

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 92.

VIII Сем.

25 Марта 1890 г.

№ 8.

ЗНАЧЕНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ въ тригонометріи.

Извѣстно, что каждой геометрической задачѣ на построение соответствуетъ вполнѣ опредѣленная тригонометрическая задача и обратно. Если разсматривать только тѣ задачи, которые рѣшаются циркулемъ и линейкой, то для рѣшенія фигуръ съ помощью тригонометріи можно указать два способа.

Первый и обычный способъ состоитъ въ томъ, что изъ чертежа (а иногда и безъ чертежа), на основаніи формулъ треугольника, получаютъ столько уравненій, сколько выбрано неизвѣстныхъ; комбинируя эти уравненія, доходятъ до опредѣленія искомыхъ. Второй способъ состоитъ въ томъ, что сначала находятъ рѣшеніе соответствующей геометрической задачи; именно, проведеніемъ вспомогательныхъ линій (спрямленіемъ, перенесеніемъ частей фигуры, вращеніемъ ихъ около оси, обертываніемъ) данную задачу приводятъ къ болѣе простой задачѣ такъ, какъ это дѣлается въ геометрическихъ задачахъ на построение; вновь полученную задачу рѣшаютъ тригонометрически или непосредственно, или примѣняя первый способъ сравнительно въ болѣе легкой формѣ; результатъ или даетъ искомое сразу, или требуетъ небольшого добавочнаго вычисленія. Первый способъ основанъ на болѣе или менѣе удачномъ сочетаніи формулъ; второй—главнымъ образомъ на умѣнны пользоваться геометрическими методами построения. Вся сила перваго способа обнаруживается за тѣми предѣлами, которыми мы себя здѣсь ограничили; напротивъ того второй способъ имѣетъ наибольшую силу именно въ этихъ предѣлахъ—приблизительно въ курсахъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Къ сожалѣнію, учащіе совершенно не пользуются вторымъ способомъ для рѣшенія тригонометрическихъ задачъ и въ этомъ отношеніи знаніе геометрическихъ методовъ пропадаетъ у нихъ даромъ. Обращая вниманіе на это обстоятельство, авторъ вовсе не стремится уменьшить значенія комбинированія формулъ, а только хочетъ указать на слѣдующіе выводы, которые ниже, думается, достаточно выяснены.

1. Когда примѣнимы оба способа, именно, когда данныя и искомыя образуютъ фигуру и не удалены другъ отъ друга настолько, что становится неизбѣжнымъ ихъ сближеніе геометрическими приѣмами, второй способъ вообще даетъ результаты болѣе простымъ и короткимъ путемъ. Примѣры: 1, 2, 5.

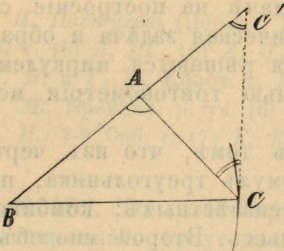
2. Вопросы, допускающіе, повидимому, только первый способ, очень рѣдки и должны быть отнесены къ частнымъ случаямъ. Въ самомъ дѣлѣ, появленіе задачъ, обманчиво не поддающихся чисто геометрическому рѣшенію, происходитъ отъ нашей ненадочивости въ построеніяхъ. Въ этихъ случаяхъ чисто геометрическую задачу слѣдуетъ рѣшать съ помощью тригонометріи. Примѣры: 3, 4.

3. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ данныя и искомыя такъ удалены другъ отъ друга, что сближеніе ихъ становится необходимымъ — въ этихъ случаяхъ тригонометрическія задачи, за рѣдкими исключеніями, рѣшаются только вторымъ способомъ. Примѣры: 6, 7 и частью 8.

Для поясненія сказаннаго достаточно слѣдующихъ примѣровъ, которые передѣланы въ двухъ формахъ, геометрической и тригонометрической.

1. Рѣшить треугольникъ, зная A , a , $b+c$.

Фиг. 21.



Рѣш. геом. Ломаную BAC (фиг. 21) выпрямимъ въ прямую BAC_1 ; тогда уголъ C_1 равенъ половинѣ угла A . Такъ какъ A отстоитъ одинаково отъ C и C_1 , то задача приведена къ слѣд.: „построить $\triangle BC_1C$, зная BC_1 , BC и C_1 “. Точка C опредѣлится пересѣченіемъ дуги и прямой C_1C .

Рѣш. тригоном. Выпрямивъ ломаную BAC въ прямую BAC_1 , рѣшаемъ $\triangle BC_1C$ по двумъ сторонамъ и углу и находимъ

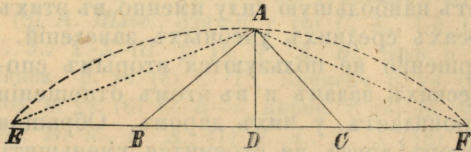
$\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) = \frac{(b+c) \cdot \sin \frac{A}{2}}{a}$ — формула для опредѣленія C , не менѣе удобная, чѣмъ та*), которая получится при рѣшеніи $\triangle ABC$ обычными способами. Опредѣливъ C , легко рѣшить весь $\triangle ABC$.

То же самое встрѣтимъ, рѣшая треугольникъ по даннымъ A , a , $b-c$ и A , b , $a \pm c$.

2. Рѣшить треугольникъ, зная A , h_a и $2p$.

Рѣш. геом. Выпрямимъ ломаная ABC и BCA (фиг. 22) въ прямая EBC и FCB ; тогда

Фиг. 22.



$$\angle EAF = 90^\circ + \frac{A}{2}, \quad EF = 2p.$$

Такъ какъ точки B и C равноотстоятъ отъ точекъ A и E , A и F , то вопросъ приведенъ къ

*) $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{a}$ — получается отъ сложения равенствъ

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

построенію треугольника по основанію, противолежащему углу и высотѣ (EF, $\angle EAF$ и AD). Отложивъ EF=2p, найдемъ точку А въ пересѣченіи параллели основанія и дуги, вмѣщающей известный уголъ.

Рѣш. тригон. Выпрямивъ ломаня ABC и ACB, получаемъ $\triangle EAF$, въ которомъ углы E и F вдвое менѣе угловъ B и C; поэтому вопросъ приводится къ рѣшенію $\triangle EAF$ по основанію, противолежащему углу и высотѣ. Примѣняемъ къ рѣшенію $\triangle EAF$ обычный способъ и находимъ:

$$ED = h_a \operatorname{ctg} E \quad \text{и} \quad DF = h_a \operatorname{ctg} F, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a} = \operatorname{ctg} E + \operatorname{ctg} F = \frac{\sin(E+F)}{\sin E \cdot \sin F}; \quad (2)$$

но

$$\sin(E+F) = \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}; \quad \sin E \cdot \sin F = -\frac{1}{2} [\cos(E+F) - \cos(E-F)];$$

сдѣлавъ подстановку, получимъ:

$$\cos(E-F) - \sin \frac{A}{2} = \frac{h_a \cos \frac{A}{2}}{p}. \quad (3)$$

Изъ этого уравненія опредѣлится E—F, а слѣд., углы B и C.

