Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLIX Сем. № 6.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 582.

Этюды по элементарной алгебрѣ.

Н. Ниноса.

(Продолженіе).*

IV. Новыя неравенства для $\sqrt[n]{A}$.

Равенство

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

можно привести къ слѣдующему виду:

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-2}(x-a)+2ax^{n-3}(x-a)+3a^2x^{n-4}(x-a)+\cdots$$
$$\cdots+(n-1)a^{n-2}(x-a)+na^{n-1},$$

какъ легко убѣдиться, произведя во второй части дѣйствительное умноженіе на $x-a$. Если перенесемъ членъ na^{n-1} въ первую часть, то

*) См. № 581 „Вѣстника“.

во второй части будетъ общiй множитель $x-a$, дѣля на который получимъ:

$$\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=x^{n-2}+2ax^{n-3}+3a^2x^{n-4}+\cdots+(n-1)a^{n-2}. \qquad (14)$$

Отсюда, замѣчая, что $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, получаемъ слѣдующее двойное неравенство по тѣмъ же соображенiямъ, какъ было получено (4):

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}<\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}<\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2},$$

откуда, умножая на $(x-a)^2$ и вставляя A вмѣсто x^n, найдемъ:

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(x-a)^2<A-a^n-na^{n-1}(x-a)<\frac{n(n-1)}{2}\frac{A}{x^2}(x-a)^2. \qquad (15)$$

Первое изъ этихъ неравенствъ, по умноженiи на $2(n-1)$ и дѣленiи на na^n, принимаетъ видъ:

$$(n-1)^2\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+2(n-1)\left(\frac{x-a}{a}\right)+1<1+2\frac{n-1}{n}\frac{A-a^n}{a^n},$$

или

$$\left[(n-1)\frac{x-a}{a}+1\right]^2<\left[\sqrt{1+2\frac{n-1}{n}\frac{A-a^n}{a^n}}\right]^2,$$

откуда

$$(n-1)(x-a)<a\left[\sqrt{1+2\frac{n-1}{n}\frac{A-a^n}{a^n}}-1\right].$$

Второе изъ неравенствъ (15) и подавно будетъ имѣть мѣсто, когда вмѣсто x^2 въ знаменателѣ вставимъ a^2. Изъ такого измѣненнаго неравенства, умножая его на выраженiе $\frac{2(n-1)}{nA}$ и прибавляя къ обѣимъ частямъ его по $\frac{a^n}{A}$, получимъ:

$$(n-1)(x-a)>a\left[\sqrt{\frac{a^{2n}}{A^2}+2\frac{n-1}{n}\frac{A-a^n}{A}}-\frac{a^n}{A}\right].$$

При $a=1$ получаемъ двойное неравенство, вставляя $\sqrt[n]{A}$ вмѣсто x:

$$\sqrt{\frac{1}{A^2}+2\frac{n-1}{n}\frac{A-1}{A}}-\frac{1}{A}<(n-1)(\sqrt[n]{A}-1)<\sqrt{1+2\frac{n-1}{n}(A-1)}-1.$$

Такъ какъ при безграничномъ возрастаніи n предѣлъ $\sqrt[n]{A}-1$ равенъ нулю, а предѣлъ $\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ равенъ единицѣ, то изъ этого неравенства заключимъ, что предѣлъ $n(\sqrt[n]{A}-1)$, если онъ существуетъ, будетъ лежать между $\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{2}{A}+2-\frac{1}{A}}=$ $=\sqrt{\left(1-\frac{1}{A}\right)^2+1-\frac{1}{A}}$ и $\sqrt{2A-1}-1$.

Изъ равенства (14) получается новое равенство простою перестановкою буквъ a и x одной на мѣсто другой; такой же результатъ получимъ, когда изъ равенства

$$nx^{n-1}=x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}$$

вычтемъ основное равенство (2), что доставитъ

$$\frac{(n-1)x^n-nax^{n-1}+a^n}{x-a}=x^{n-2}(x-a)+x^{n-3}(x^2-a^2)+\cdots$$

$$\cdots+x(x^{n-2}-a^{n-2})+x^{n-1}-a^{n-1};$$

отсюда, дѣля на $x-a$ и вставляя во второй части вмѣсто $\frac{x^k-a}{x-a}$ выраженіе $x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-2}x+a^{k-1}$ и дѣлая приведеніе, получимъ:

$$\frac{(n-1)x^n-nax^{n-1}+a^n}{(x-a)^2}=(n-1)x^{n-2}+(n-2)ax^{n-3}+\cdots+2a^{n-3}x+a^{n-2}. \quad (16)$$

Если вычтемъ изъ этого равенства равенство (14), то найдемъ:

$$\frac{(n-2)(x^n-a^n)-nax(x^{n-2}-a^{n-2})}{(x-a)^2}=(n-2)x^{n-2}+(n-4)ax^{n-3}+\cdots$$

$$\cdots-(n-4)a^{n-3}x-(n-2)a^{n-2}.$$

Здѣсь во второй части входятъ попарно члены съ одинаковыми цѣлыми коэффиціентами, но съ противными знаками, такъ что вторую часть можно написать въ видѣ:

$$(n-2)(x^{n-2}-a^{n-2})+(n-4)ax(x^{n-4}-a^{n-4})+\cdots,$$

откуда видно, что она дѣлится на $x-a$. Поэтому предыдущее равенство можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{(n-2)(x^n-a^n)-nax(x^{n-2}-a^{n-2})}{(x-a)^3}=(n-2)\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}+(n-4)ax\frac{x^{n-4}-a^{n-4}}{x-a}+\cdots$$

и отсюда найти неравенства для первой части, примѣняя неравенства (4) къ отдѣльнымъ членамъ второй части. При этомъ намъ придется вычислить сумму:

$$(n-2)^2+(n-4)^2+\cdots,$$

которая равна $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, какъ это видно изъ того, что

$$(n-2)^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6},$$

откуда, послѣ подстановки $n-2$ вмѣсто n, получается:

$$(n-4)^2=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{6},\text{ и т. д.}$$

Итакъ, будемъ имѣть:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}<\frac{(n-2)(x^n-a^n)-nax(x^{n-2}-a^{n-2})}{(x-a)^3}<\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}. \quad (17)$$

Вставимъ здѣсь $n+1$ вмѣсто n, затѣмъ A вмѣсто x^n, и мы получимъ послѣ небольшого преобразованія и замѣны въ знаменателѣ второго неравенства x^2 на a^2:

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6a^2}a^n<\frac{[(n-1)A+(n+1)a^n](x-a)-2(A-a^n)a}{(x-a)^3}<\frac{(n+1)n(n-1)}{6a^2}A. \quad (18)$$

По умноженіи на $(x-a)^3$ первое изъ этихъ неравенствъ доставитъ:

$$x-a>\frac{2(A-a^n)a}{(n-1)A+(n+1)a^n-\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6a^2}a^n(x-a)^2}. \quad (18')$$

Отсюда получается послѣдовательность возрастающихъ чиселъ, остающихся меньше, чѣмъ $x-a$. Первое число получится, когда въ знаменателѣ откинемъ отрицательный членъ, т. е. вставимъ нуль вмѣсто $x-a$; именно, какъ уже получили въ § III:

$$x-a>\frac{2(A-a^n)a}{(n-1)A+(n+1)a^n};$$

второе число получится, когда въ знаменателѣ (18′) вмѣсто $x-a$ вставимъ только-что найденное меньшее, чѣмъ $x-a$, число и т. д.

Второе изъ неравенствъ (18) даетъ:

$$x-a<\frac{2(A-a^n)a}{(n-1)A+(n+1)a^n-\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6a^2}A(x-a)^2}. \quad (18'')$$

Для того, чтобы имъ воспользоваться, нужно предварительно имѣть въ своемъ распоряженіи опредѣленное число, завѣдомо большее, чѣмъ $x-a$, — напримѣръ, изъ неравенства (5). Вставляя это число въ знаменатель (18″) вмѣсто $x-a$, получимъ новое число, превосходящее $x-a$, которое снова можемъ вставить въ (18″), и т. д.

Для того, чтобы получить полезный результатъ, необходимо, чтобы получаемые такимъ образомъ числа убывали, а это представляетъ нѣкоторое условіе, которое, въ случаѣ примѣненія неравенства (5), приводится къ виду:

$$\frac{A}{a^n} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{6}{n+1}}.$$

V. Выводъ формулы бинома Ньютона.

Къ равенству (14), т. е.

$$\frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = x^{n-2} + 2ax^{n-3} + 3a^2x^{n-4} + \cdots$$

$$\cdots + (n-2)\,a^{n-3}x + (n-1)\,a^{n-2},$$

примѣнимъ такой же процессъ, какимъ формула (14) выводится изъ формулы (2), именно въ каждомъ членѣ второй части вмѣсто одного множителя x вставимъ $(x-a)+a$. Такимъ образомъ, первый членъ доставитъ $x^{n-3}(x-a)+ax^{n-3}$, при чемъ ax^{n-3} присоединится ко второму члену, который сдѣлается $(1+2)\,ax^{n-3}$ и превратится въ $(1+2)\,ax^{n-4}(x-a)+(1+2)\,a^2x^{n-4}$; здѣсь $(1+2)a^2x^{n-4}$ присоединится къ третьему члену и превратитъ его въ

$$(1+2+3)\,a^2x^{n-4} = (1+2+3)\,a^2x^{n-5}(x-a) + (1+2+3)\,a^3x^{n-5}$$

и т. д. Коэффиціенты новыхъ членовъ, содержащихъ множитель $x-a$, получаются чрезъ присоединеніе къ прежнему численному коэффиціенту численныхъ коэффиціентовъ всѣхъ предшествующихъ членовъ. Таковъ законъ составленія новыхъ коэффиціентовъ при замѣнѣ x суммою $(x-a)+a$.

