Обложка
ищется

Обложка
пщется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 66.

VI Сем. 5 Марта 1889 г. № 6.

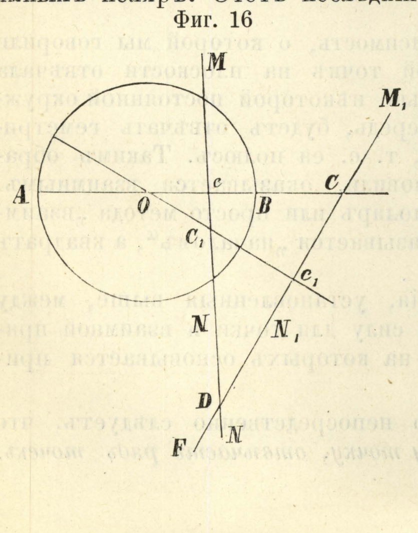
ВЗАИМНЫЯ ФИГУРЫ.

Отвѣтъ на тему, предложенную въ „Вѣстникѣ" № 51.

Въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ пользуются иногда методомъ, посредствомъ котораго однѣ фигуры приводятся въ сопряженіе съ другими. Идея заключается въ томъ, что устанавливается нѣкоторая основная зависимость, опредѣляющая относительно каждой точки на плоскости нѣкоторую другую точку или линію, съ ней сопряженную. Когда основная точка движется по нѣкоторой кривой, то точка или линія сопряженная описываетъ другую кривую, сопряженную съ первой. Такимъ образомъ каждое предложеніе находитъ себѣ соотвѣтствующее въ сопряженной фигурѣ, а каждая задача превращается въ другую, имѣющую по сравненіи съ первой тѣмъ больше преимуществъ, чѣмъ удачнѣе установлена основная зависимость.

Между различными частными случаями этого метода имѣютъ наибольшее значеніе слѣдующіе: 1) Методъ обратныхъ фигуръ („Вѣстникъ" №№ 13—15). 2) Методъ проэкцій („Вѣстникъ" № 51) и 3) Методъ взаимныхъ поляръ. Этотъ послѣдній играетъ важную роль въ геометріи, ибо онъ устанавливаетъ зависимость между цѣлымъ рядомъ однихъ и другихъ геометрическихъ мѣстъ. Мы не имѣемъ, конечно, возможности изложить здѣсь теорію метода во всей ея полнотѣ, а потому ограничимся тѣми основными положеніями, которыя имѣютъ приложеніе въ вопросахъ элементарной геометріи.

Фиг. 16



Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую окружность O радіуса r (фиг. 16). Пусть C произвольная точка на плоскости, а точка c къ ней сопряженно гармоническая по отношенію къ діаметру AB. Перпендикуляръ MN, возставленный изъ точки c къ сѣкущей OC, называется *полярой* точки C относительно данной окружности. Точка C, въ свою очередь, называется *полюсомъ* прямой MN. Изъ самаго опредѣленія поляры вытекаютъ слѣдующія основныя ея свойства:

Предл. I. Каждой точкѣ на плоскости соотвѣтствуетъ только одна поляра и наоборотъ, каждая прямая имѣетъ только одинъ полюсъ, ибо каждой точкѣ на прямой отвѣчаетъ лишь одна сопряженно-гармоническая относительно даннаго отрѣзка.

Предл. II. Изъ основной пропорціи $\frac{cA}{cB}=\frac{CA}{CB}$ слѣдуетъ, что $cA > cB$, если $CA > CB$ и наоборотъ; т. е. *полюсъ и поляра постоянно находятся по одну и ту-же сторону отъ центра.*

Предл. III. Ту-же самую пропорцію можно написать такимъ образомъ $\frac{OC+r}{OC-r}=\frac{r+Oc}{r-Oc}$. Взявъ отношеніе суммы членовъ каждаго отношенія къ разности членовъ того-же отношенія, мы получимъ: $\frac{OC}{r}=\frac{r}{Oc}$ или $OC.Oc=r^2$. Такимъ образомъ *произведеніе изъ разстояній полюса и поляры отъ центра есть величина постоянная и равна квадрату радіуса.*

Очевидно, что свойства II) и III) вполнѣ опредѣляютъ поляру.

Предл. IV. Если точка C' лежитъ на полярѣ точки C, то поляра точки C' проходитъ черезъ полюсъ C. Въ самомъ дѣлѣ, опустивъ изъ C перпендикуляръ M_1N_1 на прямую OC', мы получимъ подобные треугольники $Oc'C$ и OcC', откуда слѣдуетъ, что $\frac{OC'}{Oc}=\frac{OC}{Oc'}$, или $OC'.Oc'=OC.Oc==r^2$. Такъ какъ при этомъ точки C' и c' лежатъ по одну сторону отъ центра, то прямая M_1N_1 есть поляра точки C', чѣмъ теорема и доказывается. Такимъ точно образомъ доказывается и обратное предложеніе.

Примѣч. Отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что поляра данной точки, есть прямая, соединяющая полюсы двухъ проходящихъ чрезъ нее прямыхъ, а полюсъ данной прямой—точка пересѣченія поляръ двухъ на ней лежащихъ точекъ.

Установимъ теперь основную зависимость, о которой мы говорили выше, такимъ образомъ, чтобы каждой точкѣ на плоскости отвѣчала прямая—и именно ея поляра относительно нѣкоторой постоянной окружности; тогда этой прямой, въ свою очередь, будетъ отвѣчать геметрическое мѣсто поляръ всѣхъ ея точекъ, т. е. ея полюсъ. Такимъ образомъ, соотношеніе, которое мы установили, оказывается взаимнымъ. Отсюда и названіе метода взаимныхъ поляръ или просто метода „взаимности“. Центръ постоянной окружности называется „началомъ“, а квадратъ радіуса—степенью взаимности.

Очевидно, что четыре соотношенія, установленныя выше, между полюсомъ и полярой сохраняютъ свою силу для точки и взаимной прямой. Мы укажемъ еще рядъ свойствъ, на которыхъ основывается приложеніе метода.

Предл. V. Изъ предложенія IV-го непосредственно слѣдуетъ, что *пучку прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну точку, отвѣчаетъ рядъ точекъ, лежащихъ на одной прямой.*

Предл. VI. Полюсъ всякой прямой лежитъ на перпендикулярѣ, опущенномъ на нее изъ начала; для ряда параллельныхъ линій это будетъ одна и та-же прямая, а потому *ряду параллельныхъ линій отвѣчаетъ рядъ точекъ, расположенныхъ на прямой, проходящей чрезъ начало.*

Эта прямая перпендикулярна къ параллельнымъ линіямъ и по предложенію IV-му (прим.) представляетъ собой поляру безконечно удаленной точки ихъ пересѣченія. Такимъ образомъ мы получаемъ новое предложеніе:

Предл. VII. Безконечно удаленной точкѣ на плоскости отвѣчаетъ прямая, проходящая чрезъ начало и—конечно—*наоборотъ.*

Отсюда, въ свою очередь, вытекаетъ, что началу отвѣчаетъ прямая, на которой лежатъ всѣ безконечно удаленныя точки плоскости, т. е. *безконечно удаленная прямая.*

Впрочемъ, послѣднее предложеніе можетъ быть легко доказано и непосредственно; въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ произведеніе изъ разстояній полюса и поляры отъ центра остается постоянной величиной, то одно изъ нихъ обращается въ безконечность, когда другое обращается въ нуль.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ двѣ прямыя, пересѣкающіяся подъ нѣкоторымъ угломъ. Во взаимной фигурѣ имъ будутъ отвѣчать двѣ точки. Соединивъ эти послѣднія съ началомъ, мы получимъ двѣ прямыя, перпендикулярныя къ сторонамъ даннаго угла въ силу опредѣленія поляры. На основаніи соотношенія между углами, стороны которыхъ взаимно перпендикулярны, устанавливаемъ слѣдующее предложеніе:

Предл. VIII. Уголъ между двумя прямыми равенъ углу, стягиваемому двумя соотвѣтствующими точками въ началѣ.

Впрочемъ это будетъ справедливо только относительно того изъ двухъ смежныхъ угловъ, въ которомъ не находится начало: мы видимъ изъ фиг. 16, что $\angle c\mathrm{DF}$ дополняетъ до двухъ прямыхъ уголъ COC', тогда какъ $\angle c\mathrm{DC} = \angle \mathrm{COC}'$.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ четыре прямыя a, b, c, d, проходящія чрезъ одну точку. Во взаимной фигурѣ имъ отвѣчаютъ четыре точки, A, B, C, D, лежащія на одной прямой. Соединивъ ихъ съ началомъ, мы получимъ четыре прямыя a_1, b_1, c_1, d_1, при чемъ анг. отнош. $(\mathrm{ABCD})=$анг. отн. (a_1, b_1, c_1, d_1); но такъ какъ послѣднія прямыя наклонены другъ къ другу подъ тѣми-же углами, какіе заключены между прямыми a, b, c, d, то имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство ангармоническихъ отношеній:

$$(abcd)=(a_1b_1c_1d_1)=(\mathrm{ABCD}).$$

Такимъ образомъ устанавливается теорема:

Предл. IX. Ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ точекъ, и наоборотъ.

