогда—прямоугольники, построенные на этихъ проекціяхъ и соответствующихъ сторонахъ \triangle -ка, будутъ равновѣрны. Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ на высотѣ ВD отрезокъ ВК=MN. Очевидно проекціи прямыхъ MN и ВК на сторонахъ \triangle -ка также равны, а потому выведенное свойство проекцій отрезка ВК также распространяется и на л. MN.

И такъ прямоугольники, построенные на 2-хъ сторонахъ треуголь-

ника и соответствующих проекцій на нихъ линіи, перпендикулярной къ третьей сторонѣ, равномѣрны.

3 Теперь выведемъ свойство проекцій на стороны \triangle -ка произвольной линіи, находящейся внутри его. Оно таково:

Если произвольную прямую линію (MN), находящуюся внутри треугольника, проектируемъ на его стороны, то сумма площадей прямоугольниковъ, построенныхъ на 2-хъ сторонахъ и соответствующихъ проекціяхъ этой линіи по одну ее сторону, равна площади прямоугольника, построеннаго на третьей сторонѣ и соответствующей проекціи той-же линіи (по другую ее сторону).

Доказательство.—Нужно доказать (см. фиг. 8) что

Фиг. 8.

$$\text{пл. пр. } AL = \text{пл. пр. } BP + \text{пл. пр. } BK.$$

Для доказательства изъ точки R пересѣченія прямыхъ MD и NJ опустимъ перпендикуляръ RT на линію AC .

Если отложимъ $CS = TH$, то на основаніи предыдущаго и зная, что $RN \perp AB$, имѣемъ:

$$\text{пл. пр. } AS = \text{пл. пр. } BK,$$

на томъ же основаніи, зная что $RM \perp BC$, получимъ:

$$\text{пл. пр. } S_1L = \text{пл. пр. } BP.$$

Складывая почленно 2 послѣднія равенства, получимъ:

$$\text{пл. пр. } AL = \text{пл. пр. } BP + \text{пл. пр. } BK,$$

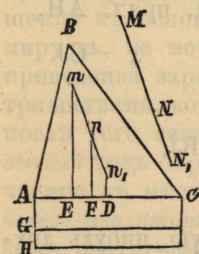
что и требовалось доказать.

4. Этотъ выводъ справедливъ также и для всякой прямой (MN), находящейся внѣ треугольника. Въ самомъ дѣлѣ—положимъ, во первыхъ, что внутри \triangle -ка можно провести линію $mn_1 \parallel MN$ (см. фиг. 9),—

Фиг. 9.

тогда очевидно предыдущій выводъ справедливъ для линіи MN , ибо ея проекція равна соответствующимъ проекціямъ линіи mn_1 .

Положимъ, во вторыхъ, что внутри треугольника нельзя провести прямой равной и параллельной данной прямой. Тогда для доказательства разобьемъ данную линію MN_1 на такія части: MN и NN_1 , чтобы для каждой изъ нихъ можно было провести внутри треугольника равную и параллельную. Пусть $mn_1 \parallel MN$, $mn = \parallel NN_1$.



Примѣнивъ къ каждой изъ линій mn_1 и mn извѣстное построеніе прямоугольниковъ (напр. на AC) и притомъ такъ, чтобы одинъ соприкасался съ другимъ, получимъ окончательно прямоугольники съ высотами равными суммѣ соответствующихъ проекцій отрезковъ линіи MN_1 или—что то же—съ высотами равными соответствующимъ проекціямъ линіи MN' .

Итакъ выведенное свойство проекцій справедливо для всякой про-

изволью взятой прямой, при построении прямоугольниковъ, предполагая однакожъ ее находящуюся внутри треугольника, чтобы узнать который изъ 3-хъ прямоугольниковъ равенъ суммѣ 2-хъ прочихъ.

5. Разсмотримъ нѣкоторыя слѣдствія:

а) Взявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую линію гипотенузу, получимъ: *квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равносрненъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ* т. е. Пифагорова теорема.

б) Взявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую линію одинъ изъ катетовъ, увидимъ, что катетъ есть средній пропорціональный между гипотенузой и прилежащимъ отрѣзкомъ ея, образованнымъ перпендикуляромъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

в) Описавъ около произвольнаго треугольника окружность и принявъ за проектируемую линію діаметръ, проведенный черезъ одну изъ его вершинъ, увидимъ, что: квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ острого угла (тупого), равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ (сложенной съ) удвоеннаго произведенія основанія на отрѣзокъ его отъ вершины острого (тупого) угла до высоты.

В. Проекціи точки.

1. Примѣнимъ предыдущій выводъ къ доказательству слѣдующаго:

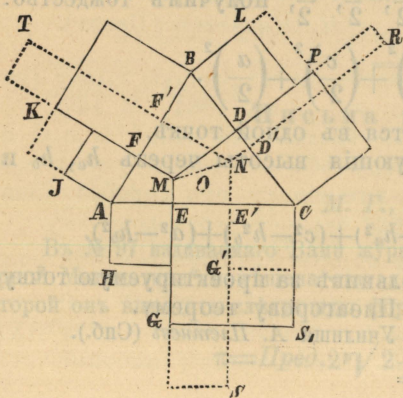
Если изъ произвольной (внутренней или внешней) точки опустимъ перпендикуляры на стороны треугольника, то получимъ на нихъ 6 отрѣзковъ, и сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на 3 отрѣзкахъ, не имѣющихъ общей вершины (не смежныхъ), равносрнна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на трехъ другихъ отрѣзкахъ.

Доказательство. Если М—данная точка, MD, ME и MF—перпендикуляры изъ одной точки на стороны даннаго треугольника, JF, DL и т. д.—квадраты, построенные на отрѣзкахъ AF, BD и т. д., то требуется доказать, что

$$\text{пл. кв. JF} + \text{п. к. DL} + \text{п. к. CG} = \text{п. к. BK} + \text{п. к. CP} + \text{п. к. EH} \dots (1)$$

Для доказательства черезъ точку О—центръ описаннаго круга—проведемъ линію MN (фиг. 10) и отложимъ на ней $ON=OM$; изъ N опустимъ перпендикуляры на стороны даннаго треугольника,—на трехъ

Фиг. 10.



полученныхъ (не смежныхъ) отрѣзкахъ BD' , CE' и AF' построимъ квадраты,—эти послѣдніе очевидно равны соотвѣтствующимъ CP , EH и BK .

Такимъ образомъ мы здѣсь пользуемся методомъ наложенія,—но, какъ видно изъ чертежа, площади квадратовъ не совместились.—слѣдовательно, если равенство (1) справедливо, необходимо, чтобы существовало равенство

$$\begin{aligned} & (\text{пл. пр. LP} + \text{пл. пр. PD}') + \\ & + (\text{пл. пр. JK} + \text{пл. пр. F'K}) = \\ & = \text{пл. пр. G'S'} + \text{пл. пр. GE'.} \end{aligned}$$

Но

пл. пр. $LP \perp$ пл. пр. $PD' =$ пл. пр. DR , въ которомъ $D'R = BC$.

" " JK " " $F'K =$ " " FT " " $F'T = AB$.

" " $G'S'$ " " $GE' =$ " " ES " " $E'S = AC$.

Итакъ должно существовать слѣдующее равенство

пл. пр. $DR \perp$ пл. пр. $FT =$ пл. пр. ES ,

которое дѣйствительно и существуетъ, такъ какъ прямоугольники DR , FT и ES образованы изъ сторонъ даннаго треугольника и соответствующихъ проекцій на нихъ линіи MN .

Слѣдовательно равенство (1) также справедливо.