При сложеніи коэффиціентовъ примѣнимъ формулу:

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{и, въ частности,} \quad 1 = \frac{1\,.\,2}{2}.$$

Такимъ образомъ, формула (14) приметъ видъ:

$$\frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{1\,.\,2}{2}x^{n-3}(x-a) + \frac{2\,.\,3}{2}ax^{n-4}(x-a) +$$

$$+ \frac{3\,.\,4}{2}a^2x^{n-5}(x-a) + \cdots + \frac{(n-2)(n-1)}{2}a^{n-3}(x-a) + \frac{(n-1)\,n}{2}a^{n-2}.$$

Перенося послѣднiй членъ въ первую часть и дѣля равенство на $x-a$, получимъ:

$$\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)-\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(x-a)^2}{(x-a)^3}=\frac{1\,.\,2}{2}x^{n-3}+\frac{2\,.\,3}{2}ax^{n-4}+\cdots \tag{19}$$

$$\cdots+\frac{(n-2)(n-1)}{2}a^{n-3}.$$

Замѣтимъ теперь, что произведенiе l послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ $k(k+1)(k+2)\cdots(k+l-1)$ по умноженiи на $\dfrac{k+l}{l+1}-\dfrac{k-1}{l+1}=1$ представляется въ видѣ разности:

$$\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+l-1)(k+l)}{l+1}-\frac{(k-1)k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l+1}.$$

Если такое представленiе примѣнимъ ко всѣмъ членамъ суммы

$$1\cdot2\cdot3\cdots l+2\cdot3\cdot4\cdots(l+1)+3\cdot4\cdots(l+2)+\cdots+(n-l)(n-l+1)\cdots(n-1),$$

то убѣдимся, что эта сумма выразится однимъ членомъ

$$\frac{(n-l)(n-l+1)\cdots(n-1)n}{l+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)(n-l)}{l+1}.$$

При преобразованiи второй части равенства (19) намъ придется примѣнять эту формулу при $l=2$, вслѣдствiе чего эта вторая часть приметъ видъ:

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3}{2\,.\,3}x^{n-4}(x-a)+\frac{2\,.\,3\,.\,4}{2\,.\,3}ax^{n-5}(x-a)+\frac{3\,.\,4\,.\,5}{2\,.\,3}a^2x^{n-6}(x-a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2\,.\,3}a^{n-4}(x-a)+\frac{(n-2)(n-1)n}{2\,.\,3}a^{n-3},$$

и мы придемъ къ равенству:

$$\frac{{}^{n}-a^n-na^{n-1}(x-a)-\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(x-a)^2-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}a^{n-3}(x-a)^3}{(x-a)^4}=$$

$$=\frac{1\,.\,2\,.\,3}{2\,.\,3}x^{n-4}+\frac{2\,.\,3\,.\,4}{2\,.\,3}ax^{n-5}+\cdots+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2\,.\,3}a^{n-4}. \tag{20}$$

Здѣсь въ первой части въ числителѣ отъ разности x^n-a^n, входившей въ первоначальное равенство (2), вычитаются три члена, составленные по опредѣленному закону, и число членовъ второй части $(n-3)$ уменьшилось на 3 сравнительно съ равенствомъ (2). Повторяя изложенный процессъ надъ формулой (20) еще $n-4$ разъ, мы придемъ къ равенству, въ первой части котораго будетъ стоять дробь съ знаменателемъ $(x-a)^n$, а во второй части — единственный членъ, равный $\frac{1.2\dots(n-1)}{2.3\dots(n-1)} = 1$. Изъ этого равенства, вводя обозначеніе

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots(k-1)k} = n_k = \binom{n}{k},$$

получимъ:

$$x^n = a^n + n_1 a^{n-1}(x-a) + n_2 a^{n-2}(x-a)^2 + \cdots + n_{n-1} a (x-a)^{n-1} + (x-a)^n, \quad (21)$$

или, полагая $x = a + h$:

$$(a+h)^n = a^n + n_1 a^{n-1} h + n_2 a^{n-2} h^2 + \cdots + h^n. \quad (22)$$

Этой формулой бинома Ньютона можно воспользоваться въ § II для раскрытія выраженій r_s, вставляя въ (22) c вмѣсто a и полагая послѣдовательно $h = x$ и $h = -x$.

VI. Биноміальная формула съ остаточнымъ членомъ. Опредѣленіе числа $E(z)$.

Изложенный выводъ биноміальной формулы имѣетъ преимущество передъ другими ея выводами въ томъ отношеніи, что позволяетъ написать ее съ такъ называемымъ остаточнымъ членомъ.

Изложеннымъ пріемомъ мы получаемъ въ общемъ видѣ:

$$\frac{x^n - a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}(x-a) - \cdots - \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}(x-a)^{k-1}}{(x-a)^k}$$
$$= \binom{k-1}{k-1} x^{n-k} + \binom{k}{k-1} a x^{n-k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} a^{n-k}. \quad (23)$$

Это равенство существуетъ, какъ видно изъ самаго вывода, при всѣхъ значеніяхъ a и x (кромѣ случая $x = a$). Если предположимъ, что a и x положительны, то, принимая во вниманіе, что

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k},$$

увидимъ, что вторая часть равенства (23) заключается между $\binom{n}{k} a^{n-k}$ и $\binom{n}{k} x^{n-k}$; именно: при $x > a$ она болѣе $\binom{n}{k} a^{n-k}$, но менѣе $\binom{n}{k}\frac{x^n}{x^k} < \binom{n}{k}\frac{x^n}{a^k}$, а при $x < a$ она болѣе $\binom{n}{k}\frac{x^n}{x^k} > \binom{n}{k}\frac{x^n}{a^k}$, но менѣе $\binom{n}{k} a^{n-k}$; поэтому можемъ сказать, что она равна $\binom{n}{k}\frac{X}{a^k}$, гдѣ X есть нѣкоторое число, заключенное между a^n и x^n. Если вставимъ $a+h$ вмѣсто x, гдѣ должно быть $a+h>0$, т. е. $h>-a$, то получимъ:

$$(a+h)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \cdots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} h^{k-1} + \binom{n}{k} \frac{X}{a^k} h^k,$$

гдѣ послѣднiй членъ, содержащiй число X, заключающееся между a^n и $(a+h)^n$, носитъ названiе остаточнаго. Число k не находится въ зависимости отъ n и избирается произвольно подъ условiемъ $k<n$. Отсюда мы получимъ, полагая $h>0$ и вставляя a^n вмѣсто X:

$$(a+h)^n > a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \cdots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} h^{k-1} + \binom{n}{k} a^{n-k} h^k; \quad (24)$$

полагая же $h>0$, вставляя $(a+h)^n$ вмѣсто X и перенося остаточный членъ въ лѣвую часть, найдемъ въ предположенiи, что $\binom{n}{k}\frac{h^k}{a^k}<1$:

$$(a+h)^n < \frac{a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} h + \cdots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} h^{k-1}}{1-\binom{n}{k}\frac{h^k}{a^k}}. \quad (25)$$

Точно такiя же неравенства будутъ имѣть мѣсто при $h<0$, если k нечетное число; а если k — четное число, то знаки $>$ и $<$ нужно измѣнить на противные $<$ и $>$.

Въ частности изъ неравенства (24) получимъ при $k=1$, вставляя $m-1$ вмѣсто n, n вмѣсто a, $-(m-1)$ вмѣсто h:

$$(n-m+1)^{m-1} > n^{m-1} - (m-1)^2 n^{m-2} = n^{m-1}\left[1-\frac{(m-1)^2}{n}\right]. \quad (26)$$

Примѣнимъ это неравенство къ оцѣнкѣ величины биномiальнаго коэффицiента $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$, въ которомъ произведенiе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до m, стоящее въ знаменателѣ, обыкновенно обозначаютъ символомъ $m!$. Числитель состоитъ изъ убывающихъ цѣлыхъ чиселъ отъ n до $n-m+1$; очевидно, онъ менѣе n^m, но болѣе $n(n-m+1)^{m-1}$, т. е. болѣе $n^m\left[1-\frac{(m-1)^2}{n}\right]$ [см. неравенство (26)]; а потому будемъ имѣть:

$$\frac{n^m}{m!}\left[1-\frac{(m-1)^2}{n}\right] < \binom{n}{m} < \frac{n^m}{m!}. \quad (27)$$

Мы примемъ теперь въ общихъ неравенствахъ (24) и (25) $a=1$, $h=\frac{z}{n}$ и, оставляя k неизмѣннымъ, предположимъ, что n безгранично возрастаетъ. Мы не знаемъ, во что превращается при этомъ первая часть этихъ неравенствъ $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ и просто обозначимъ ее черезъ $E(z)$, а выраженія вторыхъ частей мы легко найдемъ и изъ неравенствъ вычислимъ $E(z)$.

Замѣтимъ, что условіе $a+h>0$, превращающееся въ $1+\frac{z}{n}>0$, теперь отпадаетъ, ибо, какъ бы ни было численно велико отрицательное значеніе z, но при безграничномъ возрастаніи n дробь $\frac{z}{n}$ стремится къ нулю.

Всѣ члены, стоящіе во вторыхъ частяхъ неравенствъ (24) и (25), имѣютъ видъ $\binom{n}{m} a^{n-m} h^m$ и превращаются въ $\binom{n}{m}\frac{z^m}{n^m}$ и, на основаніи только-что найденныхъ нами неравенствъ (27) для $\binom{n}{m}$, при безгранично возрастающемъ n приводятся просто къ $\frac{z^m}{m!}\cdot$ Вслѣдствіе этого будемъ имѣть неравенства:

$$E(z) > 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{z^k}{k!},$$

$$E(z) < \frac{1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}}{1-\frac{z^k}{k!}},$$

изъ которыхъ второе существуетъ при условіи, что $\frac{z^k}{k!}<1$. Разберемся въ значеніи этого условія, предполагая $z>0$.

