Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXXIII Сем.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

31 Мая. № 394. 1905 г.

Измѣреніе времени.

H. Poincaré.

*(Окончаніе *).*

VIII. Насъ уже не могли бы удовлетворить обычныя опредѣленія, принятыя для психологическаго времени. Если два психологическихъ явленія протекаютъ одновременно, то они такъ тѣсно слиты другъ съ другомъ, что анализъ не въ состояніи прослѣдить, гдѣ кончается одно и начинается другое. Такъ ли обстоитъ дѣло съ двумя физическими явленіями?

Говорятъ также, что одновременными нужно считать два явленія въ томъ случаѣ, когда мы можемъ считать произвольно порядокъ ихъ послѣдовательности. Очевидно, что это опредѣленіе непримѣнимо въ томъ случаѣ, когда два физическихъ явленія совершаются въ двухъ различныхъ пунктахъ, весьма отдаленныхъ другъ отъ друга; по отношенію къ такимъ явленіямъ само понятіе обратимости становится неяснымъ; кромѣ того, пришлось бы предварительно опредѣлить понятіе „послѣдовательность“.

IX. Постараемся отдать себѣ отчетъ въ томъ, что мы понимаемъ подъ словами „одновременность“ и „предшествованіе“; съ этой цѣлью разберемъ нѣсколько примѣровъ.

Я написалъ письмо; пріятель, которому адресовано было письмо, прочиталъ его. Здѣсь мы имѣемъ два явленія, которыя разыгрались въ двухъ различныхъ сознаніяхъ. Когда я писалъ это письмо, я имѣлъ въ своемъ сознаніи зрительный образъ его. То же зрительное изображеніе воспринялъ и мой пріятель, читая письмо.

*) См. № 393 „Вѣстника“.

Хотя оба явленія происходятъ въ двухъ непроницаемыхъ другъ для друга мірахъ, я, однако, безъ всякихъ колебаній утверждаю, что первое явленіе произошло раньше, чѣмъ второе: ибо я полагаю, что первое есть причина второго.

Я услышалъ громъ и заключилъ, что гдѣ-то произошелъ электрическій разрядъ; я не сомнѣваюсь въ томъ, что физическое явленіе разряда произошло раньше, чѣмъ звуковое впечатлѣніе дошло до моего сознанія, потому что это впечатлѣніе я считаю слѣдствіемъ, а разрядъ—причиной.

Итакъ, мы нашли правило, которому мы слѣдуемъ,—въ данномъ случаѣ единственное правило, которому вообще можно слѣдовать: изъ двухъ явленій мы считаемъ предшествующимъ то, которое является причиной другого.

Итакъ, понятіе послѣдовательности мы опредѣляемъ помощью понятія причинности. Но когда два явленія находятся въ постоянной зависимости другъ отъ друга, каковъ нашъ критерій для сужденія, какое изъ двухъ явленій есть причина, какое — слѣдствіе? Мы допускаемъ, что предшествующее явленіе есть причина послѣдующаго, то есть причинность опредѣляется помощью послѣдовательности. Какъ избавиться отъ petitio principii?

То мы говоримъ: post hoc, ergo propter hoc; то, наоборотъ, говоримъ: propter hoc, ergo post hoc. Можно ли выбраться изъ этого ложнаго круга?

X. Выбраться совершенно не удается, но попытки въ этомъ направленіи дѣлаются.

Я совершаю волевой актъ A и получаю затѣмъ ощущеніе D, которое я разсматриваю, какъ слѣдствіе акта A. Предположимъ еще, что я имѣю основаніе думать, что явленіе D не представляетъ собою непосредственнаго слѣдствія акта A, но что внѣ моего сознанія произошли еще явленія B и C, причемъ B есть слѣдствіе A и, въ свою очередь, обусловливаетъ явленіе C, въ результатѣ котораго происходитъ явленіе D,—при чемъ промежуточныхъ явленій B и C мнѣ не пришлось наблюдать.

Если я имѣю основанія полагать, что явленія A, B, C и D находятся въ причинной зависимости другъ отъ друга, то справедливо ли я поступаю, когда располагаю эти четыре явленія въ причинный и хронологическій рядъ $ABCD$, предпочительно предъ всякой другой возможной послѣдовательностью?

Правда, во время акта A я испытывалъ чувство активности, тогда какъ, воспринимая ощущеніе D, я чувствовалъ себя пассивнымъ: именно на этомъ основаніи я разсматриваю явленіе A, какъ начальную причину, а явленіе D, какъ окончательное слѣдствіе; но почему я думаю, что явленіе B предшествуетъ явленію C, а не наоборотъ?

На этотъ вопросъ обыкновенно отвѣчаютъ такъ: мы считаемъ явленіе B причиной явленія C, потому что *всегда* видимъ, что B происходитъ раньше C. Когда два такихъ явленія происходятъ при свидѣтеляхъ, они протекаютъ въ опредѣленномъ порядкѣ: если тѣ же два явленія произойдутъ, не будучи никѣмъ наблюдаемы, то все-таки нѣтъ основанія думать, что послѣдовательность ихъ измѣнилась.

Хотя соображенiе это справедливо, будемъ все-таки осторожны: вѣдь физическихъ явленiй B и C мы никогда не познаемъ непосредственно: мы получаемъ лишь ощущенiя B' и C', вызванныя соотвѣтственно явленiями B и C. Мы непосредственно сознаемъ, что ощущенiе B' предшествуетъ ощущенiю C', и потому мы *допускаемъ*, что такова же послѣдовательность явленiй B и C.

При всей законности такого предположенiя, иногда приходится отступать отъ него. Раскаты грома мы слышимъ лишь нѣсколько секундъ спустя, послѣ того какъ произойдетъ электрическiй разрядъ облаковъ. Можетъ поэтому случиться, что изъ двухъ громовыхъ ударовъ тотъ, который мы раньше услышали, въ дѣйствительности ударилъ позже другого, если только первый раздался гдѣ нибудь близко отъ насъ, а другой далеко.

XI. Является другой вопросъ: имѣемъ ли мы право говорить о причинѣ какого нибудь явленiя? Вѣдь всѣ части вселенной, всѣ происходящiя въ ней явленiя находятся въ зависимости другъ отъ друга: всякое явленiе представляетъ собою результатъ не одной какой либо причины, а безчисленнаго множества причинъ; оно, какъ говорятъ, обусловлено состоянiемъ всей вселенной за предшествующiй моментъ.

Нужно установить правила, которыя мы могли бы примѣнить къ столь сложнымъ обстоятельствамъ: только при этомъ условiи наши законы будутъ вполнѣ строги и универсальны.

Чтобы не запутаться въ этомъ лабиринтѣ, возьмемъ гипотетическiй примѣръ. Разсмотримъ три звѣзды, напримѣръ, Солнце, Юпитеръ и Сатурнъ; для большей простоты допустимъ, что эти звѣзды представляютъ собою матерiальныя точки, изолированныя отъ всего остального мiра.

Достаточно знать положенiя и скорости этихъ трехъ тѣлъ въ одинъ какой-либо моментъ, чтобы умѣть опредѣлить ихъ положенiя и скорости въ слѣдующiй моментъ, а слѣдовательно, и въ какой угодно другой моментъ. Положенiемъ этихъ точекъ въ моментъ t опредѣляются ихъ положенiя какъ въ моментъ $t+h$, такъ и въ моментъ $t-h$.

Но достаточно также знать положенiе Юпитера въ моментъ t и положенiе Сатурна въ моментъ $t+a$, чтобы умѣть опредѣлить положенiе обѣихъ звѣздъ въ произвольный моментъ.

Совокупность положенiй, занимаемыхъ Юпитеромъ въ моментъ $t+\varepsilon$ и Сатурномъ въ моментъ $t+a+\varepsilon$, находится въ зависимости отъ совокупности положенiй, которыя Юпитеръ занимаетъ въ моментъ t, а Сатурнъ въ моментъ $t+a$; зависимость эта выражается законами столь же точными, какъ и законъ Ньютона, хотя гораздо болѣе сложными.

Исходя отсюда, отчего бы намъ не разсматривать одну совокупность явленiй, какъ причину другой? тогда пришлось бы принять, что моментъ t для Юпитера совпадаетъ съ моментомъ $t+a$ для Сатурна.

Если же мы не дѣлаемъ подобнаго допущенiя, то это происходитъ изъ за нашего стремленiя къ удобству и простотѣ.

XII. Возьмемъ другіе примѣры, не столь искусственные. Чтобы выяснить, каково опредѣленіе, неявно принимаемое учеными, прослѣдимъ на конкретномъ примѣрѣ ходъ ихъ мысли; посмотримъ, помощью какихъ признаковъ распознаютъ они одновременность явленій.

Я остановлюсь на двухъ простыхъ примѣрахъ: на измѣреніи скорости свѣта и опредѣленіи географической долготы.