Для сравненія обоихъ способовъ рѣшенія фигуръ приводимъ рѣшеніе по первому способу.

Изъ $\triangle DBA$ и $\triangle CBA$ находимъ:

$$BD + DC = \frac{h_a \sin(B+C)}{\sin B \cdot \sin C}, \quad AB + AC = \frac{h_a [\sin B + \sin C]}{\sin B \cdot \sin C},$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \left[\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B+C}{2} \right]}{\sin B \cdot \sin C}$$

или

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cdot 2 \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{4 \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}},$$

откуда

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}.$$

Это уравнение сходно съ ур. (2); почти вся работа является лишнею сравнительно съ вышеуказаннымъ рѣшеніемъ—остальное одинаково для обоихъ способовъ.

3. Построить треугольникъ, зная $2p$, h_a и $B-C$.

Эта задача принадлежитъ къ тѣмъ, весьма немногимъ, задачамъ, которыя должны имѣть чисто геометрическое рѣшеніе, но которымъ, насколько извѣстно автору, такого рѣшенія еще не дано*). Покажемъ вкратцѣ, какъ сдѣлать требуемое построение съ помощью тригонометріи.

Въ урав. (3) полагаемъ $E-F=\alpha$, $\frac{A}{2}=x$ и строимъ прямую k , удовлетворяющую уравненію $k=p\cos\alpha$. Тогда получимъ

$$k-p\sin x=h_a\cos x,$$

откуда

$$m^2\sin^2x-2n^2\sin x+q^2=0,$$

гдѣ прямые m , n и q опредѣляются уравненіями:

$$m^2=p^2+h_a^2, \quad n^2=pk, \quad q^2=k^2-h_a^2.$$

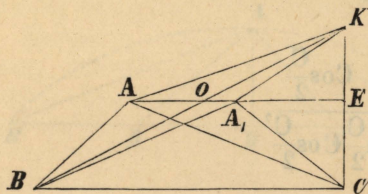
Прямые m , n и q построить легко. Затѣмъ

$$\sin x = \frac{n^2 \pm \sqrt{n^4 - m^2 q^2}}{m^2}.$$

*) Когда статья была уже набрана, авторъ прислалъ нижеслѣдующее рѣшеніе этой задачи.

Выпрямимъ ABC и ACB (см. фиг. 22) въ прямые EBC и FCB ; тогда углы E и F суть половины угловъ B и C ; слѣд., разность $E-F$ извѣстна, и задача приведена къ слѣдующей: „построить треугольникъ, зная a , h_a и $B-C$ “. (Эта задача есть у Петерсена и у меня за № 314 и 450). Последняя задача рѣшается слѣдующимъ образомъ. Треугольникъ BAC (фиг. 23)

Фиг. 23.



перевернемъ въ положеніе BA_1C ; прямые BA и BA_1 перенесемъ параллельно въ A_1K и AK . Такъ какъ $AA_1 \parallel BC$ и $BO=OK$, то легко доказать, что $KE=EC$, а потому $\angle KCB$ прямой и KC равно $2h_a$; слѣд., прямая BK извѣстна. Такъ какъ $\angle ABA_1=B-C$, то $\angle BAK$ извѣстенъ; поэтому, описывая на BK дугу, вмѣщающую этотъ послѣдній уголъ, опредѣлимъ A въ

пересѣченіи параллели AA_1 съ дугою.

Тригон. рѣшеніе. Можно рѣшить $\triangle BAK$ по основанію BK , углу BAK и угламъ AOK и AOB , которые опредѣлятся послѣ рѣшенія $\triangle KOE$, въ которомъ извѣстны OK и OE . (Болѣе удобное рѣшеніе, основанное на геометрическомъ построеніи, показано въ примѣрѣ за № 2—см. ур. (3)).

Построимъ прямыя, опредѣляемыя слѣдующими уравненіями:

$$y^2 = n^2 - mq, \quad z^2 = n^2 + mq, \quad t^2 = n^2 + yz.$$

Тогда одно изъ рѣшеній будетъ:

$$\sin x = \frac{t^2}{m^2}.$$

Для построения угла x строимъ $\triangle GHI$, въ которомъ $H=90^\circ$, $GH=t$, $HI=m$; затѣмъ опускаемъ $NK \perp GI$. Тогда

$$\sin x = \frac{GK}{KI},$$

откуда легко построить x , а затѣмъ и весь треугольникъ.

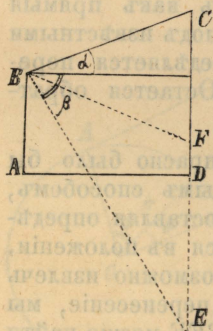
4. Построить треугольникъ, зная a , m_a и $B-C$.

Эта задача такова же, какъ и предыдущая. Построение можно сдѣлать, руководясь уравненіемъ

$$\operatorname{tg}^2 x - 2k \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

5. Съ вершины B мачты корабля виденъ огонь маяка CD подъ угломъ α съ горизонтальной плоскостью; изображеніе огня видно изъ B подъ угломъ β . Опредѣлить высоту огня надъ уровнемъ моря, если вершина B находится отъ уровня моря въ разстояніи, равномъ h .

Фиг. 24.



Рѣш. геом. Повернемъ $\triangle CBH$ (фиг. 24) въ положеніе FBH ; тогда можно построить $\triangle EBF$, такъ какъ $EF=2h$, $\angle EBF=\beta-\alpha$ и $\angle EFB=90^\circ+\alpha$. Затѣмъ уже можно построить $\triangle HBF$.

Рѣш. трион. Сдѣлавъ, какъ сказано, изъ $\triangle FBE$ находимъ

$$BF = \frac{2h \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)};$$

но такъ какъ

$$FH = BF \sin \alpha,$$

то

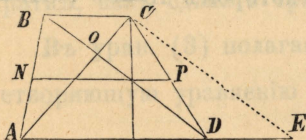
$$CD = \frac{2h \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} + h.$$

Рѣшеніе, не опирающееся на геометрическій методъ повертыванія, основано на преобразованіи равенства $EH - HC = 2h$ и нѣсколько труднѣе.

Вмѣсто угловъ α и β , могло бытъ дано $EB - BC$ и $C - E$; рѣшеніе не перемѣнится.