Вспоминая, что $k! = 1\,.\,2\ldots i\ldots(k-i+1)\ldots(k-1)\,k$ представляетъ произведеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до k, мы отмѣтимъ два числа i и $k-i+1$, стоящія на i-томъ мѣстѣ, считая слѣва направо и справа налѣво. Затѣмъ представимъ $\frac{z^k}{k!}$ въ видѣ произведенія k дробей:

$$\frac{z^k}{k!}=\frac{z}{1}\cdot\frac{z}{2}\cdots\frac{z}{i}\cdots\frac{z}{k-i+1}\cdots\frac{z}{k-1}\cdot\frac{z}{k}$$

и перемножимъ попарно дроби, стоящія на одинаковыхъ мѣстахъ по счету справа налѣво и слѣва направо:

$$\frac{z^k}{k!}=\frac{z^2}{1\,.\,k}\cdot\frac{z^2}{2\,(k-1)}\cdots\frac{z^2}{i\,(k-i+1)}\cdots \tag{28}$$

Послѣдній множитель будетъ $\frac{z^2}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)}$ при четномъ k и $\frac{z}{\frac{k+1}{2}}$

при нечетномъ k. Произведеніе $i(k-i+1)$ приводится къ разности квадратовъ $\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-\left(\frac{k+1}{2}-i\right)^2$; и такъ какъ изъ него получаются знаменатели всѣхъ дробей съ числителемъ z^2 при $i=1, \ldots, \frac{k}{2}$ при четномъ k или при $i=1, 2, \ldots, \frac{k-1}{2}$ при нечетномъ k, при чемъ вычитаемый квадратъ $\left(\frac{k+1}{2}-i\right)^2$ убываетъ при возрастаніи i, то заключаемъ, что знаменатели дробей въ выраженіи (28) для $\frac{z^k}{k!}$ возрастаютъ, но остаются менѣе $\left(\frac{k+1}{2}\right)^2$. Поэтому, замѣняя всѣ знаменатели вида $i(k-i+1)$ этимъ числомъ $\left(\frac{k+1}{2}\right)^2$, придемъ къ неравенству:

$$\frac{z^k}{k!} > \left(\frac{2z}{k+1}\right)^k,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что неравенство $\frac{z^k}{k!}<1$ возможно только, если $k+1>2z$. Таково необходимое условіе для существованія неравенства $\frac{z^k}{k!}<1$; но это условіе недостаточно, ибо оно можетъ быть выполнено, а $\frac{z^k}{k!}$ будетъ >1; напримѣръ, при $k=2$, $z=1{,}42$ будетъ $k+1>2z$ и въ то же время $\frac{z^2}{2!}=\frac{z^2}{2}=\frac{2{,}0164}{2}>1$. Съ другой стороны, замѣняя всѣ знаменатели вида $i(k-i+1)$ наименьшимъ изъ нихъ $1 . k$ и знаменатель $\frac{k+1}{2}$ меньшимъ числомъ $\sqrt{k}$ (какъ это слѣдуетъ изъ неравенства

$$\sqrt{k}-1)^2=k+1-2\sqrt{k}>0),$$

увидимъ, что

$$\frac{z^k}{k!} < \left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^k,$$

а потому, если $\sqrt{k}>z$, т. е. $k>z^2$, то навѣрное $\frac{z^k}{k!}<1$. Такимъ образомъ, достаточнымъ условіемъ для существованія неравенства $\frac{z^k}{k!}<1$ является $k>z^2$. Отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ значеніи z можно найти такое цѣлое число $k(>z^2)$, что будетъ $\frac{z^k}{k!}<1$. Для многихъ теоретическихъ соображеній этотъ выводъ достаточенъ; но представляетъ интересъ вопросъ о нахожденіи такого наименьшаго числа σ, при которомъ $\frac{z^\sigma}{\sigma!}\leqq 1$. Мы вскорѣ разсмотримъ этотъ вопросъ; теперь же ограничимся замѣчаніемъ, что, такъ какъ вообще $\frac{z^k}{k!} > \left(\frac{2z}{k+1}\right)^k$, то $\frac{z^\sigma}{\sigma!}$ можетъ быть $\leqslant 1$ только въ томъ случаѣ, если $\frac{2z}{\sigma+1} < 1$, откуда $\frac{z}{\sigma+1} < \frac{1}{2}$. На этомъ основаніи будемъ имѣть при $k > \sigma$:

$$\frac{z^k}{k!} = \frac{z^\sigma}{\sigma!}\,\frac{z}{\sigma+1}\cdot\frac{z}{\sigma+2}\cdots\frac{z}{k} < \frac{z^\sigma}{\sigma!}\left(\frac{z}{\sigma+1}\right)^{k-\sigma} < \left(\frac{z}{\sigma+1}\right)^{k-\sigma} < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma}.$$

Возвращаясь къ разсмотрѣнію числа $E(z)$, введемъ обозначенія:

$$S_k = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^k}{k!},$$

$$T_k = \frac{S_{k-1}}{1 - \frac{z^k}{k!}},$$

такъ что $S_k - S_{k-1} = \frac{z^k}{k!} > 0$ при $z > 0$, а при четномъ k — также при $z < 0$.

Выведенныя ранѣе неравенства для $E(z)$ примутъ при этихъ обозначеніяхъ такой видъ:

$$S_k < E(z) < T_k.$$

Но легко видѣть, что

$$T_k - S = \frac{S_{k-1}}{1 - \frac{z^k}{k!}} - S_k = \frac{S_k\frac{z^k}{k!} - (S_k - S_{k-1})}{1 - \frac{z^k}{k!}} = \frac{S_k - 1}{1 - \frac{z^k}{k!}}\,\frac{z^k}{k!};$$

$$T_k - T_{k+1} = \frac{S_{k-1}}{1 - \frac{z^k}{k!}} - \frac{S_k}{1 - \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{\left(S_k - S_{k-1}\frac{z}{k+1}\right)\frac{z^k}{k!} - (S_k - S_{k-1})}{\left(1 - \frac{z^k}{k!}\right)\left(1 - \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right)} \tag{29}$$

$$= \frac{S_k - 1 - S_{k-1}\frac{z}{k+1}}{\left(1 - \frac{z^k}{k!}\right)\left(1 - \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right)}\,\frac{z^k}{k!},$$

гдѣ, послѣ подстановки значеній S_k и S_{k-1}, будемъ имѣть:

$$S_k - 1 - S_{k-1}\frac{z}{k+1} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)z + \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\frac{z^2}{2!} + \left(1 - \frac{3}{k+1}\right)\frac{z^3}{3!} + \cdots + \left(1 - \frac{k}{k+1}\right)\frac{z^k}{k!}.$$

Отсюда заключаемъ, что при $z>0$ лѣвая часть равенства (29) несомнѣнно положительна, а потому

$$T_k > T_{k+1}, \quad \text{и притомъ} \quad T_k - T_{k+1} < \frac{S_k - 1}{\left(1-\frac{z^k}{k!}\right)\left(1-\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right)} \frac{z^k}{k!}.$$

На основанiи этихъ выводовъ мы можемъ утверждать, что если при данномъ значенiи $z>0$ найдено наименьшее цѣлое число σ, для котораго $\frac{z^\sigma}{\sigma!} \leqq 1$ и потому $\frac{z^{\sigma+1}}{(\sigma+1)!} < \frac{1}{2}$, такъ что

$$T_{\sigma+1} = \frac{S_\sigma}{1-\frac{z^{\sigma+1}}{(\sigma+1)!}} < 2S_\sigma,$$

то мы будемъ имѣть двѣ послѣдовательности чиселъ: возрастающую

$$S_{\sigma+1},\quad S_{\sigma+2}, \ldots, S_{k-1},\quad S_k, \ldots \tag{30}$$

и убывающую

$$T_{\sigma+1},\quad T_{\sigma+2}, \ldots, T_{k-1},\quad T_k, \ldots, \tag{31}$$

въ которыхъ

$$S_k < T_k < T_{\sigma+1} < 2S_\sigma,$$

$$S_k - S_{k-1} = \frac{z^k}{k!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma},$$

$$T_k - S_k < 2\,(2S_\sigma - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma},$$

$$T_k - T_{k+1} < 4\,(2S_\sigma - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma},$$

какъ это слѣдуетъ изъ неравенствъ $\frac{z^k}{k!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma} < \frac{1}{2}$ (при $k>\sigma$); такъ какъ при безграничномъ возрастанiи k степень $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma}$, а потому и разность $T_k - S_k$ стремится къ предѣлу нуль, то двѣ разсматриваемыя послѣдовательности (30) и (31) опредѣляютъ ихъ общiй предѣлъ, именно число $E(z)$.

Такимъ образомъ, доказано существованiе единственнаго опредѣленнаго числа $E(z)$, соотвѣтствующаго данному числу z.

Что касается дѣйствительнаго вычисленiя $E(z)$, то замѣтимъ, что

$$S_{k+m} = S_k + \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} + \cdots + \frac{z^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$= S_k + \frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + \frac{z}{k+2} + \frac{z}{k+2}\cdot\frac{z}{k+3} + \cdots + \frac{z}{k+2}\cdot\frac{z}{k+3}\cdots\frac{z}{k+m}\right),$$

гдѣ сумма въ скобкахъ, очевидно, менѣе суммы

$$1+\frac{z}{k+1}+\left(\frac{z}{k+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z}{k+1}\right)^{m-1},$$

а эта послѣдняя равна $\dfrac{1-\left(\dfrac{z}{k+1}\right)^m}{1-\dfrac{z}{k+1}}$ и, слѣдовательно, менѣе $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{k+1}}=\dfrac{k+1}{k+1-z}$, если $z<k+1$. Въ силу этого будемъ имѣть:

$$S_{k+m}<S_k+\frac{z^k}{k!}\,\frac{z}{k+1-z},\qquad z<k+1.$$

Вторая часть этого неравенства не содержитъ m; поэтому увеличивая безгранично m, заключимъ, что и предѣлъ S_{k+m}, т. е.

$$E(z)<S_k+\frac{z^k}{k!}\,\frac{z}{k+1-z},\qquad z<k+1.$$

Если $k>\sigma$, то

$$\frac{z}{k+1-z}=\frac{k+1}{k+1-z}-1<\frac{k+1}{k+1-\dfrac{\sigma+1}{2}}-1,$$

т. е.

$$\frac{z}{k+1-z}<\frac{\sigma+1}{2k+1-\sigma}<1.$$

Итакъ, при $k>\sigma$:

$$S_k<E(z)<S_k+\frac{z^k}{k!}\,\frac{\sigma+1}{2k+1-\sigma}.$$

Это двойное неравенство показываетъ, что для вычисленія числа $E(z)$ съ данною степенью точности, т. е. съ опредѣленнымъ числомъ точныхъ десятичныхъ знаковъ, нужно подобрать число k такъ, чтобы прибавленіе къ S_k члена $\dfrac{z^k}{k!}\,\dfrac{\sigma+1}{2k+1-\sigma}$ не измѣняло тѣхъ десятичныхъ знаковъ числа S_k, которые должны быть точными. Когда число k подобрано, то съ указанною степенью точности можно принять $E(z)=S_k$, т. е. представить $E(z)$ цѣлымъ многочленомъ k-ой степени относительно z. Если же степень точности числа $E(z)$ напередъ не установлена, то пишутъ:

$$E(z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots$$

и вторую часть этого равенства называютъ **безконечнымъ степеннымъ рядомъ**, представляющимъ $E(z)$.

