№№ 53—54.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ,

Издаваемый Э. К. Шпачинскимъ.

РЕКОМЕНДОВАНЪ

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія
для среднихъ учебныхъ заведеній
и Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній
для военно-учебныхъ заведеній.

V Семестра №№ 5-й и 6-й.

ЭШ

Высочайше утверж. Товарищество печатнаго дѣла и торговли И. Н. Кушнеревъ и К°, въ Москвѣ.
Кіевское Отдѣленіе, Елисаветинская ул., домъ Михельсона.
1888.

СОДЕРЖАНІЕ № 53.

СОДЕРЖАНІЕ № 54.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ"

(съ 20-го августа 1886 года)

выходитъ книжками настоящаго формата, не менѣе 24 стр. каждая, съ рисунками и чертежами въ текстѣ, **три раза въ мѣсяцъ,** исключая каникулярнаго времени, по 12 №№ въ полугодіе, считая таковыя съ 15-го января по 15-ое мая и съ 20-го августа по 20-ое декабря.

Подписная цѣна съ пересылкою:

на годъ—всего 24 №№ . . . . . **6 рублей** | **на одно полугодіе**—всего 12 №№—**3 рубля**

Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Журналъ издается по полугодіямъ (семестрамъ), и на болѣе короткій срокъ подписка не принимается.

Текущіе №№ журнала отдѣльно не продаются. Нѣкоторые изъ разрозненныхъ №№ за истекшія полугодія, оставшіеся въ складѣ редакціи, продаются отдѣльно по 30 коп съ пересылкою

Комплекты №№ за истекшія полугодія, сброшюрованные въ отдѣльные тома, по 12-ти №№ въ каждомъ, продаются по 2 р. 50 к. за каждый томъ (съ пересылкою)

Книжнымъ магазинамъ 20% уступки.

За перемѣну адреса приплачивается всякій разъ 10 коп. марками.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 53.

V Сем. 1 Октября 1888 г. № 5.

Р. Ю. Э. КЛАУЗІУСЪ.

(Некрологъ).

Профессоръ Клаузіусъ—Рудольфъ Юлій Эмануилъ—родился 2-го января 1882 г. въ Кёслинѣ (въ Помераніи), получилъ образованіе въ Берлинскомъ университетѣ и принималъ затѣмъ дѣятельное участіе въ столь извѣстныхъ physikalische'n colloquia Magnus'a, которыхъ не миновалъ почти ни одинъ изъ выступающихъ физиковъ второй половины настоящаго столѣтія (Гельмгольцъ, Кирхгофъ, Видеманъ, Вюллнеръ, Кундтъ, Тиндаль, Бекерель и т. п.) и благодаря которымъ онъ уже въ молодыхъ лѣтахъ обладалъ тѣми обширными свѣдѣніями въ области физическихъ наукъ, безъ которыхъ немыслимы были бы и блистательные результаты, добытые его изслѣдованіями.

По окончаніи университетскаго курса, Клаузіусъ остался при Берлинскомъ университетѣ приватъ-доцентомъ, занявъ въ то же время мѣсто учителя въ артиллерійской школѣ. Въ 1855-мъ году онъ былъ приглашенъ профессоромъ физики въ Цюрихскій политехникумъ, а въ 1857 г. получилъ мѣсто ординарнаго профессора въ Цюрихскомъ университетѣ. Въ 1867 году онъ перешелъ въ Вюрцбургскій, а въ 1869 г. въ Боннскій университетъ, гдѣ, занимая мѣсто ординарнаго профессора физики, и скончался 12-го августа настоящаго года.

Клаузіусъ принадлежалъ къ такимъ рѣдкимъ научнымъ дѣятелямъ, которымъ, благодаря глубокому вниканію въ предметъ, удается иначе освѣтить всѣмъ извѣстныя, указать на другія—мало обращавшія на себя вниманіе ученыхъ факты и открыть, благодаря этому, новые пути, которыми наука уже въ сравнительно короткое время быстро движется впередъ.

Клаузіусъ принадлежитъ къ *основателямъ* механической теоріи тепла и къ однимъ изъ выступающихъ участниковъ ея быстраго развитія и распространенія на всѣ отрасли физическихъ знаній.

Число научныхъ работъ проф. Клаузіуса чрезвычайно велико. Онѣ или физическаго или математическаго содержанія, но главныя изъ нихъ, находящіяся въ непосредственной связи съ началомъ механической теоріи тепла, изданы имъ и отдѣльно въ сочиненіи „Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie—Braunschweig 1864—1867, 2 Theile, и затѣмъ, послѣ новой обработки, вторымъ изданіемъ, подъ заглавіемъ: Die mechanische Wärmetheorie—Braunschweig 1876—1879.

Проф. Клаузіусъ отличался и своимъ преподаваніемъ. Будучи хорошимъ математикомъ, онъ никогда не злоупотреблялъ своими знаніями, а постоянно старался въ своихъ лекціяхъ употреблять выводы наиболѣе простые, чтобы вычисленіями не затемнить самой сути разсматриваемаго явленія.

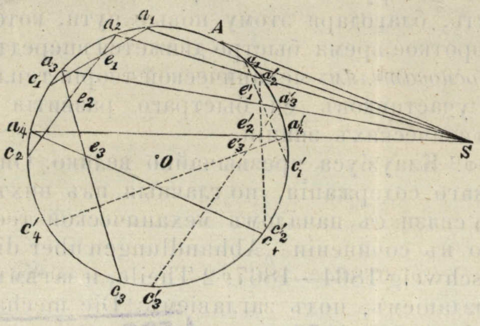
Наконецъ нельзя не упомянуть о роли эксперта, которую не рѣдко приходилось исполнять проф. Клаузіусу и это въ случаяхъ, имѣвшихъ капитальное научное или общественное значеніе.—Напомню я одинъ характерный случай такой экспертизы: въ 1855 году Берлинское физическое общество предложило денежную премію за опытное опредѣленіе *механическаго эквивалента*. Къ установленному сроку была представлена работа, разборомъ которой занялся проф. Клаузіусъ и, не смотря на то, что авторъ этой работы, извѣстный Гирнъ, пришелъ къ результатамъ прямо противорѣчившимъ уже въ то время установившимся мнѣніямъ о постоянствѣ механическаго эквивалента, комиссія, по предложенію проф. Клаузіуса, присудила Гирну сказанную премію. Дѣло въ томъ, что Гирнъ, какъ плохой теоретикъ, вывелъ изъ своихъ – отчасти прекрасныхъ—опытовъ совсѣмъ не подходящіе результаты, а Клаузіусъ, разсмотрѣвъ внимательно опытную часть, за которую только и могла присуждаться премія, показалъ, что и этими опытами, при помощи которыхъ механическій эквивалентъ въ 1-ый разъ опредѣлялся изъ явленій обращенія тепла въ работу, при правильной обработкѣ наблюденій, для механическаго эквивалента получается та же—постоянная величина. Но Клаузіусу приходилось высказывать свое мнѣніе не только въ чисто научныхъ вопросахъ, но и въ примѣненіи науки къ жизни, какъ напр. на всемірной Парижской электрической выставкѣ. Какое громадное значеніе имѣло во всѣхъ этихъ случаяхъ мнѣніе этого глубокаго, добросовѣстнаго ученаго—понятно само по себѣ. Проф. *М. Авенаріусъ* (Кіевъ).

О НѢКОТОРЫХЪ СВОЙСТВАХЪ

зажигательной кривой въ сферическихъ зеркалахъ и о способахъ ея построенія по точкамъ.

§ 1. Положимъ, что дана отражающая сферическая поверхность радіуса R, центръ которой O (фиг. 18) совпадаетъ съ плоскостью чертежа; сѣченіе этой сферы съ плоскостью чертежа будетъ поэтому большимъ ея кругомъ, котораго окружность будемъ впредь называть *отражающею*. Положимъ, далѣе, что изъ свѣтящейся точки S падаетъ пучекъ лучей Sa_1, Sa_2 . . . Sa_4, . . . , на часть отражающей окружности, вогнутую по отношенію къ точкѣ S. Послѣ отраженія въ a_1.... a_4...., лучи, принявъ направленія a_1c_1.... a_4c_4.... пересѣкутся

Фиг. 18.



въ цѣлой системѣ точекъ, изъ коихъ намѣтимъ только точки $e_1 \ldots e_3 \ldots$, въ которыхъ встрѣчаются два сосѣдніе отраженные луча. Если сближать точки $a_1 \ldots a_4 \ldots$ и сдѣлать ихъ непрерывно слѣдующими другъ за другомъ, то и точки $e_1 \ldots e_3 \ldots$ расположатся непрерывно на нѣкоторой кривой, именуемой *каустическою* или *зажигательною*. Совершенно такъ же, какъ точки дѣйствительнаго пересѣченія лучей $e_1 \ldots e_3 \ldots$ образуютъ *дѣйствительную* зажигательную кривую, такъ и точки $e'_1 \ldots e'_3 \ldots$, являющіяся результатомъ мнимаго пересѣченія лучей $Sa'_1 \ldots Sa'_4 \ldots$, отражающихся отъ стороны окружности, выпуклой относительно S, принадлежатъ *мнимой* зажигательной кривой, коль скоро $a'_1 \ldots a'_4 \ldots$ будутъ слѣдовать другъ за другомъ непрерывно.