6. Рѣшить трапецію $ABCD$, зная сторону CD , уголъ между діагоналями, медиану непараллельныхъ сторонъ и разстояніе параллельныхъ сторонъ.

Фиг. 25.



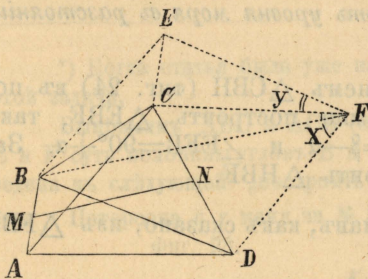
Рѣш. геом. Перенесемъ параллельно BD въ CE (фиг. 25); тогда въ $\triangle ACE$ будутъ извѣстны: основаніе AE , высота и $\angle ACE$. Построивъ такой треугольникъ (см. № 2), легко опредѣлить точку D , описывая окружность изъ центра C , а затѣмъ— и всю фигуру.

Рѣш. тригон. Перенесемъ BD въ CE ; тогда подобно № 2 можно рѣшить $\triangle ACE$; послѣ этого AC , EC , $\angle CAD$ и $\angle BDA$ (а, слѣд., и $\angle CDA$ и $\angle BAD$) станутъ извѣстны и легко рѣшить всю трапецію. Безъ помощи геометрическаго построенія задача едва ли рѣшается, такъ какъ безъ перенесенія трудно ввести въ формулы данный уголъ.

7. Рѣшить четырехугольникъ $ABCD$, зная діагонали, прямую, соединяющую середины AB и CD , углы A и D .

Рѣш. геом. Перенесемъ параллельно AB въ CE и BD въ EF (фиг. 26); тогда составитъ параллелограммъ $BEFD$, который легко построить, такъ какъ въ $\triangle BEF$ извѣстны три стороны ($BF = 2MN$). Такъ какъ прямая EF и DF видны изъ C подъ извѣстными углами, то точка C опредѣляется пересѣченіемъ двухъ дугъ. Остается обратное перенесеніе.

Фиг. 26.



Рѣш. тригон. Напрасно было бы рѣшать эту задачу первымъ способомъ, такъ какъ данныя, не составляя опредѣленной фигуры, находятся въ положеніи, изъ котораго едва ли возможно извлечь уравненія. Но, сдѣлавъ перенесеніе, мы

можемъ рѣшить фигуру $DBEF$. Въ самомъ дѣлѣ изъ $\triangle BEF$ можно найти уголъ E , а, слѣд., и $\angle DFE$; полагая затѣмъ $EFC = Y$, $DFC = X$, $DFE = F$, $EF = m$, $DF = n$, находимъ:

$$\frac{CF}{m} = \frac{\sin(A+Y)}{\sin A}, \quad \frac{CF}{n} = \frac{\sin(D+X)}{\sin D},$$

откуда

$$\frac{n}{m} = \frac{\sin D \cdot \sin(A+Y)}{\sin A \cdot \sin(D+X)},$$

которой отъ O и O_1 даны, параллельные радіусы OA и O_1B видны подъ равными углами. Вычислить эти углы. Преобразовавъ $\triangle AOC$ въ $\triangle O_1BD$, замѣчаемъ, что можно рѣшить $\triangle CO_1D$, такъ какъ въ немъ извѣстны двѣ стороны и уголъ между ними ($\angle CO_1D = \angle OCO_1$, который вычисляется изъ $\triangle OCO_1$). Затѣмъ по формулѣ $R = \frac{a}{2\sin A}$ можно вычислить

радіусъ круга, описаннаго около $\triangle CO_1D$. Послѣ этого въ $\triangle BO_1D$ будутъ извѣстны двѣ стороны и радіусъ описаннаго круга—такой треугольникъ рѣшится легко.

Обычный приемъ рѣшенія даетъ слѣдующій отвѣтъ. Пусть

$OC:OA=m$, $O_1B:O_1C=n$, $\angle COO_1=\alpha$, $CO_1E=\beta$, $\angle AOO_1=x$, $\angle ACO=y$.

Изъ $\triangle ACO$ и $\triangle BO_1C$ получимъ:

$$m = \cos(x-\alpha) + \sin(x-\alpha) \cdot \cotgy, \quad n = \cos(x-\beta) + \sin(x-\beta) \cdot \cotgy.$$

Исключая изъ этихъ уравненій \cotgy , получимъ

$$\frac{m - \cos(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)} = \frac{n - \cos(x-\beta)}{\sin(x-\beta)}$$

или

$$m\sin(x-\beta) - n\sin(x-\alpha) = \sin(\alpha-\beta).$$

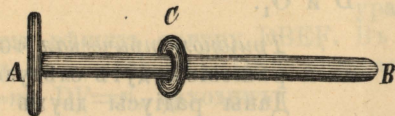
При неравныхъ m и n это уравненіе очень сложное, но изъ него можно опредѣлить $\sin x$.

И. Александровъ (Тамбовъ).

ЦЕНТРОВЪЖНАЯ СИЛА.

Если матеріальная точка движется равномерно по кругу, то ускореніе при этомъ движеніи направлено къ центру и равно квадрату скорости, раздѣленному на радіусъ. Произведеніе массы движущейся точки на это ускореніе равно той силѣ, которая способна произвести это круговое движеніе. Эта сила направлена къ центру и называется *центростремительною*.

Фиг. 28.



Возьмемъ стержень, на которомъ надѣто кольцо C (фиг. 28), свободно скользящее по стержню. Сообщимъ стержню и кольцу одинаковую скорость по направленію длины стержня отъ A къ B . Движеніе будетъ равномерное, прямолинейное, кольцо будетъ сохранять свое положеніе на стержнѣ. Приложимъ теперь къ стержню (но не къ кольцу) нѣкоторую силу по направленію движенія. Скорость стержня возрастаетъ, скорость кольца остается прежняя. Отсюда произойдетъ то, что кольцо C будетъ передвигаться по стержню въ сторону обратную общему движенію, т. е. будетъ приближаться къ краю A .

Положимъ теперь, что мы замедляемъ движеніе стержня. А такъ

какъ скорость кольца C остается прежнею, то оно будетъ передвигаться по стержню по направленію движенія, т. е. будетъ приближаться къ краю B .

Итакъ съ измѣненіемъ скорости стержня кольцо C передвигается по стержню; ускореніе *относительнаго движенія* кольца C равно по величинѣ, но противоположно по направленію, ускоренію стержня.

Примѣръ кольца со стержнемъ поможетъ намъ выяснитъ дальнѣйшее общее положеніе.