Но ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ есть частное отношеній, въ которыхъ разстояніе между двумя точками дѣлится двумя другими точками. Когда одна изъ этихъ послѣднихъ удаляется въ безконечность, то соотвѣтствующее отношеніе обращается въ единицу, а ангармоническое отношеніе сводится къ отношенію отрѣзковъ, опредѣляемыхъ тремя остальными точками. Во взаимной фигурѣ, въ этомъ случаѣ, тремъ точкамъ будутъ отвѣчать три прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ S. Безконечно удаленной точкѣ отвѣчаетъ прямая, проходящая, по предл. VII, чрезъ начало и, по предл. V, чрезъ точку S. Такъ какъ ангармоническое отношеніе должно остаться безъ измѣненія, то мы получимъ теорему:

Предлож. X. Отношеніе двухъ отрѣзковъ прямой, заключенныхъ между тремя точками, равно ангармоническому отношенію трехъ соотвѣтствующихъ прямыхъ и прямой линіи, соединяющей начало съ точкой ихъ пересѣченія.

Если, въ частномъ случаѣ, одна изъ трехъ точекъ дѣлитъ пополамъ разстояніе между двумя другими, то безконечно удаленная точка той-же прямой является къ ней сопряженно гармонической. Мы указали уже какая прямая соотвѣтствуетъ безконечно удаленной точкѣ во взаимной фигурѣ и можемъ поэтому установить слѣдующую теорему, какъ частный случай предыдущаго предложенія:

Предл. XI. Точкѣ, дѣлящей пополамъ разстояніе между двумя точками, соотвѣтствуетъ лучъ, сопряженно гармоническій къ лучу, соединяющему начало съ точкой пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ линій.

Изложенныхъ предложеній достаточно для основныхъ примѣненій метода,—для того, чтобы превратить рядъ теоремъ и задачъ въ соотвѣтствующія взаимныя; при удачномъ выборѣ начала задача можетъ значительно упрощаться, какъ мы это увидимъ ниже на примѣрахъ. Но главное значеніе метода заключается въ томъ, что онъ устанавливаетъ замѣчательныя соотношенія между различными геометрическими мѣстами. Мы начнемъ съ основныхъ общеизвѣстныхъ положеній.

a. 1) Двѣ точки вполнѣ опредѣляютъ собою прямую. Во взаимной фигурѣ двумъ даннымъ точкамъ будутъ отвѣчать двѣ прямыя, которыя пройдутъ чрезъ полюсъ данной прямой. На основаніи предложенія I-го будемъ имѣть не менѣе извѣстную взаимную теорему:

2) Двѣ прямыя вполнѣ опредѣляютъ собою точку. Или иначе: чрезъ двѣ точки можно провести лишь одну прямую; взаимная: двѣ прямыя пересѣкаются лишь въ одной точкѣ.

Это соотношеніе показываетъ, что опредѣленія точки и прямой отличаются другъ отъ друга только словами „точка" и „прямая"; съ точки же зрѣнія чисто отвлеченной опредѣленія эти вполнѣ тождественны: какъ точка, такъ и прямая можетъ быть принята за первичный элементъ и тогда одна опредѣлится въ зависимости отъ другой. Это соотношеніе носитъ въ геометріи названіе „начала двойственности". На основаніи этого принципа всякое свойство ряда прямыхъ, не заключающее линейныхъ измѣреній, находитъ себѣ соотвѣтствующее свойство ряда точекъ и обратно. Превращаются-же соотвѣтствующія предложенія одно въ другое при помощи метода, теорію котораго мы выше изложили. Обратимся къ примѣрамъ:

b) Возьмемъ теорему:

1) Если стороны двухъ треугольниковъ взаимно параллельны, то прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины пересѣкутся въ одной точкѣ.

При произвольномъ выборѣ начала вершинамъ двухъ треугольниковъ будутъ отвѣчать прямыя, которыя образуютъ два новые треугольника; ихъ вершины будутъ отвѣчать сторонамъ данныхъ треугольниковъ, и такъ какъ стороны этихъ послѣднихъ параллельны, то по предл. VI-му прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины новыхъ треугольниковъ, пройдутъ чрезъ начало. Далѣе, прямымъ, соединяющимъ соотвѣтствующія вершины данныхъ треугольниковъ, во взаимной фигурѣ отвѣчаютъ точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ: такъ какъ первыя проходятъ чрезъ одну точку, то послѣднія лежатъ на одной прямой. Мы получимъ такимъ образомъ теорему Desargues'а: („Вѣстникъ" № 51 стр. 51):

2) Если вершины двухъ треугольниковъ расположены на трехъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну точку, то соотвѣтствующія стороны пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

c) Въ той же статьѣ о проэктивныхъ фигурахъ, откуда взято и предыдущее предложеніе, доказана еще слѣдующая теорема:

1) Если данныя въ одной плоскости прямолинейныя фигуры расположены такимъ образомъ, что прямыя, соединяющія соотвѣтствующія точки фигуры, проходятъ чрезъ постоянную точку, то точки пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ находятся на одной прямой.

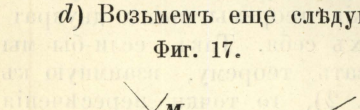
Во взаимной фигурѣ вершинамъ данныхъ фигуръ отвѣчаютъ прямыя, образующія двѣ новыя фигуры, сторонамъ первыхъ отвѣчаютъ вершины послѣднихъ фигуръ. Прямымъ, проходящимъ чрезъ соотвѣтствующія вершины, отвѣчаютъ точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ,—и такъ какъ первыя проходятъ чрезъ одну точку, то послѣднія лежатъ на одной прямой, и наоборотъ: точкамъ пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ отвѣчаютъ во взаимныхъ фигурахъ прямыя, соединяющія соотвѣтствующія вершины; и эти послѣднія сходятся въ одной точкѣ, ибо первыя лежатъ на одной прямой. Такимъ образомъ доказывается обратная теорема:

2) Если данныя въ одной плоскости двѣ фигуры таковы, что точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ находятся на одной прямой, то прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки, сходятся въ одной точкѣ.

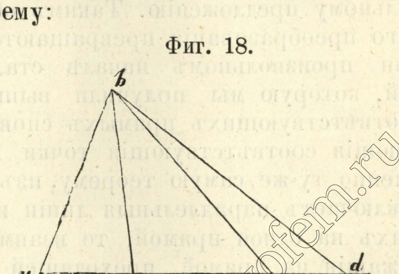
Въ своемъ мѣстѣ эта теорема была доказана непосредственно.

d) Возьмемъ еще слѣдующую теорему:

Фиг. 17.



Фиг. 18.



1) Прямая MN (фиг. 17) движется, оставаясь параллельной самой себѣ; геометрическое мѣсто точки P, которая дѣлитъ отрѣзокъ MN, заключенный между сторонами даннаго угла, въ постоянномъ отношеніи, есть прямая, проходящая чрезъ вершину угла.

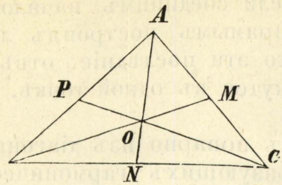
Выберемъ произвольную точку o за начало и построимъ взаимную фигуру, такъ что прямымъ AM, AN, MN будутъ отвѣчать точки m, n, q (фиг. 18), а точкамъ A, M, N, P будутъ отвѣчать прямыя mn, mq, nq, pq. Отношеніе $\frac{AP}{PN}$ равно по предложенію X-му анг. отношенію (pq, mq, oq, nq). Когда прямая MN будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, то точка q будетъ двигаться по прямой oq (пред. VI), прямой же AP будетъ отвѣчать во взаимной фигурѣ, нѣкоторая точка p на прямой mn,—и мы получимъ слѣдующую теорему:

2) Если въ четыреугольникѣ $omqn$ вершина q движется по діагонали oq, то лучъ p, для котораго ангар. отношеніе (pq, mq, oq, nq) сохраняетъ постоянную величину, проходитъ чрезъ постоянную точку на другой діагонали.