2. Наоборотъ,—если въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC на сторонахъ его намѣчены 3 точки D , E и F такъ, что существуетъ равенство (1), то перпендикуляры, возставленные изъ этихъ точекъ, пересекутся между собою въ одной точкѣ.

Дѣйствительно, если предположимъ обратное, т. е. что перпендикуляръ къ AB изъ M —пересѣченія 2-хъ линій MD и ME перпендикулярныхъ къ BC и AC —не пройдетъ черезъ точку F , то на основаніи предыдущаго можемъ написать равенство подобное (1), но въ которомъ одинъ изъ квадратовъ IF или KB уменьшонъ, а другой увеличенъ, что очевидно невозможно; слѣдовательно предположеніе, что перпендикуляръ изъ M къ линіи AB не пройдетъ черезъ F не вѣрно, а потому:

Если въ какомъ нибудь треугольникѣ на сторонахъ его намѣчены три точки, которыя раздѣляютъ стороны на 6 отрезковъ, такимъ образомъ, что сумма квадратовъ 3-хъ изъ нихъ, не имѣющихъ общей вершины, равна суммѣ квадратовъ 3-хъ другихъ отрезковъ, то перпендикуляры изъ этихъ точекъ къ сторонамъ треугольника пересекутся въ одной точкѣ.

3. Приложимъ это условіе пересѣченія перпендикуляровъ къ сторонамъ треугольника къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

а) Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ треугольника, пересекаются въ одной точкѣ (центръ описанной окружности).

Дѣйствительно, назвавъ стороны даннаго треугольника черезъ a , b и c , а слѣдовательно отрезки черезъ $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, получимъ тождество:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

б) Высоты треугольника пересекаются въ одной точкѣ.

Дѣйствительно, назвавъ соответствующія высоты черезъ h_a , h_b и h_c , получимъ тождество:

$$(c^2 - h_a^2) + (a^2 - h_b^2) + (b^2 - h_c^2) = (b^2 - h_a^2) + (c^2 - h_b^2) + (a^2 - h_c^2).$$

Принявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую точку конецъ гипотенузы, мы опять получимъ Пиагорову теорему.

Юнкеръ Инженернаго Училища А. Плетневъ (Спб.).

РЕЦЕНЗИИ.

И. Кошельковъ. Предварительный курсъ физики въ объемѣ среднихъ учебныхъ заведеній. Ч. I. Новгородъ. 1890 г. Цѣна 1 р.

Появленіе названной книги обусловлено тѣмъ обстоятельствомъ, что въ виду увеличенія числа часовъ, посвящаемыхъ по новой программѣ въ реальныхъ училищахъ на физику, оказалось возможнымъ выдѣлить изложеніе начальныхъ свѣдѣній по физикѣ въ особый предварительный курсъ, проходимый въ IV и V классахъ. Не смотря на свое скромное названіе „предварительнаго“ курса, разбираемый учебникъ заслуживаетъ во многихъ отношеніяхъ предпочтенія передъ общепринятыми курсами физики. Онъ отличается стремленіемъ къ точности опредѣленій, и не желаетъ маскировать недостатокъ аргументаціи и доказательствъ обиліемъ словъ и мало поясняющихъ дѣло примѣровъ. Тамъ гдѣ теоретическое доказательство недоступно ученику, авторъ просто формулируетъ предложеніе, ограничиваясь опытною его повѣркою.

Въ вышедшей 1-й части содержится: механика твердаго, жидкаго и газообразнаго тѣла, ученіе о теплотѣ и химическія свѣдѣнія; послѣдній отдѣлъ изложенъ прекрасно: просто, систематически и обстоятельно. Въ другихъ главахъ я позволю себѣ указать нѣкоторыя погрѣшности.

На стр. 5 опредѣленіе поступательнаго движенія неполно. При поступательномъ движеніи тѣла всѣ точки его описываютъ равные и (надо добавить) параллельные пути. Иначе ученіе имѣетъ право считать движущимся поступательно и раздувающимся шаръ, ибо всѣ точки его проходятъ равные пути.