Частное значенiе $E(z)$ при $z=1$, т. е. $E(1)$, обозначается буквою e; оно вычислено съ огромнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ и равно 2,71828 18284 59045 ...

Предоставляемъ читателю разсмотрѣть случай $z<0$. Мы ограничимся слѣдующимъ замѣчанiемъ.

Изъ формулъ бинома имѣемъ:

$$(a+h)^n = a^n + n\frac{X}{a}h,$$

гдѣ X содержится между a^n и $(a+h)^n$. Полагая здѣсь $a=1$, $h=\dfrac{z}{n(n\pm r)}$, гдѣ r произвольно взятое число, получимъ при $z>0$:

$$1+\frac{z}{n\pm r} < \left(1+\frac{z}{n(n\pm r)}\right)^n < \frac{1}{1-\dfrac{z}{n\pm r}}, \tag{32}$$

предполагая $z<n\pm r$. Если n будетъ безгранично возрастать, то $\dfrac{z}{n\pm r}$ будетъ стремиться къ предѣлу нуль, и изъ двойного неравенства (32) мы заключимъ, что предѣлъ выраженiя

$$\left(1+\frac{z}{n(n\pm r)}\right)^n$$

при безграничномъ возрастанiи n равенъ 1, каковы бы ни были неизмѣняющiяся числа z и r. Такой же выводъ получается и при $z<0$. Но когда мы говоримъ, что нѣкоторое выраженiе N, содержащее цѣлое число n, при безграничномъ возрастанiи n стремится къ предѣлу L, то выраженную этими словами мысль мы можемъ представить формулою:

$$N = L + \varepsilon,$$

гдѣ ε имѣетъ предѣломъ нуль при безграничномъ возрастанiи n.

На этомъ основанiи можемъ написать:

$$\left(1+\frac{z}{n(n\pm r)}\right)^n = 1+\varepsilon,$$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = E(z)+\varepsilon_1,$$

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = E(y)+\varepsilon_2,$$

откуда

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = E(z)\,.\,E(y)+\varepsilon_1 E(y)+\varepsilon_2 E(z)+\varepsilon_1\varepsilon_2. \tag{33}$$

Но

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = 1+\frac{z+y}{n}+\frac{zy}{n^2} = \left(1+\frac{z+y}{n}\right)\left(1+\frac{zy}{n(n+z+y)}\right);$$

поэтому

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=\left(1+\frac{z+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{zy}{n(n+z+y)}\right)^n,$$

гдѣ можемъ написать:

$$\left(1+\frac{z+y}{n}\right)^n=E(z+y)+\varepsilon_3,$$

$$\left(1+\frac{zy}{n(n+z+y)}\right)^n=1+\varepsilon_4.$$

Послѣ подстановокъ равенство (33) приметъ видъ:

$$E(z+y)+\varepsilon_4 E(z+y)+\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4=E(z)E(y)+\varepsilon_1 E(y)+\varepsilon_2 E(z)+\varepsilon_1\varepsilon_2$$

и будетъ содержать члены $E(z+y)$ и $E(z)E(y)$, не зависящіе отъ n, и члены съ множителями ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, зависящими отъ n и обращающимися въ нули при безграничномъ возрастаніи n. Предполагая именно, что n безгранично возрастаетъ, мы получимъ въ предѣлѣ:

$$E(z+y)=E(z)\,.\,E(y),$$

откуда, полагая $y=-z$ и замѣчая, что $E(0)=1$, найдемъ:

$$E(-z)=\frac{1}{E(z)}.$$

(Продолженіе слѣдуетъ).

Каналовые лучи и ихъ значеніе для изслѣдованія строенія вещества.

Г. фонъ Дехенда.

Если электроды, впаянные въ стеклянную трубку, изъ которой выкачанъ воздухъ, соединить съ полюсами сильнаго источника высокаго напряженія, — напримѣръ, съ полюсами индукціонной катушки, то, при условіи достаточно сильнаго разрѣженія воздуха внутри трубки, появляются, какъ извѣстно, катодные лучи. Эти лучи исходятъ отъ отрицательнаго электрода (катода) по прямымъ линіямъ, независимо отъ положенія анода. На своемъ пути лучи вызываютъ свѣченіе оставшагося въ трубкѣ газа, а тамъ, гдѣ они попадаютъ на стеклянную стѣнку, появляется свѣтло-зеленая флуоресценція. Если на пути катодныхъ лучей помѣстить непроницаемый для нихъ предметъ, — напримѣръ, проволоку, — то на полѣ флуоресценціи рѣзко обозначается тѣнь послѣдняго. Отсюда слѣдуетъ, что катодные лучи, исходя отъ катода, имѣютъ опредѣленное направленіе пути. Если близко къ трубкѣ поднести магнитъ, то весь пучекъ лучей отклоняется; это распознается по отклоненію свѣтящагося голубымъ свѣтомъ пучка или, лучше, по смѣщенію флуоресцирующаго пятна. Если пропускать пучекъ лучей между двумя пластинками, изъ которыхъ одна заряжена положительнымъ, а другая отрицательнымъ электричествомъ, то также измѣняется направленіе лучей: лучи отталкиваются отрицательной пластинкой и притягиваются положительной. Оба опыта приводятъ къ извѣстному объясненію катодныхъ лучей, согласно которому эти лучи состоятъ изъ отрицательно заряженныхъ частицъ, вылетающихъ изъ катода съ большой скоростью.

Дальнѣйшій вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ: изъ чего состоятъ эти частицы; являются они молекулами, атомами или ихъ комплексами; какъ великъ ихъ электрическій зарядъ и какова ихъ скорость?

Измѣренію доступны величина отклоненія въ электрическомъ и магнитномъ поляхъ и сила послѣднихъ. Чѣмъ больше скорость, съ которою частицы пролетаютъ въ этомъ полѣ, тѣмъ слабѣе оно дѣйствуетъ, а потому и тѣмъ меньше отклоненіе. Съ другой стороны, сила вліянія электрическаго и магнитнаго полей тѣмъ больше, чѣмъ больше количество электричества, которое содержится на пролетающихъ частицахъ. Далѣе, чѣмъ тяжелѣе частицы, тѣмъ меньше вліяніе силового поля. Мы получаемъ изъ величины отклоненія соотношеніе между массою, зарядомъ и скоростью катодныхъ частицъ. Изъ этихъ относительно простыхъ соотношеній легко можно вычислить отношеніе заряда къ массѣ, такъ называемый у д ѣ л ь н ы й з а р я д ъ (e/m), и скорость. Результаты этого рода измѣреній въ немногихъ словахъ сводятся къ слѣдующему.

1) Скорость частицъ зависитъ отъ напряженія, которымъ возбуждается трубка; при напряженіи въ 10000 вольтъ скорость достигаетъ почти $^1/_5$ скорости свѣта, т. е. около 6.10^9 *см.* въ сек.

2) Отношеніе заряда къ массѣ (e/m) составляетъ около $1,8.10^7$ и почти не зависитъ ни отъ газа, находящагося въ трубкѣ, ни отъ вещества катода. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ основному положенію, что катодные лучи состоятъ не изъ какихъ-либо веществъ, содержащихся въ трубкѣ, но изъ вещества, присущаго всѣмъ элементамъ.

Интересно сравнить выше найденное число съ другимъ числомъ, полученнымъ изъ электролиза, при которомъ токъ проходитъ черезъ жидкость также благодаря движущимся заряженнымъ частицамъ. По современнымъ воззрѣніямъ электрохиміи разложеніе электрическимъ токомъ какой-нибудь проводящей жидкости, — напримѣръ, соляной кислоты (HCl), — объясняется слѣдующимъ образомъ.

Соляная кислота разлагается на атомы водорода и хлора, которые, заряжаясь электричествомъ, переходятъ въ такъ называемые і о н ы: атомы хлора образуютъ отрицательные іоны, а водорода — положительные. Подъ вліяніемъ электрическаго поля, возникающаго между электродами, отрицательные іоны хлора двигаются къ положительному электроду, а положительные іоны водорода — къ отрицательному. Мы знаемъ, сколько единицъ электричества нужно для того, чтобы выдѣлить одинъ граммъ водородныхъ іоновъ. Это число и есть то, что мы выше назвали «удѣльнымъ зарядомъ». Удѣльный зарядъ водородныхъ іоновъ равенъ 10^4. Если мы сравнимъ съ этимъ числомъ величину $1,8.10^7$, найденную для катодныхъ частицъ, то увидимъ, что послѣдняя въ 1800 разъ больше.

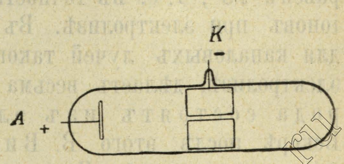
Итакъ, либо зарядъ катодной частицы въ 1800 разъ больше заряда водороднаго іона, или масса частицы въ 1800 разъ меньше массы атома водорода. Это можно окончательно рѣшить опредѣленіемъ заряда или массы независимо другъ отъ друга. При электролитическихъ іонахъ это легко сдѣлать, такъ какъ масса атома водорода опредѣляется изъ различныхъ данныхъ; поэтому извѣстенъ зарядъ, несомый атомомъ при электролизѣ.

Это опредѣленіе достигнуто и для катодныхъ частицъ, благодаря геніально придуманнымъ опытамъ Дж. Дж. Томсона (J. J. Thomson): зарядъ катодныхъ частицъ оказался равнымъ заряду водороднаго іона при электролизѣ. Поэтому опредѣлено, что катодныя частицы обладаютъ массой, въ 1800 разъ меньшей, чѣмъ масса водороднаго атома. Итакъ, каждый элементъ можетъ выбрасывать такія частицы; другими словами, катодныя частицы являются общею составною частью всѣхъ родовъ атомовъ и исходнымъ матеріаломъ строенія всѣхъ веществъ. Зарядъ этого объекта, называемаго «электрономъ», и его масса всегда постоянны. По новѣйшимъ изслѣдованіямъ зарядъ электрона равенъ $4{,}8 . 10^{-10}$ электростатическихъ единицъ системы сантиметръ-граммъ-секунда, а его масса составляетъ $^1/_{1800}$ массы водороднаго атома.