Такимъ-же образомъ, какъ это было показано на предыдущихъ примѣрахъ, множество теоремъ можетъ быть превращено въ соотвѣтствующія имъ взаимныя предложенія. Если, сохраняя то-же самое начало, мы эти послѣднія подвергнемъ новому преобразованію, то, въ силу самой взаимности метода, мы прійдемъ къ тому самому предложенію, изъ котораго исходили. Наоборотъ, избирая начало на той или другой изъ прямыхъ, или въ той или другой точкѣ, входящей въ заданіе, мы можемъ получить болѣе общія теоремы и вообще можемъ варіировать ихъ самымъ разнообразнымъ образомъ. Но мы разсмотримъ сначала, какія измѣненія претерпѣваютъ теоремы при произвольномъ выборѣ начала, когда оно не совпадаетъ ни съ однимъ изъ геометрическихъ мѣстъ, входящихъ въ заданіе. Если въ теоремѣ или задачѣ, не заключающей угловъ, фигурируютъ только прямыя, проходящія чрезъ постоянную точку, и точки, лежащія на одной прямой, а также ангармоническія отношенія тѣхъ или другихъ, то во взаимной фигурѣ имъ будутъ соотвѣтствовать точки, лежащія на одной прямой, и наоборотъ—а также соотвѣтствующія ангармоническія отношенія. Подыскивая затѣмъ къ новой теоремѣ опять взаимную при произвольно выбранномъ началѣ, мы снова получимъ прямыя и точки, тѣ-же ангармон. отношенія и т. д. словомъ, возвратимся къ первоначальному предложенію. Такимъ образомъ такія теоремы послѣ двукратнаго преобразованія превращаются въ самихъ себя. Такъ, если-бы мы при произвольномъ началѣ стали отыскивать теорему, взаимную къ той, которую мы получили выше (теор. c. 2), то точки пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ снова превратились бы въ прямыя, соединяющія соотвѣтствующія точки и обратно, такъ что мы получили бы именно ту-же самую теорему, изъ которой мы исходили. Если-же теорема заключаетъ параллельныя линіи или отношенія отрѣзковъ, расположенныхъ на одной прямой, то взаимная теорема будетъ заключать точки, лежащія на прямой, проходящей чрезъ начало и ангармоническія отношенія четырехъ прямыхъ. При дальнѣйшемъ преобразованіи мы уже не получимъ тѣхъ же элементовъ, а прійдемъ къ болѣе общимъ предложеніямъ. Впрочемъ новыя теоремы уже подойдутъ подъ предыдущую рубрику, а потому при произвольномъ началѣ превратятся въ самихъ себя послѣ двукратнаго преобразованія. Покажемъ это на примѣрахъ.

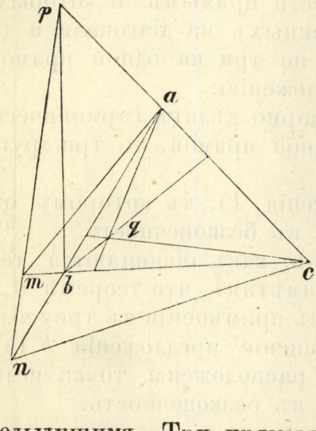
e) Прямыя, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Фиг. 19.



Пусть ABC (фиг. 19) данный треугольникъ, AN, BM, CP его медіаны. Выбравъ произвольную точку q за начало, строимъ взаимную фигуру (фиг. 20); тремъ вершинамъ A, B, C будутъ отвѣчать три прямыя bc, ac, ab, которыя образуютъ треугольникъ abc; точкамъ N, M и P будутъ отвѣчать прямыя am, bp, cn сопряженно гармоническія къ прямымъ aq, bq, cq; медіанамъ же треугольника будутъ, слѣдовательно, соотвѣтствовать точки m, n и p; и онѣ расположатся на одной прямой, взаимной къ точкѣ пересѣченія медіанъ. Такимъ обраломъ мы получаемъ слѣдующую взаимную теорему:

Фиг. 20.



2) Если изъ шести прямыхъ, образующихъ попарно со сторонами треугольника гармоническіе пучки, три луча проходятъ чрезъ одну точку, то точки пересѣченія трехъ другихъ лучей съ противоположными сторонами лежатъ на одной прямой.

Выберемъ теперь за начало другую точку и вновь построимъ взаимную фигуру. Мы получимъ новый треугольникъ $a_1b_1c_1$; точкѣ q будетъ отвѣчать прямая Su, а прямымъ aq, bq, cq—точки t, u, s пересѣченія прямой Su со сторонами треугольника; лучамъ bm, bp, cn будутъ отвѣчать точки m_1, n_1, p_1 сопряженно-гармоническія къ тремъ предыдущимъ. Три прямыя a_1m_1, b_1p_1, c_1n_1 соотвѣтствующія точкамъ m, p, n пройдутъ чрезъ одну точку, и мы получимъ слѣд. теорему:

3) Если изъ шести точекъ, которыя попарно дѣлятъ гармонически стороны треугольника, три расположены на одной прямой, то прямыя, соединяющія три остальныя точки съ противоположными вершинами, проходятъ чрезъ одну точку.

Эта теорема представляетъ собой обобщеніе основного предложенія; дѣйствительно, если прямая, на которой расположены три точки, удалится въ безконечность, то тремя сопряженно-гармоническими точками будутъ средины сторонъ треугольника,—и мы получимъ, какъ частный случай этого предложенія, что медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если мы послѣднюю теорему станемъ преобразовывать во взаимную, то возвратимся къ той, изъ которой она получена.

f) Разсмотримъ слѣдующую теорему:

1) Средины діагоналей полнаго четырехсторонника лежатъ на одной прямой.

Пусть ABCDEF данный четырехсторонникъ, Q начало взаимности; четыремъ сторонамъ AB, BD, DE, EA будутъ отвѣчать точки (ab), (bd), (de) и (ea), а шести вершинамъ будутъ отвѣчать шесть сторонъ, соединяющихъ эти 4 точки; діагоналямъ четырехсторонника отвѣчаютъ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ (ef), (ad), (be). Взаимная фигура называется полнымъ четыреугольникомъ, а точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ діагональными точками. Если соединимъ начало съ этими послѣдними и къ полученнымъ тремъ прямымъ построимъ лучи m, n, p къ нимъ сопряженно-гармоническіе, то эти послѣдніе, отвѣчая срединамъ діагоналей четыреугольника, пересѣкутся въ одной точкѣ. Мы получимъ теорему:

2) Если изъ шести прямыхъ, выходящихъ попарно изъ діагональныхъ точекъ полнаго четыреугольника и образующихъ гармоническіе пучки съ его сторонами, три проходятъ черезъ одну точку, то три другія также проходятъ чрезъ одну точку.

Если мы теперь снова построимъ взаимную фигуру, то получимъ опять четырехсторонникъ, діагонали котораго отвѣчаютъ діагональнымъ точкамъ четыреугольника; слѣдовательно, шести прямымъ, о которыхъ шла рѣчь, отвѣчаютъ шесть точекъ расположенныхъ на діагонали и дѣлящихъ ихъ гармонически; онѣ расположатся по три на одной прямой, такъ что мы приходимъ къ слѣдующему предложенію:

3) Если изъ шести точекъ, которыя попарно дѣлятъ гармонически діагонали четыреугольника, три лежатъ на одной прямой, то три другія также лежатъ на одной прямой.

Это есть, очевидно, обобщеніе предложенія 1), къ которому оно приводится, когда одна изъ прямыхъ уходитъ въ безконечность.

g) Наконецъ, чтобы показать на примѣрѣ, какъ обобщаются теоремы, заключающія параллельныя линіи, мы замѣтимъ, что теоремѣ *b*,2) отвѣчаетъ во взаимной фигурѣ теорема *c*,2) въ примѣненіи къ треугольнику; эта послѣдняя представитъ собой обобщеніе предложенія *b*,1) и приведется къ ней, когда прямая, на которой расположены точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ, удалится въ безконечность.

Студ. *В. Каганъ* (Одесса).

NB. Вполнѣ обстоятельные на ту-же тему отвѣты получены еще отъ гг. *А. Бобятинскаго*, *П. Свѣшникова* и *В. Соллертинскаго*.

(Окончаніе слѣдуетъ).

ПЛОЩАДЬ СЕКТОРА.

Первый способъ.

Докажемъ предварительно слѣдующую теорему: *площади двухъ секторовъ одинаковаго радіуса относятся какъ соотвѣтствующія имъ дуги.*

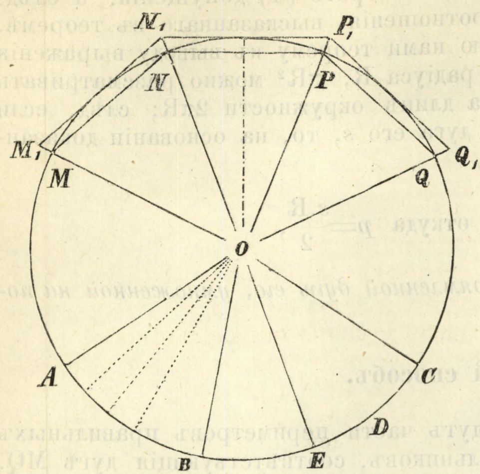
При доказательствѣ этой теоремы будемъ различать два случая: 1) когда дуги (фиг. 21) AB и AC секторовъ AOB и AOC соизмѣримы и 2) когда онѣ несоизмѣримы.

Первый случай. Пусть общая мѣра укладывается m разъ въ дугѣ AB и n разъ въ дугѣ AC, такъ что

$$\frac{\smile AB}{\smile AC}=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Если проведемъ радіусы чрезъ точки отложенія общей мѣры (три такихъ радіуса означены на чертежѣ пунктиромъ), то разсматриваемые

Фиг. 21.



нами секторы раздѣлятся соотвѣтственно на m и n равныхъ частей (въ равенствѣ этихъ частей легко убѣдиться наложеніемъ одной изъ нихъ на другую), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOC}}=\frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) находимъ

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOC}}=\frac{\smile AB}{\smile AC},$$

равенство, подтверждающее справедливость теоремы въ случаѣ соизмѣримыхъ дугъ секторовъ.