Когда астрономъ говоритъ мнѣ, что космическое явленіе, которое телескопъ открываетъ ему въ данный моментъ, въ дѣйствительности произошло лѣтъ пятьдесятъ тому назадъ, я желаю понять смыслъ его словъ и спрашиваю его, какимъ образомъ онъ это знаетъ; то есть, какимъ образомъ онъ измѣрилъ скорость свѣта.

Онъ начинаетъ съ *допущенія*, что свѣтъ имѣетъ постоянную скорость и притомъ одинаковую по всѣмъ направленіямъ. Не принявъ этого постулата, мы не можемъ даже попытаться приступить къ измѣренію скорости свѣта. Мы никогда не будемъ въ состояніи провѣрить этотъ постулатъ непосредственно путемъ опыта; зато опытъ могъ бы опровергнуть его, если бы результаты различныхъ измѣреній оказались въ противорѣчіи другъ съ другомъ. Мы должны считать себя счастливыми, что это противорѣчіе не имѣетъ мѣста, и небольшія разногласія легко находятъ себѣ объясненіе.

Постулатъ этотъ, подкрѣпляемый закономъ достаточнаго основанія, единогласно принимается всѣми; я желалъ бы лишь отмѣтить, что этотъ постулатъ даетъ намъ новый критерій для сужденія объ одновременности, совершенно отличный отъ вышеприведеннаго критерія.

Посмотримъ, какимъ образомъ изслѣдователи, исходя изъ этого постулата, измѣрили скорость свѣта. Какъ извѣстно, Ремеръ воспользовался для этой цѣли затменіями спутниковъ Юпитера: онъ вычислилъ, насколько опаздывало наблюдавшееся затменіе сравнительно съ теоретически предсказаннымъ моментомъ.

Для того, чтобы предсказать этотъ моментъ, нужно исходить изъ законовъ астрономіи, напр., изъ закона Ньютона.

Но вѣдь результаты наблюденія можно было бы объяснить столь же удовлетворительно, если приписать скорости свѣта величину, нѣсколько отличную отъ общепринятой, допустивъ при этомъ, что законъ Ньютона вѣренъ лишь приблизительно; для этого пришлось бы лишь замѣнить законъ Ньютона другимъ, болѣе сложнымъ.

Итакъ, мы приписываемъ скорости свѣта такую величину, чтобы законы астрономіи, содержаніе которыхъ въ извѣстной степени зависитъ отъ этой величины, были по возможности проще.

Когда моряки или географы опредѣляютъ долготу, они рѣшаютъ такую же самую задачу, какую мы здѣсь поставили себѣ: находясь внѣ Парижа, они должны вычислить Парижское время.

Какъ они рѣшаютъ эту задачу?

Либо они везутъ съ собою хронометръ, поставленный по

Парижскому времени. Рѣшеніе качественнаго вопроса объ одновременности они такимъ образомъ сводятъ къ количественному измѣренію времени. О трудностяхъ, связанныхъ съ такимъ измѣреніемъ, я уже достаточно говорилъ выше, и мнѣ незачѣмъ возвращаться къ нимъ.

Либо же они прибѣгаютъ къ наблюденію какого либо астрономическаго явленія, напримѣръ, затменія луны; при этомъ предполагается, что явленіе это открывается наблюдателю одновременно на всѣхъ точкахъ земного шара.

Но въ дѣйствительности вѣдь это невѣрно; вѣдь свѣтъ для своего распространенія требуетъ конечнаго промежутка времени. Если бы мы захотѣли быть точными, пришлось бы внести довольно сложную поправку.

Есть еще третій способъ—помощью телеграфа; но не подлежитъ вѣдь никакому сомнѣнію, что моментъ полученія сигнала въ Берлинѣ, напримѣръ, не совпадаетъ съ моментомъ, когда онъ подается въ Парижѣ, а наступаетъ позже его: объ этомъ мы заключаемъ хотя бы изъ вышеизложеннаго правила причины и слѣдствія.

Является вопросъ, насколько позже. Вообще говоря, принято пренебрегать промежуткомъ, необходимымъ для передачи сигнала, и принимаютъ, что оба момента совпадаютъ. Но чтобы быть вполнѣ точнымъ, пришлось бы внести еще маленькую поправку помощью сложнаго вычисленія; на практикѣ этой поправки не дѣлаютъ, такъ какъ проистекающая отсюда погрѣшность гораздо меньше, чѣмъ неизбѣжныя ошибки наблюденія. Но если стоять на теоретической точкѣ зрѣнія, то для вполнѣ строгаго опредѣленія поправка эта необходима.

Итакъ, замѣтимъ два пункта:

1. Способы для опредѣленія одновременности весьма разнообразны.

2. Трудно отдѣлить задачу объ опредѣленіи одновременности, имѣющую качественный характеръ, отъ количественной задачи объ измѣреніи времени; безразлично, пользуемся ли мы для этого хронометромъ, или же вычисляемъ скорость передачи, напримѣръ, скорость свѣта: дѣйствительно, для подобнаго измѣренія необходимо предварительно умѣть *измѣрять время*.

XIII. Теперь подведемъ итоги.

Мы не имѣемъ непосредственнаго представленія ни объ одновременности двухъ моментовъ времени, ни о равенствѣ двухъ промежутковъ времени.

И если намъ кажется, что такое представленіе у насъ есть, то это—иллюзія.

Этотъ пробѣлъ мы восполняемъ помощью нѣкоторыхъ правилъ, которыми мы пользуемся почти всегда, не отдавая себѣ отчета въ нихъ.

По природѣ своей эти правила не отличаются строгостью и всеобщностью: мы пользуемся множествомъ маленькихъ правилъ, которыя мы примѣняемъ отдѣльно въ каждомъ частномъ случаѣ.

Эти правила для насъ необязательны: вмѣсто нихъ можно было бы съ успѣхомъ придумать другія; но при такой замѣнѣ законы физики, механики и астрономіи потеряли бы значительно въ своей простотѣ.

Нашъ выборъ палъ на эти именно правила не потому, что они суть самыя истинныя, а лишь потому, что они — наиболѣе удобныя; эти правила можно было бы резюмировать слѣдующимъ образомъ:

Такія понятія, какъ одновременность двухъ событій или же порядокъ ихъ послѣдовательности, а также равенство двухъ промежутковъ времени, должны получить такое опредѣленіе, чтобы естественно научные законы отличались возможно большей простотой. Другими словами, всѣ эти правила и опредѣленія являются результатомъ безсознательнаго приспособленія.

О разложеніи функцій въ непрерывныя дроби.

П. Свѣшникова.

Въ курсахъ анализа и высшей алгебры обыкновенно обращается значительно больше вниманія на безконечные ряды, чѣмъ на безконечныя непрерывныя дроби. Поэтому приближенныя значенія функцій вычисляются, главнымъ образомъ, при помощи разложенія ихъ въ безконечные ряды. Между тѣмъ вычисленіе приближенныхъ значеній функцій производится гораздо удобнѣе при помощи разложенія ихъ въ безконечныя непрерывныя дроби. Статью о разложеніи функцій въ непрерывныя дроби находимъ въ курсѣ высшей алгебры Мѣшкова, изд. 1866 г. Признавая выводы, излагаемые Мѣшковымъ, недостаточно строгими и полными, позволяю себѣ предложить благосклонному вниманію читателей тѣ же выводы въ другой обработкѣ *). Въ курсѣ Мѣшкова нѣтъ разложеній $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\lg\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$, $\lg\sqrt{1+x^2}$. Въ руководствѣ къ изученію геометріи, алгебры и тригонометріи князя Урусова изд. 1870 г. находимъ доказательство несоизмѣримости числа π и его квадрата, основанное на свойствахъ непрерывныхъ дробей. Это доказательство изложено въ предлагаемой статьѣ и примѣнено къ объясненію несоизмѣримости числа e^x при цѣлыхъ и дробныхъ значеніяхъ x.

*) Вопросъ о разложеніи функцій въ непрерывныя дроби имѣетъ обширную литературу помимо тѣхъ русскихъ сочиненій, которыя указаны авторомъ.

Ред.

1. Возьмемъ непрерывную дробь вида

$$x=a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}+\cfrac{b_n}{a_n+\cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}+\ldots}}}}}},$$

гдѣ послѣдовательные знаменатели звеньевъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$ положительны. Если три числа b_n, a_n, b_{n+1} умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество, величина x не измѣнится. Этимъ же свойствомъ обладаютъ всякія три числа, которыя получатся, если значку n будемъ послѣдовательно давать значенія 1, 2, 3,...