Возьмемъ произвольную систему матеріальныхъ точекъ и приведемъ ее въ произвольное неравномѣрное движеніе. Въ какой нибудь моментъ освободимъ какую нибудь матеріальную точку C отъ ея связей съ другими точками и отъ дѣйствующихъ силъ. Точка C , сдѣлавшись свободною, сохранитъ пріобрѣтенную скорость, а система будетъ продолжать двигаться неравномѣрно. Вслѣдствіе этого точка C будетъ перемѣщаться относительно остальной системы матеріальныхъ точекъ. Ясно, что ускореніе этого относительнаго движенія равно и противоположно тому ускоренію, которое имѣла бы эта точка C , если бы она была связана съ остальною системою. Сила, способная произвести подобное относительное движеніе, называется *силою инерціи*. Эта сила равна и противоположна по направленію силѣ, дѣйствующей на точку C .

Положимъ теперь, что матеріальная система движется равномерно около постоянной оси. Сила, дѣйствующая на каждую точку, направлена къ центру круга, описываемаго этою точкою,—это центростремительная сила. Сила инерціи равна центростремительной силѣ, но направлена въ противоположную сторону, и потому называется *центробѣжною силою*.

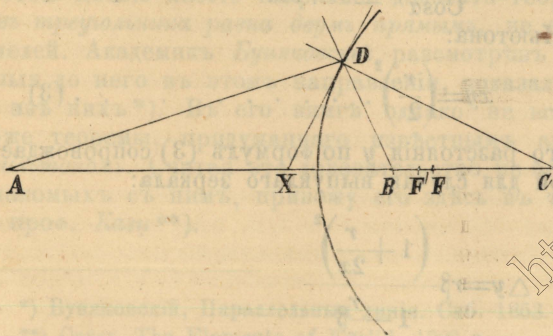
Центробѣжная сила, есть сила инерціи, развивающаяся при измѣненіи направленія движенія.

Проф. В. Ермаковъ.

ФОРМУЛА СФЕРИЧЕСКИХЪ ЗЕРКАЛЬ.

Въ настоящей замѣткѣ излагается выводъ формулы, позволяющей съ легкостью судить о степени точности при опредѣленіи фокуснаго разстоянія по обыкновенной формулѣ для сферическихъ зеркалъ.

Фиг. 29.



Пусть будетъ дано сферическое зеркало (выпуклое) (фиг. 29), C его центр, A —главная ось, A —свѣтящаяся точка, B —точка пересѣченія продолженія отраженнаго луча съ осью, X —точка пересѣченія оси съ касательной къ сферѣ проведенной въ плоскости чертежа черезъ точку D паденія луча. Такъ

какъ А, Х, В и С гармоническія точки, ибо прямыя DX и DC внутреннихъ и вѣшнихъ биссекторы угла ADB, то

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB}.$$

Пусть

$$AX=d, XB=f, XC=\rho \text{ и } \angle DCA=\alpha,$$

тогда

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{2}{\rho}.$$

Пусть точка дѣленія XC пополамъ будетъ F' и пусть $AF'=x'$ и $BF'=y'$; имѣемъ

$$x'y' = \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

Пусть F есть точка, удаленная отъ центра С на разстояніе $\frac{r}{2}$, гдѣ r радіусъ сферы. Будемъ опредѣлять положенія точекъ А и В относительно точки F; назвавъ разстоянія AF и BF черезъ x и y , имѣемъ

$$x'=x-z \text{ и } y'=y-z;$$

гдѣ

$$z=FF'=\frac{1}{2}(\rho-r)=r \frac{\sin^2 \alpha / 2}{\cos \alpha}.$$

Подставивъ значенія x' и y' въ уравненіе (1), получимъ

$$xy = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r \frac{\sin^2 \alpha / 2}{\cos \alpha} [r \pm (x+y)] \dots \dots \dots (2)$$

При суммѣ $x+y$ поставлено два знака \pm ; $+$ относится къ выпуклому зеркалу, — же къ вогнутому.

Выводъ формулы (2) и составляетъ цѣль настоящей замѣтки. Когда

$$\sin^2 \alpha / 2$$

α очень малый уголъ, величиной $r \frac{\sin^2 \alpha / 2}{\cos \alpha} [r \pm (x+y)]$ можемъ пренебречь и тогда получимъ формулу Ньютона:

$$xy = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \dots \dots \dots (3)$$

Опредѣленіе фокуснаго разстоянія y по формулѣ (3) сопровождается ошибкой, величина которой для случая выпуклаго зеркала:

$$\Delta y = r^2 \frac{\left(1 + \frac{r}{2x}\right)^2}{1 - \frac{r}{x}}$$

и для вогнутого зеркала

$$\Delta y = -r\beta \frac{\left(1 - \frac{r}{2x}\right)^2}{1 + \frac{r}{x}\beta},$$

гдѣ

$$\beta = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

По мѣрѣ увеличенія x величина ошибки уменьшается и приближается къ $\pm r\beta$. Если α около 5° , $\beta = 0,002$ и предѣльная величина ошибки $\pm 0,002r$. Въ случаѣ вогнутого зеркала, какъ абсолютная ошибка

Δy , такъ и относительная $\frac{\Delta y}{y}$ могутъ достигать большихъ значеній при малыхъ величинахъ x ; тогда ошибкой нельзя пренебрегать, иначе сказать, для малыхъ величинъ x вогнутое зеркало обладаетъ большою сферическою аберраціею и формула (3) уже не пригодна. Когда $x=0$, $y_0 = r + \frac{r}{4\beta}$. Вогнутое зеркало обладаетъ наименьшей сферической абер-

раціей для значеній x близкихъ къ $\frac{r}{2}$, ибо тогда Δy близко къ 0.
Проф. Н. Смуиновъ (Казань).

ПО ПОВОДУ 11-Й АКСИОМЫ ЭВКЛИДА.

Теорія параллельныхъ прямыхъ, построенная Эвклидомъ на извѣстной его 11-й аксіомѣ, издавна обращала на себя вниманіе геометровъ, такъ-какъ упомянутая аксіома не можетъ считаться очевидной. Съ начала V в. по Р. Х. (Проклъ) до настоящаго столѣтія включительно (Лежандръ, Шумтенъ и др.) геометры старались найти теорему, доказательство которой могло-бы служить для вывода аксіомы Эвклида, какъ слѣдствія. Съ этою цѣлью многіе старались доказать теорему: *сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ*, не ссылаясь на свойства параллелей. Академикъ Бунаковский, разсмотрѣвъ важнѣйшія попытки, сдѣланныя до него въ этомъ направленіи, показалъ несостоятельность каждой изъ нихъ*). Въ его книгѣ однако не встрѣчается доказательства той-же теоремы, придуманнаго извѣстнымъ англійскимъ математикомъ Гамильтономъ. Считая это доказательство не безынтереснымъ для лицъ, незнакомыхъ съ нимъ, привожу его здѣсь въ томъ видѣ, какой придалъ ему проф. Казань**).