Въ виду этихъ новыхъ фактовъ нужно отказаться отъ старыхъ воззрѣній, что атомы суть наиболѣе мелкія частицы, на которыя можно раздѣлить элементъ, и что атомы различныхъ элементовъ не содержатъ ничего общаго между собой. Такимъ образомъ, мы имѣемъ фундаментъ для новыхъ воззрѣній на строеніе вещества. Но и только фундаментъ. Мы знаемъ пока только одинъ родъ строительнаго матеріала; другія составныя части остаются неизвѣстными. Мы не знаемъ, сколько должно быть этихъ частицъ, какъ онѣ должны расположиться, чтобы получился опредѣленный родъ атомовъ, напримѣръ, желѣза.

Изслѣдованіе каналовыхъ лучей имѣетъ для дальнѣйшаго развитія теоріи строенія вещества такое же значеніе, какъ и изслѣдованіе катодныхъ лучей.

Каналовые лучи являются въ извѣстномъ смыслѣ противоположностью катоднымъ лучамъ. Каналовые лучи относительно легко наблюдаются въ аппаратѣ, имѣющемъ форму, изображенную на фигурѣ. K — катодъ, A — анодъ. Катодъ K просверленъ. Если достаточно понизить давленіе, то отъ K налѣво идутъ катодные лучи; одновременно съ этимъ въ газовое пространство направо отъ катода изъ пробуравленнаго канала исходитъ свѣтящееся лучеобразное образованіе. Стекло при паденіи на него этихъ лучей флуоресцируетъ,



но не зеленымъ свѣтомъ, какъ при катодныхъ лучахъ, а коричнево-краснымъ (способность къ флуоресценціи у обыкновеннаго стекла значительно меньше). Гольдштейнъ (Goldstein), открывшій эти лучи, далъ имъ названіе каналовыхъ, такъ какъ они проходятъ черезъ каналъ въ катодѣ.

Первымъ вопросомъ по ихъ открытіи *) былъ, естественно, вопросъ о ихъ родствѣ съ катодными лучами. Поставленный самимъ Гольдштейномъ опытъ надъ вліяніемъ магнитнаго поля на эти лучи далъ отрицательный результатъ. Не удавалось также обнаружить отклоненіе подъ вліяніемъ электри-

*) Goldstein, Berl. Ber. 39, 361, 1886.

ческихъ силъ. Съ этимъ отпало всякое основаніе для теоріи этихъ лучей. Свѣдѣнія относительно катодныхъ лучей и вмѣстѣ съ тѣмъ относительно электрическаго разряда вообще пріобрѣтены, главнымъ образомъ, за десятилѣтіе съ 1886 г. по 1896 г.; съ тѣхъ поръ стала складываться болѣе или менѣе опредѣленная картина этихъ явленій. Представленіе о каналовыхъ лучахъ, какъ о положительно заряженныхъ частицахъ, составило естественное дополненіе къ этой картинѣ.

Пространство между катодомъ и анодомъ разрядной трубки становится подъ вліяніемъ катодныхъ лучей хорошимъ проводникомъ. Затѣмъ, такъ какъ проводимость газа всегда основывается на томъ, что атомы и молекулы распадаются на положительно и отрицательно заряженныя составныя части, то отсюда необходимо слѣдуетъ, что, кромѣ отрицательныхъ катодныхъ частицъ, должны существовать и положительныя частицы. Эти послѣднія, подъ вліяніемъ электрическихъ силъ, должны перемѣщаться къ катоду. Если катодъ просверленъ, какъ на фигурѣ, то эти частицы могутъ пройти сквозь катодъ и должны лучеобразно распространяться въ пространствѣ по другую сторону катода. Установленная Гольдштейномъ неотклоняемость этихъ лучей подъ вліяніемъ магнита, возможно, объясняется тѣмъ, что употреблявшееся магнитное поле не было достаточно сильно. В. Винъ (W. Wien)*) въ 1898 г. привелъ доказательство того, что каналовые лучи отклоняются подъ вліяніемъ очень сильнаго магнитнаго поля. Одновременно ему удалось доказать электростатическую отклоняемость каналовыхъ лучей. Направленіе отклоненія, какъ и слѣдовало ожидать, соотвѣтствовало положительно заряженнымъ частицамъ. Но при этомъ встрѣтилось новое затрудненіе: только часть лучей отклонялась. Остатокъ лучей не отклонялся и продолжалъ свой путь прямолинейно. В. Винъ значительно позже далъ объясненіе этому явленію, такъ какъ онъ сейчасъ же принялся за измѣреніе отклоненія, чтобы, какъ уже было показано при катодныхъ лучахъ, опредѣлить удѣльный зарядъ каналовыхъ частицъ и ихъ скорость. Винъ нашелъ, что скорость возрастаетъ съ увеличеніемъ напряженія (какъ при катодныхъ лучахъ), и при напряженіи въ 20 000 вольтъ она равна 2.10^8 *см.* въ сек., т. е. эта скорость составляетъ почти $^1/_{100}$ скорости свѣта; удѣльный зарядъ равенъ 10^4, т. е. въ точности совпадаетъ съ удѣльнымъ зарядомъ водородныхъ іоновъ при электролизѣ. Въ трубкахъ В. Вина былъ водородъ; полученіе для каналовыхъ лучей такого же значенія, какъ для іоновъ водорода при электролизѣ, дѣлаетъ весьма вѣроятнымъ, что каналовые лучи водорода состоятъ изъ электролитическихъ іоновъ водорода. Вскорѣ послѣ этого В. Вину удалось получить отклоняемые каналовые лучи въ кислородѣ. При этомъ отношеніе заряда къ массѣ было въ 16 разъ меньше. Слѣдовательно, каналовые лучи состоятъ изъ положительно заряженныхъ атомовъ находящагося въ трубкѣ сильно разрѣженнаго газа. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы пріобрѣли и другія важныя свѣдѣнія. Какъ мы видѣли выше, носители отрицательнаго электричества — электроны катодныхъ лучей — всегда имѣютъ одну и ту же массу и одинъ и тотъ же зарядъ, независимо отъ природы наполняющаго трубку газа; каналовые же лучи отличаются другъ отъ друга, смотря по наполняющему трубку газу. Такимъ образомъ, нельзя доказать существованіе въ каналовыхъ лучахъ положительнаго элементарнаго количества электри-

---

*) W. Wien, Wied. Ann. 65, 447, 1898.

чества (положительнаго электрона), подобнаго отрицательному. (До сихъ поръ не удалось обнаружить существованіе подобныхъ „положительныхъ электроновъ“ никакимъ другимъ путемъ).

Очень большія трудности изслѣдованія отклоненія на многіе годы прекратили опыты въ этомъ направленіи. Только въ 1906 г. было сдѣлано новое важное открытіе. Свѣтъ, посылаемый каналовыми лучами, на своемъ пути можетъ быть изслѣдованъ спектроскопически: водородные каналовые лучи даютъ спектръ водорода, кислородные каналовые лучи — спектръ кислорода и т. д. Но вѣдь каналовые лучи обладаютъ большою скоростью. Поэтому ихъ спектръ долженъ нѣсколько отличаться отъ спектра, даваемаго находящимися въ покоѣ частицами, т. е. должны обнаруживать явленіе Допплера (Doppler): всѣ линіи спектра каналовыхъ лучей должны давать небольшое смѣщеніе къ фіолетовому или красному концу спектра, смотря по тому, летятъ ли частицы къ спектроскопу или отъ него, если только допустить, что эти лучи суть быстро движущіяся частицы, испускающія свѣтъ. Тщательное спектроскопическое изслѣдованіе дѣйствительно обнаружило такой эффектъ. Это открытіе является заслугой Штарка (Johannes Stark) въ Геттингенѣ*). Явленіе Допплера обнаруживали не только водородные и кислородные каналовые лучи, но и цѣлый рядъ другихъ газовъ и паровъ. Однако, объясненіе полученныхъ результатовъ не отличалось достовѣрностью. Между тѣмъ В. Винъ, въ свою очередь, изслѣдовалъ природу неотклоняемой части каналовыхъ лучей и установилъ слѣдующее: онъ отклонялъ посредствомъ магнитнаго поля отклоняемую часть заряженныхъ частицъ, затѣмъ подвергалъ неотклонившійся остатокъ лучей дѣйствію второго магнитнаго поля; оказалось, что остатокъ снова частью отклоняется, частью же продолжаетъ путь прямолинейно. Когда же Винъ съ помощью второго магнитнаго поля испытывалъ ту часть лучей, которая уже отклонилась подъ вліяніемъ перваго магнитнаго поля, то эти лучи снова раздѣлились на двѣ части: отклоняемую и неотклоняемую. Отсюда нужно вывести заключеніе, что въ каналовыхъ лучахъ происходитъ непрерывный обмѣнъ между заряженными и незаряженными частицами (заряженныя отклоняются, незаряженныя не отклоняются). Вмѣстѣ съ тѣмъ теперь уже нельзя опредѣлить, что именно испускало свѣтъ въ опытахъ Штарка относительно явленія Допплера — положительные или нейтральные атомы; центры испусканія свѣта являются гипотетическими, а вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ слѣдствія для оптики становятся сомнительными. Поэтому было необходимо снова произвести изслѣдованіе каналовыхъ лучей по методу Вина отклоненія въ электрическомъ и магнитномъ поляхъ, чтобы твердо установить свойства каналовыхъ лучей**). Прежде всего съ подобными опытами выступилъ Дж. Дж. Томсонъ въ Кэмбриджѣ. Данныя его опытовъ были совершенно противоположны даннымъ Вина и въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ были причиной несогласій въ этой области. Томсонъ нашелъ, что въ его трубкахъ получаются только лучи водорода, независимо отъ того, какой газъ наполняетъ трубку. Исключеніемъ былъ только гелій. Томсонъ вывелъ отсюда заклю-

*) J. Stark, Annalen der Physik, 21, S. 401, 1906.