Выведемъ правило для составленія послѣдовательныхъ подходящихъ дробей. Обозначимъ черезъ $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ и т. д. послѣдовательныя подходящія дроби $\frac{a}{1}$, $a+\frac{b_1}{a_1}=\frac{aa_1+b_1}{a_1}$,

$$a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2}}=\frac{(aa_1+b_1)a_2+ab_2}{a_1a_2+b_2}.$$

Дробь $\frac{p_n}{q_n}$ соотвѣтствуетъ звену $\frac{b_n}{a_n}$, такъ какъ она получается, когда отбросимъ всѣ послѣдующія звенья. По способу отъ n къ $n+1$ можно опредѣлить $\frac{p_n}{q_n}$. Для этого допустимъ, что

$$p_n=p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n \text{ и } q_n=q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n.$$

Тогда

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n} \text{ и } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_{n-1}\left(a_n+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)+p_{n-2}b_n}{q_{n-1}\left(a_n+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)+q_{n-2}b_n}.$$

Упрощая, получимъ:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{(p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n)a_{n+1}+p_{n-1}b_{n+1}}{(q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n)a_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}} \text{ или } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_na_{n+1}+p_{n-1}b_{n+1}}{q_na_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}},$$

а потому

$$p_{n+1}=p_na_{n+1}+p_{n-1}b_{n+1} \text{ и } q_{n+1}=q_na_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}.$$

Но

$$p_2=p_1a_2+pb_2 \text{ и } q_2=q_1a_2+qb_2.$$

Слѣдовательно,

$$p_n=p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n \text{ и } q_n=q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n.$$

2. Составимъ выраженіе для разности между двумя послѣдовательными подходящими дробями. Находимъ:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n+1}q_n-q_{n+1}p_n}{q_{n+1}q_n}.$$

Подставляя вмѣсто p_{n+1} и q_{n+1} ихъ значенія, полученныя на основаніи доказаннаго правила, находимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{-(p_nq_{n-1}-q_np_{n-1})b_{n+1}}{q_{n+1}q_n}.$$

Подставляя вмѣсто p_n и q_n ихъ значенія $p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n$ и $q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n$, находимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(p_{n-1}q_{n-2}-q_{n-1}p_{n-2})b_nb_{n+1}}{q_{n+1}q_n}.$$

Продолжая эти преобразованія, получимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n-1}(p_2q_1-q_2p_1)b_3b_4b_5\dots b_nb_{n+1}}{q_{n+1}q_n}=$$

$$=\frac{(-1)^n(p_1q-q_1p)b_2b_3b_4\dots b_{n+1}}{q_{n+1}q_n}=\frac{(-1)^nb_1b_2b_3\dots b_nb_{n+1}}{q_{n+1}q_n}.$$

Написавъ значенія разностей $\frac{p_1}{q_1}-\frac{p}{q}$, $\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_2}$, ..

$\dots\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$ и сложивъ ихъ, получимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p}{q}=\frac{b_1}{qq_1}-\frac{b_1b_2}{q_1q_2}+\frac{b_1b_2b_3}{q_2q_3}-\frac{b_1b_2b_3b_4}{q_3q_4}+\dots+(-1)^n\frac{b_1b_2b_3\dots b_{n+1}}{q_nq_{n+1}} \quad (a).$$

Полагаемъ, что $y_n=a_n+\cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}+\cfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}+\dots}}=a_n+\frac{b_{n+1}}{y_{n+1}}$.

Тогда

$$x=\frac{p_ny_{n+1}+p_{n-1}b_{n+1}}{q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}},$$

откуда

$$x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{-(p_nq_{n-1}-q_np_{n-1})b_{n+1}}{(q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1})q_n}=\frac{(-1)^nb_1b_2b_3\dots b_{n+1}}{(q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1})q_n},$$

$$x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{y_{n+1}(p_nq_{n-1}-q_np_{n-1})}{q_{n-1}(q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1})}=\frac{(-1)^{n-1}y_{n+1}b_1b_2b_3\dots b_n}{q_{n-1}(q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1})}.$$

3. Разсмотримъ, какъ измѣняются послѣдовательныя подходящія дроби къ непрерывной, у которой числители звеньевъ $b_1, b_2, b_3, \dots$ положительны. Отношеніе $\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}$, равное $\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_na_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}}$, менѣе 1. Поэтому абсолютныя величины членовъ ряда (a), выражающаго разность $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p}{q}$, постоянно уменьшаются при увеличеніи n. Не трудно видѣть, что $y_{n+1}>a_{n+1}$ и $q_ny_{n+1}+q_{n-1}b_{n+1}>q_{n+1}$. Разсматривая выведенныя значенія разно-

стей $x-\frac{p_n}{q_n}$ и $x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, убѣждаемся, что x содержится между каждыми двумя послѣдовательными подходящими дробями, такъ что $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > x > \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ и, кромѣ того, абсолютная величина разности $x-\frac{p_n}{q_n}$ менѣе абсолютной величины разности $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$. Обозначимъ для краткости $\frac{p}{q}$, $\frac{b_1}{qq_1}$, $\frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$, $\frac{b_1 b_2 b_3}{q_1 q_3}$, ..., $\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$, ... соотвѣтственно черезъ $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}, \ldots$ Тогда будемъ имѣть $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} = u_0 + (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}) =$
$= u_0 + u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}$.
$\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} = u_0 + u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) =$
$= u_0 + (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-3} - u_{2k-2}) + u_{2k-1}$.

Отсюда заключаемъ:

подходящія дроби $\frac{p}{q}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_4}{q_4}$, ... $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$, ... образуютъ возрастающій рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое менѣе $\frac{p}{q}+\frac{b_1}{qq_1}$ или менѣе $\frac{p_1}{q_1}$;

подходящія дроби $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_3}{q_3}$, $\frac{p_5}{q_5}$, ... $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$, ... образуютъ убывающій рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое болѣе $\frac{p}{q}$; члены того и другого ряда подходящихъ дробей стремятся къ нѣкоторому предѣлу; оба ряда будутъ имѣть общій предѣлъ x, если предѣлъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n} = \text{предѣлу } (-1)^n \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = 0.$$

Пусть $\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$ при достаточно большомъ n и при дальнѣйшемъ увеличеніи n можно сдѣлать менѣе всякаго напередъ заданнаго числа. Тогда x можно разсматривать какъ предѣлъ ряда подходящихъ дробей или предѣлъ суммы членовъ безконечнаго ряда

$$x = \frac{p}{q} + \frac{b_1}{qq_1} - \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{q_2 q_3} - \cdots + (-1)^n \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \cdots \quad (b).$$

Такимъ образомъ, если $\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$ стремится къ нулю, то $\frac{p_n}{q_n}$ будетъ представлять приближенное значеніе x съ ошибкой менѣе $\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$ съ недостаткомъ или съ избыткомъ, смотря по знаку количества $(-1)^{n-1}$.

Разберемъ нѣкоторые признаки сходимости ряда (b). Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы предѣлъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, равный предѣлу $\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}}$, былъ менѣе 1, или чтобы пред. $\frac{q_n a_{n+1} + q_{n-1} b_{n+1}}{b_{n+1} q_{n-1}}$ былъ болѣе 1, т. е. чтобы пред. $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}} > 0$. Но $q_n = q_{n-1} a_n + q_{n-2} b_n$, и потому $q_n : q_{n-1} > a_n$. Если предѣлъ $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$, то и подавно предѣлъ $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}}$ будетъ болѣе нуля. Такимъ образомъ, если выраженіе $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}$ стремится при неограниченномъ увеличеніи n къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля, или къ безконечности, то рядъ (b) будетъ сходящимся. Отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ, что этотъ рядъ будетъ сходящимся, если звенья непрерывной дроби будутъ правильными дробями или не будутъ превосходить 1, а знаменатели звеньевъ не будутъ стремиться къ нулю. Если предѣлъ $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = 0$, то предѣлъ $\frac{q_n a_{n-1}}{q_{n-1}\ {}_{n+1}}$ остается неизвѣстнымъ, ибо онъ можетъ быть болѣе нуля или равенъ нулю. По правилу Моргана рядъ (b) будетъ сходящимся, если предѣлъ $\varphi(n)$ = предѣлу $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 0$ и предѣлъ $\varphi_1(n)$ = предѣлу $[(n\varphi(n) - 1]$ = предѣлу $\left(\frac{n u_n}{u_{n+1}} - n - 1\right) > 0$. Въ данномъ случаѣ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}},\quad \varphi(n) = \frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}},\quad \varphi_1(n) = \frac{n q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}} - 1.$$

Пусть предѣлъ $\frac{n a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 1$. Тогда и подавно предѣлъ $\frac{n q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}} > 1$. Обозначивъ этотъ послѣдній предѣлъ черезъ z, можемъ допустить 2 предположенія: 1) $z = \infty$ и 2) z = конечному числу. При первомъ предположеніи предѣлъ $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}}$ можетъ равняться нулю или безконечности или конечному числу. Если предѣлъ $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n+1} b_{n+1}} = 0$, то по правилу Моргана рядъ (b) будетъ сходящимся. Если же предѣлъ $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}}$ равенъ конечному числу или безконечности, то рядъ (b) будетъ сходящимся на основаніи того, что предѣлъ $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$. При второмъ предположеніи предѣлъ $\frac{q_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}}$ будетъ 0, и рядъ (b) будетъ сходящимся по правилу

Моргана. Сомнительный случай представится, когда предѣлъ $\frac{na_n a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqq 1$, такъ какъ при соблюденіи этого условія предѣлъ $\frac{nq_n a_{n+1}}{q_{n-1} b_{n+1}}$ остается неизвѣстнымъ: онъ можетъ быть > 1, или $= 1$, или < 1.