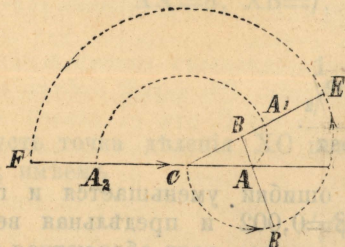
*) Бунаковский, Параллельныя линіи. Спб. 1853.

**) Casey. The Elements of Euclid. 1889 г.

Въ треугольникѣ ABC продолжимъ стороны BA , CB и AC соответственно до точекъ D , E и F , такъ чтобы

$$AD=AC, \quad BE=BD, \quad CF=CE.$$

Фиг. 30.



образовавшіеся внѣшніе углы треугольника обозначимъ черезъ A' , B' , C' (фиг. 30). Повернемъ сторону AC около вершины A на уголъ A' , т. е. до совпаденія ея съ AD ; затѣмъ прямую BD повернемъ на уголъ B' около вершины B до совпаденія ея съ BE ; сторона AC приметъ тогда положеніе A_1E ; повернувъ, наконецъ, прямую CE около C на уголъ C' , т. е. до совпаденія ея съ CF , приведемъ сторону AC въ положеніе A_2F . Такимъ образомъ сторона AC , отръзокъ прямой AF , послѣ вращенія въ одну сторону на уголъ $A'+B'+C'$, заняла положеніе A_2F на той-же прямой, изъ котораго она, однимъ передвиженіемъ по AF , безъ вращенія, можетъ быть приведена въ первоначальное положеніе AC . Слѣд. уголъ вращенія $A'+B'+C'=4d$; но сумма трехъ паръ смежныхъ угловъ $(A+A')+(B+B')+(C+C')=6d$; поэтому сумма внутреннихъ угловъ треугольника $A+B+C=2d$.

Въ чемъ заключается слабая сторона этого доказательства?

Д.м. Ефремовъ (Иваново-Возн.).

ПРИЛОЖЕНІЕ ОГИВАЮЩИХЪ ЛИНІЙ

къ рѣшенію планиметрическихъ задачъ на построеніе.

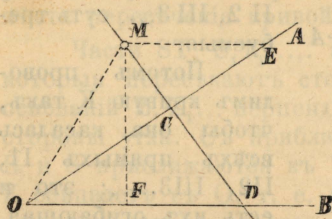
На стр. 240 „Журнала Элементарной Математики“ за 1884 годъ напечатанъ „отвѣтъ редакціи“ такого содержанія:

„Въ редакцію нѣсколько разъ обращались за разъясненіями по поводу задачи: Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы ея отръзокъ, заключенный между сторонами даннаго угла, имѣлъ данную длину.—Ваши замѣчанія, что задача въ общемъ видѣ не можетъ быть рѣшена при помощи циркуля и линейки, совершенно вѣрны..... Если отръзокъ на одной изъ сторонъ угла обозначимъ черезъ x и выразимъ его черезъ данныя величины, то получимъ уравненіе четвертой степени.“

Дѣйствительно, если данный уголъ AOB , данная точка M (фиг. 31) (внѣ или внутри угла) и линія MD искомая—такъ что отръзокъ CD имѣетъ данную длину a , то, проводя ME параллельно OB , получаемъ два подобныя треугольника MCE и OCD , изъ которыхъ слѣдуетъ:

$$\frac{OD}{CD} = \frac{ME}{MC}.$$

Фиг. 31.



Поставивъ $OD=x$, $MC=y$, $ME=b$, и $MO=r$, эту пропорцію можемъ записатьъ въ видѣ:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \dots \dots (1)$$

Изъ треугольника MOD имѣется:

$$(y+a)^2 = x^2 + r^2 + 2xc \dots \dots (2),$$

гдѣ c есть проекція отрезка OM на линію OB.

Подставляя величину y изъ 1-го уравненія во 2-е, получаемъ

$$\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 = x^2 + r^2 + 2xc,$$

откуда слѣдуетъ:

$$x^4 + 2cx^3 + (r^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0.$$

Рѣшеніе этого уравненія средствами начальной алгебры, равно какъ и построеніе, согласно началамъ Евклида, невозможно. Но эти затрудненія устраняются, если приложить для построенія огибающую линію.

Тутъ является вопросъ: что называется огибающею линіею?

Если какая либо линія L движется по извѣстному закону, — сохраняя или измѣняя при этомъ свою форму, — то всѣ ея смежныя положенія L , L_1 , L_2 , пересѣкаются въ точкахъ, которыя образуютъ въ совокупности своей нѣкоторую линію K , касательную ко всѣмъ положеніямъ данной кривой. Такая линія K называется **огибающей**.

Такъ, если окружность L движется такимъ образомъ, что центръ ея находится постоянно на данной $\left\{ \begin{array}{l} \text{прямой } P \\ \text{окружности } O \end{array} \right\}$, то линія, огибающая всѣ положенія, занимаемая движущеюся окружностью, будетъ состоять изъ двухъ $\left\{ \begin{array}{l} \text{прямыхъ параллельныхъ прямой } P \\ \text{окружностей концентрическихъ съ окружностью } O \end{array} \right\}$

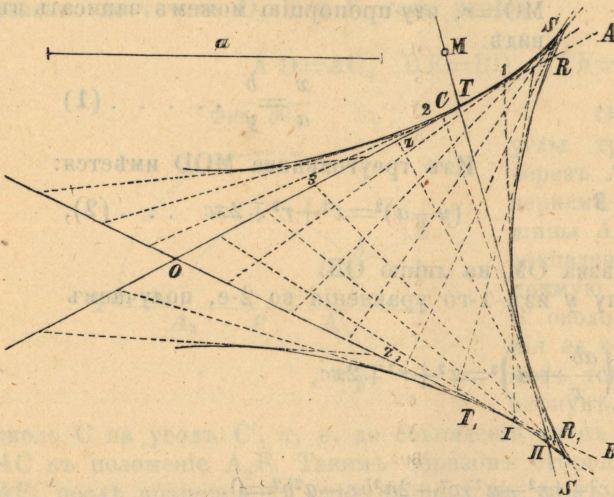
Если къ какой либо кривой K провести возможно большее число касательныхъ T , T_1 , T_2 , то линія K будетъ огибающею линіею всѣхъ касательныхъ, и вообще можно сказать, что *всякая кривая есть огибающая линія всѣхъ своихъ касательныхъ*.

Этимъ указаніемъ пользуются весьма часто для вычерчиванія самихъ кривыхъ, напримѣръ строя, на основаніи теоремы Бріансона, по пяти даннымъ касательнымъ нѣкоторой кривой второй степени — шестую.