**) Сводку всей литературы до 1911 г., касающейся каналовыхъ лучей въ электрическомъ и магнитномъ полѣ, см. H. v. Dechend и W. Hammer, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik за 1911 г., VIII, стр. 34.

ченіе, противоположное результатамъ изслѣдованій Вина и Штарка, которые показали существованіе кислородныхъ и другихъ каналовыхъ лучей, а именно, что всѣ элементы, поставленные въ надлежащія условія, испускаютъ водородные каналовые лучи; это, конечно, имѣло бы весьма важныя слѣдствія. Хотя Винъ возражалъ противъ работъ Томсона, однако, Томсонъ остался при своемъ мнѣніи и нашелъ подтвержденіе его въ многочисленныхъ дальнѣйшихъ опытахъ. Понятно, что вслѣдствіе этого спора въ 1910 г. многіе приступили къ этой проблемѣ съ различныхъ сторонъ. Рѣшеніе ея оказалось въ пользу результатовъ опытовъ Вина. Изслѣдованія были произведены Герке (Gehrke) и Рейхенгеймомъ (Reichenheim), Кенигсбергеромъ (Т. Königsberger) и его учениками Кильхлингомъ (Kilchling) и Кучевскимъ и, наконецъ, авторомъ настоящей статьи совмѣстно съ Гаммеромъ (Hammer). Примѣненіемъ новыхъ методовъ техники полученія безвоздушныхъ пространствъ они достигли значительной точности измѣреній и установили точную основу для дальнѣйшаго развитія. Было точно установлено существованіе іоновъ цѣлаго ряда различныхъ элементовъ въ видѣ каналовыхъ лучей, и теперь нѣтъ никакого сомнѣнія, что можно перевести въ форму каналовыхъ лучей каждый элементъ. Вскорѣ послѣ опубликованія этихъ работъ Томсонъ объявилъ о совершенно новыхъ опытахъ, на основаніи которыхъ онъ самъ вернулся къ воззрѣніямъ Вина. Итакъ, въ данной области достигнуто полное согласіе. Только относительно скорости каналовыхъ лучей имѣлись разногласія: Томсонъ и другіе нашли, что эта скорость не зависитъ отъ напряженія разряда. Позже было установлено, что при нормальныхъ условіяхъ это не имѣетъ мѣста и такая независимость наступаетъ только при существованіи болѣе сложныхъ условій. Этотъ вопросъ вызвалъ работы, имѣвшія цѣлью непосредственное измѣреніе скорости. Подобныя изслѣдованія были произведены В. Гаммеромъ, сравнивавшимъ время, употребляемое каналовыми лучами на прохожденіе пути въ 50 *см.*, съ временемъ, въ которое перемѣнный токъ большой частоты мѣняетъ свое направленіе. Эти очень трудные опыты дали болѣе свободное отъ гипотезъ и болѣе осязаемое доказательство относительно природы каналовыхъ лучей, чѣмъ одни изслѣдованія отклоненія. Упомянемъ попутно, что частицы обладаютъ скоростью $2{,}51 . 10^8$ *см.* въ секунду, а потому приходилось измѣрять время порядка 10^{-7} сек. Эти опыты служили одновременно и для опредѣленія удѣльнаго заряда водородныхъ каналовыхъ частицъ, который совпадаетъ съ зарядомъ водороднаго іона при электролизѣ въ предѣлахъ 3 — 4 %.

Значеніе того факта, что каждый элементъ можетъ быть переведенъ въ форму каналовыхъ лучей, т. е. что любому атому можно сообщить движеніе со скоростью, составляющей почти $^1/_{100}$ скорости свѣта, не легко надлежащимъ образомъ оцѣнить. Какъ извѣстно, α-лучи, несущіе радіоактивныя вещества, представляютъ собою не что иное, какъ положительно заряженные атомы гелія, весьма быстро движущіеся. Поэтому каналовые лучи даютъ намъ возможность какъ бы искусственно осуществить α-лучи, которые къ тому же состоятъ не только изъ химически инертнаго газа гелія, но также изъ любого элемента. Тѣмъ не менѣе между обоими родами лучей имѣется весьма существенная разница въ томъ отношеніи, что каналовые лучи, несмотря на свою во много разъ меньшую скорость, способны вызывать фосфоресценцію, сообщать проводимость газамъ, дѣйствовать на фотографическую пластинку и т. д., между тѣмъ какъ обладающіе гораздо большею скоростью α-лучи не вызываютъ всѣхъ этихъ явленій, какъ только скорость частицъ падаетъ ниже нѣкотораго предѣла, который приблизительно въ 10 разъ больше скорости самыхъ быстрыхъ каналовыхъ лучей. Разъясненіе этого замѣчательнаго различія будетъ важнымъ вкладомъ въ теорію строенія вещества.

Изученіе каналовыхъ лучей недавно указало на весьма важную для химіи область ихъ примѣненія. Каждый элементъ, какъ было сказано, можно обратить въ каналовые лучи. Если мы наполнимъ трубку такой формы, которая изображена на фигурѣ, смѣсью газовъ, то каждая составная часть обращается въ каналовые лучи. Если затѣмъ внести трубку въ магнитное поле, то пучекъ лучей распадается на отдѣльныя части. Измѣреніе отклоненія даетъ атомные и молекулярные вѣса элементовъ, входящихъ въ составъ смѣси. Сравненіе полученныхъ значеній съ таблицею атомныхъ вѣсовъ указываетъ на составъ смѣси. Подобная идея примѣнить каналовые лучи къ анализу впервые пришла въ голову Томсону*). Выполненіе этого анализа, во всякомъ случаѣ, не такъ просто, какъ мы это описали. Уже то, что такой экспериментаторъ, какъ Томсонъ, нѣсколько лѣтъ не могъ найти никакихъ другихъ лучей, кромѣ водородныхъ, яснѣе всего показываетъ трудности этого метода. Къ чему можетъ привести этотъ методъ и насколько его можно улучшить, покажетъ будущее. Если оправдается то, что предсказываютъ теоретически, тогда мы получимъ аналитическій методъ такой точности, какой спектральный анализъ не можетъ дать (для изслѣдованія нужно очень мало вещества, такъ какъ трубка наполняется подъ давленіемъ въ нѣсколько сотыхъ *мм.*). Вѣдь наблюденіе въ микроскопъ фосфоресцирующаго экрана, на которую падаютъ лучи, позволяетъ обнаружить отдѣльный атомъ—это продѣлали В. Гаммеръ и авторъ настоящей статьи—, и потому можно сказать, что нижней границей воспріимчивости этого метода являются отдѣльные атомы. Этотъ методъ даетъ не только качественное опредѣленіе какого-нибудь вещества, но и его молекулярный вѣсъ. При открытіи новаго элемента или новаго вещества сразу опредѣляются важнѣйшія постоянныя и положеніе его въ періодической системѣ элементовъ. Методъ, можетъ быть, сыграетъ большую роль въ химіи радіоактивныхъ элементовъ.

Далѣе, такъ какъ температура каналовыхъ лучей пропорціональна квадрату ихъ скорости, т. е. для среднихъ напряженій равна 10 милліонамъ градусовъ, то открывается еще новая область химіи чрезвычайно высокихъ температуръ.

И въ этой области уже имѣется нѣсколько открытій.

*) J. J. Thomson, Philosophical Magazine, 1911.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Наименьшія, доступныя измѣренію, количества свѣта. Физическіе методы измѣренія сдѣлали въ прошедшемъ десятилѣтіи такіе успѣхи, что теперь можно измѣрять очень малыя количества энергіи, которыя болѣе не воспринимаются нашими органами чувствъ. Несовершенство человѣческихъ органовъ становится очевиднымъ при сравненіи съ совершенствомъ физическихъ изслѣдованій. Даже глазъ, являющійся при нормальныхъ условіяхъ самымъ чувствительнымъ органомъ человѣка, далеко уступаетъ въ чувствительности физическому аппарату. Когда для глаза наступаетъ абсолютная темнота, этотъ аппаратъ все еще улавливаетъ нѣкоторое количество свѣта: Интересно сравнить наблюденія такихъ слабыхъ источниковъ свѣта простымъ глазомъ съ наблюденіями, производимыми помощью физическихъ средствъ.

Въ физикѣ мы встрѣчаемся съ явленіемъ, позволяющимъ намъ обнаруживать очень малыя количества свѣта: это фотоэлектрическій эффектъ. На внутренней сторонѣ стѣнки стеклянной трубки, изъ которой выкачанъ почти весь воздухъ, находится слой тонко измельченнаго металла, — напримѣръ, калія. Съ этимъ слоемъ соединяется платиновая проволока, проходящая затѣмъ сквозь стекло наружу. Въ другомъ мѣстѣ стеклянной трубки, не покрытомъ слоемъ металла, вводится въ трубку вторая платиновая проволока. Эта послѣдняя внутри трубки сгибается въ кольцо, находящееся очень близко къ металлическому слою. Если кольцо и слой металла соединить съ противоположными полюсами источника тока, — напримѣръ, батареи аккумуляторовъ, — то, при надлежаще выбранномъ напряженіи, между кольцомъ и слоемъ металла подъ вліяніемъ свѣта происходитъ электрическій разрядъ. Включенный въ цѣпь измѣрительный приборъ позволяетъ наблюдать возникающій токъ. Если подобную фотоэлектрическую трубку, какъ называютъ описанный приборъ, наполнить разрѣженнымъ газомъ, — напримѣръ, аргономъ, — то чувствительность къ свѣту повышается. Слѣдуетъ замѣтить, что слой калія нужно сначала сдѣлать чувствительнымъ къ свѣту, раскаляя его разрядомъ въ водородѣ.