Второй случай. Чтобы оправдать теорему и въ случаѣ несоизмѣримости дугъ AB и AC, докажемъ невозможность слѣдующихъ предположеній:

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOC}}>\frac{\smile AB}{\smile AC} \qquad (3)$$

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOC}}<\frac{\smile AB}{\smile AC}. \qquad (4)$$

При допущеніи перваго изъ этихъ предположеній можно будетъ $\smile$AB замѣнить такою $\smile$AD, чтобы было:

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOC}}=\frac{\smile AD}{\smile AC}. \qquad (5)$$

Раздѣлимъ теперь дугу AC на такое число равныхъ частей, чтобы нѣсколько точекъ дѣленія упало между B и D; пусть одна изъ такихъ точекъ будетъ E; тогда, вслѣдствіе соизмѣримости дугъ AE и AC будемъ имѣть:

$$\frac{\text{пл. сек. AOC}}{\text{пл. сек. AOE}}=\frac{\smile AC}{\smile AE}. \qquad (6)$$

Перемноженіе равенствъ (5) и (6) приводитъ насъ къ нелѣпому результату

$$\frac{\text{пл. сек. AOB}}{\text{пл. сек. AOE}}=\frac{\smile AD}{\smile AE}, \qquad (7)$$

ибо первое изъ этихъ отношеній меньше единицы, а второе больше единицы. Неправильность соотношенія (7) имѣетъ своимъ источникомъ равенство (5), которое въ свою очередь есть слѣдствіе допущенія (3), откуда и убѣждаемся въ невозможности послѣдняго. Подобнымъ же образомъ доказывается и несостоятельность второго (4) допущенія, а слѣд. и подтверждается необходимость соотношенія, высказаннаго въ теоремѣ.

Примѣнимъ теперь доказанную нами теорему къ выводу выраженія площади сектора. Площадь круга, радіуса R, πR^2 можно разсматривать какъ секторъ, дуга котораго равна длинѣ окружности $2\pi R$; слѣд. если площадь сектора AOB будетъ p и дуга его s, то, на основаніи доказанной нами теоремы, будемъ имѣть:

$$\frac{p}{\pi R^2}=\frac{s}{2\pi R}, \text{ откуда } p=\frac{s.R}{2},$$

т. е., *площадь сектора равна выпрямленной дугѣ его, умноженной на половину радіуса.*

Второй способъ.

Пусть MNPQ и $M_1N_1P_1Q_1$ будутъ части периметровъ правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, соотвѣтствующія дугѣ MQ, сектора MOQ. Докажемъ, что при неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольниковъ 1) *дуга* MQ *будетъ предѣломъ частей* MNPQ *и* $M_1N_1P_1Q_1$ *периметровъ,* и 2) *площадь сектора* MOQ *будетъ предѣломъ площадей* MNPQO *и* $M_1N_1P_1Q_1O$, *ограниченныхъ крайними радіусами и указанными частями периметровъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ длины взятыхъ нами частей периметровъ описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ чрезъ P_1 и P, взятыя же части ихъ площадей—чрезъ Q_1 и Q и наконецъ чрезъ R и r соотвѣтственно радіусъ круга и апоѳему вписаннаго многоугольника, по свойству линій и площадей подобныхъ фигуръ, будемъ имѣть:

$$\frac{P_1}{P}=\frac{R}{r} \text{ и } \frac{Q_1}{Q}=\frac{R^2}{r^2},$$

откуда

$$\frac{P_1-P}{P_1}=\frac{R-r}{R} \text{ и } \frac{Q_1-Q}{Q}=\frac{R^2-r^2}{R^2}.$$

Правыя части этихъ равенствъ имѣютъ своимъ предѣломъ нуль, а потому и лѣвыя стремятся въ предѣлѣ къ нулю; откуда видимъ, что разности (P_1-P) и (Q_1-Q) могутъ быть сдѣланы безконечно малыми; слѣд. и подавно разности между дугою s сектора и частями P_1 и P периметровъ, а также разности между площадью p сектора и частями Q_1 и Q площадей правильныхъ многоугольниковъ могутъ быть сдѣланы менѣе всякой данной величины, что и доказываетъ высказанныя нами предложенія.

Пусть теперь α будетъ разность между площадью сектора p и соотвѣтствующею ему частью Q_1 площади правильнаго описаннаго многоугольника, а β—разность между дугою s сектора и соотвѣтствующею ей частью P_1 периметра того же многоугольника, такъ что

$$Q_1=p+\alpha \qquad (1)$$

и

$$P_1 = s + \beta. \tag{2}$$

Нетрудно видѣть, что

$$Q_1 = \frac{P_1 . R}{2}. \tag{3}$$

Вставляя вмѣсто Q_1 и P_1 ихъ значенія изъ рав. (1) и (2), получимъ:

$$p + \alpha = \frac{sR}{2} + \frac{\beta R}{2},$$

а такъ какъ при постоянномъ равенствѣ перемѣнныхъ величины равны и ихъ предѣлы, то окончательно имѣемъ:

$$p = \frac{s.R}{2}.$$

прежнее выраженіе для площади сектора.

П. Гайдуковъ (Новочеркасскъ).

Къ вопросу о магнитизмѣ, какъ функціи частичной структуры.

Въ маѣ прошлаго года я имѣлъ честь сообщить Физическому Отдѣленію Р. Ф. Х. Общества о моихъ наблюденіяхъ надъ намагничиваніемъ желѣза при треніи его о закаленную сталь и о правильной магнитной полярности стальныхъ стружекъ, получаемыхъ при оттачиваніи цилиндрическихъ и другихъ частей машинъ. Мои первыя наблюденія были произведены на механическомъ заводѣ Я. Е. Макарова въ городѣ Архангельскѣ.

Я привелъ какъ примѣръ тотъ фактъ, что желѣзная проволока пріобрѣтаетъ магнитную полярность, когда вокругъ ея проходитъ винтовая нарѣзка. Если при этомъ, вопреки правилу техники, нарѣзку не смазать масломъ, то опилки не падаютъ, а пристаютъ къ образовавшемуся винту такъ же, какъ и къ обыкновенному магниту. Опытъ показываетъ, что нельзя объяснять это явленіе такъ, какъ объясняютъ иногда магнитизмъ сверлъ, напильниковъ, перочинныхъ ножей и даже буравчиковъ, т. е. однимъ магнитизмомъ земли, а надо признать и чисто механическую теорію магнитизма. Дѣло въ томъ, что названіе полюса не зависитъ отъ положенія прибора, ни относительно магнитнаго меридіана, ни отъ абсолютнаго, а зависитъ отъ качества нарѣзки.

Профессоръ *Гезехусъ* сообщилъ мнѣ по этому поводу слѣдующій фактъ:

„Если пропускать по спиральной трубкѣ подъ сильнымъ давленіемъ „паръ, то желѣзный стержень, помѣщенный внутри спирали, намаг„ничивается."

Намагничиванiе стружекъ представляетъ еще болѣе поучительный въ этомъ отношенiи примѣръ; здѣсь совсѣмъ не видно участiя магнитизма земли, и только процессъ образованiя обусловливаетъ форму стружки и названiе ея полюсовъ.

Слѣдующiй опытъ еще болѣе убѣдилъ меня въ возможности чисто механической теорiи магнитизма.

Лѣтомъ минувшаго года я посѣтилъ Обуховскiй пушечный заводъ. Технологъ завода *А. А. Скиндеръ* сообщилъ мнѣ о появленiи магнитизма въ стальномъ брускѣ въ моментъ и послѣ его разрыва. Я присутствовалъ при опытѣ, когда цилиндръ крѣпкой стали былъ разорванъ силою въ 530 атм. Разрывъ произошелъ не посрединѣ, цилиндръ передъ этимъ нѣсколько удлинился и могъ легко притянуть стальное перо.

Фактъ намагничиванiя чрезъ удлиненiе представляетъ какъ-бы *взаимную теорему* съ фактомъ удлиненiя чрезъ намагничиванiе. Подобно тому какъ при разрывѣ происходитъ расширенiе въ одномъ направленiи и сжатiе въ другомъ, и при процессѣ закругливанiя стальной стружки одинъ конецъ ея испытываетъ расширенiе и образуетъ зубцы, а другой испытываетъ сжатiе.

Въ мѣстномъ кружкѣ любителей естествознанiя я демонстрировалъ коллекцiю стружекъ, полученныхъ мною на заводѣ Сименса и Обуховскомъ. Стружки эти обыкновенно напоминаютъ соленоиды, почему я ихъ и назвалъ „постоянными соленоидами". Хотя мнѣ удалось найти признакъ, по которому я могъ различать полюсы стружекъ, не прибѣгая къ магнитной стрѣлкѣ, но я удержусь пока отъ общихъ заключенiй и аналогiи съ электромагнитизмомъ, которую можно было бы провести при этомъ.

Подробности процесса намагничиванiя стружекъ и цилиндровъ подъ влiянiемъ закручиванiя и разрыва, я позволю себѣ отложить до слѣдующей бесѣды. *М. Лянченко* (Новгородъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Существованiе волнообразнаго движенiя при образованiи электрической искры. Кукъ. *(E. H. Cook.* Phil. Mag. 26. p. 291. 1888).