Теперь возвратимся къ нашей первоначальной задачѣ.

Сначала выполнимъ часть условія, именно проведемъ произвольную прямую такъ, чтобы отрезокъ ея между сторонами даннаго угла AOB (фиг. 32) имѣлъ данную длину a . Такихъ прямыхъ безчисленное множество, а для построенія нѣкотораго числа ихъ, на одной сторонѣ угла выбираемъ произвольныя точки 1, 2, 3, и радіусомъ равнымъ данной длинѣ a пересѣкаемъ другую сторону угла въ точкахъ I, II,

Фиг. 32.



III....., прямые I 1, II 2, III 3,... суть требующимся.

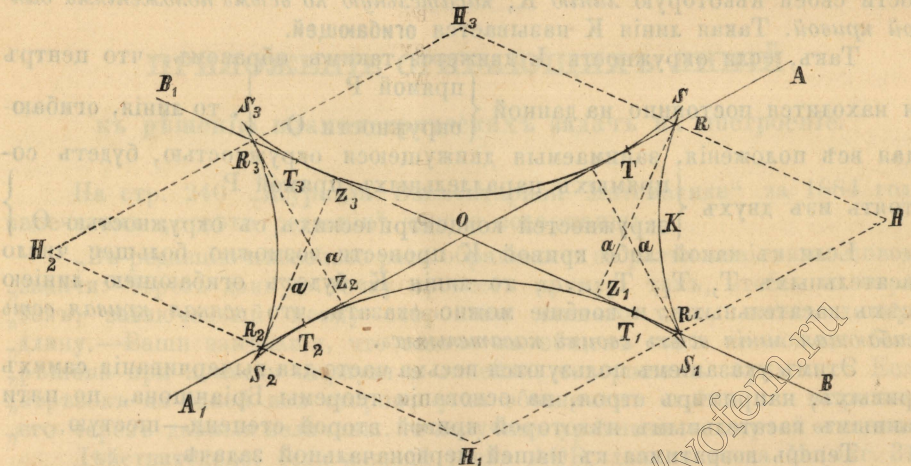
Потомъ проводимъ кривую K такъ, чтобы она касалась всѣхъ прямыхъ I1, II2, III3....; это и есть ихъ огибающая, имѣющая, притомъ то свойство, что отрѣзки всѣхъ ея касательныхъ, заключенные между сторонами угла AOB, имѣютъ длину a . Слѣд., если черезъ точку M провести—простымъ приложеніемъ линейки—

касательную MN къ кривой K, то длина ея отрѣзка между сторонами угла будетъ a , и линія MN есть искомая.

Остается сказать нѣсколько словъ о кривой K.

Она имѣетъ четыре вѣтви, для построения которыхъ стоитъ только продолжить стороны угла и въ каждомъ изъ полученныхъ угловъ повторить то же самое построение, что и прежде. Кривая имѣетъ четыре точки

Фиг. 33.



возврата S, S_1, S_2, S_3 , вообще не лежація на сторонахъ угла; вся она представлена на (фиг. 33) въ уменьшенномъ видѣ.

Отложивъ отъ вершины O отрѣзокъ a на сторонахъ угла, получаемъ точки прикосновенія T, T_1, T_2, T_3 сторонъ угла съ кривою K.

Построивъ ромбъ $NN_1N_2N_3$, стороны котораго отстоятъ на

разстояніи a отъ сторонъ угла, въ точкахъ R, R_1, R_2, R_3 получаемъ мѣста пересѣченія кривой K со сторонами угла.

Части ST, S_1T_1, \dots кривой суть огибающія линіи тѣхъ сѣкущихъ, которыя пересѣкаютъ стороны угла въ предѣлахъ отъ вершины O до оснований Z, Z_1, \dots перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ R, R_1, \dots на стороны угла. Съ приближеніемъ точекъ Z, Z_1, \dots къ вершинѣ O , точки R и S приближаются къ T и наконецъ эти три точки совпадутъ, когда Z совпадетъ съ O , т. е. когда данный уголъ AOB прямой. Тогда точки возврата лежатъ на сторонахъ угла и вся огибающая вписана въ ромбъ $NN_1N_2N_3$.

Очевидно, что форма и величина кривой K зависятъ исключительно отъ величины угла и длины отрезка a .

Уяснивъ себѣ форму этой кривой, можемъ приступить къ изслѣдованію вопроса.

Если данная точка M лежитъ внѣ фигуры, ограниченной кривою K , то можно провести всего двѣ прямыя, удовлетворяющія условію; а такъ какъ аналитическое рѣшеніе задачи приводитъ къ уравненію 4-й степени, то должно предположить, что есть еще два рѣшенія мнимыя. Но если данная точка лежитъ внутри криволинейной фигуры, то получаются всегда четыре реальныхъ рѣшенія.

Примѣчаніе 1-е. Когда, выбирая на прямой OA рядъ точекъ 1, 2, 3, 4, ..., доходимъ до такихъ, что сѣкущія, выходящія изъ нихъ пересѣкаютъ другую сторону BO подъ слишкомъ острымъ угломъ, такъ что пересѣченія неточны, то при продолженіи работы слѣдуетъ выбирать дальнѣйшія точки на прямой BO , а изъ нихъ пересѣкать прямую AO .

Примѣчаніе 2-е. Построивъ большое количество сѣкущихъ, можемъ провести искомую прямую, не вычерчивая самой кривой K .

Примѣчаніе 3-е. Разсмотрѣнная нами задача была рѣшена еще въ древности греческимъ геометромъ Никомедомъ посредствомъ конхоиды.

Ф. Коваржикъ (Полтава).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новый типъ электрическихъ часовъ. Въ 1-омъ № „Bulletin de la société internationale des Electriciens“, за нынѣшній годъ, помѣщенъ рефератъ г. Наполи объ электрическихъ часахъ братьевъ Жапи и К^о въ Парижѣ. Новые электрическіе часы ежечасно заводятся магнито-электрической машинкой Грамма, якорь которой вращается отъ дѣйствія одного элемента Лекланше. Электрическіе часы братьевъ Жапи—съ боемъ, чего обыкновенно у такихъ часовъ не бываетъ. Внутреннія части у новыхъ часовъ тѣ-же, что и у обыкновенныхъ, съ тою лишь разницей, что заводной барабанъ одинъ. Отъ часовъ (отъ циферблата) внизъ спускается рама, въ нижней части которой помѣщается вертикально подковообразный искусственный магнитъ, полюсами вверхъ. Къ полюсамъ придѣланы расширенія изъ мягкаго желѣза, а между ними, на вертикальной оси, вращается кольцо Грамма выше котораго приходится кол-