Эльстеръ (Elster) и Гейтель (Geitel) производили опыты съ такою трубкою, чтобы опредѣлить, какое наименьшее количество свѣта еще обнаруживается этою трубкою. Для опытовъ пользовались маленькимъ пламенемъ свѣтильнаго газа. Газъ выходилъ черезъ металлическую волосную трубку. Діаметръ пламени равнялся всего 2 *мм*. Кромѣ того, газъ горѣлъ не свѣтящимся пламенемъ, а голубоватымъ. Когда такое пламя помѣстили на разстояніи 9 *м*., то оказалось, что глазъ съ большимъ трудомъ различалъ его, а для трубки получаемая энергія была слишкомъ велика, чтобы можно было считать ее границею чувствительности. Спеціальными вспомогательными средствами, описаніе которыхъ завело бы насъ слишкомъ далеко, удалось настолько ослабить силу свѣта источника, что на трубку попадала всего $^1/_{60}$ доля энергіи вышеописаннаго маленькаго газоваго пламени. Но и это малое количество свѣтовыхъ лучей безспорно можно было обнаружить. При этомъ оперировали съ тонкимъ лучомъ свѣта, прошедшимъ черезъ голубое стекло. Этотъ свѣтъ нельзя было обнаружить при прямомъ разсматриваніи. Если же смотрѣли не прямо на свѣтъ, а нѣсколько сбоку, то привычный глазъ замѣчалъ чрезвычайно слабое мерцаніе. Тутъ, слѣдовательно, мы имѣемъ дѣло съ явленіемъ бокового зрѣнія, такъ какъ середина сѣтчатой оболочки глаза, на которую попадаютъ лучи при прямомъ зрѣніи, значительно менѣе чувствительна, чѣмъ края этой оболочки, на которые попадаютъ лучи при боковомъ зрѣніи. Поэтому источникъ свѣта становится невидимымъ при прямомъ зрѣніи и вновь появляется при боковомъ. Боковое зрѣніе глаза можно наблюдать точно такимъ образомъ и на слабо накаливаемыхъ тѣлахъ.

Итакъ, изъ вышеприведенныхъ опытовъ слѣдуетъ, что то количество свѣта, которое болѣе не воспринимается глазомъ, — по крайней мѣрѣ, при прямомъ зрѣніи, — еще не является границей чувствительности фотоэлектрической трубки. При дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ удалось обнаружить еще меньшія количества свѣта.

Слѣдуетъ упомянуть, что опыты могли предприниматься только ночью, такъ какъ днемъ невозможно было затемнить комнату настолько, чтобы фотоэлектрическая трубка болѣе не обнаруживала свѣта.

Радій въ хромосферѣ солнца. До послѣдняго времени принималось, что радій принадлежитъ къ числу элементовъ, которыхъ нѣтъ на солнцѣ. Въ 1912 году Дизонъ (Dyson) подвергъ изслѣдованію спектрограммы солнечной хромосферы, полученныя во время солнечныхъ затменій 1900, 1901 и 1905 годовъ, со спеціальной цѣлью разысканія въ нихъ линій радія и нитона (эманаціи радія). Побудительной причиной для этого изслѣдованія явилось обнаруженіе линій радія и нитона въ спектрѣ новой звѣзды въ Близнецахъ.

Относительно радія Дизонъ считаетъ возможнымъ рѣшить вопросъ положительно. Въ нижеслѣдующей таблицѣ даны въ I столбцѣ длины волнъ главныхъ линій въ спектрѣ радія по опредѣленіямъ Рунге (Runge) и Прехта (Precht), во II столбцѣ — длины волнъ линій въ спектрѣ хромосферы, найденныхъ Дизономъ, въ III столбцѣ — длины волнъ нѣкоторыхъ линій изъ числа найденныхъ Локьеромъ (Lockyer) въ спектрѣ хромосферы во время солнечнаго затменія 1898 года.

I	II.	III.
3649,75	3649,66	
3814,58	3814,67	3814,7
4336,49		4336,6
4682,36	4682,20	4682,5
4826,12		4826,0

Происхожденіе послѣдней линіи столбца III Локьеръ не могъ установить. Остальныя три линіи онъ приписывалъ другимъ элементамъ; Дизонъ указываетъ мотивы, по которымъ ихъ съ большею вѣроятностью слѣдуетъ приписать радію.

Соотвѣтствующее критическое изслѣдованіе совпаденія линій въ спектрѣ солнечной хромосферы съ линіями спектра нитона не дало возможности Дизону рѣшить и здѣсь вопросъ въ положительномъ смыслѣ. Надо думать, однако, какъ указалъ Кайзеръ (Kayser), что въ дѣйствительности и нитонъ находится въ хромосферѣ солнца и что при дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ это предположеніе подтвердится данными измѣреній спектрограммъ.

Оптофонъ. Названіе «оптофонъ» далъ Фурнье д'Альбъ (Fournier d'Albe) изобрѣтенному имъ прибору, преобразующему свѣтовые эффекты въ звуковые. Приборъ этотъ предназначается для слѣпыхъ и долженъ дать имъ возможность распознавать акустическимъ путемъ свѣтъ, тѣни и контрасты освѣщенія.

Оптофонъ представляетъ собою телефонъ, укрѣпляющійся обычнымъ путемъ на головѣ слѣпого. Этотъ телефонъ двумя проводами, свитыми въ одинъ шнуръ, присоединенъ къ небольшому (25 *см.* длины) ящику, который слѣпой держитъ въ рукѣ. Въ одной стѣнкѣ ящика имѣется ирисовая діафрагма, которая и направляется на изслѣдуемый предметъ или изслѣдуемую область.

Въ ящикѣ оптофона находятся два селеновые элемента, два графитовыя перемѣнныя сопротивленія, батарея гальваническихъ элементовъ и часовой механизмъ. Селеновые элементы и графитовыя сопротивленія составляютъ 4 вѣтви мостика Витстона. Батарея введена въ одну изъ діагоналей мостика; въ другой діагонали находится телефонъ. Часовой механизмъ 10 разъ въ секунду прерываетъ токъ, поступающій въ телефонъ, чѣмъ обусловливаетъ его звучаніе.

Перемѣнныя сопротивленія при помощи выступающей изъ ящика рукоятки могутъ быть подобраны такъ, что звучаніе телефона прекращается. Если затѣмъ на одинъ изъ селеновыхъ элементовъ падаетъ свѣтъ, то въ телефонѣ слышенъ звукъ. Сила звука тѣмъ больше, чѣмъ больше сила свѣта. Такъ какъ въ сосѣдней вѣтви мостика включено не постоянное сопротивленіе, а тоже свѣточувствительный селеновый элементъ, то разъ установленный приборъ отмѣчаетъ свѣтовые контрасты независимо отъ измѣненія общей силы свѣта въ помѣщеніи, гдѣ производится опытъ.

Электродвижущая сила батареи въ оптофонѣ не превосходитъ 4 вольтъ; селеновые элементы имѣютъ сопротивленія въ 1000 — 2000 омовъ каждое, такъ что сила тока въ телефонѣ при среднемъ дневномъ англійскомъ освѣщеніи близка къ 0,1 миллиампера. Такъ какъ телефонъ звучитъ при токѣ въ одну десятимилліонную ампера, то оптофонъ оказывается достаточно чувствительнымъ при дневномъ освѣщеніи, а ночью обнаруживаетъ свѣтъ свѣчи и газоваго пламени на разстояніи 20 *м.* Опыты, произведенные въ Royal Blind Institution показали, что съ помощью оптофона слѣпые могли опредѣлять положеніе оконъ и лицъ, одежда которыхъ контрастировала въ свѣтовомъ отношеніи съ заднимъ планомъ.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Вопросы элементарной геометріи. Сборникъ статей подъ редакціей Ф. Энрикveса. Перевелъ I. В. Яшунскій. Изд. кн-ства «Physice». С.-Петербургъ, 1913. Стр. VII+377.

Редакторъ сборника предназначаетъ его для преподавателей средней школы и для слушателей высшихъ учебныхъ заведеній. «Геометрическія изслѣдованія XIX столѣтія» — заявляетъ онъ въ предисловіи — «привели къ прогрессу науки въ двоякомъ отношеніи: съ одной стороны, они дали отвѣтъ на чисто математическія проблемы, а съ другой стороны, они расширили философскія воззрѣнія, господствующія въ математическихъ наукахъ. Это послѣднее обстоятельство сказывается и въ области элементарной геометріи: изложеніе ея, поскольку рѣчь идетъ о принципахъ основныхъ ученій, проникнуто нынѣ совершенно новымъ духомъ. Этотъ именно духъ мы и пытались отразить въ предлагаемыхъ критическихъ очеркахъ».

Первая статья является какъ бы философскимъ введеніемъ; она съ точки зрѣнія общей научной гносеологіи освѣщаетъ предметъ и значеніе вопросовъ, относящихся къ основаніямъ геометріи. Вторая статья («Замѣчанія о преподаваніи геометріи») раскрываетъ сущность вопросовъ, имѣющихъ отношеніе къ преподаванію элементарной геометріи. Статьи 3, 4 и 5 анализируютъ понятія и постулаты, относящіеся соотвѣтственно къ прямой и плоскости, конгруэнтности и движенію и къ примѣненію постулата непрерывности въ элементарной геометріи. «Начала» Евклида составляютъ исходную точку и основу всѣхъ этихъ работъ, но критическій анализъ выходитъ далеко за предѣлы Евклидова творенія. Въ статьѣ 3, напримѣръ, разсматриваются постулаты расположенія, въ статьѣ 5 — вопросы, которые приводятъ къ созданію новѣйшей неархимедовой геометріи. Статьи 6 и 7 трактуютъ о двухъ фундаментальной важности теоріяхъ изъ области элементарной геометріи: ученіи о равенствѣ (эквивалентности) и ученіи о пропорціяхъ. Оба ученія разсматриваются въ послѣдовательномъ ихъ развитіи, одновременно съ критической и исторической точки зрѣнія, при чемъ исходной точкой служитъ опять-таки Евклидъ. 8-ая и послѣдняя статья (Бонолы) даетъ элементарную разработку вопросовъ, относящихся къ постулату параллельности и къ неевклидовой геометріи; она посвящена, главнымъ образомъ, систематическому разсмотрѣнію вопроса, въ то время какъ отдѣльная книга того же автора («Неевклидова геометрія») даетъ болѣе пространное изложеніе исторіи вопроса.