Если помѣстить пластинку съ гладкой поверхностью, на которой насыпанъ порошокъ, вблизи двухъ электродовъ, между которыми проскакиваютъ электрическiя искры, то порошокъ располагается по болѣе или менѣе правильнымъ концентрическимъ кругамъ. Общiй центръ этихъ круговъ кажется (если искра мала) точкой, лежащей какъ разъ посрединѣ электродовъ. Вообще различаютъ двѣ группы образующихся при этомъ фигуръ: однѣ имѣютъ въ срединѣ свободное пространство, другiя же имѣютъ въ центрѣ кругообразное пространство, въ которомъ порошокъ совершенно не приходилъ въ дрожанiе. Первую группу фигуръ можно получить, если держать пластинку вблизи электродовъ, при чемъ разстоянiе зависитъ отъ напряженiя искръ. У этой группы свободное пространство представляется эллипсомъ, котораго длинная ось образуетъ прямой уголъ съ направленiемъ искръ и величина этого пространства зависитъ отъ напряженія искръ. Вторая группа образуется, если разстояніе отъ искръ сдѣлать такимъ большимъ, чтобы не образовывалось болѣе свободнаго пространства.

Предположеніе, что это явленіе можетъ быть сведено на фигуры *Лихтенберга*, оказалось несостоятельнымъ, такъ какъ вещество и видъ пластинокъ не производили измѣненія въ образованіи фигуръ. Въ этомъ отношеніи были изслѣдованны: стекло, канифоль, эбонитъ, латунь, цинкъ, желѣзо, дерево, парафинъ, кардонъ. Различіе, которое замѣчалось у этихъ веществъ, состояло только въ томъ, что на пластинкахъ съ гладкими поверхностями круги образовывались быстрѣе и правильнѣе, чѣмъ на поверхностяхъ шершавыхъ; такимъ образомъ фигуры не зависѣли ни отъ электрическаго состоянія пластинокъ, ни отъ порошка. Точно также не оказывали никакого вліянія сила баттареи, родъ употребленной индуктированной спирали, сгущеніе электричества при помощи лейденской банки и вещество электродовъ, которые приготовлялись изъ латуни, желѣза и угля.

При употребленіи различныхъ порошковъ было замѣчено различіе въ числѣ круговъ. Авторъ изслѣдовалъ 59 порошковъ. Тонкость порошковъ имѣетъ вліяніе только на отчетливость фигуръ. Для различныхъ порошковъ получалось и различное число круговъ, такъ, употребляя растертый песокъ, авторъ насчиталъ на 1 дюймѣ 88 линій, а при употребленіи извести только 40 линій. Если смѣшать порошки, дающіе различное число линій, то смѣсь даетъ число, представляющее собою ариѳметическое среднее отдѣльныхъ порошковъ.

Если взять вмѣсто пластинки плоскій сосудъ съ жидкостью (вода, ртуть, алкоголь, эфиръ, глицеринъ и бензинъ), то при косомъ разсматриваніи можно было замѣтить на поверхности маленькія волны, число которыхъ на одномъ дюймѣ было отъ 88 до 40.

Можно было сначала думать, что образованіе фигуръ происходитъ отъ звука, сопровождающаго искру и что онѣ такимъ образомъ представляютъ графически звуковыя волны; но это предположеніе оказалось невѣрнымъ, такъ какъ различные порошки давали различное количество волнъ на протяженіи одной линейной единицы.

То обстоятельство, что число круговъ, получаемыхъ съ смѣсью двухъ порошковъ, представляло среднее ариѳметическое отдѣльныхъ порошковъ, заставляло предположить, что здѣсь играетъ роль плотность порошка; но если бы это было вѣрно, то порошки представляли бы собою рядъ, въ которомъ самые тяжелые находились бы вначалѣ, а самые легкіе въ концѣ. Опытъ не подтвердилъ однако этого предположенія.

Причина этого явленія остается до сихъ поръ неизвѣстной. Фактъ однако же тотъ, что электрическія разряженія сопровождаются колебаніями, длина которыхъ въ среднемъ $= {}^1/_{64}$ дюйма. *Бхм.*

♦ Средство изслѣдовать незначительныя измѣненія жидкой поверхности. Белль. (*Baille*. C. R. 107. p. 731. 1888).

Очень чувствительный способъ измѣрять небольшія длины представляетъ по *Физо* окрашенныя кольца, обращающіяся между двумя параллельными и отдѣленными другъ отъ друга стеклянными пластинками. Авторъ взялъ вмѣсто нижней пластинки горизонтальную поверхность жидкости и могъ наблюдать очень отчетливо такимъ образомъ ея измѣненія. При этомъ нужно заботиться только о томъ, чтобы жидкость не смачивала стекла, иначе явленіе пропадаетъ.

Авторъ, употребляя желтый натріевый свѣтъ, могъ изслѣдовать измѣненіе поверхности магнитныхъ и діамагнитныхъ жидкостей при дѣйствіи слабаго магнита; кольца, находившіяся между двумя полюсами, были эллиптической формы и большая ось была параллельна либо перпендикулярна къ направленію линій силъ. *Бхм.*

♦ **Энергія и зрѣніе. Ланглей.** (*Langley*. Amer. Journ. of Scien. 36. p. 359. 1888).

Авторъ, извѣстный своими болометрическими измѣреніями энергіи солнечныхъ лучей въ отдѣльныхъ частяхъ спектра, опубликовалъ недевно работу относительно количества энергіи, необходимой для полученія свѣтового впечатлѣнія. Изъ этихъ изслѣдованій выходитъ, что эта энергія для:

фіолетоваго свѣта	составляетъ	.	0,0000000000000001800	лошад.	силы
зеленаго	„	„ .	75	„	„
оранжевато	„	„ .	1700	„	„
краснаго	„	„ .	34000000	„	„

а время, необходимое для воспринятія свѣтового впечатлѣнія, составляетъ 0,5—0,25 сек. *Бхм.*

Выводъ правила умноженія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, не зависящій отъ того, цѣлыя или дробныя числа абсолютныя величины множимаго и множителя.

По опредѣленію **Лакруа:** *умножить одно количество на другое значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.*

Означимъ абсолютную величину множимаго чрезъ α и абсолютную величину множителя чрезъ β, гдѣ α и β какія угодно цѣлыя или дробныя числа; тогда возможны четыре случая:

$$(+\alpha).(+\beta),\ (-\alpha).(+\beta),\ (+\alpha).(-\beta),\ (-\alpha).(-\beta).$$

Умножить $+\alpha$ или $-\alpha$ на $+\beta$ значитъ изъ множимаго $+\alpha$ или $-\alpha$ составить новое количество такъ, какъ множитель $+\beta$ составленъ изъ положительной единицы; но, чтобы составить множитель $+\beta$ изъ положительной единицы т. е. изъ $+1$, нужно абсолютную величину положительной единицы т. е. 1 умножить на абсолютную величину множителя т. е. на β и передъ произведеніемъ поставить знакъ положительной единицы т. е. знакъ $+$. Въ самомъ дѣлѣ

$$+(1.\beta)=+\beta.$$

Слѣдовательно, чтобы составить искомое произведеніе, нужно абсолютную величину множимаго т. е. α умножить на абсолютную величину множителя т. е. на β и передъ произведеніемъ поставить знакъ множимаго. Итакъ

$$(+\alpha)\ (+\beta)=+(\alpha.\beta),$$
$$(-\alpha).(+\beta)=-(\alpha.\beta).$$

Умножить $+\alpha$ или $-\alpha$ на $-\beta$ значитъ изъ множимаго $+\alpha$ или $-\alpha$ составить новое количество такъ, какъ множитель $-\beta$ составленъ изъ положительной единицы; но, чтобы составить множитель $-\beta$ изъ положительной единицы т. е. изъ $+1$, нужно абсолютную величину положительной единицы т. е. 1 умножить на абсолютную величину множителя т. е. на β и передъ произведеніемъ поставить знакъ противоположный знаку положительной единицы т. е. знакъ —. Въ самомъ дѣлѣ

$$-(1.\beta)=-\beta.$$

Слѣдовательно, чтобы составить искомое произведеніе, нужно абсолютную величину множимаго т. е. α умножить на абсолютную величину множителя т. е. на β и передъ произведеніемъ поставить знакъ противоположный знаку множимаго. Итакъ

$$(+\alpha).(-\beta)=-(\alpha.\beta),$$
$$(-\alpha).(-\beta)=+(\alpha.\beta).$$

Разсматривая полученные результаты, расположенные въ такомъ порядкѣ:

$$(+\alpha).(+\beta)=+(\alpha.\beta),$$
$$(-\alpha).(-\beta)=+(\alpha.\beta),$$
$$(+\alpha).(-\beta)=-(\alpha.\beta),$$
$$(-\alpha).(+\beta)=-(\alpha.\beta),$$

выводимъ слѣдующее правило: *чтобы перемножить два количества, нужно перемножить ихъ абсолютныя величины и передъ произведеніемъ поставить знакъ* $+$, *если множимое и множитель имѣютъ одинаковые знаки, и знакъ* $-$, *если множимое и множитель имѣютъ разные знаки.*

Учит. Варш. Реальн. Учил. *С. Гирманъ.*

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ*).

Физ. Отд. Р. Ф.-Х. Общ. (Спб. 31 янв. 1889 г.)