литоръ со щетки. Кольцо Грамма насажено на ось только съ трѣніемъ, но можетъ поворачиваться и отдѣльно, что и случается при перерывѣ тока, когда кольцо вращается нѣкоторое время не поворачивая вала и не вредя заводимой пружины. На вертикальномъ валу Граммова кольца, въ верхней части, находится безконечный винтъ, который заводитъ часовую пружину барабана, прикрѣпленнаго къ колесу, насаженному на холостой стрѣлочный валъ. Спиральная пружина барабана, раскручиваясь, приводитъ въ движеніе якорный спускъ и минутныя колеса.—Во время завода часовъ безконечный винтъ вращаетъ боевое колесо, которое въ это время дѣлаетъ 13 оборотовъ, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одному удару молоточка. Молоточекъ задерживается всякій разъ, какъ онъ сдѣлалъ нужное число ударовъ. Тринадцатый поворотъ колеса размыкаетъ цѣпь, и останавливаетъ вращеніе якоря. Для приданія двигателю равномернаго хода къ валу якоря прикрѣпленъ регуляторъ, крылья котораго, поднимаясь, замедляютъ движеніе кольца и дѣлаютъ бой равномернымъ.

П. П.

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданіе Русскаго Физико-Химическаго Общества въ Спб. 6-го Марта 1890 года.

Предсѣдатель Общества *Θ. Θ. Петрушевскій* предлагаетъ собранію высказаться по поводу показаннаго на прошломъ засѣданіи усовершенствованнаго фонографа Эдиссона. Члены Общества единогласно подтверждаютъ, что фонографъ Эдиссона вполне хорошо передаетъ какъ пѣніе такъ и простую рѣчь.

По предложенію VIII-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей Физическое Отдѣленіе Общества предполагаетъ открыть въ непродолжительномъ времени постоянное бюро для провѣрки метеорологическихъ приборовъ. Въ скоромъ времени могутъ быть провѣряемы термометры, барометры, анеометры, ареометры, разновѣски, амметры и вольтметры.

Ч. К. Скржинскій излагаетъ о способѣ намотки якоря въ динамо-машинѣ лорда Эльфинстона. Способъ обмотки довольно сложный, ибо машина эта по конструкціи шести-полюсная и представляетъ собою три отдѣльныя машины, соединенныя между собою параллельно. Онъ же сообщаетъ о приборахъ для заряженія аккумуляторовъ. Кромѣ очень наглядныхъ чертежей были показаны въ дѣйствиіи автоматическій прерыватель тока Эппштейна, предохранитель Колокольцова, плоскій ареометръ и др.

И. И. Боргманъ излагаетъ свои соображенія по поводу теоріи Пойнтинга.

Н. Г. Егоровъ показываетъ опытъ Лоджа, касающійся электрическаго резонанса. При помощи электрической машины и искромѣра заряжаютъ и разряжаютъ Лейденскую банку. Другая Лейденская банка, находясь на нѣкоторомъ разстояніи и не соединенная ни съ однимъ изъ выше названныхъ приборовъ, заряжается и разряжается (даетъ искру между своими обкладками) въ тѣ же моменты какъ и первая банка. Явленіе это не происходитъ если измѣнить въ одну или другую сторону самоиндукцію одной изъ лейденскихъ банокъ.

О. Стр. (Спб.).

Матем. Отд. Новор. Общ. Естествоиспыт. по вопр. эл. мат. и физики. Одесса. 16 Марта 1890 года.

В. П. Юрасовъ сдѣлалъ сообщеніе „о бѣ умноженіи и дѣленіи дробей въ

школьномъ преподаваніи, въ которомъ старался указать форму опредѣленій этихъ дѣйствій, наиболѣе доступную для учащихся, вывести изъ установленныхъ опредѣленій правила этихъ дѣйствій и объяснить приложеніе дѣйствій къ рѣшенію задачъ.—
 О. Н. Милиотицкій сдѣлалъ нѣсколько замѣчаній объ изображеніяхъ въ зеркалахъ.—
 Въ заключеніе обсуждался вопросъ о секретаряхъ засѣданій. Въ рѣшеніе этого вопроса, состоявшееся раньше, внесена слѣдующая поправка. Рѣшено составить списокъ лицъ, желающихъ нести эти обязанности и по этому списку назначать секретарей, освобождая такимъ образомъ отъ исполненія этихъ обязанностей лицъ, которыя тяготеютъ ими.

И. Слейшинскій (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 44. На діаметръ круга АВ возьмемъ произвольную точку С и черезъ нее проведемъ перпендикулярную къ діаметру прямую MN и двѣ произвольныя хорды DE и FG. Требуется доказать, что прямыя, соединяющія соотвѣтственные концы этихъ хордъ (DG и FE или DF и EG), пересѣкутъ перпендикуляръ MN въ точкахъ равноудаленныхъ отъ діаметра АВ.

Н. Соловьевъ (Москва).

№ 45. Черезъ точку М, взятую внутри шара радіуса r на разстояніи d отъ его центра О, проведены три взаимно перпендикулярныя плоскости. Требуется опредѣлить сумму площадей круговъ, полученныхъ въ пересѣченіи шара этими плоскостями.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 46. Найти максимумъ $x^2 - y^2$, если разность $ax - by$ должна оставаться постоянной.

А. Войновъ (Харьковъ).

№ 47. Исключить α изъ уравненій:

$$bx \sin 3\alpha = r^2 \sin \alpha$$

$$by \sin 3\alpha = r^2 \cos \alpha.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

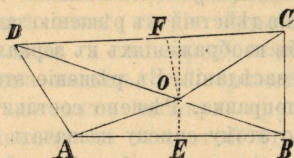
№ 48. Въ треугольникъ ABC вписанъ кругъ О, касающійся сторонъ соотвѣтственно въ точкахъ C_1 , A_1 , B_1 . Проводимъ произвольную къ кругу касательную MN и черезъ центръ О прямыя, параллельныя прямымъ A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 до ихъ пересѣченія съ касательной MN въ точкахъ C_2 , A_2 и B_2 . Показать, что прямыя, соединяющія эти точки съ соотвѣтственными вершинами треугольника, пересѣкутся въ одной точкѣ.

Мясковъ (Слонимъ).

ЗАГАДКА ДЛЯ УЧЕНИКОВЪ.

Въ концахъ прямой, опредѣленной длины АВ (фиг. 34); проведемъ перпендикуляръ ВС и наклонную AD и отложимъ на нихъ равныя отрѣзки $BC = AD$. Соединимъ точки D и C прямою и изъ середины прямыхъ АВ и DC возставимъ перпендикуляры, которые пусть пересѣкутся въ точкѣ

Фиг. 34.