Очевидно, что зажигательная кривая должна быть симметрична относительно прямой SO.

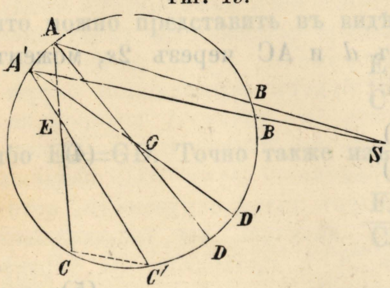
Вращая нашу фигуру на SO, какъ на оси, мы получимъ изъ зажигательной кривой зажигательную поверхность, дѣйствительную или мнимую, которая такимъ образомъ будетъ поверхностью вращенія. Эта зажигательная поверхность или часть ея и получается при отраженіи отъ сферическаго зеркала лучей, идущихъ отъ свѣтящейся точки.

Здѣсь мы разсмотримъ нѣкоторыя свойства зажигательной кривой и дадимъ нѣсколько способовъ построенія ея по точкамъ.

§ 2. Найдемъ прежде всего, какъ опредѣлить положеніе точки зажигательной кривой, принадлежащей двумъ какимъ нибудь непосредственно смежнымъ лучамъ, въ зависимости отъ положенія S относительно отражающей окружности, радіуса послѣдней и положенія точки паденія отражающихся лучей.

Пусть (фиг. 19) SA и SA′ будутъ два такіе смежные луча, отражающіеся по AC и A′C′ и пересѣкающіе отражающую окружность въ точкахъ B и B′. Точка E, гдѣ пересѣкаются AC и A′C′, будетъ принадлежать зажигательной кривой, коль скоро дуга AA′ станетъ меньше всякой данной величины. Въ послѣднемъ случаѣ дуги AA′, BB′ и CC′ можно замѣнить стягивающими ихъ хордами. Проведя діаметры AD и A′D′, усмотримъ слѣдующія равенства *дугъ:*

Фиг. 19.



$$CD = DB \text{ и } C'D' = D'B',$$

вытекающія изъ закона отраженія. Кромѣ того замѣтимъ, что

$$DD' = AA',$$

$$CD = CC' + C'D' - DD'$$

и

$$DB = DD' + D'B' + BB',$$

что вмѣстѣ съ предыдущими двумя равенствами дастъ такую зависимость между AA′, BB′ и CC′:

$$CC' = 2AA' + BB', \qquad (1)$$

которую и припишемъ хордамъ, стягивающимъ эти дуги. Для *хордъ* же изъ двухъ паръ подобныхъ треугольниковъ AA'S и BB'S, AA'E и CC'E найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{BB'}{AA'}=\frac{BS}{A'S}\\ \frac{CC'}{AA'}=\frac{CE}{A'E}\end{aligned}\right\}$$

или, такъ какъ при безпредѣльно уменьшающихся AA', BB' и CC', A'S и A'E въ предѣлѣ сравниваются съ AS и AE, то

$$\left.\begin{aligned}\frac{BB'}{AA'}=\frac{BS}{AS}\\ \frac{CC'}{AA'}=\frac{CE}{AE}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Представляя первое изъ равенствъ (2) въ видѣ:

$$\frac{BB'+2AA'}{AA'}=\frac{BS+2AS}{AS},$$

дѣля на второе и принимая въ расчетъ (1), получимъ

$$1=\frac{AE(BS+2AS)}{CE.AS}. \qquad (3)$$

Обозначая AE черезъ f, AS черезъ d и AC черезъ $2s$, можемъ предыдущему равенству дать видъ

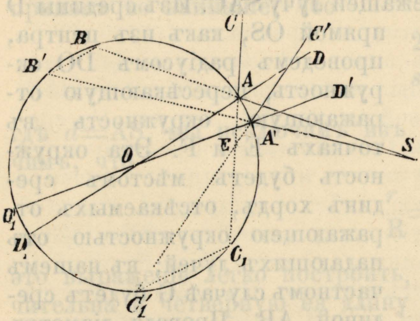
$$1=\frac{f(3d-2s)}{d(2s-f)}, \qquad (4)$$

Откуда

$$\frac{2}{s}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d}. \qquad (5)$$

Словами: *половина хорды, отсѣкаемой отражающею окружностью отъ падающаго луча, есть среднее гармоническое между длиною всего падающаго луча до точки паденія и разстояніемъ зажигательной кривой отъ точки паденія, взятымъ по отраженному лучу.*

Легко замѣтить, что обыкновенно выводимая формула для положенія фокуса въ сферическомъ вогнутомъ зеркалѣ есть частный случай, полученной нами формулы, а именно, когда лучъ проходитъ черезъ центръ зеркала, т. е. когда $s=R$ т. е. радіусу зеркала. Тотъ же методъ прилагается и для вывода положенія точки на мнимой зажигательной кривой; точно также и здѣсь (фиг. 20) мы получимъ въ результатѣ формулу (3), Фиг. 20.

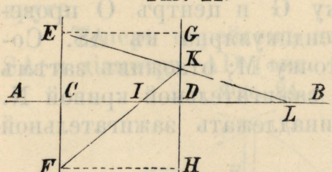


но, оставаясь вѣрными принятой символикѣ, мы должны положить BS равнымъ $d+2s$, почему вмѣсто (5) получаемъ

$$\frac{2}{s}=\frac{1}{f}-\frac{1}{d}. \qquad (6)$$

§ 3. Для того, чтобы построить зажигательную кривую по точкамъ, обратимся къ наиболѣе удобопримѣнимымъ въ нашемъ случаѣ построеніямъ средняго гармоническаго для двухъ величинъ. Прежде всего укажемъ на построеніе, основывающееся на слѣдующей теоремѣ: *если на прямой AB* (фиг. 21) *въ точкахъ C и D возставимъ перпендикуляры, отложимъ CE=CF, затѣмъ соединимъ E прямой съ точкою L, взятой на AB и наконецъ проведемъ FK, то отрѣзокъ CD будетъ среднимъ гармоническимъ между CI и CL.*

Фиг. 21.



Чтобы доказать эту теорему, проведемъ EG и FH параллельно AB; получаемъ двѣ пары подобныхъ треугольниковъ ELC и EGK, FKH и CIF. Изъ первой пары получаемъ:

$$\frac{EG}{CL}=\frac{GD-KD}{EC},$$

что можно представить въ видѣ

$$\frac{EG}{CL}=1-\frac{KD}{EC}, \qquad (7)$$

ибо EC=GD. Точно также изъ второй пары найдемъ:

$$\frac{FH}{CI}=\frac{HD+KD}{FC}$$

или:

$$\frac{FH}{CI}=1+\frac{DK}{FC}, \qquad (8)$$

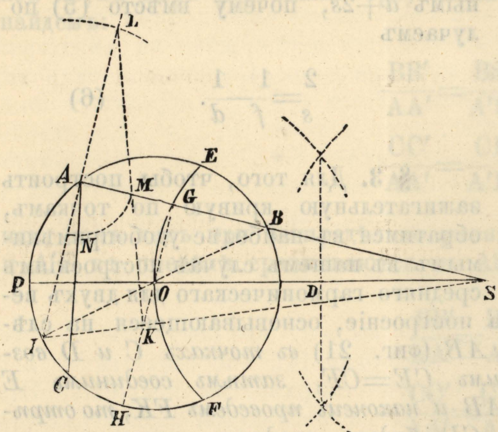
такъ какъ здѣсь тоже HD=FC. Сложивъ (7) съ (8) и замѣтивъ, что EC=FC и что FH=EG=CD, получимъ

$$\frac{2}{CD}=\frac{1}{CL}+\frac{1}{CI},$$

что и требовалось доказать.

Заручившись предыдущимъ, можно понять и построеніе точки N (фиг. 22) зажигательной кривой, принадлежащей лучу SAC. Изъ средины D

Фиг. 22.

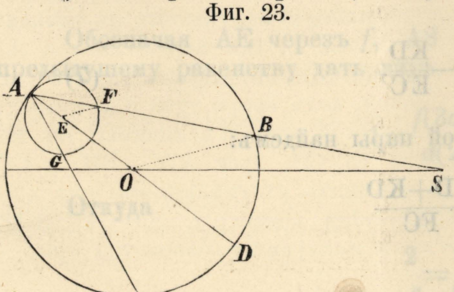


прямой OS, какъ изъ центра, проведемъ радіусомъ DO окружность, пересѣкающую отражающую окружность въ точкахъ E и F. Эта окружность будетъ мѣстомъ срединъ хордъ, отсѣкаемыхъ отражающею окружностью отъ падающихъ лучей; въ нашемъ частномъ случаѣ G будетъ срединой AB. Проведя діаметръ BI, соединимъ точки I и A прямою, которая будетъ перпендикулярна къ AS, и продолжимъ ее до точки L, такъ чтобы IA=AL. Далѣе черезъ точку G и центръ O проведемъ прямую GH, которая также будетъ перпендикулярна къ AS. Соединивъ I съ S и проведя LK, мы получимъ точку M; отложивъ затѣмъ AN равное AM, мы найдемъ искомую точку зажигательной кривой N. Легко замѣтить, что точки E и F также принадлежать зажигательной кривой.