На стр. 15 авторъ опредѣляетъ силу, какъ причину измѣненія движенія, и нигдѣ не пользуется далѣе этимъ опредѣленіемъ. И о самомъ измѣненіи движенія не дается понятія, ибо авторъ излагаетъ только вопросъ о равномерномъ движеніи.

Опытъ со сѣбялющимися пластинками (стр. 17) въ той формулѣ, какъ описать въ книгѣ, не годится, ибо явленіе можетъ быть приписано и дѣйствительно зависить отъ давленія воздуха.

На стр. 23 начало независимости дѣйствія силъ не имѣетъ подъ собою почвы, ибо о самомъ дѣйствіи силъ не дано понятія.

Въ §§ 25—28 первой главы не сказано, что все изложенное въ нихъ относится только къ неизмѣняемымъ системамъ точекъ.

На стр. 41 не выясненъ случай равновѣсія шара, когда центръ тяжести выше точки опоры, и все таки равновѣсіе безразличное.

Масса, согласно рутинѣ, опредѣлена какъ количество вещества.

А. Л. Корольковъ.

Письма въ редакцію.

I.

М. Г., г. Редакторъ.

Въ № 97 издаваемого Вами журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“ помѣщена статья проф. Ромера „Новое выраженіе для π “, въ которой онъ выводитъ слѣдующую формулу

$$\pi = \text{Пред.} 2r \sqrt{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \dots}$$

Это выражение не ново, оно встрѣчается у г. Починскаго въ его „Новыхъ изслѣдованіяхъ въ области элементарной геометріи, выпускъ I, Одесса 1879 г.“ на стр. 38, на что считаю долгомъ обратить Ваше вниманіе.

Пріймите и пр. *А. Старковъ* (Одесса).

II.

М. Г., и. Редакторъ.

„Новая“ формула для π , данная проф. Ромеромъ (въ № 97 „Вѣстника“), нова развѣ въ томъ смыслѣ, что впервые появляется въ „Вѣстникѣ“. Она представляетъ собою прямое и непосредственное слѣдствіе формулы удвоенія

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}} \quad (\text{при } r=1)$$

приводится во многихъ учебникахъ (см. напр. „Геометрію“ Урусова, „Eléments de Géometrie“ par Amiot и др.) и была извѣстна еще Виету.

Пріймите и пр. *М. Попруженко* (Оренбургъ).

ЗАДАЧИ.

№ 91. Стороны нѣкотораго треугольника удовлетворяютъ условіямъ

$$x + y - z = 780$$

$$y + z - x = 1040$$

$$z + x - y = 910.$$

Найти три его высоты h_x , h_y , h_z .

III.

№ 92. Въ окружности радіуса R вписанъ четырехугольникъ $ABCD$, коего сторона AB есть діаметръ. Разстоянія точки пересѣченія діагоналей M отъ вершинъ A и B извѣстны (т. е. $AM = a$, $BM = b$). Определить стороны и діагонали четырехугольника.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 93. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Прямол. Тригонометріи“ Пржевальскаго, изд. 3-е. 1884, № 14):

„Съ корабля, находящагося въ A , видятъ два маяка B и C на западъ; черезъ часъ плаванія къ сѣверу оба эти маяка уже видны: одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ отъ корабля. Зная разстояніе между маяками ($BC = a$), найти скорость хода корабля“.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 94. Черезъ вершину D даннаго паралелограмма $ABCD$ проведена прямая ED . Найти на ней такую точку X , чтобы сумма угловъ BXA и CXD равнялась двумъ прямымъ.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 95. Решить уравненія

$$x^5 = mx + ny$$

$$y^5 = my + nx.$$

И. Ивановъ (Спб.)