О. Соединивъ О съ точками А, В, С и D, имѣемъ

$$AO=OB; DO=DC;$$

а такъ какъ по отложенію $AD=BC$, то треугольники AOD и BOC равны; слѣдовательно $\angle OAD=\angle OBC$; прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства равные углы OAE и OBE , находимъ

$$\angle DAE=\angle EBC,$$

т. е. что тупой уголъ равенъ прямому. Требуется найти ошибку.

Приоровскій (Кіевъ).

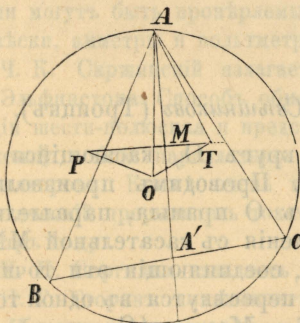
РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 435. Въ окружность, центръ которой въ О и радіусъ которой R, вписанъ треугольникъ ABC. Биссекторъ угла А пересѣкаетъ въ A_1 сторону BC и разлагаетъ треугольникъ ABC на два треугольника ABA_1 и ACA_1 . Пусть Р центръ окружности, описанной около одного изъ нихъ, Т—центръ окружности, описанной около другого. Доказать, что

$$OP=OT=\frac{a}{b+c}R.$$

Чтобы найти центры окружностей, описанныхъ около треугольниковъ

Фиг. 35.



ABA_1 и ACA_1 , изъ центра О—окружности описанной около треугольника ABC (фиг. 35) опустимъ перпендикуляры на АВ и АС и въ срединѣ М биссектора AA' возставимъ къ AA' перпендикуляръ, точки пересѣченія котораго съ перпендикулярами къ АВ и АС будутъ центрами Р и Т окружностей, описанныхъ около треугольниковъ ABA' и ACA' . Въ треугольникѣ ОРТ уголъ РТО равенъ углу $A'AC$ (по перпендикулярности сторонъ, составляющихъ эти углы). По той же причинѣ

$$\angle OPT=\angle BAA'.$$

Такъ какъ

$$\angle BAA'=\angle CAA',$$

то и

$$\angle PTO=\angle OPT$$

и треугольникъ ОРТ равнобедренный, а потому $PO=TO$. Треугольники АТО и $AA'B$ подобны, потому что

$$\angle B=\angle AOT \text{ и } \angle AA'B=\angle ATO.$$

Послѣдніе углы равны, такъ какъ равны углы дополняющіе ихъ до двухъ прямыхъ. Изъ подобія треугольниковъ ABA' и AOT слѣдуетъ

$$OT:AO=A'B:AB$$

но

$$AO=R, A'B=\frac{ac}{b+c}$$

и

$$AB=c,$$

слѣдовательно

$$OT=OP=\frac{a}{b+c}R.$$

С. Блажко (Москва), *Н. Николаевъ* (Пенза), *П. Свѣтлинковъ* (Троицкъ). Ученики: 1-й Спб. г. (7) *А. К.*, 2-й Тифл. г. (6) *М. А.*, Могил. г. (8) *Я. Э.*, Ворон. к. к. (7) *Г. У.* и *Н. В.*

№ 437. Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x}{x^2+ax+b^2}+\frac{y}{y^2+ay+b^2}=\frac{1}{c}$$

$$xy=m(x+y).$$

Освободивъ первое уравненіе отъ знаменателей, приведемъ его къ виду

$$c[xy(x+y)+2axy+b^2(x+y)]=x^2y^2+axy(x+y)+a^2xy+b^2[(x+y)^2-2xy]+ab^2(x+y)+b^4.$$

Подставимъ сюда $m(x+y)$ вмѣсто xy , тогда, сгруппировавъ всѣ члены въ одной части, найдемъ

$$A(x+y)^2+B(x+y)+b^4=0,$$

гдѣ

$$A=b^2+am-cm+m^2,$$

$$B=ab^2+a^2m-b^2c-2b^2m-2acm.$$

Отсюда найдемъ два значенія для $x+y$. Пусть эти значенія будутъ s_1 и s_2 . Тогда

$$xy=ms_1 \quad \text{или} \quad xy=ms_2.$$

Зная же xy и $x+y$, легко опредѣлить x и y изъ уравненій:

$$z^2-s_1z+ms_1=0,$$

или

$$z^2-s_2z+ms_2=0.$$

Н. Карповъ (Лубны), *П. Свѣтлинковъ* (Троицкъ), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *Н. Соболевскій* и *С. Блажко* (Москва), *С. Кричевскій* (Ромны). Ученики: Кам-Под. г. (7) *А. М.* и *К. К.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.*

№ 551. Некоторое число лицъ взаимно обмѣнялись визитными карточками. Сколько было лицъ, если для этого понадобилось 50 дюжинъ карточекъ?

Если число всѣхъ лицъ x , то каждый отдаетъ $x-1$ карточку, следовательно

$$x(x-1)=12.50=24.25$$

откуда

$$x=25.$$

Ученики: Киев. р. уч. (7) Л. А., Курск. г. (7) Н. Б., Е. П. и В. Х., (8) С. Г., Троицк. г. (7) Н. Г., Тверск. р. уч. (5) И. А., (7) М. Н., 2-й Тифл. г. (7) М. А., Спб. Ек. ц. уч. (7) В. М., Великол. р. уч. (6) А. В., Урюч. р. уч. (7) И. У—ъ, Ворон. к. к. (5) И. В., (7) Н. В. и Г. У.

№ 554. Рѣшить уравненіе:

$$x^4 - 2ax^3 + x^2(a^2 - A) + Aax + B = 0.$$

Данное уравненіе можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$x^2(x^2 - 2ax + a^2) - Ax(x-a) + B = 0,$$

или

$$[x(x-a)]^2 - Ax(x-a) + B = 0,$$

отсюда

$$x(x-a) = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

и, наконецъ,

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2A \pm 2\sqrt{A^2 - 4B}}}{2}.$$

Ученики: 2-й Тифл. г. (7) М. А., Ворон. к. к. (7) Н. В. и Г. У., Урюч. р. уч. (7) И. У—ъ, Курск. г. (7) Н. Б., Е. П. и В. Х.

ОПЕЧАТКА.

Въ рецензіи К. III. („Начала Алгебры“ П. И. Матковскаго) на стр. 131 въ 17-ой строкѣ сверху вмѣсто слова *теоремы* должно быть *термины*.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпагинскій.

Дозволено цензурою. Киевъ, 4 Мая 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Купшнеревъ и К^о.

Обложка
щется

<http://vofem.ru>

Обложка
щется

<http://vofem.ru>