Г. К. Мерчингъ сообщаетъ объ опытахъ надъ треніемъ жидкостей въ широкихъ трубкахъ. По порученію Института Инженеровъ путей сообщенія докладчикъ изучилъ треніе воды, керосина и нефти въ широкихъ трубкахъ. Изъ бака испытуемая жидкость вытекала черезъ горизонтальную желѣзную трубу, діаметръ которой въ различныхъ опытахъ мѣнялся отъ 21 мм. до 45 мм.; въ эту трубу, недалеко отъ бака ввинчивалась піезометрическая трубка. По количеству расходуемой жидкости опредѣлялась скорость истеченія. Оказалось, что величина тренія можетъ быть выражена двучленнымъ выраженіемъ, при чемъ одинъ коэффиціентъ есть функція отъ плотности (при v^2), а другой (при v) - функція отъ вязкости.

*) Отсутствіе среди русскихъ спеціальныхъ журналовъ такого органа, въ которомъ концентрировались бы отчеты о дѣятельности *всѣхъ* русскихъ физико-математическихъ обществъ, служитъ достаточнымъ мотивомъ нашего желанія сконцентрировать эти отчеты въ „Вѣстникѣ". Съ этой цѣлью, расчитывая на помощь нашихъ сотрудниковъ и читателей, участвующихъ въ собраніяхъ различныхъ ученыхъ обществъ, въ программу дѣятельности которыхъ входитъ разработка физико-математическихъ наукъ, обращаемся нынѣ съ просьбой присылать намъ *своевременно* краткіе отчеты о засѣданіяхъ обществъ, подобно тому, напримѣръ, какъ это дѣлаютъ г. Страусъ изъ С.-Петербурга, г. Слешинскій изъ Одессы.—При этомъ про-

Н. Г. Егоровъ показываетъ опытъ Релейя, выясняющій интерференцію и диффракцію звука. Если взять сплошной экранъ и передъ нимъ производить звуки при помощи свистка, то за экраномъ получается (подобно тому какъ и въ свѣтовыхъ опытахъ) звуковая тѣнь. Дѣйствительно ослабленіе звука будетъ происходить тамъ, гдѣ разность хода будетъ равна полуволнѣ и на оборотъ, тамъ гдѣ будетъ разность хода четное число полуволнъ, тамъ будетъ замѣтное усиленіе звука. Удобнѣе всего употреблять экранъ, состоящій изъ концентрическихъ круговъ и концентрическихъ же пролетовъ (кольцевая рѣшетка); какъ источникъ звука докладчикъ употреблялъ свистокъ Гальтона, дающій около 13 тысячъ колебаній въ секунду. По другую сторону экрана помѣщается чувствительное пламя Тиндаля. При перемѣщеніи пламени по линіи перпендикулярной къ экрану замѣчается попеременно то спокойное, то возмущенное состояніе пламени.

И. И. Боргманъ сообщаетъ объ актино-электрическихъ явленіяхъ. Докладчикъ повторяетъ опыты А. Г. Столѣтова, состоящіе въ слѣдующемъ: между электродами незамкнутой гальванической цѣпи пропускается пучокъ ультрафіолетовыхъ лучей. Пучокъ этотъ проходитъ сквозь продыравленную анодную пластинку и падаетъ на мѣдную пластинку, соединенную съ катодомъ. Разстояніе между пластинками нѣсколько миллиметровъ. Гальванометръ, помѣщенный въ цѣпь, показываетъ присутствіе тока. Съ прекращеніемъ освѣщенія токъ также прекращается. И. И. Боргманъ видоизмѣнилъ опытъ слѣдующимъ образомъ: соединивъ мѣдную пластинку съ отрицательнымъ полюсомъ батареи, а цинковую продыравленную—съ положительнымъ, онъ пропускалъ прерывистый пучокъ свѣта. Источникомъ служила вольтова дуга, въ которую вводился кусочекъ аллюминія. Передъ источникомъ ставился вращающійся дискъ съ прорѣзанными секторами; вмѣсто гальванометра вводился въ цѣпь телефонъ. При вращеніи диска съ различными скоростями звука въ телефонѣ не было слышно. Основываясь на такомъ отрицательномъ результатѣ, И. И. Боргманъ полагаетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ токъ не появляется мгновенно и не пропадаетъ (по прекращеніи освѣщенія) моментально; вслѣдствіе этого такой прерывистый токъ не могъ быть обнаруженъ при помощи телефона. Явленіе это похоже на явленіе послѣдѣйствія (Nachwirkung). *О. Стр.* (Спб.).

Физ.-Хим. Секція Варш Общ. Ест. (Варш. 4 марта). Предсѣдательствовалъ на этомъ 1-мъ засѣданіи секціи проф. Н. Я Сонинъ. На должность секретаря секціи избранъ И. Ѳ. Трейдосевичъ.—Сдѣланы были научныя сообщенія:

1) *Н. Я. Сонинъ:* „Объ остаточныхъ членахъ формулъ Эйлера и Стирлинга".

2) *А. Л. Потылицинъ:* „О нѣкоторыхъ свойствахъ хлорнонатровой соли ($NaClO_4$) и о пересыщенныхъ растворахъ".

3) *А. Е. Лагоріо:* „О нѣкоторыхъ гиперстеновыхъ породахъ Волыни".

4) *И. Л. Кондаковъ*: „О строеніи ангеликоваго спирта".

симъ извиненія у всѣхъ гг. членовъ уч. обществъ, дѣлающихъ свои сообщенія въ засѣданіяхъ, что постоянное накопленіе матеріала и постоянная невозможность дальнѣйшаго увеличенія объема №№ нашего „Вѣстника" не позволяютъ намъ въ настоящее время печатать этихъ сообщеній полностью, въ видѣ статей. Это пока допускается нами лишь въ исключительныхъ случаяхъ, когда предметъ сообщенія можетъ по нашему мнѣнію заинтересовать *большинство* читателей „Вѣстника" и не выходитъ притомъ изъ тѣсныхъ предѣловъ его программы.—Присылаемые въ редакцію отчеты о засѣданіяхъ печатаются не въ очередь (которая по возможности соблюдается относительно присылаемыхъ статей). Они должны быть за подписью автора, на котораго падаетъ вся отвѣтственность за точность ихъ составленія.

Отъ Редакціи.

5) *Ю. В. Вульфъ:* „О методѣ измѣренія плоскихъ угловъ кристалловъ подъ микроскопомъ". (Извлеч. изъ печат. Протокола № 1).

Матем. Отд. Нов. Общ. Ест по вопр. эл. мат. и физ. (Одесса 10 марта).

П. И. Злотчанскій сдѣлалъ сообщеніе о равенствѣ и подобіи треугольниковъ. Положивъ въ основаніе учебникъ Давидова, референтъ указалъ весьма полезныя измѣненія въ порядкѣ теоремъ и дополненія къ названнымъ статьямъ.

Д. И. Зейлигеръ сообщилъ нѣкоторыя приложенія періодическихъ непрерывныхъ дробей къ алгебрѣ, геометріи и тригонометріи.

К. В. Май предложилъ, въ виду окончанія академическаго года, заняться обзоромъ учебниковъ математики, употребляемыхъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, съ цѣлью—прійти къ столь полезному единству въ этомъ отношеніи. Постановлено посвятить этому предмету особое засѣданіе. *И. Слешинскій.*

Мат. Отд. Нов. Общ. Ест. по вопр. эл. мат. и физ. (Одесса 31 марта).

П. И. Коляго сдѣлалъ сообщеніе „о методахъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній", въ которомъ обстоятельно изложилъ синтетическій и аналитическій пріемы рѣшенія и схемы его.

Ѳ. Н. Шведовъ демонстрировалъ электрическую машину Гольца для выясненія нѣкоторыхъ вопросовъ, относящихся къ ея теоріи.

К. В. Май, *П. И. Злотчанскій* и *В. Н. Габбе* сообщили результаты своихъ наблюденій надъ девятилѣтнимъ ученикомъ Н. Б. Завадскаго, о которомъ была рѣчь въ одномъ изъ предшествующихъ засѣданій. Референты находятъ, что этотъ мальчикъ обладаетъ выдающимися способностями, признавая при этомъ, что во всякомъ случаѣ, Н. Б. Завадскій достигъ весьма замѣчательныхъ результатовъ въ занятіяхъ съ этимъ ребенкомъ. Обмѣнъ мыслей по поводу этого сообщенія отложенъ до слѣдующаго засѣданія. *И. Слешинскій.*

Кіевское Общ Ест. (1 апрѣля). По прочтеніи протокола предшествующаго собранія, предсѣдатель *К. М. Ѳеофилактовъ* заявилъ о смерти знаменитаго французскаго химика М. Э. Шевреля. Секретарь Общества *Н. Н. Володкевичъ* въ краткой замѣткѣ познакомилъ присутствующихъ съ біографіей и учеными заслугами покойнаго. Мишель-Эженъ Шеврель, сынъ врача, родился 31 авг. 1786 г.; 17 лѣтъ онъ прибылъ въ Парижъ, гдѣ вскорѣ сдѣлался ассистентомъ при профессорѣ химіи Воkеленѣ, имѣвшемъ свою фабрику химическихъ продуктовъ. Въ 1824 г. Шеврель былъ назначенъ директоромъ красильнаго отдѣленія при гобеленовской мануфактурѣ. Вскорѣ затѣмъ онъ былъ избранъ въ члены Парижской Академіи Наукъ, а въ 1830 г. послѣ смерти Вокелена занялъ его каѳедру при музеѣ естественной исторіи, котораго впослѣдствіи былъ директоромъ. Главная заслуга Шевреля какъ химика состояла въ изученіи животныхъ жировъ, о которыхъ до него держались самаго превратнаго мнѣнія. Неудивительно поэтому, что изслѣдованія Шевреля составили эпоху какъ въ теоретической такъ и въ технической химіи; довольно будетъ сказать для примѣра, что имъ было создано производство стеариновыхъ свѣчей. Работы его по разработкѣ теоріи красокъ—тоже имѣли весьмаважное значеніе.— Два года тому назадъ весь Парижъ праздновалъ его 100 лѣтній юбилей.