Далѣе можно показать, на основаніи правила Моргана, что если предѣлъ $\lg\left(\frac{n^2 a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} - n\right) > 1$ или пред. $\left(\frac{n^2 a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} - n\right) > e$, то рядъ (b) будетъ сходящимся. При несоблюденіи этого условія вопросъ о сходимости ряда (b) остается нерѣшеннымъ.

Для примѣра возьмемъ $x = 1 + \cfrac{1^3}{3 + \cfrac{2^3}{5 + \cfrac{3^3}{7 + \ldots + \cfrac{n^3}{2n+1 + \cfrac{(n+1)^3}{2n+3+\ldots}}}}}$

Здѣсь предѣлъ $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} =$ предѣлу $\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^3} = 0$, предѣлъ $\frac{na_n a_{n+1}}{b_{n+1}} =$ предѣлу $\frac{n(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^3} = 4$. Поэтому, составляя подходящія дроби, найдемъ приближенное значеніе x съ какой угодно точностью.

4. Сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія относительно непрерывной дроби, въ которой послѣдовательные числители b_1, b_2, $b_3, \ldots$ отрицательны. Обозначимъ абсолютныя ихъ величины соотвѣтственно черезъ c_1, c_2, $c_3, \ldots$ Тогда получимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}}{q_n q_{n+1}},\quad x - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n+1}}{(q_n y_{n+1} - q_{n-1} c_{n+1}) q_n},$$

$$x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = -\frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_n y_{n+1}}{q_{n-1}(q_n y_{n+1} - q_{n-1} c_{n+1})}.$$

Положимъ, что числители и знаменатели послѣдовательныхъ подходящихъ дробей и значенія y_1, y_2, $y_3, \ldots$ положительны. Тогда изъ выведенныхъ равенствъ видимъ, что подходящія дроби будутъ постоянно уменьшаться, такъ что каждая послѣдующая будетъ менѣе предшествующей. Всѣ члены ряда (a) будутъ отрицательны. Для того чтобы числители и знаменатели подходящихъ дробей и значенія y_1, y_2, $y_3, \ldots$ были положительны, достаточно, чтобы разность между каждымъ знаменателемъ звена a_n и абсолютной величиной соотвѣтствующаго числителя b_n была болѣе или равна 1.

Если числитель перваго звена b_1 будетъ положителенъ, а всѣ остальные числители b_2, b_3, $b_4, \ldots$ отрицательны, то подходящія дроби будутъ постоянно увеличиваться, и члены ряда (a) будутъ положительны, такъ какъ онъ обратится въ слѣдующій:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p}{q}=\frac{c_1}{qq_1}+\frac{c_1c_2}{q_1q_2}+\frac{c_1c_2c_3}{q_2q_3}+\cdots+\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{n+1}}{q_nq_{n+1}}. \quad (c)$$

Довольно трудно разобрать признаки сходимости этого ряда. Достаточное условіе для сходимости его заключается въ томъ, чтобы

$$\text{пред.}\frac{c_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}=\text{пред.}\frac{c_{n+1}q_{n-1}}{q_na_{n+1}-q_{n-1}c_{n+1}}=1:\text{пред.}\left(\frac{q_na_{n+1}}{q_{n-1}c_{n+1}}-1\right)$$

былъ менѣе 1, т. е. пред. $\frac{q_na_{n+1}}{q_{n-1}c_{n+1}}>2$. Мы допустили, что $a_n-c_n=\alpha_n\geqslant 1$. Поэтому $q_1-1=a_1-1=c_1+\alpha_1-1$, $q_1>1$; $q_1=q_1a_2-c_2=q_1\alpha_2+c_2(q_1-1)$, $q_2>q_1$; $q_3=q_2a_3-q_1c_3=q_2\alpha_3+c_3(q_2-q_1)$, $q_3>q_2$ и т. д. $q_{n-1}>q_{n-2}$; $q_n=q_{n-1}a_n-q_{n-2}c_n=q_{n-1}\alpha_n+c_n(q_{n-1}-q_{n-2})$.

Отсюда $q_n>q_{n-1}\alpha_n$ и $q_n>q_{n-1}$. Такимъ образомъ

$\frac{q_na_{n+1}}{q_{n-1}c_{n+1}}>\alpha_n\left(1+\frac{\alpha_{n+1}}{c_{n+1}}\right)$. Если $c_n<1$, то $\frac{\alpha_{n+1}}{c_{n+1}}>1$ и предѣлъ $\frac{q_na_{n+1}}{q_{n-1}c_{n+1}}>2$. Если $c_n\geqslant 1$ и $\alpha_n\geqslant 2$, то этотъ предѣлъ также будетъ больше, чѣмъ 2.

Замѣтимъ, что $\frac{q_na_{n+1}}{q_{n-1}c_{n+1}}=\frac{a_{n+1}(q_{n-1}a_n-q_{n-2}c_n)}{q_{n-1}c_{n+1}}$. Если знаменатели подходящихъ дробей увеличиваются, то при соблюденіи условія: пред. $\frac{a_{n+1}(a_n-c_n)}{c_{n+1}}>2$, рядъ (c) будетъ сходящимся.

5. Разберемъ, какъ будутъ измѣняться подходящія дроби, когда числители b_2, b_4, $b_6,\ldots$ будутъ отрицательны, а b_1, b_3, $b_5,\ldots$ положительны. Въ этомъ случаѣ получимъ

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}=(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{2n-1}}{q_{2n-2}q_{2n-1}},$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}-\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2c_3\ldots c_{2n}}{q_{2n-1}q_{2n}},$$

$$x-\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}c_1c_2c_3\ldots c_{2n-1}}{q_{2n-2}(q_{2n-2}y_{2n-1}+q_{2n-3}c_{2n-1})}=\frac{(-1)^{n-3}y_{2n}c_1c_2c_3\ldots c_{2n-1}}{(q_{2n-1}y_{2n}-q_{2n-2}c_{2n})q_{2n-2}},$$

$$x-\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}c_1c_2c_3\ldots c_{2n}}{(q_{2n-1}y_{2n}-q_{2n-2}c_{2n})q_{2n-1}}.$$

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ, что первыя двѣ подходящія дроби менѣе x, третья и четвертая болѣе x и т. д., такъ что

$$\frac{p_1}{q_1} < x < \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3} > x > \frac{p_4}{q_4}, \ldots,\ \frac{p_{4n-3}}{q_{4n-3}} < x < \frac{p_{4n-2}}{q_{4n-2}},\ \frac{p_{4n-1}}{q_{4n-1}} > x > \frac{p_{4n}}{q_{4n}}, \ldots$$

Обозначая абсолютныя величины членовъ ряда (a) черезъ $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, получимъ:

$$\frac{p_{4n-1}}{q_{4n-2}} = u_0 + u_1 + u_2 - (u_3 + u_4 - u_5 - u_6) - \ldots - (u_{4n-5} + u_{4n-4} - u_{4n-3} - u_{4n-2}) =$$

$$= u_0 + (u_1 + u_2 - u_3 - u_4) + (u_5 + u_6 - u_7 - u_8) + \ldots$$

$$\ldots + (u_{4n-7} + u_{4n-6} - u_{4n-5} - u_{4n-4}) + (u_{4n-3} + u_{4n-2});$$

$$\frac{p_{4n-1}}{q_{4n-1}} = \frac{p_{4n-2}}{q_{4n-2}} - u_{4n-1};$$

$$\frac{p_{4n}}{q_{4n}} = u_0 + (u_1 + u_2 - u_3 - u_4) + \ldots + (u_{4n-3} + u_{4n-2} - u_{4n-1} - u_{4n}) =$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 - (u_3 + u_4 - u_5 - u_6) - \ldots$$

$$\ldots - (u_{4n-5} + u_{4n-4} - u_{4u-3} - u_{4n-2}) - (u_{4n-1} + u_{4n});$$

$$\frac{p_{4n+1}}{q_{4n+1}} = \frac{p_{4n}}{q_{4n}} + u_{4n+1}.$$

Изъ этихъ равенствъ замѣчаемъ, что $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5}, \ldots, \frac{p_{4n-4}}{q_{4n-1}}, \frac{p_{4n-3}}{q_{4n-3}}, \frac{p_{4n}}{q_{4n}}, \frac{p_{4n+1}}{q_{4n+1}}, \ldots$ образуютъ возрастающій рядъ, всѣ члены котораго менѣе $u_0 + u_1 + u_2$, и что $\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_6}{q_6}, \frac{p_7}{q_7}, \ldots, \frac{p_{4n-2}}{q_{4n-2}}, \frac{p_{4n-1}}{q_{4n-1}}, \frac{p_{4n+2}}{q_{4n+2}}, \frac{p_{4n+3}}{q_{4n+3}}, \ldots$ образуютъ убывающій рядъ, всѣ члены котораго болѣе u_0.