Построеніе это имѣетъ то неудобство, что не даетъ возможности найти точку кривой на оси SP безъ построенія особаго перпендикуляра къ SP въ точкѣ P.

§ 4. Второе построеніе, которое мы приведемъ ниже, будетъ имѣть

Фиг. 23.



своимъ основаніемъ слѣдующее соображеніе. Пусть ABDC (фиг. 23) будетъ отражающая окружность, въ точку A которой падаетъ изъ S лучъ SA; построивъ отраженный лучъ AC, найдемъ радіусъ такой окружности, которая касалась бы отражающей въ A и проходила бы черезъ искомую точку G на зажигательной кривой. Центръ этой окружности несомнѣнно будетъ находиться на діаметрѣ AD, гдѣ нибудь въ точкѣ E.

Проведя OB, на основаніи подобія треугольниковъ AEF и AOB, напишемъ, что

$$\frac{EF}{OB}=\frac{AF}{AB},$$

или, обозначая EF черезъ r, OB черезъ R, AF черезъ f, AB черезъ $2s$,

$$\frac{r}{R}=\frac{f}{2s};$$

принявъ во вниманіе, что

$$\frac{2}{s}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d},$$

гдѣ d=AS, мы исключимъ изъ послѣднихъ двухъ уравненій f и получимъ, что

$$\frac{r}{R}=\frac{d}{4d-2s};$$

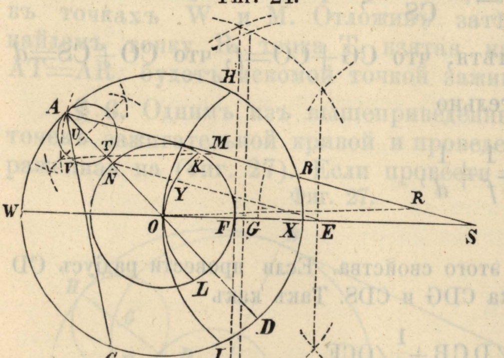
это выраженіе легко построить, но такъ какъ длина d обыкновенно значительна и четверную ея длину ($4d$) вводить затруднительно, то мы измѣнимъ предыдущее равенство въ такое:

$$\frac{2r}{R}=\frac{{}^1/_2 d}{d-{}^1/_2 s}; \qquad (9)$$

эта формула удобна для построенія и опредѣляетъ діаметръ искомаго круга.

Теперь перейдемъ къ самому построенію. Проведя падающій лучъ SA и діаметръ AD (фиг. 24), раздѣлимъ пополамъ OS въ точкѣ E, OE въ точкѣ G и радіусъ отражающей окружности OX въ точкѣ F. Изъ центра O радіусомъ OF опишемъ окружность, пересѣкающую OA въ N. Изъ точекъ E и G опишемъ дуги HOI и KOL. Проведя EN замѣтимъ, что NY будетъ равно $\frac{1}{4}$ AB или $\frac{1}{2}s$. Отложивъ отрѣзокъ SR равный NY и AM равный NE *), соединимъ прямою R съ O, а изъ M проведемъ параллельную RO до встрѣчи съ OA въ точкѣ T; AT и будетъ діаметръ искомой окружности, который остается раздѣлить пополамъ для нахожденія центра U. Дѣйствительно по построенію

Фиг. 24.



$$\frac{AT}{AO}=\frac{AM}{AR},$$

но AR=$d-\frac{1}{2}s$, а AM=$\frac{1}{2}d$, что легко заключить изъ того, что AM=NE, и NE соединяетъ средины сторонъ AO и OS треугольника AOS, основаніемъ коего есть AS равное d.

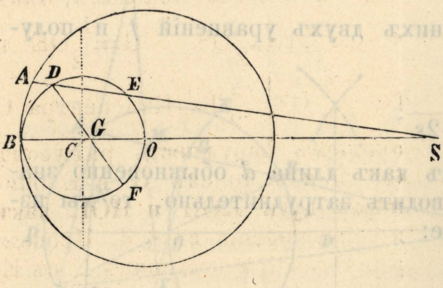
И это построеніе не годится для того случая, когда ищется точка зажигательной кривой, лежащая на оси OS.

*) На приложенномъ чертежѣ по недосмотру отложено AM=OE.

§ 5. Въ этомъ параграфѣ мы изложимъ построеніе, одинаково удобное для нохожденія всѣхъ точекъ зажигательной кривой.

Пусть дана отражающая окружность центра O (фиг. 25). Для того,

Фиг. 25



чтобы найти точку зажигательной кривой на оси SB, мы изъ C, средины OB, описываемъ радіусомъ CO окружность и проведя изъ точки S какую либо сѣкущую SA къ этой окружности, отложимъ OF=OE и соединимъ прямою D съ F; точка G будетъ искомою. Въ данномъ случаѣ точки G и S будутъ взаимными, а окружность BDEOF управляющею, а потому, какъ извѣстно, радіусъ ея будетъ среднею геометрическою между CG и CS; такъ что

$$\frac{CG}{CO}=\frac{CO}{CS}\text{*)}$$

или

$$\frac{CG+CO}{CO}=\frac{CO+CS}{CS};$$

вводя принятыя обозначенія и замѣтя, что $CG+CO=f$, что $CO+CS=d$ и что $CO=\frac{1}{2}R$, получимъ окончательно

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{f}+\frac{1}{d};$$

---

*) Напомнимъ читателю выводъ этого свойства. Если провести радіусъ CD (фиг. 25), то получатся два треугольника CDG и CDS. Такъ какъ

$$\angle DGC=\frac{1}{2}\angle DCB+\frac{1}{2}\angle OCF$$

и

$$\angle DSC=\frac{1}{2}\angle DCB-\frac{1}{2}\angle ECO,$$

то, сложивъ эти равенства и замѣтивъ, что ECO=OCF, найдемъ, что

$$\angle DGC+\angle DSC=\angle DCB;$$

такъ какъ, далѣе,

$$\angle DCB=\angle DGC+\angle CDG,$$

то выходитъ въ результатѣ, что

$$\angle DSC=\angle CDG,$$

а это указываетъ на подобіе треугольниковъ CDG и CDS. Изъ подобія же этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что

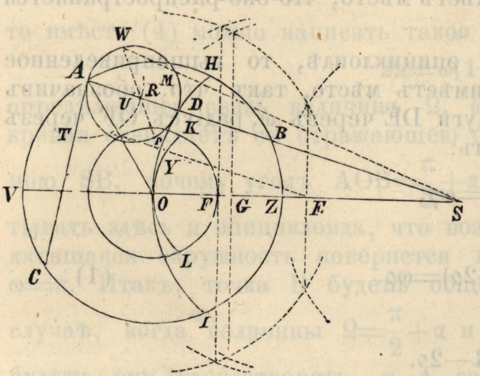
$$\frac{CG}{CO}=\frac{CO}{CS},$$

если взять вмѣсто CD равное ему CO.

это показываетъ, что точка G принадлежитъ зажигательной кривой и притомъ находится на оси SO.

Чтобы обобщить это построеніе, на случай какого угодно луча SAC (фиг. 26), раздѣлимъ отрѣзки OS, OE и OZ=R пополамъ, такъ

Фиг. 26.

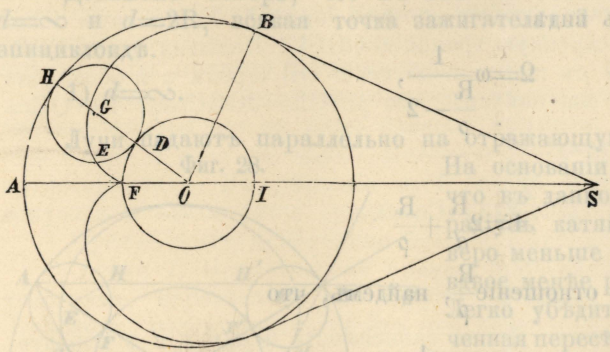


чтобы $OE=\frac{1}{2}OS$, $OG=\frac{1}{2}OE$ и

$OF=\frac{1}{2}OZ=\frac{1}{2}R$. Изъ центра O опишемъ окружность радіусомъ OF и изъ точекъ G и E опишемъ дуги KOL и HOI, какъ при построеніи въ § 4. Проведя радіусъ OA и соединивъ N съ E, найдемъ*), какъ и прежде, что $NY=\frac{1}{4}AB$. Отложимъ AU=NY, и изъ U радіусомъ UA, опишемъ окружность, діаметръ которой AD равенъ половинѣ AB. Изъ точки S проведемъ какую либо прямую SW, встрѣчающую окружность AWMD въ точкахъ W и M. Отложивъ затѣмъ DP=DM и проведя WP, мы найдемъ точку R; точка T, взятая на отраженномъ лучѣ такъ, чтобы AT=AR, будетъ искомой точкой зажигательной кривой.