Н. А. Бунге, въ краткой рѣчи, сказанной по тому-же поводу, обратилъ особенное вниманіе на то время, въ которое Шеврель дѣлалъ свои столь важныя изслѣдованія и открытія, когда ему приходилось самому создавать все—и теорію и ея примѣненіе.

Присутствовавшій въ собраніи *Д-ръ Сикорскій* указалъ еще на то обстоятельство, что Шеврель первый отнесся къ такъ называемымъ спиритическимъ явленіямъ съ раціонально-научной точки зрѣнія, и когда, слишкомъ 50 лѣтъ тому назадъ вся почти Европа увлеклась этимъ классомъ явленій, считая ихъ вполнѣ сверхестественными, т. е. не имѣющими ничего общаго съ научными методами изслѣдованія, Шеврель, имѣвшій тогда уже около 50 лѣтъ, не переставалъ утверждать, что всѣ сюда относящіяся явленія, какъ бы загадочными теперь ни казались, должны быть со временемъ разъяснены на основаніи естественныхъ законовъ.—По поводу долголѣтія Шевреля, который самъ не умѣлъ отвѣтить на вопросъ: „почему живетъ такъ долго?“ Д-ръ Сикорскій высказалъ предположеніе, что въ данномъ случаѣ его приходится объяснять наслѣдственностью (отецъ М. Э. Шевреля умеръ на 81-мъ году жизни), такъ какъ давно подмѣчено, что долголѣтіе часто бываетъ присуще членамъ одной и той-же семьи или рода.

Послѣ окончанія бесѣдъ, вызванныхъ извѣстіемъ о смерти Шевреля, всѣ присутствующіе въ собраніи члены и гости встали съ своихъ мѣстъ, чтобы почтить память покойнаго.

Затѣмъ были сдѣланы научныя сообщенія:

К. Н. Жукъ изложилъ результаты своихъ наблюденій надъ „мощностью снѣгового покрова“ минувшей зимы. Кромѣ данныхъ, имѣющихъ мѣстный интересъ, референтъ привелъ рядъ наблюдей надъ температурой снѣга на различной глубинѣ.

Я. Ѳ. Харченко въ пространномъ сообщеніи „о методахъ разсчета вентиляціи зданій“ показалъ неудовлетворительность такого разсчета при помощи существующихъ формулъ какъ при анемометрическомъ способѣ (т. е. по показаніямъ вставленнаго въ вентиляціонный каналъ анемометра), такъ и при антракометрическомъ (т. е. путемъ химическаго опредѣленія состава воздуха по отношенію къ процентному содержанію углекислоты). Въ виду этого референтъ предложилъ свой пріемъ разсчета вентиляціи, посредствомъ опредѣленія средняго состава воздуха во всемъ зданіи, для каковой цѣли имъ проектированъ особый приборъ (двухъ типовъ: одинъ съ нагнетательнымъ насосомъ и манометромъ, другой—съ аспираторомъ) для составленія смѣси воздуха, взятаго изъ всѣхъ помѣщеній зданія, съ среднимъ процентнымъ содержаніемъ углекислоты.—*Э. К. Шпачинскій*, а потомъ *Н. А. Бунге* указали референту на крайнюю сложность проектируемыхъ имъ обоихъ типовъ прибора и сопряженныхъ съ его примѣненіемъ манипуляцій и на возможность различныхъ ошибокъ (напр. при различіи и измѣненіи температуры). Э. К. Шпачинскій замѣтилъ, что вмѣсто употребленія насосовъ для введенія въ сосудъ (въ каждомъ помѣщеніи) такого объема воздуха, какой требуется согласно формуламъ референта, было бы вѣроятно проще для составленія требуемой смѣси воспользоваться диффундирующею способностью газовъ и собирать воздухъ изъ каждаго помѣщенія въ особый резервуаръ. Н. А. Бунге тоже показалъ, что можно устроить весьма простой приборъ (основанный на вытеканіи жидкости изъ сосуда) безъ всякихъ насосовъ и манометровъ для полученія требуемой смѣси.

Остальныя сообщенія за позднимъ временемъ были отложены до будущаго засѣданія. *Ш.*

ЗАДАЧИ.

№ 448. Если къ двумъ окружностямъ произвольныхъ радіусовъ, одна внѣ другой находящимся, провести двѣ общія внутреннія и двѣ общія внѣшнія касательныя, то на каждой окружности, по одну сторону прямой, соединяющей центры ихъ, получатся двѣ точки прикосновенія. Требуется доказать, что дуги каждой окружности между означенными точками прикосновенія имѣютъ равныя проэкціи на прямую, соединяющую центры. *Н. Артемьевъ* (Спб.)

№ 449. Рѣшить уравненія

$$x^2y+yz=a,$$

$$x^2+yz=b,$$

$$x^2y^2+z=c$$

Я. Тепляковъ.

№ 450. Построить гармоническій четыреугольникъ, когда даны двѣ стороны и одна діагональ. Разсмотрѣть три различные случая, зависящіе отъ расположенія трехъ данныхъ прямыхъ.

Проф. *В. Ермаковъ.*

№ 451. Въ „Сборникѣ алгебраическихъ задачъ И. Верещагина, Спб. 1886 г." подъ № 570, на стр. 153 помѣщена слѣдующая задача: „Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ $2p$ и равнодѣлящая прямого угла равна m. Вычислить всѣ стороны треугольника". При чемъ сдѣлано указаніе, что для „рѣшенія этой задачи необходимо вывести, что равнодѣлящая прямого угла въ прямоугольномъ треугольникѣ равна сторонѣ квадрата, вписаннаго въ такой кругъ, радіусъ котораго равенъ высотѣ прямоугольника, имѣющаго площадь вдвое болѣе площади треугольника и основаніе равное суммѣ катетовъ". Рѣшить эту задачу, не пользуясь указаніемъ. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 452. Показать, что если во вписанномъ въ кругѣ четыреугольникѣ ABCD проведемъ діагонали и въ полученные треугольники ABC, ADC, BAD и BCD впишемъ круги, то центры ихъ будутъ лежать въ вершинахъ нѣкотораго прямоугольника. *В. Эльпидинъ* (Москва).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 180. Доказать, что если дробь $\frac{1}{n}$ даетъ періодъ четнаго числа цыфръ и при томъ такой, что цыфры второй половины періода дополняютъ до 9 цыфръ первой половины, то число n есть дѣлитель числа вида 10^p+1.

Пусть цыфры періода будутъ по порядку $a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1}, \ldots a_{2p}$, при чемъ

$$a_{p+1}+a_1=a_{p+2}+a_2=\ldots\ldots=a_{2p}+a_p=9.$$

Обыкновенная дробь, которою замѣняется упоминаемая періодическая, будетъ:

$$\frac{a_1.10^{2p-1}+a_2.10^{2p-2}+\ldots+a_p.10^p+a_{p+1}10^{p-1}+\ldots+a_{2p-1}.10+a_{2p}}{10^{2p}-1}=$$

$$=\frac{(10^p-1)(a_1.10^{p-1}+a_2.10^{p-2}+\ldots+a_{p-1}.10+a_p)}{10^{2p}-1}+$$

$$+\frac{9(10^{p-1}+10^{p-2}+\ldots\ldots+10+1)}{10^{2p}-1}=$$

$$=\frac{(10^p-1)(a_1.10^{p-1}+a_2.10^{p-2}+\ldots.+a_{p-1}10+a_p)+9\dfrac{10^p-1}{10-1}}{(10^p+1)(10^p-1)}$$

или, наконецъ, по сокращеніи:

$$\frac{1}{n}=\frac{a_1.10^{p-1}+a_2.10^{p-2}+\ldots+a_{p-1}.10+a_p+1}{10^p+1},$$

откуда

$$10^p+1=n(a_1.10^{p-1}+a_2.10^{p-2}+\ldots.+a_p+1)$$

и доказываемое предложеніе становится очевиднымъ.

П. Никульцевъ (См.), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *С. Блажко* (Москва), *В. Каганъ* (Одесса).