6. Непрерывная дробь несоизмѣрима, если цѣлые знаменатели звеньевъ будутъ болѣе абсолютныхъ величинъ соотвѣтствующихъ цѣлыхъ числителей.

Пусть, начиная съ нѣкотораго числа n, послѣдовательные знаменатели $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ будутъ соотвѣтственно болѣе абсолютныхъ величинъ $b_n, b_{n+1}\ b_{n+2}, \ldots$ и пусть тѣ и другіе будутъ числами цѣлыми. Абсолютную величину числа будемъ называть его модулемъ. Возьмемъ какое нибудь число ε такъ, чтобы модуль $\varepsilon < 1$. Тогда изъ неравенствъ: мод. $b_n < a_n$ и a_n—мод. $b_n \geqslant 1$ (a_n и b_n цѣлыя числа) выводимъ, что мод. $b_n < a_n + \varepsilon$ и мод. $\frac{b_n}{a_n + \varepsilon} < 1$.

Точно такъ же мод. $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \varepsilon_1} < 1$, мод. $\frac{b_{n+2}}{a_{n+2} + \varepsilon_2} < 1$ и т. д., гдѣ ε_1,

$\varepsilon_2, \ldots$ суть числа, модули которыхъ менѣе 1. Отсюда выводимъ:

$$\text{мод.}\ \frac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \varepsilon_1}} < 1,\ \text{мод.}\ \frac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cfrac{b_{n+2}}{a_{n+2} + \varepsilon_2}}} < 1 \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, мод. $(y_{n-1} - a_{n-1}) < 1$,

$$\text{гдѣ } y_{n-1} = a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cfrac{b_{n+2}}{a_{n+2} + \ldots}}}.$$

Если послѣдовательные числители положительны, то выведенное заключеніе будетъ правильно и въ томъ случаѣ, когда $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ будутъ соотвѣтственно не менѣе $b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$ Для доказательства стоитъ только полагать числа $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ положительными.

Обозначимъ $y_{n-1} - a_{n-1}$ черезъ z_n. Пусть z_n выражается дробью $\frac{r_1}{r_0}$, гдѣ r_1 и r_0 цѣлыя числа. Изъ равенства $z_n = \frac{b_n}{a_n + z_{n+1}}$ находимъ $z_{n+1} = \frac{b_n r_0 - a_n r_1}{r_1}$. Полагая $b_n r_0 - a_n r_1 = r_2$, находимъ:

$z_{n+1} = \frac{r_2}{r_1}$, гдѣ r_2 и r_1 цѣлыя числа. Точно такъ же изъ равенства

$z_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1} + z_{n+2}}$ найдемъ, что $z_{n+2} = \frac{r_3}{r_2}$, гдѣ r_3 и r_2 цѣлыя числа,

и т. д. Но по абсолютной величинѣ дроби $\frac{r_1}{r_0}, \frac{r_2}{r_1}, \frac{r_3}{r_2}, \cdots$ менѣе 1. Слѣдовательно, цѣлыя числа: мод. r_0, мод. r_1, мод. r_2, мод. $r_3, \ldots$ образуютъ безконечный убывающій рядъ, что невозможно. Значитъ z_n есть число несоизмѣримое. Отсюда видно, что $y_{n-1} = a_{n-1} + z_n$ есть также несоизмѣримое число. Затѣмъ послѣдовательно убѣждаемся, что

$$y_{n-2} = a_{n-2} + \frac{b_{n-1}}{y_{n-1}};\ y_{n-3} = a_{n-3} + \frac{b_{n-2}}{y_{n-2}}, \ldots, x = a + \frac{b_1}{y_1} \text{ суть}$$

несоизмѣримыя числа.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Нѣсколько словъ о такъ наз. „правилѣ знаковъ" въ элементарной алгебрѣ.

М. Орѣшникова (Сызрань).

Правило знаковъ при умноженіи алгебраическихъ количествъ выражается, какъ извѣстно, такъ: „Одинаковые знаки даютъ плюсъ, разные—минусъ".

Для объясненія этого правила дается обыкновенно опредѣленіе умноженія, принадлежащее французскому ученому Коши. „Умножить одно число на другое—значитъ изъ множимаго составить новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы". Одинъ изъ труднѣйшихъ случаевъ умноженія—умноженіе отрицательнаго числа на отрицательное, когда въ результатѣ, нѣсколько неожиданно для новичка, получается положительное число, при помощи опредѣленія Коши объясняется такъ: „Умножить —5 на —3 значитъ изъ —5 составить новое число такъ, какъ —3 составлено изъ положительной единицы; а какъ —3 составлено изъ положительной единицы?—Взяли +1, *перемѣнили знакъ + на —*, получивъ —1, потомъ —1 повторили 3 раза; слѣдовательно, для умноженія —5 на —3, перемѣнимъ знакъ у —5, получивъ +5, а потомъ возьмемъ +5 три раза, получая +15". (Почему подчеркнуты слова: „перемѣнили знакъ + на —", это объяснится впослѣдствіи, при разборѣ этого опредѣленія).

Опредѣленіе Коши можно встрѣтить и въ учебникахъ ариѳметики, такъ что подъ это опредѣленіе можно подвести всѣ случаи умноженія чиселъ цѣлыхъ и дробныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ.

Интересно то, что составители учебниковъ ариѳметики прибѣгаютъ къ опредѣленію Коши только тогда, когда имъ приходится объяснять умноженіе дробей. А пока такой, такъ сказать, необходимости нѣтъ, они (напр., Малининъ и Буренинъ, Киселевъ, Давидовъ, Леве, Воленсъ, Шохоръ-Троцкій, Буняковскій, Егоровъ, Цигельманъ, Мартыновъ, Меморскій, Чеканскій и нѣк. др.) даютъ, съ нѣкоторыми маловажными измѣненіями, слѣдующее опредѣленіе: „Умножить одно число на другое—значитъ одно число взять слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ единицъ".

Сравнительно съ опредѣленіемъ Коши, это опредѣленіе кажется лучшимъ: во 1-хъ) оно понятнѣе для учениковъ, потому что съ удобствомъ укладывается въ стройную систему опредѣленій дѣйствій: зная уже сложеніе и противоположное ему—вычитаніе,—ученикъ понимаетъ умноженіе, какъ частный случай сложенія,—а впослѣдствіи онъ пойметъ дѣленіе, какъ дѣйствіе, сходное съ вычитаніемъ и противоположное умноженію; во 2-хъ) благодаря этой связи умноженія со сложеніемъ, ученикъ, въ случаѣ затрудненія съ умноженіемъ, сейчасъ же передѣлываетъ умноженіе на сложеніе (вмѣсто 5 × 3 пишетъ 5 + 5 + 5 и легко рѣшаетъ вопросъ).

А между тѣмъ опредѣленіе Коши во 1-хъ) непонятно, какъ не связанное по ассоціаціи сходства со сложеніемъ и по ассоціаціи контраста—съ дѣленіемъ, а во 2-хъ) механично, т. е. не объяснаетъ умноженія—изучаемаго дѣйствія—посредствомъ сложенія, уже извѣстнаго дѣйствія, а даетъ, въ сущности, только практическій способъ для умноженія (вспомните подчеркнутыя слова: „перемѣнить знакъ + на —" въ опредѣленіи Коши, изложенномъ въ началѣ настоящей замѣтки). Есть правило: „Чтобы раздѣлить дробь на дробь, нужно числителя первой дроби помножить на знаменателя второй, а числителя второй—на знаменателя первой и первое произведеніе раздѣлить на второе". Заучить такое трехъэтажное правило, и, кромѣ того,—понимать его—не такъ то легко, почему многіе ученики пользуются этимъ правиломъ безсознательно, и тогда оно, позволяя все-таки рѣшать задачи, ничуть не хуже опредѣленія Коши *).

Кромѣ того, авторы, дающіе опредѣленіе Коши на ряду съ другимъ, указаннымъ нами, опредѣленіемъ (къ числу такихъ авторовъ можно отнести Малинина и Буренина, Леве, Воленса, Шапошникова, Шохоръ-Троцкаго, отчасти Давидова), грѣшатъ еще въ слѣдующихъ двухъ отношеніяхъ: 1-е) они спрашивается,—зачѣмъ же было вводить это бросаемое опредѣленіе, если потомъ оно признается негоднымъ? Вѣдь тогда и къ опредѣленію Коши ученики отнесутся подозрительно, предполагая, что когда нибудь и его придется бросить; 2-е) ученики будутъ думать, что умноженіе алгебраическихъ количествъ не есть то же самое умноженіе, которое производилось надъ цѣлыми числами, а совершенно новое дѣйствіе (такъ, впрочемъ, и говорятъ совершенно откровенно, Шапошниковъ, Леве и Шохоръ-Троцкій); не внесетъ ли это путаницу въ головы учениковъ?