§ 6. Однимъ изъ вышеприведенныхъ способовъ найдено нѣсколько точекъ зажигательной кривой и проведена черезъ нихъ сама кривая, изображенная на (фиг. 27). Если провести окружность DFI, концентрическую

Фиг. 27.



съ отражающею и проходящую черезъ вершину кривой F, то общій видъ послѣдней напомнитъ эпициклоиду, образованную точкой на окружности DEH, касательной къ обѣимъ предыдущимъ и катящейся по окружности FDI. Въ дѣйствительности, оказывается, что *зажигательная кривая вообще не эпициклоида*, но *превращается въ нее въ двухъ частныхъ случаяхъ*, что и выяснится изъ послѣдующаго изложенія.

Чтобы разобрать, будетъ ли зажигательная кривая эпициклоидой, слѣдуетъ убѣдиться, можетъ ли дуга DE равняться дугѣ DF. Для того,

*) На прил. чертежѣ по недосмотру не поставлена буква N въ точкѣ пересѣченія AO съ окружностью OF.

чтобы упростить относящіяся сюда разсужденія, мы поступимъ такъ: разберемъ сначала, въ какихъ случаяхъ точка B, гдѣ лучъ SB касается отражающей окружности, принадлежитъ и зажигательной кривой и эпициклоидѣ, имѣющимъ общую точку F и потомъ докажемъ для тѣхъ случаевъ, когда подобное совпаденіе имѣетъ мѣсто, что оно распространяется и на всѣ точки обѣихъ кривыхъ.

Если точка E принадлежитъ эпициклоидѣ, то вышеприведенное равенство дугъ DE=DF, очевидно, имѣетъ мѣсто, такъ что, обозначивъ угловую мѣру дуги DF черезъ Ω, дуги DE черезъ ω, радіусъ OF черезъ r и радіусъ GD черезъ ρ, напишемъ:

$$\Omega r=\omega\rho;$$

или

$$\Omega(R-2\rho)=\omega\rho \tag{1}$$

потому что

$$r=R-2\rho.$$

Такъ какъ, по положенію, точка F принадлежитъ обѣимъ кривымъ, то наша эпициклоида должна опредѣляться еще уравненіемъ

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{d}+\frac{1}{2\rho}. \tag{2}$$

Наконецъ, если обозначить $\angle$OSB черезъ α, мы свяжемъ R и d зависимостью:

$$R=(d-R)\operatorname{Sin}\alpha. \tag{3}$$

Представивъ (1) въ видѣ

$$\Omega=\omega\frac{1}{\frac{R}{\rho}-2},$$

а (2) въ видѣ

$$4=2\frac{R}{d}+\frac{R}{\rho}$$

и исключивъ изъ нихъ отношеніе $\frac{R}{\rho}$, найдемъ, что

$$2\Omega=\omega\frac{1}{1-\frac{R}{d}}. \tag{4}$$

Дѣленіе покажетъ намъ, что

$$\frac{1}{1-\frac{R}{d}}=1+\frac{1}{\frac{d}{R}-1},$$

а такъ какъ изъ (3) слѣдуетъ, что

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{1}{\frac{d}{\mathrm{R}}-1},$$

то вмѣсто (4) можно написать такое равенство

$$2\Omega=\omega(1+\mathrm{Sin}\alpha) \qquad (5)$$

опредѣляющее связь величинъ Ω, ω и α. Въ точкѣ B зажигательная кривая совпадаетъ съ отражающею окружностью и сопрягается съ прямою SB, почему уголъ $\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}+\alpha$. Такое же совпаденіе должна испытывать здѣсь и эпициклоида, что возможно только въ томъ случаѣ, если катящаяся окружность повернется въ углѣ AOB на 180°, т. е. если $\omega=\pi$. Итакъ, точка B будетъ общею для обѣихъ кривыхъ въ томъ случаѣ, когда величины $\Omega=\frac{\pi}{2}+\alpha$ и $\omega=\pi$, внесенныя въ уравненіе (5) будутъ ему удовлетворять, т. е. если будетъ имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\alpha=\frac{\pi}{2}\mathrm{Sin}\alpha. \qquad (6)$$

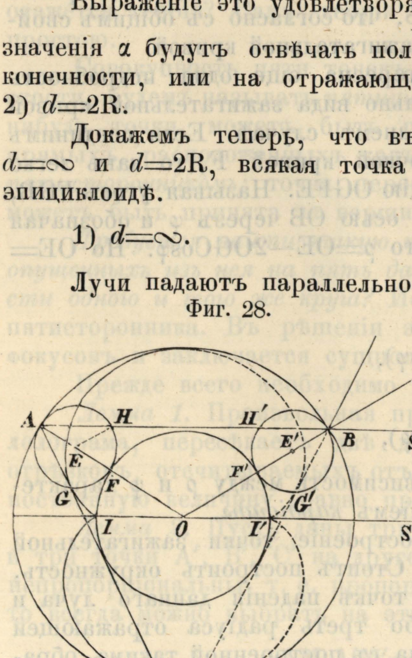
Выраженіе это удовлетворяется только при $\alpha=0$ и $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$. Эти значенія α будутъ отвѣчать положенію свѣтящейся точки или въ безконечности, или на отражающей окружности; причемъ 1) $d=\infty$ или 2) $d=2\mathrm{R}$.

Докажемъ теперь, что въ нашихъ обоихъ случаяхъ, т. е. когда $d=\infty$ и $d=2\mathrm{R}$, всякая точка зажигательной кривой принадлежитъ и эпициклоидѣ.

1) $d=\infty$.

Лучи падаютъ параллельно на отражающую окружность (фиг. 28).

Фиг. 28.



На основаніи уравненія (2) найдемъ, что въ данномъ случаѣ $\mathrm{R}=4\rho$, т. е. радіусъ катящейся окружности вчетверо меньше радіуса отражающей, или вдвое менѣе радіуса окружности IFF′I′. Легко убѣдиться, что точка G, полученная пересѣченіемъ отраженнаго луча AC съ окружностью AHFG, принадлежитъ эпициклоидѣ. Такъ какъ AB и IO параллельны, то уголъ HAF равенъ FOI, а потому и уголъ GAF равенъ FOI. Поэтому угловая мѣра дуги FG будетъ вдвое болѣе угловой мѣры дуги IF, а такъ какъ дуга FG описана вдвое меньшимъ радіусомъ, чѣмъ дуга IF, то обѣ онѣ по длинѣ равны, и слѣдовательно точка G лежитъ на эпициклоидѣ, произведенной окружностью AHFG. Съ другой стороны легко оправдать равенство

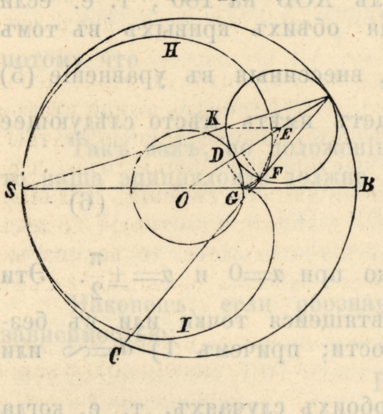
$$\frac{4}{AB}=\frac{1}{AG},$$

которое опредѣляетъ G какъ точку на зажигательной кривой въ данномъ случаѣ. Дѣйствительно, проведя EH, которая будетъ параллельна OB и замѣтивъ, что AO=4AE, непосредственно усмотримъ указанное выше равенство. На фиг. 28 пунктирная вѣтвь кривой изображаетъ мнимую зажигательную кривую при томъ же положенiи свѣтящейся точки.

2) $d=2R$.

Въ данномъ случаѣ радiусы катящейся окружности AFDK (фиг. 29) и неподвижной равны, какъ это слѣдуетъ изъ того же уравненiя (2). Уголъ DOG равенъ двойному углу KAO, или DAF, какъ внѣшнiй уголъ равнобедреннаго, треугольника AOS, а потому дуги DF и DG равны, и точка F принадлежитъ эпициклоидѣ. Эта точка принадлежитъ также и зажигательной кривой, ибо изъ подобiя треугольниковъ AOS и AEK слѣдуетъ, что AK. или. что все одно, AF равно трети AS, что согласно съ общимъ свойствомъ зажигательной кривой.

Фиг. 29.