№ 250. Внутри треугольника ABC взята точка Q такъ, что углы QAB, QBC, QCA равны между собою; назовемъ величину каждаго изъ этихъ угловъ черезъ α. Доказать, что

$$\mathrm{Cotg}\alpha=\mathrm{Cotg}A+\mathrm{Cotg}B+\mathrm{Cotg}C.$$

Въ треугольникѣ QAB уголъ $QBA=B-\alpha$, слѣд. $\angle AQB=180°-B$, а въ треугольникѣ QCA уголъ $CQA=180°-A$. Теперь

$$QA:AB=\mathrm{Sin}(B-\alpha):\mathrm{Sin}B$$

и

$$QA:AC=\mathrm{Sin}\alpha:\mathrm{Sin}A.$$

Раздѣливъ одно равенство на другое, получимъ

$$AC:AB=\mathrm{Sin}(B-\alpha).\mathrm{Sin}A:\mathrm{Sin}B.\mathrm{Sin}\alpha,$$

но кромѣ того изъ треугольника ABC имѣемъ

$$AC:AB=\mathrm{Sin}B:\mathrm{Sin}C,$$

слѣдовательно

$$\mathrm{Sin}B:\mathrm{Sin}C=\mathrm{Sin}(B-\alpha).\mathrm{Sin}A:\mathrm{Sin}B.\mathrm{Sin}\alpha.$$

Отсюда легко найти

$$\mathrm{Cotg}\alpha=\frac{\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}C}+\mathrm{Cotg}B.$$

или

$$\mathrm{Cotg}\alpha=\frac{\mathrm{Sin}[180^\circ-(A+C)]}{\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}C}+\mathrm{Cotg}B,$$

откуда

$$\mathrm{Cotg}\alpha=\mathrm{Cotg}A+\mathrm{Cotg}B+\mathrm{Cotg}C.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *В. Гиммельфарбъ* (Кіевъ)

№ 321. Найти истинное значеніе выраженія

$$\frac{\alpha\mathrm{tg}\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{(1+\alpha^2)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}-1}$$

при $\alpha=0$.

Замѣнимъ въ данномъ выраженіи $\mathrm{tg}\alpha$ чрезъ $\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}$, а въ полученномъ результатѣ вмѣсто $\mathrm{Cos}^3\alpha$ подставимъ $\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Cos}\alpha.\mathrm{Sin}^2\alpha$, тогда найдемъ, что наше выраженіе будетъ имѣть такой видъ.

$$\frac{\alpha.\mathrm{Sin}\alpha.\mathrm{Cos}\alpha}{\alpha^2+1-\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}^2\alpha}=\frac{\mathrm{Cos}\alpha.\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\alpha}}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2+\mathrm{Cos}\,\alpha\left(\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\alpha}\right)^2}.$$

Такъ какъ

$$\text{пред. }\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\alpha}=1,$$

при $\alpha=0$, то легко видѣть, что истинное значеніе даннаго выраженія будетъ

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{5}.$$

В. Михайловъ (Харьковъ), *А. Бобятинскій* (Барнаулъ). Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 322. Доказать, что при $b=\sqrt{ac}$ имѣемъ для всякаго N

$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}.$$

Логариѳмируемъ $b=\sqrt{ac}$ при основанiи b, тогда

$$2=\log_b a+\log_b c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если извѣстенъ log нѣкотораго числа N при основанiи b, то log'ы того-же числа при основанiяхъ a и c будутъ

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a},\quad \log_c N=\frac{\log_b N}{\log_b c},$$

отсюда

$$\log_b a=\frac{\log_b N}{\log_a N},\ \log_b c=\frac{\log_b N}{\log_c N}.$$

Подставляя теперь вм. $\log_b a$ и $\log_b c$ ихъ величины въ (1), получаемъ

$$2\log_a N.\log_c N=\log_b N\log_a N+\log_b N\log_c N$$

или

$$\log_c N(\log_a N-\log_b N)=\log_a N(\log_b N-\log_c N),$$

отсюда и имѣемъ

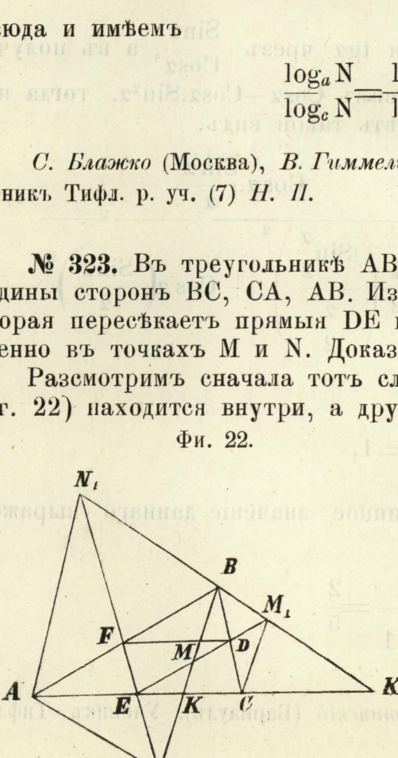
$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}.$$

С. Блажко (Москва), *В. Гиммельфарбъ* (Кiевъ), *А. Бобятинскiй* (Барнаулъ). Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 323. Въ треугольникѣ ABC точки D, E, F суть соотвѣтственно средины сторонъ BC, CA, AB. Изъ вершины B проведена сѣкущая BK, которая пересѣкаетъ прямыя DE и EF (или ихъ продолженiя) соотвѣтственно въ точкахъ M и N. Доказать, что прямая CM параллельна AN.

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда одна изъ точекъ M и N (фиг. 22) находится внутри, а другая внѣ треугольника (очевидно, что обѣ онѣ внутри треугольника быть не могутъ). Такъ какъ FE || BC и ED || AB, то

Фи. 22.



$$\triangle BKC \sim \triangle EKN \text{ и}$$

$$\triangle MKE \sim \triangle BKA$$

поэтому

$$KN:KE=BK:KC \text{ и}$$

$$KE:KM=AK:BK.$$

Перемноживъ эти пропорціи, получимъ

$$KN:KM=AK:KC;$$

а такъ какъ $\angle AKN=\angle MKC$, то

$$\triangle AKN \backsim \triangle MKC,$$

слѣд.

$$CM \parallel AN.$$

Положимъ теперь, что обѣ точки M_1 и N_1 находятся внѣ треугольника ABC. Тогда, по параллельности тѣхъ же линій

$$\triangle EK_1N_1 \backsim \triangle CK_1B \text{ и } \triangle M_1K_1E \backsim \triangle BK_1A.$$

Изъ подобія ихъ имѣемъ

$$K_1N_1:K_1E=K_1B:K_1C \text{ и } K_1E:K_1M_1=K_1A:K_1B.$$

Послѣ перемноженія этихъ пропорцій имѣемъ

$$K_1N_1:K_1M_1=K_1A:K_1C,$$

и такъ какъ въ треугольникахъ AK_1N_1 и CK_1M_1 уголъ AK_1N_1 общій, то

$$\triangle AK_1N_1 \backsim \triangle CK_1M_1,$$

а потому

$$CM_1 \parallel AN_1.$$

С. Блажко (Москва), *В. Михайловъ* (Харьковъ). Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*, Кіевск. 2-й г. (7) *П. Р.*, Короч. г. (8) *Н. Б.*, Ворон. к. к. (6) *Н. В.*, Полт. Дух. Сем. (3) *С. З.*

№ 327. Показать, что при $a+b+c=0$, выраженія

$$a^3b+b^3c+c^3a$$

и

$$a^3c+b^3a+c^3b$$

тождественны и, умноженныя на -1, даютъ каждое полный квадратъ.

Изъ условія имѣемъ $c=-(a+b)$; подставивъ теперь вм. c его величину въ два данныя выраженія, увидимъ, что каждое изъ нихъ равно

$$-(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4).$$

Умноживъ это на -1 и написавъ такимъ образомъ:

$$a^4+2a^2b^2+b^4+2ab(a^2+b^2)+a^2b^2,$$

видимъ, что это выраженіе есть ничто иное, какъ

$$(a^2+b^2+ab)^2,$$

что и требовалось доказать.

И. Трипольскій (Полтава). Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Короч. г. (8) *Н. Б.*, Оренб. г. (8) *Ан. П.*, Кіевск. 2-й г. (7) *В. М.*

№ 332. *(Теорема Шлемильха).* Показать, что при $n>2$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$1^2.2^2.3^2.4^2 \ldots\ldots n^2 > n^n.$$

Полагая, что

$$n>p+1$$

и умноживъ на p, получимъ

$$np>p^2+p,$$

или

$$np+n>p^2+p+n.$$

или

$$(n-p)(p+1)>n.$$

Полагая p послѣдовательно равнымъ $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$ и перемножая полученныя неравенства, найдемъ

$$1^2.2^2.3^2.4^2 \ldots\ldots n^2 > n^n.$$

М. Лянченко (Кострома), *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.), *Ѳ. Кондратьевъ* (Ив. Возн.), *В. Соллертинскій* Гатчино), *Н. Ивановскій* (Вор.), *С. Блажко* (Москва), *Я. Блюмбергъ*; Ученики: Тверск. р. уч. (7) *А. У.*, Ворон. к. к. (6) *Н. В.*, (7) *А. П.*, Кіевск. 1-ой г. (8) *В. Б.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

Запоздалыя рѣшенія прислали:

П. Трипольскій №№ 279, 296, 311; *М. Долговъ 2-ой* № 331; Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.* №№ 331, 362, 363; Кам.-Под. г. *Я. М.* № 240; Оренб. г. (8) *А. П.* № 342; Вятск. р. уч. (7) *И. П.* № 362; Ворон. к. к. (7) *Г. У.* № 331 и загадки I и IV.

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 19 Мая 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
ищется

Обложка
ищется