№ 96. Вѣсы устроены съ такимъ расчетомъ, чтобы верхнее положеніе чашки было выше средняго на 2,83 дм. и чтобы среднее арифметическое разстояніе между осью коромысла и крайними положеніями вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ чашки, было 5,3 дм. Определить длину коромысла и его наклонъ въ крайнемъ положеніи.

Кн. А. Галаринъ (Спб.)

Упражненія для учениковъ.

1. Построить треугольникъ по тремъ его медианамъ.

Намекъ. Пусть ABC требуемый треугольникъ; D, E, F—средины его сторонъ: AB, BC, CA; AE, BF, CD даны. Проведите изъ F прямую FK параллельную AE и равную AE, соедините K съ B, обратите вниманіе на стороны BF, FK, KB треугольника BFK и усмотрите, что точка E есть его *медиантръ* т. е. точка встрѣчи медіанъ.

Какъ перейти отъ вспомогательнаго треугольника BFK къ требуемому ABC?

2. На сторонахъ треугольника ABC (вне его) построены квадраты, свободныя вершины которыхъ соединены прямыми; пусть AEF, BE₁F₁, CE₂F₂ составленные такимъ путемъ треугольники. Построить ABC, зная длины EF, E₁F₁, E₂F₂.

Намекъ. Продолжите медиану AD на длину ей равную.

3. 1) Если многоугольникъ вписанъ въ окружность, то равенство сторонъ влечетъ за собою равенство угловъ. (Правильный многоугольникъ).

2) Если многоугольникъ вписанъ въ окружность, то равенство угловъ не влечетъ за собой равенства сторонъ. (Примѣръ: прямоугольникъ).

3) Если многоугольникъ описанъ около окружности, то равенство угловъ влечетъ за собой равенство сторонъ. (Правильный многоугольникъ).

4) Если многоугольникъ описанъ около окружности, то равенство сторонъ не влечетъ за собой равенства угловъ. (Примѣръ: ромбъ).

4. 1) Въ вписанномъ (въ окружность) четырехугольникъ сумма двухъ противоположащихъ угловъ равна суммѣ двухъ остальныхъ угловъ.

2) Въ описанномъ (около окружности) четырехугольникъ сумма двухъ противоположащихъ касательныхъ равна суммѣ двухъ остальныхъ касательныхъ.

Требуется оправдать справедливость такого обобщения.

Если число сторонъ взятаго описаннаго многоугольника нечетное, то его можно разсматривать какъ многоугольникъ четнаго числа сторонъ, въ которомъ *двѣ точки касанія совпали*.

РЪШЕНИЯ ЗАДАЧЪ.

$$\begin{aligned} & \sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d)+ \\ & \sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d+a)\sin(d-a)+ \\ & \sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c)=0 \end{aligned}$$

третье „ $= (\cos 2b - \cos 2d)(\cos 2c - \cos 2a)$.

В. Будянский (Кіевъ), *С. Карнович* и *Г. Ульяновъ* (Воронежъ), *Н. Волковъ* (Спб.). Ученики: Курск. г. (8) *С. Д.*, Симб. г. (7) *В. Б.*, *В. Ф.* и *П. Б.*, Кам.-Под. г. (7) *Я. М.*, Камыш. р. уч. (7) *А. З.*, Спб. Ек. ц. уч. (7) *В. М.*

$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})(a-x)=3(x+y)\sqrt{x}.$$

Умножимъ обѣ части второго уравненія на \sqrt{x} , тогда

$$(\sqrt{xy}-x)(a-x)=3x(x+y),$$

что можно написать еще такимъ образомъ

$$[\sqrt{xy}+a-(a+x)](a-x)=3x^2+3xy,$$

откуда

$$(\sqrt{xy}+a)(a-x)=2x^2+3xy+a^2.$$

Замѣнивъ здѣсь x^2 величиною a^2-3xy изъ перваго уравненія, найдемъ

$$(\sqrt{xy}+a)(3\sqrt{xy}-x-2a)=0,$$

т. е.

$$xy=a^2 \quad \dots \quad (a)$$

$$xy=\left(\frac{x+2a}{3}\right)^2 \quad \dots \quad (\beta)$$

Изъ (а) и (1) получимъ $x=\pm a\sqrt{-2}$, а изъ (β) и (1), $x=-\frac{a}{2}$.