Интересна еще одна подробность относительно вида зажигательной кривой въ послѣднемъ случаѣ. Если соединимъ прямой вершину G съ какой нибудь точкой кривой F, то какъ легко видѣть, получимъ равнобедренную трапецiю OGFE. Называя уголъ FGB, составляемый прямою FG съ постоянною осью OB черезъ φ и обозначая величину GF черезъ ρ, мы найдемъ, что $\rho=OE-2OG\cos\varphi$. Но $OE=\frac{2}{3}R$, а $OG=\frac{1}{3}R$, а потому:

$$\rho=\frac{2}{3}R(1-\cos\varphi),$$

или, вообще,

$$\rho=a(1-\cos\varphi),$$

гдѣ a какая либо постоянная. Такая зависимость между ρ и φ характеризуетъ кривую, извѣстную подъ названiемъ *кардiоиды*.

Въ двухъ послѣднихъ случаяхъ построенiе точки зажигательной кривой становится особенно простымъ. Стоитъ построить окружность, касающуюся изнутри отражающей въ точкѣ паденiя даннаго луча и имѣющую радiусомъ либо четверть, либо треть радiуса отражающей окружности; пересѣченiе отраженнаго луча съ построенной такимъ образомъ окружностью доставитъ искомую точку кривой.

Г. Вульфъ (Спб.).

ФОКУСЫ ПЯТИСТОРОННИКА.

Тема для сотрудниковъ.

Геометры временъ Аполлонія Пергамскаго разсматривали линіи второго порядка (эллипсъ, гипербола, парабола), какъ линіи сѣченія конуса плоскостью. Въ настоящее время кромѣ этого метода для изслѣдованія кривыхъ линій мы имѣемъ еще нѣсколько методовъ: координаты, взаимныя поляры, проекціи, ангармоническія отношенія. Всѣ эти методы не соотвѣтствуютъ тому, что мы подразумѣваемъ подъ элементарнымъ изложеніемъ. Мы покажемъ, что полная теорія линій второго порядка можетъ быть изложена только на основаніи подобія треугольниковъ, Пиѳагоровой теоремы и свойствъ круга. Впрочемъ мы будемъ пользоваться и ангармоническими отношеніями, но только тамъ, гдѣ безъ нихъ уже рѣшительно нельзя обойтись.

Но прежде чѣмъ приступить къ теоріи коническихъ сѣченій, необходимо дать нѣсколько подготовительныхъ статей. Проектъ одной статьи (взаимныя точки треугольника) *) былъ данъ; предлагаемъ другую статью.

Считаемъ нужнымъ замѣтить, что настоящая статья одна изъ самыхъ трудныхъ и сложныхъ въ теоріи коническихъ сѣченій. Дѣлаемъ эту оговорку, чтобы не ввести въ заблужденіе читателя, который можетъ подумать: если подготовительныя статьи трудны и сложны, то какова же окажется теорія? Сама теорія линій второго порядка окажется весьма простою.

Совокупность пяти точекъ, расположенныхъ какъ нибудь на плоскости, будемъ называть *пятиугольникомъ*; прямая, соединяющая двѣ какія нибудь точки, можетъ быть принята за сторону. Совокупность пяти прямыхъ, расположенныхъ какъ нибудь на плоскости, будемъ называть *пятисторонникомъ;* точка пересѣченія какихъ нибудь двухъ прямыхъ можетъ быть принята за вершину.

Требуется найти такую точку, чтобы основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на пять данныхъ прямыхъ, находились на окружности одного и того же круга? Искомую точку назовемъ *фокусомъ* даннаго пятисторонника. Въ рѣшеніи этой задачи и въ изслѣдованіи свойствъ фокусовъ и заключается сущность предлагаемой статьи.

Прежде всего необходимо изложить двѣ вспомогательныя теоремы.

Лемма 1. Произвольная прямая, проходящая чрезъ вершину параллелограма, пересѣкаетъ двѣ другія стороны такъ, что произведеніе отрѣзковъ, отсчитываемыхъ отъ противоположныхъ вершинъ, сохраняетъ постоянную величину (равно произведенію сторонъ параллелограма).

Лемма 2. Пусть даны три точки A, B, C на одной прямой линіи и три точки A′, B′, C′ на другой прямой. Если соотвѣтственные отрѣзки непропорціональны, т. е. пропорція $AB:A'B'=BC:B'C'$ не удовлетворяется, то всегда можно выбрать на этихъ прямыхъ точки M и M′ такъ, чтобы

$$AM.A'M'=BM.B'M'=CM.C'M'.$$

*) См. „Вѣстникъ“ № 52.

Такія точки назовемъ *главными* точками трехъ паръ точекъ, расположенныхъ на двухъ прямыхъ линіяхъ.

Существованіе главныхъ точекъ доказывается слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ главныя точки не зависятъ отъ взаимнаго расположенія прямыхъ, то помѣстимъ обѣ прямыя такъ чтобы точки A и A' совпадали; пусть прямыя BB' и CC' пересѣкутся въ точкѣ D. Построимъ на данныхъ прямыхъ параллелограмъ, чтобы его вершина находилась въ D; двѣ другія вершины этого параллелограма, въ силу предыдущей леммы, будутъ главными точками.

Перейдемъ теперь къ отысканію фокуса пятисторонника. Выберемъ двѣ стороны; пусть одна изъ нихъ пересѣкается тремя остальными сторонами въ A, B, C, другая въ A', B', C'. Найдемъ прежде всего главныя точки M и M'. Въ точкѣ M проведемъ MA_1, параллельную и *одинаково направленную* съ $M'A'$. Внѣшній уголъ между MA и MA_1 раздѣлимъ пополамъ и на полученной линіи откладываемъ по обѣ стороны равные отрѣзки MN и MN' такъ, чтобы MN была среднею пропорціональною величиною между MA и $M'A'$. Средину линіи MM' соединимъ съ N и N' прямыми ON и ON'. На биссекторѣ внутренняго угла между ON и ON' отложимъ по обѣ стороны равные отрѣзки OF и OF' такъ, чтобы OF была среднею пропорціональною между ON и ON'. Точки F и F' будутъ два искомые фокуса. Доказательство основывается на свойствахъ гармоническаго четыреугольника*). Въ самомъ дѣлѣ четыреугольникъ $NFN'F'$ будетъ гармоническій. Замѣтимъ, что въ гармоническомъ четыреугольникѣ половина діагонали есть средняя пропорціональная и дѣлитъ пополамъ уголъ между прямыми, соединяющими средину съ концами другой діагонали. Изъ этого свойства вытекаетъ во первыхъ

$$MF.MF'=MF.M'F=\overline{MN}^2=MA.M'A',$$

во вторыхъ углы AMF и $FM'A'$ равны. Отсюда слѣдуетъ, что треугольники AMF и $FM'A'$ подобны. Пусть теперь перпендикуляры изъ F пересѣкаютъ двѣ выбранныя стороны въ P и P', а остальныя три стороны—въ A'', B'', C''. Легко показать, что $\angle PA''P'=\angle PAF+\angle P'A'F$, т. е. дополняетъ уголъ AMF до двухъ прямыхъ. То же имѣемъ для угловъ $PB''P'$ и $PC''P'$. Всѣ эти три угла равны, слѣдовательно пять точекъ P, P', A'', B'', C'' находятся на окружности одного круга.

Въ томъ случаѣ, когда линія MM', соединяющая главныя точки, одинаково наклонена къ MA и $M'A'$, построеніе упрощается: изъ средины MM' возставляемъ перпендикуляръ и на немъ по обѣ стороны возьмемъ точки F и F' такъ, чтобы MF, а также MF' была среднею пропорціональною между MA и $M'A'$.

Далѣе нужно доказать теорему: если прямая линія движется такъ, что ея отрѣзокъ, заключенный между двумя постоянными прямыми, стягиваетъ постоянный уголъ въ постоянной точкѣ, то основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ постоянной точки на движущуюся прямую линію, находится на постоянномъ кругѣ. Далѣе слѣдуетъ обратная теорема.

Отсюда вытекатъ, что отрѣзки двухъ сторонъ, между двумя дру-

---

*) См. „Вѣстникъ" № 1, стр 7, сем. I.

гими, стягиваютъ въ фокусѣ равные углы (или дополнительные до двухъ прямыхъ).

Если извѣстенъ одинъ фокусъ пятисторонника, то другой находится слѣдующимъ образомъ: пусть O есть центръ круга, проходящаго чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на стороны; продолживъ FO по другую сторону центра и отложивъ $OF'=OF$, получимъ другой фокусъ. Всѣ десять основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на стороны, находятся на окружности одного и того же круга, центръ котораго находится посрединѣ FF'; эту точку можно назвать центромъ пятисторонника. Если два фокуса совпадаютъ, то пять сторонъ касаются окружности одного круга.

Дальнѣйшія свойства фокусовъ изложены въ прежней статьѣ (Взаимныя точки треугольника); они суть:

1) Прямыя, соединяющія фокусы съ вершиною, одинаково наклонены къ сторонамъ;

2) Прямая, соединяющая основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ одного фокуса на двѣ стороны, перпендикулярна къ прямой, соединяющей вершину съ другимъ фокусомъ.

Къ нимъ нужно прибавить:

3) Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ двухъ фокусовъ на каждую сторону, сохраняетъ постоянную величину.