Итакъ, вводить два совершенно различныхъ опредѣленія умноженія неудобно; оставить для всѣхъ случаевъ умноженія опредѣленіе Коши—тоже не совсѣмъ хорошо, потому что оно не имѣетъ связи съ опредѣленіями другихъ дѣйствій; слѣдовательно—надо оставить другое, болѣе простое опредѣленіе для всѣхъ случаевъ умноженія.

Однако, изъ авторовъ, дающихъ это опредѣленіе, почти всѣ (а именно: Малининъ и Буренинъ, Леве, Воленсъ, Шапошниковъ, Шохоръ-Троцкій) бросаютъ это опредѣленіе даже въ ариѳметикѣ, приступая къ объясненію умноженія дробей. „Умножить 2 на 3, разсуждаютъ, напримѣръ, Малининъ и Буренинъ,—значитъ 2 взять слагаемымъ 3 раза; но что же значитъ 2 помножить на $^3/_7$? Вѣдь нельзя же 2 взять слагаемымъ $^3/_7$ раза?!" А дальше слѣдуетъ изложеніе спасительнаго опредѣленія Коши.

Одинъ только Давидовъ не испугался этой трудности и не измѣнилъ данному имъ простому опредѣленію въ эту критическую минуту, и въ отвѣтъ на недоумѣвающіе вопросы Малинина и Буренина храбро разсуждаетъ такъ: „Умножить 7 на $^5/_6$, значитъ 7 взять $^5/_6$ раза; $^1/_6$ раза—значитъ $^1/_6$ отъ 7, или $^7/_6$, значитъ нужно взять 5 разъ 6-ую часть отъ 7, т. е. $^7/_6 . 5$. Слѣдовательно, $^5/_6$ раза 7—то же, что 5 разъ $^7/_6$, а потому $7 . ^5/_6 = ^7/_6 . 5 = ^{35}/_6$".

Но и Давидовъ бросаетъ это опредѣленіе, когда ему приходится въ алгебрѣ говорить объ умноженіи алгебраическихъ количествъ и объяснять „правило знаковъ", и—прибѣгаетъ къ опредѣленію Коши.

---

*) Самая слабая сторона опредѣленія Коши заключается въ томъ, что оно получаетъ опредѣленный смыслъ лишь послѣ того, какъ мы строго установимъ, какимъ способомъ мы должны получать отрицательное число изъ положительной единицы; а это уже дѣлаетъ опредѣленіе очень громоздкимъ.

Ред.

Однако, посмотримъ, нельзя ли и здѣсь обойтись безъ этого, такъ сказать, „иностраннаго" опредѣленія и остаться при другомъ, изложенномъ нами опредѣленіи. Разсмотримъ съ этой точки зрѣнія всѣ 4 случая умноженія алгебраическихъ количествъ.

— 1 случай: Умноженіе положительнаго числа на положительное.

Возьмемъ примѣръ: $+5.+3$. Что это значитъ? Это значитъ, какъ всякому извѣстно, что $+5$ надо взять слагаемымъ три раза, т. е. $+(+5)+(+5)+(+5)=+15$. Къ чему мы прибавляли? у насъ ничего не было! Но отсутствіе количества обозначается нулемъ, а потому мы можемъ писать:

$$+5.+3=0+(+5)+(+5)+(+5)=+15.$$

Этотъ случай самый простой, извѣстный еще изъ ариѳметики, а потому не можетъ ни въ комъ возбудить недоумѣнія.

2 случай: Умноженіе отрицательнаго числа на положительное, т. е. $-5.+3$. Это что значитъ? Это значитъ, что отрицательная пятерка берется слагаемымъ три раза; очевидно—если всѣ слагаемыя отрицательны,—и сумма должна получиться отрицательная, т. е.

$$-5.+3=0+(-5)+(-5)+(-5)=-15.$$

3 случай: Умноженіе положительнаго числа на отрицательное, т. е. $+5.-3$. Что значитъ? Зададимъ здѣсь, подобно Малинину и Буренину, вопросъ: можно ли $+5$ взять минусъ три раза? Что это значитъ? А теперь попробуемъ, подобно Давидову, не боясь трудностей, разобрать этотъ вопросъ, отъ котораго и Давидовъ отступилъ.

Итакъ, что же значитъ $+5$ взять минусъ три раза? Вспомнимъ, что отрицательное число совершенно противоположно положительному. Вспомнимъ (предполагая, что учащійся, приступая къ изученію умноженія алгебраическихъ количествъ, уже знакомъ со сложеніемъ и вычитаніемъ ихъ)—вспомнимъ, что прибавить отрицательное число—все равно, что отнять положительное, и наоборотъ,—отнять отрицательное—значитъ прибавить положительное, вообще отрицательное число означаетъ совершенно противоположное положительному.

Принимая во вниманіе вышесказанное, можно сказать, что если $+5.+3$ означало, что $+5$ надо взять *слагаемымъ* три раза, то $+5.-3$ будетъ означать, что $+5$ надо взять *вычитаемымъ* *) три раза (такъ какъ вычитаніе противоположно сложенію), такъ что будемъ имѣть:

$$+5.-3=0-(+5)-(+5)-(+5)=-15,$$

потому что при вычитаніи изъ 0 положительной величины должна получиться отрицательная. Остается разсмотрѣть

4 случай: Умноженіе отрицательнаго числа на отрицатель-

---

*) Не во всемъ соглашаясь съ аргументаціей автора, мы все же полагаемъ, что это опредѣленіе цѣлесообразно. *Ред.*

ное, т. е. — 5. — 3. Что это значитъ? Это значитъ, что —5 надо взять вычитаемымъ три раза, т. е.

$$-5.-3=0-(-5)-(-5)-(-5)=+15,$$

потому что вычесть отрицательное число — все равно, что прибавить положительное.

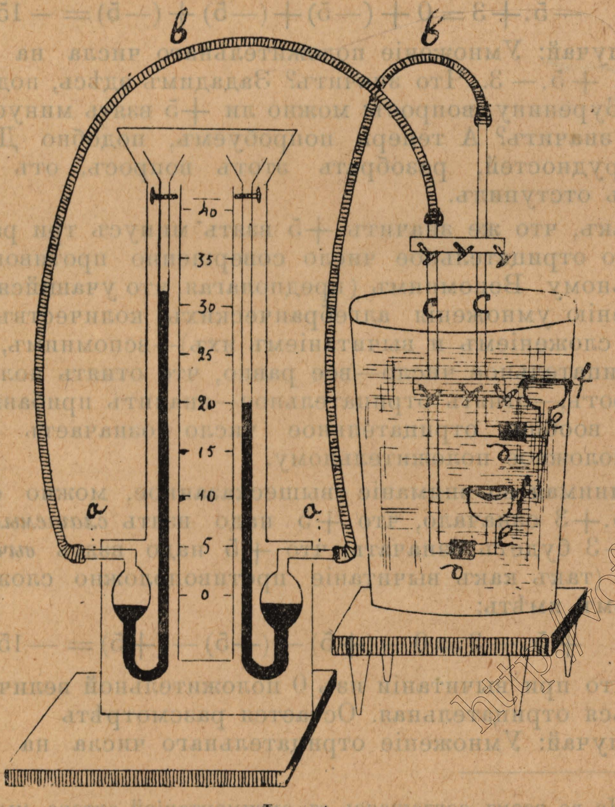
Позволяемъ себѣ надѣяться, что подобное изложеніе „правила знаковъ“ позволитъ остаться при определеніи болѣе простомъ, чѣмъ опредѣленіе Коши. Не лишнимъ также считаемъ къ этому прибавить, что, какъ мы убѣдились на опытѣ, ученики легко усваиваютъ такое изложеніе и предпочитаютъ его общепринятому.

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Приборъ для закона Паскаля.

В. Комарницкаго.

На вертикальной доскѣ съ бумажной шкалой укрѣплены 2 стеклянныя изогнутыя трубки съ яйцевидными расширеніями на

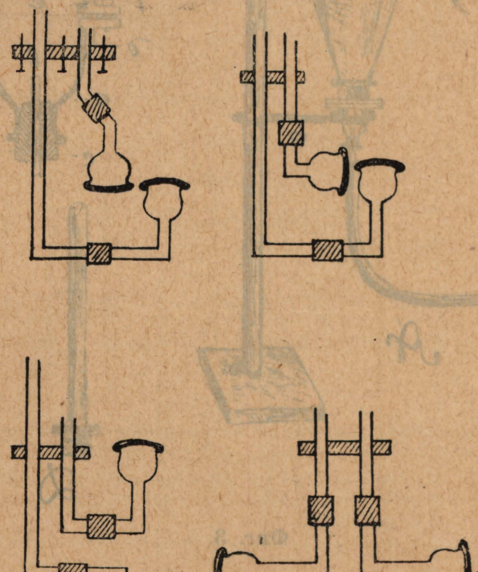


Фиг. 1.