Затѣмъ соответственно: $y=\pm\frac{a}{\sqrt{-2}}$, $y=-\frac{a}{2}$. Корни $x=-\frac{a}{2}$ и $y=-\frac{a}{2}$ удовлетворяютъ только первому уравненію.

Н. Артемьевъ (Спб.). Ученикъ Курск. г. (8) *В. Х.*

№ 533. Построить треугольникъ по суммѣ двухъ сторонъ, биссектору ихъ угла и третьей сторонѣ.

Обозначимъ стороны \triangle -ка черезъ a , b , c , биссекторъ угла, противолежащаго сторонѣ a , черезъ m и сумму сторонъ b и c черезъ s . Возьмемъ формулу, связывающую биссекторъ угла \triangle -ка съ его сторонами:

$$bcs^2=m^2s^2+a^2bc,$$

откуда

$$bc=\frac{m^2s^2}{s^2-a^2}=\frac{m^2s^2}{p^2}.$$

Строимъ прямоугольный \triangle -къ BCD по гипотенузѣ $BC=s$ и катету $BC=a$. На катетѣ DB откладываемъ длину DE равную m и проводимъ $EF \parallel BC$, тогда

$$DF=\frac{ms}{p}=\sqrt{bc}.$$

Теперь вопросъ приводится къ построению прямоугольнаго \triangle -ка по данной гипотенузѣ s и по данному перпендикулярѣ \sqrt{bc} изъ вершины прямого угла на гипотенузу. Отрѣзки гипотенузы будутъ искомыми сто-

роны b и c . Задача имѣеть одно рѣшеніе, если $\sqrt{bc} \leq \frac{s}{2}$, или $s \geq \sqrt{a^2 + 4m^2}$ и не допускаеть рѣшенія, когда $s < \sqrt{a^2 + 4m^2}$.

П. Свѣтлицковъ (Троицъ), А. Шульженко (Кіевъ). Ученикъ Курск. г. (8) В. Х.

№ 556. Одна изъ параллельныхъ сторонъ равнобочной трапеціи равна a , высота трапеціи равна прямой, соединяющей середины непараллельныхъ сторонъ. Найти радіусъ круга, описаннаго около трапеціи.

Пусть ABCD будетъ данная трапеція; бока ея $AB=CD=a$, параллельныя стороны $AD=x$ и $BC=y$, высота—СК. По теоремѣ Птолемея:

$$AC^2 = xy + a^2.$$

Радіусъ круга, описаннаго около \triangle -ка ACD, а слѣдовательно и около трапеціи ABCD, равенъ произведенію трехъ сторонъ его, раздѣленному на учетверенную площадь; но

$$\text{плоч. ACD} = \frac{(x+y)x}{4}.$$

слѣдовательно

$$R = \frac{ax\sqrt{xy+a^2}}{x(x+y)}. \quad (1)$$

Изъ прямоугольнаго \triangle -ка CKD найдемъ

$$CK = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2}, \quad (2)$$

кромя того

$$CK = \frac{x+y}{2}. \quad (3)$$

Изъ сопоставленія (2) и (3) имѣемъ

$$a^2 = \frac{x^2 + y^2}{2};$$

подставляя эту величину вмѣсто a^2 въ (1), получимъ

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

С. Ржанитинъ (Троицъ), Н. Волковъ (Воронежъ). Ученики Курск. г. (6) Е. А., (7) Е. П. и В. Х., Великол. р. уч. (7) А. В., Урюп. р. уч. (7) П. У—ъ, 2-й Тифл. г. (8) М. А.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 1 Ноября 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К^о.

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

Обложка
щется

<http://vofem.ru>