4) Опустимъ перпендикуляры FA и $F'A'$ изъ фокусовъ на какую нибудь сторону; продолжимъ FA на такое же разстояніе $AB=FA$; прямая BF' пересѣчетъ сторону въ точкѣ C; эта послѣдняя точка обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма (если перпендикуляры съ одной стороны) или разность (если перпендикуляры съ разныхъ сторонъ) ея фокусныхъ радіусовъ FC и $F'C$ сохраняетъ постоянную величину.

Разсмотримъ теперь исключительный случай, когда *главныхъ* точекъ не существуетъ. Пусть три стороны пересѣкаютъ двѣ остальныя стороны въ точкахъ A, B, C и A', B', C'; при этомъ $AB{:}A'B'=BC{:}B'C'$. Въ этомъ случаѣ пятисторонникъ имѣетъ только одинъ фокусъ. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на стороны, будутъ лежать на одной прямой. Для нахожденія этого фокуса необходимо доказать двѣ леммы:

Лемма 3. Возьмемъ нѣсколько окружностей, проходящихъ чрезъ двѣ точки A и B; чрезъ точку B проведемъ двѣ сѣкущія, изъ которыхъ одна пересѣкаетъ окружности въ C, D, E,..., другая въ соотвѣтственныхъ точкахъ C', D', E',... Треугольники, построенные на CC', DD', EE',... и имѣющіе общую вершину въ A, подобны; отрѣзки CD, DE,.. пропорціональны соотвѣтственнымъ отрѣзкамъ $C'D'$, $D'E'$,...

Лемма 4. (Теорема Симпсона). Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ произвольной точки окружности на три стороны вписаннаго треугольника, находятся на одной прямой линіи*).

Отсюда вытекаетъ простой способъ построенія фокуса: чрезъ три точки пересѣченія трехъ сторонъ проводимъ окружность; всѣ такія окружности пересѣкутся въ фокусѣ. Проф. *В. Ермаковъ*.

*) См. рѣшеніе задачи № 6 въ „Вѣстникѣ“ № 7, стр. 159 сем. I.

РЕЦЕНЗІИ.

А. П. Шимковъ. Курсъ опытной физики. Ч. I. Общая физика и акустика.— Ч. II. О свѣтѣ.—Ч. III. О теплотѣ.—Ч. IV. О магнитизмѣ и электричествѣ. Изданіе второе, исправленное и дополненное. Харьковъ 1884—88 г.

О достоинствахъ вышеназваннаго курса можно судить уже по тому, что это единственный обширный учебникъ физики на русскомъ языкѣ, считая въ томъ числѣ и переводныя сочиненія, дождавшійся второго изданія; правда, такихъ сочиненій немного и появлялось въ печати: „Курсъ наблюдательной физики“ проф. Петрушевскаго, да переводной многотомный курсъ, составленный по Жамену и Вюльнеру.

Богатство содержанія въ сочиненіи проф. Шимкова изумительно; въ новомъ изданіи появилось еще много новыхъ дополненій противъ перваго изданія, такъ что курсъ изъ трехтомнаго обратился въ четырехтомный. Достигнуть такой полноты удалось, благодаря отсутствію мелочныхъ описаній приборовъ и умѣнію въ немногихъ словахъ очертить суть явленія, прибора или теоріи. Слѣдуетъ замѣтить, что авторъ значительно выходитъ за предѣлы курса „опытной“ физики, ибо въ его книгѣ отведено весьма много мѣста теоретическимъ соображеніямъ, при чемъ авторъ обходится почти безъ помощи высшей математики.

Къ недостаткамъ курса слѣдуетъ отнести весьма плохіе по выполненію и часто небрежно составленные чертежи; напримѣръ, при описаніи электромагнитной теоріи Клерка Максуэлля черт. 346 и 347 въ IV ч. совсѣмъ невѣрны. Читатели такого курса, конечно, будутъ въ большинствѣ случаевъ видѣть всѣ описываемые приборы, и потому нѣтъ надобности въ подробныхъ рисункахъ и чертежахъ; но схематическіе чертежи все же должны быть удобопонятны и правильны.

Позволю себѣ затѣмъ указать нѣкоторые замѣченные мною промахи въ текстѣ книги, конечно, неизбѣжные при всякой большой работѣ.

Въ § 523 излагается теорія конденсатора, съ которою нельзя согласиться. Профессоръ Шимковъ приписываетъ конденсацію электричества исключительно болѣе равномѣрному распредѣленію электричества на пластинкахъ конденсатора и происходящему отсюда уменьшенію потери электричества въ воздухъ. Уменьшеніе потерь электричества позволяетъ сдѣлать только одно логическое заключеніе: именно, о болѣе скоромъ достиженіи предѣла заряжанія, если таковой существуетъ; самый же вопросъ о существованіи предѣла остается открытымъ. Если бы теорія г. Шимкова была вѣрна, то нельзя было бы объяснить теорію конденсатора, состоящаго изъ двухъ сферическихъ поверхностей, гдѣ распредѣленіе электричества остается равномѣрнымъ до и послѣ конденсаціи. Ошибка произошла отъ невѣрнаго предположенія, что зарядъ конденсатора достигаетъ наибольшей своей величины тогда, когда потеря электричества въ воздухъ сравняется съ притокомъ электричества отъ машины, считаемымъ постояннымъ. Въ дѣйствительности зарядъ конденсатора перестаетъ увеличиваться тогда, когда прекратится притокъ электричества отъ машины. А притокъ прекратится, если сила, заставляющая двигаться, напр. положительное электричество отъ машины къ конденсатору, сравняется съ силою, съ которою отталкивается то-же электричество отъ конденсатора къ машинѣ. Поэтому, даже устранивъ потерю электричества въ воздухъ, нельзя было бы данною машиною наэлектризовать проводникъ до безконечности, а между тѣмъ такое заключеніе вытекаетъ изъ посылокъ проф. Шимкова.

Въ § 397, говоря о температурѣ абсолютнаго нуля по шкалѣ Томсона, проф. Шимковъ утверждаетъ слѣдующее: „... оказывается, что измѣняющееся тѣло тѣмъ больше изъ заимствованнаго имъ количества теплоты Q_1 обращаетъ въ работу, чѣмъ меньшее количество Q_2 теплоты оно уступаетъ холоднѣйшему пріемнику при T_2; если бы Q_2 сдѣлалось нулемъ, то вся теплота Q_1 обращалась бы въ работу... *Для того, чтобы это могло имѣть мѣсто, нужно, очевидно, предоставить имѣющемуся тѣлу расширяться и охлаждаться до того, чтобы оно всю свою теплоту обратило въ работу и чтобы въ немъ теплоты вовсе не оставалось.*" Послѣдняя фраза заключаетъ въ себѣ гипотезу о причинѣ, почему при температурѣ абсолютнагс нуля тѣло не отдаетъ теплоты холодильнику; такая гипотеза совершенно не требуется существомъ дѣла, и осторожные авторы избѣгаютъ ея: достаточно ограничиться утвержденіемъ, что тѣла не могутъ имѣть температуры низшей абсолютнаго нуля, такъ какъ въ противномъ случаѣ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія машины былъ бы больше единицы, что противорѣчитъ первому началу термодинамики.

Въ § 404 мы находимъ слѣдующее: „Клаузіусъ назвалъ несвободную энергію системы, зависящую отъ находящейся въ ней теплоты, ея энтропіею"... По поводу этого опредѣленія Максуэлль въ своей „Теоріи теплоты" говоритъ (рус. пер. § 89), что „въ прежнихъ изданіяхъ этой книги ошибочно утверждалось, что энтропія обозначаетъ ту часть энергіи, которая не можетъ быть обращена въ работу." Такъ что въ этомъ случаѣ проф. Шимковъ, хотя и ошибается, но въ хорошей компаніи.

А. Л. Корольковъ (Кіевъ).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Одесскія газеты сообщаютъ, что въ послѣднемъ засѣданіи (28 Октября) Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей состоялось постановленіе о назначеніи особыхъ ежемѣсячныхъ засѣданій по вопросамъ Элементарной Математики и Физики и о приглашеніи къ участію въ этихъ засѣданіяхъ преподавателей математики и физики всѣхъ средне-учебныхъ заведеній г. Одессы. Предсѣдателемъ избранъ И. В. Слешинскій.

Отмѣчаемъ съ особеннымъ удовольствіемъ такой починъ одного изъ нашихъ провинціальныхъ ученыхъ обществъ въ дѣлѣ общенія съ младшей по спеціальности братьей, ибо—какъ нашимъ читателямъ извѣстно—мы вовсе не раздѣляемъ взгляда тѣхъ математиковъ, которые, привыкнувъ къ отвлеченностямъ высшаго анализа, считаютъ область элементарной математики исчерпанной, а потому и неинтересной. Совпаденіе намѣченной цѣли съ тою, какую преслѣдуетъ и нашъ журналъ, даетъ намъ право напередъ высказать здѣсь новой секціи Одесскаго Математическаго Общества полное сочувствіе и пожелать ей показать другимъ университетскимъ городамъ на дѣлѣ, какую пользу можетъ принести обществу всякій кружокъ людей, преданныхъ научнымъ вопросамъ, когда разрозненность ихъ усилій замѣняется дружной концентраціей.