короткомъ колѣнѣ. Внутренній діаметръ длиннаго колѣна трубокъ $1\frac{1}{2}$ mm. Трубки наполняются до нулевого дѣленія шкалы воднымъ растворомъ кетоновой сини (фиг. 1). Оттянутые концы короткихъ колѣнъ *a* соединяются резиновыми трубками *b* съ двумя стекляными трубками *c*, къ которымъ при помощи резиновыхъ пробокъ *d* присоединяются стекляные воронкообразные пріемники *e*. Пріемники плотно закрываются резиновыми шапочками *f*.

Пріемники поворачиваются внутри пробокъ и принимаютъ различныя относительныя положенія.

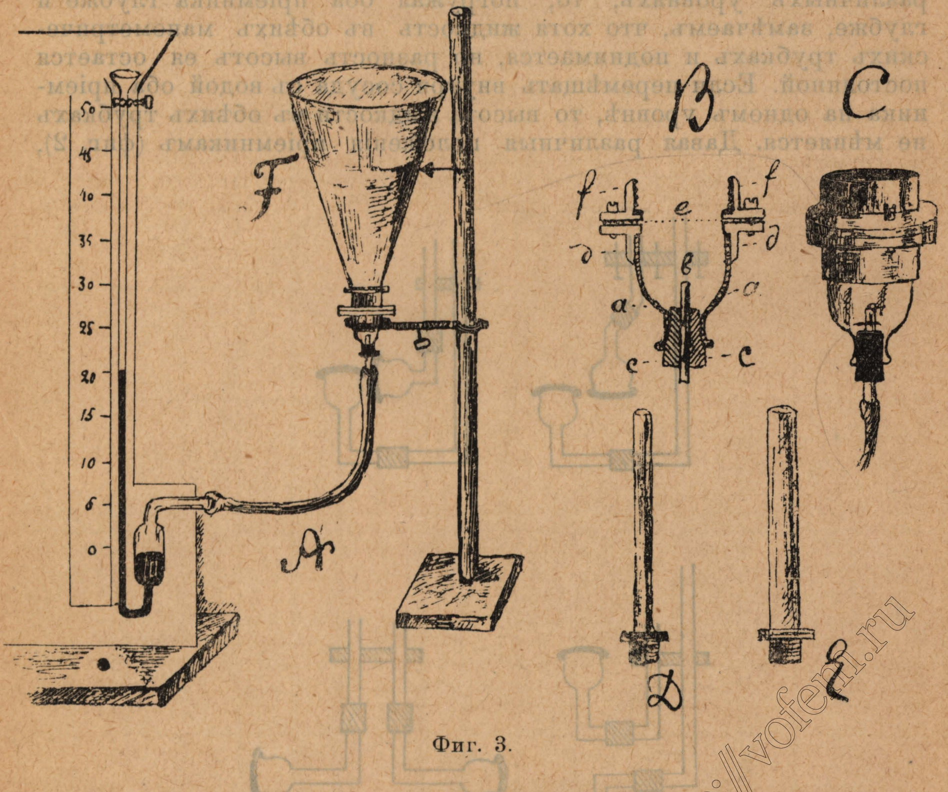
Трубки *c* вмѣстѣ съ пріемниками погружаются въ сосудъ съ водой и подъ вліяніемъ давленія воды на резиновыя перепонки пріемниковъ поднимается жидкость въ обѣихъ манометрическихъ трубкахъ. Если перепонки пріемниковъ находятся на различныхъ уровняхъ, то, погружая оба пріемника глубже и глубже, замѣчаемъ, что хотя жидкость въ обѣихъ манометрическихъ трубкахъ и поднимается, но разность высотъ ея остается постоянной. Если перемѣщать внутри сосуда съ водой оба пріемника на одномъ уровнѣ, то высота жидкости въ обѣихъ трубкахъ не мѣняется. Давая различныя положенія пріемникамъ (фиг. 2),



Фиг. 2.

легко показать, что вода давитъ не только сверху, но также снизу вверхъ и вообще по всѣмъ направленіямъ.

Тотъ же манометръ можно употребить, чтобы показать зависимость давленія на дно сосуда отъ высоты жидкости и отъ величины основанія сосуда. На рис. 3 лит. *C* представленъ пріемникъ, употребляемый для этой цѣли; рис. 3 лит. *B* представляетъ тотъ же пріемникъ въ разрѣзѣ. Склянка *a* безъ дна оканчивается мѣдной оправой *d*, къ которой привинчивается цилиндрическое мѣдное кольцо *f* съ винтовой нарѣзкой внутри. Между кольцомъ *f* и оправой *d* зажимается круглый каучуковый дискъ *e*. Горлышко склянки закупоривается каучуковой пробкой *c* со стеклянной трубкой *b*. Трубка *b* соединяется резиновой трубкой съ одной изъ манометрическихъ трубокъ (фиг. 3 лит. *A*), пріемникъ же укрѣпляется на штативѣ. Привинчивая на пріемникъ стеклянные сосуды различной формы, но съ одинаковой мѣдной оправой (фиг 3. лит. *D*, *E* и *F*) и наливая въ нихъ каждый разъ воды до



Фиг. 3.

одной и той же высоты, замѣчаемъ, что подъемъ жидкости въ манометрической трубкѣ будетъ каждый разъ одинъ и тотъ же.

Всѣ опыты выходятъ весьма рельефно и даютъ понятіе ученикамъ не только о качественной, но и о количественной сторонѣ явленія.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи, для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 629 (4 сер.). Даны окружность O и уголъ ABC. Въ извѣстномъ направленіи провести сѣкущую, опредѣляющую въ окружности хорду xy и въ углѣ отрѣзокъ vu такъ, чтобы отношеніе $xy:vu$ было данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 630 (4 сер.). На сторонѣ AB квадрата $ABCD$ (или на продолженіи этой стороны) берутъ произвольную точку M и проводятъ биссекторы внутреннихъ одностороннихъ угловъ, образуемыхъ отрѣзкомъ MC съ параллельными прямыми AB и CD, до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ N. Найти геометрическое мѣсто точки N и вычислить стороны треугольника MNC, если даны $AB=a$ и $MB=m$.

В. Тюнинъ (Симскій заводъ).

№ 631 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$y+z=axyz,$$
$$z+x=bxyz,$$
$$x+y=cxyz.$$

Н. Агрономовъ (Вологда).

№ 632 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$2x^3-2xy^2-5x^2y+5y^3-x^2+y^2-6x+15y+3=0.$$

Н. С. (Одесса).

№ 633 (4 сер.). Цѣна бриллліанта прямо пропорціональна квадрату его вѣса. Доказать, что стоимость бриллліанта понижается, если его разломать на нѣсколько кусковъ и что при заданномъ числѣ кусковъ пониженіе стоимости оказывается наибольшимъ въ случаѣ равенства вѣсовъ отдѣльныхъ кусковъ.

(Заимств.).

№ 634 (4 сер.). Производятъ опытъ Торичелли со спиртомъ вмѣсто ртути. Вычислить высоту, до которой поднимается спиртъ, зная, что барометрическая высота въ моментъ опыта равна 74,45 сантиметра. Плотность спирта, которымъ воспользовались для опыта, равна 0,76, а максимальная упругость его паровъ при температурѣ опыта равна 4,45 сантиметра.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 525 (4 сер.). *Цилиндрическая трубка* AB, *имѣющая длину* L, *закрыта въ концѣ* B *и погружена открытымъ концомъ* A *въ чашку со ртутью. Когда трубка вертикальна, ртуть занимаетъ въ трубкѣ длину* $l < L$, *а остальная часть занята воздухомъ. Требуется найти длину* x *части трубки, которую займетъ ртуть, если, повернувъ трубку вокругъ конца* A, *наклонить ее подъ угломъ* α *къ вертикали. Барометрическое давленіе во время опыта равно* H. *Примѣнить найденные результаты къ случаю*: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $H = L$, $l = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пусть v—объемъ цилиндрической трубки; тогда объемъ воздуха, наполняющаго верхнюю часть трубки при вертикальномъ ея положеніи, равенъ $\frac{L-l}{L}\cdot v$; давленіе этого воздуха дополняетъ давленіе ртути l до барометрическаго H; поэтому оно равно $H-l$. При наклонномъ положеніи трубки длина части, занятой ртутью, равна x; поэтому объемъ воздуха при наклонномъ положеніи трубки равенъ $\frac{L-x}{L}\cdot v$ (мы пренебрегаемъ тѣмъ обстоятельствомъ, что при наклонномъ положеніи цилиндрической трубки верхнее ея основаніе не параллельно поверхности ртути въ сосудѣ и считаемъ, что и въ наклонной трубкѣ объемъ воздуха прямо пропорціоналенъ длинѣ трубки $L-x$). Давленіе ртути при наклонномъ положеніи трубки равно $x\cos\alpha$, а потому давленіе воздуха равно $H-x\cos\alpha$. Итакъ, одна и та же масса воздуха, занимая объемъ $\frac{L-l}{L}\cdot v$, а затѣмъ $\frac{L-x}{L}\cdot v$, имѣетъ давленіе, равное соотвѣтственно $H-l$ и $H-x\cos\alpha$ Слѣдовательно, по закону Бойля-Маріотта

$$(H-x\cos\alpha)(L-x)\frac{v}{L} = (H-l)(L-l)\frac{v}{L},$$

или

$$(H-x\cos\alpha)(L-x) = (H-l)(L-l) \qquad (1).$$

Написавъ уравненіе (1) въ видѣ $x^2\cos\alpha - x(H+L\cos\alpha) + l(H+L-l) = 0$, находимъ для x два значенія

$$x = \frac{H+L\cos\alpha \pm \sqrt{(H+L\cos\alpha)^2 - 4l(H+L-l)\cos\alpha}}{2\cos\alpha} \qquad (2).$$