Что подобные примѣры намъ очень и очень нужны, лучшимъ доказательствомъ можетъ служить напр. нашъ сонный Кіевъ, въ которомъ до сихъ поръ не могъ сформироваться еще особый Физико-Математическій кружокъ, по недостатку иниціативы, а не любителей. Всѣ факультеты—медицинскій, юридическій, историко-филологическій, естественныхъ наукъ—давно создали каждый свои спеціальныя Общества, одинъ лишь факультетъ математическихъ наукъ считаетъ такое обособленіе этихъ наукъ излишнимъ.—Пусть читатели, не интересующіеся Кіевомъ, простятъ намъ эти нѣсколько словъ pro domo sua, но то вполнѣ изолированное положеніе, въ какомъ находится редакція нашего журнала среди университетскаго города, благодаря именно отсутствію въ немъ спеціальнаго Общества физики и математики, даетъ намъ нѣкоторое право упрекнуть тѣхъ изъ Кіевскихъ профессоровъ и спеціалистовъ, которые могли бы взять на себя починъ въ этомъ дѣлѣ, въ равнодушіи къ потребностямъ своего общества, въ нежеланіи дѣлиться своими знаніями иначе какъ съ профессорской каѳедры или съ печатныхъ страницъ своихъ сочиненій и въ отсутствіи энергіи, необходимой для созданія такого центра, который бы увлекалъ молодыя силы въ сторону серьезныхъ занятій и руководилъ первыми ихъ попытками по трудному пути научныхъ изслѣдованій *).

Пусть-же молодая Одесса пристыдитъ и въ этомъ отношеніи нашъ сѣдовласый Кіевъ, какъ она напр. пристыдила его въ организаціи мѣстной сѣти метеорологическихъ станцій, въ большемъ довѣріи къ электрическому освѣщенію, въ большей энергіи въ борьбѣ съ различными бактеріями и пр. пр. *Ш.*

ЗАДАЧИ.

Задача на премію.

Составить между четырьмя неизвѣстными x, y,, z, t двѣ такія зависимости, чтобы три выраженія:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$\frac{x}{x^2+ax+b}+\frac{y}{y^2+ay+b}+\frac{z}{z^2+az+b}+\frac{t}{t^2+at+b},$$

$$\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{y^2+ay+b}+\frac{1}{z^2+az+b}+\frac{1}{t^2+at+b}$$

обращались въ постоянныя величины. Опредѣлить эти постоянныя величины.

Проф. *В. Ермаковъ* (Кіевъ).

Отъ Редакціи. Крайній срокъ присылки рѣшенія назначается къ 20-му августа будущаго 1889 года, т. е. къ выпуску 1-го номера (№ 73) VII-го семестра „Вѣстника.“

Авторамъ *трехъ* лучшихъ рѣшеній будетъ предоставлено въ видѣ преміи право выбрать по своему усмотрѣнію изъ имѣющихся въ складѣ редакціи книгъ на сумму 6 рублей каждому, или, взамѣнъ этого, получать безплатно въ теченіе 18⁸⁹/₉₀ учебн. года 1 экз. „Вѣстника“. Въ случаѣ поступленія большаго числа правильныхъ рѣшеній и невозможности отдать предпочтеніе тремъ изъ нихъ, право на премію будетъ предоставлено авторамъ, приславшимъ свои рѣшенія ранѣе другихъ, при чемъ будетъ принята во вниманіе дальность разстояній.

---

*) Правда, при Кіевскомъ университетѣ существуетъ и теперь нѣчто въ родѣ Студенческаго Физико-Математическаго Общества, созданнаго и поддерживаемаго главнымъ образомъ энергическою дѣятельностью профессоровъ Шиллера и Ермакова, но собранія этого общества носятъ характеръ практическихъ студенческихъ занятій, и такъ какъ посторонніе лица не допускаются, то о дѣятельности этого кружка никто ничего не знаетъ.

№ 359. Показать, что число, состоящее изъ 27-и одинаковыхъ цыфръ, дѣлится безъ остатка на 27, и—вообще—что число, состоящее изъ 3^n одинаковыхъ цыфръ дѣлится на 3^n.

(Заимств. *Ш.*)

№ 360. Показать, какъ находится построенiемъ длина прямой x, удовлетворяющей условiю

$$\frac{n}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\ .\ .\ .\ .+\frac{1}{k^2}$$

гдѣ a, b, c, . . . k суть данные отрѣзки, а n—ихъ число.

М. Попруженко (Воронежъ).

№ 361. Доказать, что

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}=2.$$

С. Кричевскiй (Ромны).

№ 362. Доказать, что хорда, соединяющая средины дугъ, отсѣкаемыхъ двумя сторонами вписаннаго правильнаго треугольника, въ точкахъ пересѣченiя съ этими сторонами дѣлится на три равныя части.

М. Фридманъ (Кiевъ)

№ 363. Данъ ромбъ, тупой уголъ котораго$=150^\circ$ и большая дiагональ$=a$; въ него вписанъ прямоугольникъ такъ, что одна изъ его дiагоналей есть меньшая дiагональ ромба. Опредѣлить площадь этого прямоугольника, не вводя тригонометрическихъ величинъ.

И. Поршневъ (Вятка).

№ 364. На окружности, радiусъ которой данъ, даны двѣ точки; требуется провести изъ нихъ двѣ хорды параллельныя и одинаково направленныя (противоположно направленныя), зная ихъ сумму (разность).— (Четыре задачи). *А. Гольденбергъ* (Спб.)

№ 365. Найти цѣлыя положительныя числа a, b, c и d, удовлетворяющiя условiю

$$\frac{ad-1}{a+1}+\frac{bd-1}{b+1}+\frac{cd-1}{c+1}=d.$$

Проф. *В. Ермаковъ* (Кiевъ).

Загадки и вопросы.

№ 10. Возможно ли такое географическое расположенiе материковъ и морей, при которомъ температура лѣтомъ на географическомъ полюсѣ была бы выше, чѣмъ на экваторѣ? *М. Попруженко* (Воронежъ).

№ 11. Графъ Сенъ-Робертъ предложилъ для увеличенія правильности и дальности стрѣльбы изъ гладкихъ пушекъ дѣлать каналъ ихъ кривымъ, вынуклостью вверхъ. Идея оказалась правильною и не привилась только вслѣдствіе трудности и дороговизны изготовленія такихъ пушекъ. Какая причина производитъ при этомъ увеличеніе дальности и правильности стрѣльбы? *А. Корольковъ* (Кіевъ).

Упражненія для учениковъ.

1. Доказать, что изъ трехъ сосѣднихъ чиселъ натуральнаго ряда одно—и притомъ только одно—дѣлится на 3.—Показать, что число вида $2^{2n}-1$ всегда дѣлится на 3.

2. Доказать, что изъ чиселъ: $a+b$, $a-b$, ab одно, по крайней мѣрѣ, дѣлится на 3.

3. Если $a+1$ дѣлится на p, то и каждое изъ чиселъ ряда: a^2-1, a^3+1, a^4-1, a^5+1, ... дѣлится на p.

4. Если число не дѣлится на 5, то квадратъ его, увеличенный на 1 или уменьшенный на 1, дѣлится на 5.

5. Доказать:

a) что одно изъ трехъ чиселъ: n, n^2+1, n^2-1 всегда дѣлится на 5;

b) что произведеніе: $n(n^2+1)(n^2-1)$ всегда дѣлится на 10;

c) что пятая степень числа *оканчивается* на ту же цыфру, что и первая.

6. Доказать, что сумма кубовъ трехъ сосѣднихъ чиселъ натуральнаго ряда всегда дѣлится на 9.

7. Если n четное число, то произведеніе $n(n^2-4)$ всегда дѣлится на 48.

8. Показать, что разность

$$(3n+1)(3n+2)-n(n+1)$$

представляетъ удвоенный квадратъ нечетнаго числа.

9. Если $r^2=a^2+b^2$, то произведеніе

$$(5r-3a+4b)(5r-3a-4b)$$

представляетъ полный квадратъ.

10. Преобразовать выраженіе

$$\left[a^2+b^2+c^2+d^2\right]^2-4\left[b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2\right]$$

въ сумму двухъ квадратовъ. *А. Гольденбергъ* (Спб.)

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 213. Показать, что произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ, разность между которыми равна 3 не можетъ быть полнымъ квадратомъ, исключая лишь тотъ случай, когда меньшее изъ чиселъ$=1$.

Обозначимъ меньшее число черезъ x, тогда по условію, произведеніе $x(x+3)$ должно быть полнымъ квадратомъ. Число можетъ быть полнымъ квадратомъ лишь въ томъ случаѣ, когда каждый изъ первоначальныхъ множителей его входитъ въ четной степени. Пусть D будетъ общій наибольшій дѣлитель чиселъ x и $x+3$, а α и β соотвѣтственно частныя отъ дѣленія ихъ на D, причемъ α и β будутъ взаимно простыми.

Тогда

$$x=D\alpha,\ x+3=D\beta,$$

и

$$x(x+3)=D^2\alpha\beta.$$

Отсюда

$$3=D(\beta-\alpha).$$

Это равенство, очевидно, можетъ удовлетворяться или при $D=3$ и $\beta-\alpha=1$, или же при $D=1$ и $\beta-\alpha=3$. Въ первомъ случаѣ

$$x(x+3)=9\alpha(\alpha+1),$$

что не можетъ быть полнымъ квадратомъ, ибо для этого числа α и $\alpha+1$, будучи взаимно простыми, должны каждое быть полнымъ квадратомъ; но два числа, полные квадраты, m^2 и $(m+n)^2$ отличаются одно отъ другого на $2nm+n^2$, т. е. на то число, наименьшее значеніе котораго (при наименьшихъ значеніяхъ m и n, равныхъ 1) равно 3, числа же α и $\alpha+1$ отличаются только на 1. Итакъ D не можетъ быть$=3$, а потому $D=1$, т. е. x и $x+3$ должны быть взаимно простыми, а слѣдовательно полными квадратами. Но мы только что видѣли, что два полныхъ квадрата m^2 и $(m+n)^2$ одинъ отъ другого отличаются на 3 только когда $m=n=1$, т. е. когда меньшее число есть 1^2, а большее 2^2, а потому и въ нашемъ случаѣ x можетъ быть только$=1$.

А. Веприцкій (Карсъ), *П. Никульцевъ* (См.), *Н. Артемьевъ* (Спб.), *С. Блажко* (Москва), *И. Кукуджановъ* и *В. Гиммельфарбъ* (Кіевъ). Ученики: Елат. г. (8) *Т. А.*, Никол. г. (8) *А. В.*, Курск. г. (8) *І. Ч.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Рост. н/Д. р. уч. (7) *И. Д.*, Ворон. к. к. (7) *А. П.*

№ 225. По данному треугольнику построить подобный ему треугольникъ m разъ большей площади.

Опредѣлимъ на двухъ сторонахъ треугольника ABC, напр. на AB и AC длины AB′ и AC′ такъ чтобы

$$\frac{AB'}{AB}=\sqrt{m}\ \text{и}\ \frac{AC'}{AC}=\sqrt{m}.$$

Тогда треугольникъ AB′C′ будетъ подобенъ треугольнику ABC. Площади ихъ будутъ относиться такимъ образомъ

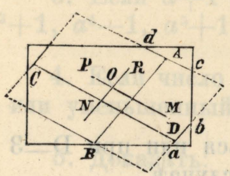
$$ABC:AB'C'=(\sqrt{m})^2:1=m.$$

А. Колтановскій (Немировъ), *М. Ч.* (Короча), *Веприцкій* (Карсъ), *А. Бобятинскій* (Егор. зол. пр.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва), *И. Кукуджановъ* (Кіевъ). Ученики: Могил. р. уч. (7) *Я. И.*, Вят. р. уч. (7) *И. П.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кишинев. р. уч. (7) *Д. Л.*

№ 226. Вершины параллелограма не умѣщаются на чертежѣ, на которомъ проведены лишь части его четырехъ сторонъ. Найти центръ параллелограма.

Проведемъ $AB \parallel ab$ (фиг. 30), но чтобы концы A и B были на чертежѣ: подобнымъ же образомъ проведемъ линію $CD \parallel cd$. Искомый центръ долженъ находиться на линіи параллельной cd, сторонѣ параллелограма, и проходящей чрезъ M, средину линіи AB, такъ какъ MP есть геометрическое мѣсто срединъ сѣкущихъ параллельныхъ ab, сторонѣ параллелограма. Точно также искомый центръ долженъ быть на линіи $NR \parallel ab$ и проходящей чрезъ средину N линіи CD, слѣдовательно онъ будетъ въ O, пересѣченіи линій NR и MP.

Фиг. 30.



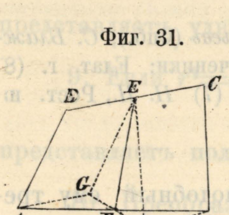
П. Никульцевъ (См.), *Веприцкій* (Карсъ), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр), *М. Кузьменко* (сл. Бѣлая), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *И. Кукуджановъ* (Кіевъ). Ученики: Никол. г. (8) *А. В.*, Вят. р. уч. (7) *И. П.*, Ворон к. к. (7) *А. П.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*

№ 234. Доказать предложеніе: если каждую изъ двухъ противоположныхъ сторонъ четыреугольника раздѣлимъ на части, пропорціональныя прилежащимъ другимъ сторонамъ, то прямая соединяющая точки дѣленія, встрѣчаетъ продолженія другихъ сторонъ подъ равными углами.

Дано (фиг. 31), что

$$BE:EC=AF:FD=AB:CD\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Фиг. 31.



Проведемъ EG $\parallel$ и $=$BA и EH $\parallel$ и $=$CD, точку G соединимъ съ A и F, а H съ D и E; тогда AG $\parallel$ и $=$BE. DH $\parallel$ и $=$CE, а потому

$$AF:FD=AG:DH$$

и

$$\angle GAF=\angle FDH.$$

Слѣдовательно треугольники AGF и DFH подобны. Изъ подобія ихъ слѣдуетъ:

1) $\angle AFG=DFH$, т. е. линія GFH прямая,

2) AF:FD=GF:FH, и слѣдовательно, на основаніи (1):

$$GF:FH=EG:EH,$$

т. е. EF есть равнодѣлящая угла GEH и значитъ она образуетъ равные углы съ AB и CD.

А. Бобятинскій (Ег. зол. пр.) *С. Блажко* (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *П. Свѣщниковъ* (Троицкъ), *И. Кукуджановъ* (Кіевъ).

№ 239. Рѣшить уравненія:

$$x^2=ay+b$$
$$y^2=px+q$$

при условіяхъ:

$$b=\left(\frac{2q}{p}\right)^2;\ q=\left(\frac{2b}{a}\right)^2.$$

Положивъ

$$x=\frac{2q}{p}x_1$$

$$y=\frac{2b}{a}y_1$$

получимъ

$$\begin{aligned} x_1{}^2&=2y_1+1 \\ y_1{}^2&=2x_1+1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда

$$x_1{}^2-y_1{}^2=2(y_1-x_1),$$

что даетъ два линейныхъ уравненія

$$x_1-y_1=0,\ x_1+y_1+2=0.$$

Комбинируя каждое изъ этихъ уравненій съ любымъ уравненіемъ системы (1), безъ труда найдемъ корни предложенной системы.

С. Блажко (Москва), *А. Гольденбергъ* (Спб.).

№ 242. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x}{1-k^2x^4}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=a.$$

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ и положимъ

$$kx^2=y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

тогда будемъ имѣть

$$\frac{4}{k}\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)-\left(k+\frac{1}{k}\right)\right]=a^2\left(y-\frac{1}{y}\right)^2;$$

или

$$k^2a^2z^2-4kz-4(a^2k^2-k^2-1)=0, \;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

гдѣ

$$z=y+\frac{1}{y}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

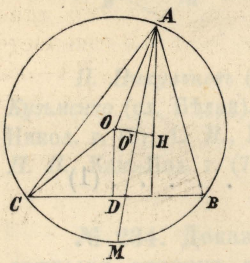
Теперь уже не трудно опредѣлить x, пользуясь уравненіями (1), (2) и (3).

А. Гольденбергъ (Спб.), Ученики: Курск. гим. (6) *В. Х.* Вор. к. к. (7) *А. П.*

№ 255. Доказать, что въ треугольникѣ, углы котораго составляютъ ариѳметическую прогрессію, центръ круга вписаннаго находится на равномъ разстояніи отъ центра круга описаннаго и отъ ортоцентра.

Если углы въ треугольникѣ АВС составляютъ ариѳметическую прогрессію, то средній уголъ=60°. Пусть О, О′ и Н (фиг. 32) центры круговъ описаннаго и вписаннаго, и ортоцентръ. Уголъ COD=60°. Слѣдовательно въ прямоугольномъ треугольникѣ COD имѣемъ:

Фиг. 32.



$$2OD=OC,$$

но извѣстно, что 2OD=AH, слѣдовательно

$$AH=AO$$

и треугольникъ ОАН равнобедренный. Равнодѣлящая АМ угла А дѣлитъ и уголъ ОАН также пополамъ, потому что

$$\angle MAB=\angle MAH+90^\circ-\angle B=\angle OAM+\angle CAO,$$

но

$$\angle CAO=90^\circ-\angle B,$$

слѣдовательно

$$\angle MAH=\angle OAM,$$

откуда

$$OO'=O'H.$$

В. Соллертинскій (Гатчино), *А. Бобятинскій* (Ег. зол. пр.). Учен. Курск. г. (7) *В. Л.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ 16 Ноября 1888 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

http://vgd.ru