Формула (2) даетъ для x два дѣйствительныхъ положительныхъ значенія, изъ которыхъ одно больше L, а другое меньше L. Чтобы убѣдиться въ этомъ, напишемъ уравненіе (1) въ видѣ

$$(H-x\cos\alpha)(L-x)-(H-l)(L-l)=0 \qquad (3).$$

Подставивъ въ лѣвую часть вмѣсто x достаточно большое положительное число, мы сообщимъ лѣвой части знакъ члена $x^2\cos\alpha$, т. е. знакъ $+$. Затѣмъ, полагая въ уравненіи (3) $x=L$, мы обратимъ лѣвую часть въ выраженіе $-(H-l)(L-l)$, которое отрицательно, такъ какъ, по условію, $H>l$ и $L>l$; наконецъ, полагая въ уравненіи (3) $x=0$, мы обратимъ лѣвую часть въ положительное число $(HL-(H-l)(L-l))$. Слѣдовательно, уравненіе (1) имѣетъ два дѣйствительныхъ корня между $+\infty$ и L, а также между L и 0. Изъ всего сказаннаго въ связи съ формулой (2) слѣдуетъ, что искомое значеніе длины части трубки, занятой ртутью, при наклоненіи трубки подъ угломъ α къ вертикали, есть

$$x=\frac{H+L\cos\alpha-\sqrt{(H+L\cos\alpha)^2-4l(H+L-l)\cos\alpha}}{2\cos\alpha},$$

такъ какъ эта часть трубки не можетъ быть длиннѣе L. Полагая $H=L$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

и $l=L\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$, получимъ

$$x=\frac{L+\frac{L}{2}-\sqrt{\left(L+\frac{L}{2}\right)^2-4L^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)}}{1\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{3L}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}L^2-\frac{5}{4}L^2}=\frac{L}{2}.$$

В. Гейманъ (Ѳеодосія); *Г. Оганянцъ* (Москва).

№ 527 (4 сер.). *Построить треугольникъ по суммѣ двухъ сторонъ* $a+b=s$, *по суммѣ проведенныхъ къ этимъ сторонамъ высотъ* $h_a+h_b=\sigma$ *и по радіусу* R *описаннаго около треугольника круга.*

Складывая равенства $h_a=b\sin C$ и $h_b=a\sin C$, находимъ $h_a+h_b=(a+b)\sin C$, или $\sigma=s\sin C$, откуда

$$\frac{\sigma}{s}=\sin\varphi \quad (1).$$

Изъ формулы (1) видно, что задача возможна лишь при условіи $\sigma\leqslant s$ (2). При соблюденіи этого условія легко найти уголъ C, какъ уголъ α, противолежащій катету σ въ прямоугольномъ треугольникѣ, построенномъ по катету σ и гипотенузѣ s, либо, какъ дополняющій этотъ уголъ до π. Затѣмъ, описавъ окружность радіусомъ R, отложимъ въ ней дугу, равную $2C$; хорда, стягивающая эту дугу, есть сторона c искомаго треугольника; (принять ли $C=\alpha$ или $C=\pi-\alpha$, это не вліяетъ на сторону c, такъ какъ дуга 2α и $2\pi-2\alpha$ дополняютъ одна другую до полной окружности). Теперь строимъ искомый треугольникъ по $a+b=s$, по c и углу C обычнымъ способомъ: на одной изъ сторонъ угла $\frac{C}{2}$ откладываемъ отъ вершины M этого угла отрѣзокъ $MA=s$ и изъ точки A дѣлаемъ засѣчку B радіусомъ c на другой сторонѣ; изъ средины отрѣзка MB проводимъ къ нему перпендикуляръ до пересѣченія въ точкѣ C съ AM. Треугольникъ ABC есть искомый. Кромѣ условія (2), необходимы и достаточны для возможности задачи еще условія $a+b>c\geqslant(a+b)\sin\frac{c}{2}$. Такъ какъ уголъ C имѣетъ, вообще, два значенія и каждому его значенію отвѣчаютъ вообще двѣ засѣчки B, то задача имѣетъ не болѣе четырехъ рѣшеній.

В. Гейманъ (Ѳеодосія); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

№ 529 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$x^3=ax+by,$$
$$y^3=bx+ay.$$

Сложивъ данныя уравненія, перенесши всѣ члены въ первую часть и выведя за скобки $x+y$, находимъ

$$(x+y)[x^2-xy+y^2-(a+b)]=0 \quad (1).$$

Вычитая изъ перваго изъ данныхъ уравненій второе, подобнымъ же образомъ получимъ

$$(x-y)[x^2+xy+y^2-(a-b)]=0 \quad (2).$$

Изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что либо $x+y=0$, либо $x^2-xy+y^2-(a+b)=0$. Остановившись на первомъ предположеніи, находимъ, что $y=-x$; подставляя вмѣсто y его значеніе $(-x)$ въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ

$$x^3=(a-b)x,$$

откуда

$$x=y=0, \text{ или } x=\pm\sqrt{a-b}, \quad y=\mp\sqrt{a-b} \quad (3).$$

Точно также изъ уравненія (2) имѣемъ, что либо $x-y=0$, либо $x^2+xy+y^2-(a-b)=0$. Остановившись на первомъ изъ этихъ предложеній и принимая во вниманіе первое изъ данныхъ уравненій, получимъ: $y-x$, $x^3=(a+b)x$, откуда $x=y=0$ (это рѣшеніе уже найдено: см. (3)) или

$$x=y=\pm\sqrt{a+b} \quad (4).$$

Разсмотрѣвъ предположенія $x+y=0$ и $x-y=0$, мы должны еще разсмотрѣть систему (см. (1), (2)):

$$x^2+xy+y^2=a-b,$$

$$x^2-xy+y^2=a+b.$$

Сложивъ эти уравненія и раздѣливъ результатъ на 2, получимъ

$$xy=-b \quad (5).$$

Прибавивъ къ первому изъ этихъ уравненій уравненіе (5), находимъ $(x+y)^2=a-2b$, откуда

$$x+y=\pm\sqrt{a-2b} \quad (6).$$

Изъ равенствъ (5) и (6) слѣдуетъ, что x и y суть корни одного изъ двухъ квадратныхъ уравненій

$$t^2\mp\sqrt{a-2b}\,t-b=0,$$

откуда

$$x=\frac{\pm\sqrt{a-2b}\pm\sqrt{a+2b}}{2}, \quad y=\frac{\pm\sqrt{a-2b}\mp\sqrt{a+2b}}{2} \quad (7).$$

Въ первой изъ формулъ (7) можно выбрать любую изъ четырехъ комбинацій знаковъ при радикалахъ; во второй изъ формулъ (7) при первомъ радикалѣ надо взять тотъ же знакъ, какъ и въ первой формулѣ, а при второмъ радикалѣ—знакъ, обратный взятому при второмъ радикалѣ въ первой формулѣ. Формулы (3), (4) и (7) даютъ всѣ рѣшенія предложенной системы.

В. Винокуровъ (Калязинъ); *В. Гейманъ* (Θеодосія); *Н. Агрономовъ* (Вологда); *Н. Готлибъ* (Юрьевъ); *С. Конюховъ* (Никитовка); *Е. Доремы* (Брацлавъ); *Э. Сейдель* (Ростовъ н/Д); *Г. Оганянцъ* (Москва); *Н. Живовъ* (Кременчугъ).

ПОПРАВКИ.

Въ задачѣ № 526 (№ 377 „Вѣстника“) вмѣсто $x(y-z)\,x+z-x)=a$
слѣдуетъ читать $x(y-z)(y+z-x)=a$.

Въ задачѣ № 549 (№ 380 „Вѣстника“) вмѣсто „Плоскости желѣза и ртути“...
слѣдуетъ читать „Плотности желѣза и ртути“...

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 20-го Іюля 1905 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, д. № 66

Обложка
ищется

Обложка
ищется