Переводъ выполненъ съ нѣмецкаго изданія 1911 г., для котораго всѣ статьи были значительно дополнены или совершенно переработаны авторами. Во время печатанія перевода появилось въ свѣтъ новое изданіе итальянскаго оригинала, которое вполнѣ совпадаетъ съ нѣмецкимъ изданіемъ 1911 г., если не считать незначительныхъ измѣненій въ примѣчаніяхъ и статьи Бонолы. Переводъ этой послѣдней статьи свѣренъ съ послѣдней итальянской редакціей и согласованъ съ ней. По новому итальянскому изданію исправлены также опечатки и погрѣшности въ другихъ статьяхъ, а также дополнены примѣчанія.

I. Яшунскій.

По поводу того же сочиненія.

Въ предыдущемъ собственномъ сообщеніи редактора перевода изложено содержаніе сочиненія и указаны его задачи. Считаю себя обязаннымъ, съ своей стороны, горячо рекомендовать читателямъ «Вѣстника» эту прекрасную книгу. Всѣ статьи написаны строго научно, съ полнымъ знаніемъ дѣла, читаются безъ большого напряженія, хотя, конечно, требуютъ вдумчивости. Къ сожалѣнію, у насъ очень часто считаютъ популярной только такую книгу, которая читается, какъ фельетонъ, или журнальная статья. Серьезное математическое сочиненіе, конечно, никогда не можетъ претендовать на такую доступность; она требуетъ вниманія, требуетъ вдумчивости. Но читатель, который дѣйствительно интересуется дѣломъ и посвятитъ этому сочиненію нѣкоторое время, извлечетъ изъ него большую пользу. Книга написана дѣйствительно элементарно. Средняго математическаго образованія вполнѣ достаточно, чтобы съ ней справиться. Привѣтствую появленіе этой книги, какъ одно изъ лучшихъ пріобрѣтеній нашей переводной математической литературы за послѣднее время.

В. Каганъ.

А. Киселевъ — *Систематическій курсъ ариѳметики.* 25-ое изданіе, 1913 г.

Главнѣйшія измѣненія и дополненія, введенныя въ 25-ое изданіе, состоятъ вь слѣдующемъ:

Въ § 25 правило сложенія цѣлыхъ чиселъ изложено болѣе просто и ясно. Въ § 47 перемѣстительное свойство произведенія разъяснено болѣе наглядно. §§ 149, 150, 151 и 152 («Измѣненіе величины дроби съ измѣненіемъ ея членовъ») изложены болѣе систематично и ясно. Въ §§ 193 и 194 нѣсколько улучшено изложеніе дѣленія десятичной дроби на цѣлое число.

Сверхъ этихъ измѣненій, укажемъ еще нѣкоторыя, введенныя въ мелкій шрифтъ (для учащихся старшихъ классовъ), съ цѣлью достиженія большей систематичности, полноты и научности. Добавленъ § 21,*а*, въ которомъ разъясняется, что указанное въ текстѣ главное свойство суммы распадается въ сущности на два отдѣльныя свойства, называемыя «перемѣстительнымъ» и «сочетательнымъ». Въ § 33 добавлено замѣчаніе, что измѣненіе суммы, указанное въ этомъ параграфѣ, представляетъ собою слѣдствіе свойствъ сочетательнаго и перемѣстительнаго. Добавленъ § 61,*a* о сочетательномъ и распредѣлительномъ свойствахъ произведенія. Въ §§ 163,*b* и 170 добавлено о перемѣстительномъ, сочетательномъ и распредѣлительномъ свойствахъ по отношенію къ дробнымъ числамъ. Добавленъ § 208,*a* — «Безконечныя десятичныя дроби непеਰіодическія» – и обобщенъ на такія дроби признакъ неравенства, указанный раньше для дробей конечныхъ. Взамѣнъ прежняго § 241,*a* («Общія формулы процентовъ») теперь данъ болѣе полный § 241, въ которомъ, между прочимъ, разъясненъ пріемъ вычисленія процентовъ, практикуемый очень часто въ банковыхъ операціяхъ.

А. Киселевъ.—*Начала дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій* (курсъ VII класса реальныхъ училищъ). 4-ое улучшенное изданіе, 1913 г.

Въ 4-мъ изданіи, сверхъ мелкихъ улучшеній, введены слѣдующія измѣненія:

Въ § 22 дано болѣе строгое и точное опредѣленіе функцій алгебраическихъ и трансцендентныхъ. Въ §§ 35 и 36 даны новые, болѣе подробные и точные графики функцій показательной и логариѳмической и въ § 36 улучшено изложеніе зависимости между этими двумя функціями. Опредѣленіе дифференціала, дававшееся прежде въ § 40, непосредственно послѣ опредѣленія производной, теперь изложено нами въ § 89,*a*, т. е. въ самомъ концѣ дифференціальнаго исчисленія, передъ исчисленіемъ интегральнымъ; мы руководились при этомъ соображеніемъ, что въ анализѣ безконечно-малыхъ (по крайней мѣрѣ, въ томъ его объемѣ, который назначается для среднихъ учебныхъ заведеній) потребность въ этомъ отвлеченномъ понятіи ощущается лишь въ интегральномъ исчисленіи, а не въ дифференціальномъ, и потому всего естественнѣе помѣщать опредѣленіе и разъясненіе дифференціала на рубежѣ этихъ двухъ вѣтвей анализа. § 77 («Примѣненіе производныхъ высшихъ порядковъ къ нахожденію maximum и minimum функцій») изложенъ нами теперь мелкимъ шрифтомъ съ цѣлью показать, что содержаніе этого параграфа въ курсѣ средняго учебнаго заведенія представляетъ собою нѣкоторую роскошь, безъ которой можно и обойтись, какъ это видно изъ примѣровъ, изложенныхъ въ § 78.

ОПЕЧАТКИ.

	Стран.:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
Въ № 579, въ „Замѣткѣ о непрерывныхъ дробяхъ" *С. О. Шатуновскаго*	71	10 сверху	При $n > 1$	При $n = 1$
Въ № 580, въ „Замѣткѣ о непрерывныхъ функціяхъ" *В. Даватца*	95 96	12 снизу 4 сверху	Римана	Дирихле
Въ № 581, въ статьѣ „Этюды по элементарной алгебрѣ" *Н. Никоса*	128	9 сверху	$\frac{x^n - a_n}{x^r - a^r}$	$\frac{x^n - a^n}{x^r - a^r}$

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 94 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 95 (6 сер.). Даны три точки A, B, C. Черезъ точку B провести прямую такъ, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ A и отъ C была равна квадрату даннаго отрѣзка k.

Д. Аитовъ (Парижъ).

№ 96 (6 сер). Доказать справедливость неравенства

$$h_a + h_b + h_c \geqq 9r,$$

гдѣ h_a, h_b, h_c, r суть высоты и радіусъ вписаннаго круга нѣкотораго треугольника.

Л. Богдановичъ (Н.-Новгородъ).

№ 97 (6 сер.). Доказать неравенство

$$a^4 + b^4 \geqq a^3b + ab^3,$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя числа. Въ какомъ случаѣ возможенъ знакъ равенства?

А. Кисловъ (Москва).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 65 (6 сер.). *Найти предѣлъ выраженія*

$$\frac{a^x - x^a}{a - x}$$

(a — *данное положительное число) при неограниченномъ приближеніи* x *къ* a.

Введя обозначенія

(1) $$x^a = f(x), \quad a^x = g(x),$$

придадимъ данному выраженію слѣдующій видъ:

(2) $$\frac{a^x - x^a}{a - x} = \frac{x^x - a^a + a^a - a^x}{x - a} = \frac{x^a - a^a}{x - a} - \frac{a^x - a^a}{x - a} = \\ = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Предполагая извѣстными правила дифференцированія степени и показательной функціи, имѣемъ [см. (1)]: $f'(x) = ax^{a-1}$, $g'(x) = a^x \lg a$,

$$\lim_{x=a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = [ax^{a-1}]_{x=a} = a^a,$$

$$\lim_{x=a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) = [a^x \lg a]_{x=a} = a^a \lg a.$$

Поэтому [см. (2)]

$$\lim_{x=a} \frac{a^x - x^a}{a - x} = \lim_{x=a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x=a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = a^a - a^a \lg a = a^a(1 - \lg a),$$

гдѣ $\lg a$ есть натуральный логариѳмъ числа a.

Не прибѣгая къ формуламъ дифференцированія функцій, задачу можно также рѣшить, считая извѣстнымъ предѣлъ

(3) $$\lim_{x=0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

гдѣ e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Съ этой цѣлью, полагая $x = a + h$, представимъ данное выраженіе въ видѣ

(4) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{a^x - x^a}{a - x} = \frac{(a + h)^a - a^{a+h}}{h} = \frac{\left[a\left(1 + \frac{h}{a}\right)\right]^a - a^{a+h}}{h} = \\ &= \frac{a^a\left(1 + \frac{h}{a}\right)^a - a^a \cdot a^h}{h} = a^a \left[\frac{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^a - 1}{h} - \frac{a^h - 1}{h}\right]. \end{aligned} \right.$$

Полагая $\frac{h}{a} = y$, имѣемъ

$$\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^a - 1}{h} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^a - 1}{\left(\frac{h}{a}\right)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{(1+y)^a-1}{y}.$$

Наконецъ, полагая $(1+y)^a - 1 = u$, находимъ послѣдовательно:

$$(1+y)^a = 1+u, \quad a\log(1+y) = \log(1+u),$$

(при чемъ логариѳмы, какъ и вездѣ дальше, натуральные), откуда

$$\frac{1}{a} = \frac{\log(1+y)}{\log(1+u)};$$

такимъ образомъ,

$$\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^a - 1}{h} = \frac{u\log(1+y)}{y\log(1+u)} = \frac{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}{\log(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Когда x стремится къ a, то h и вмѣстѣ съ тѣмъ y стремятся къ нулю, а вмѣстѣ съ y, въ силу непрерывности функціи $(1+y)^a$, стремится къ нулю и u. Поэтому

$$(5) \qquad \lim_{h=0}\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^a - 1}{h} = \frac{\lim\limits_{y=0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}{\lim\limits_{u=0}\log(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{\log e}{\log e} = 1.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$a^h - 1 = v, \quad a^h = 1+v, \quad h\log a = \log(1+v),$$

$$h = \frac{\log(1+v)}{\log a}, \quad \frac{a^h-1}{h} = \log a\cdot\frac{v}{\log(1+v)} = \log a\cdot\frac{1}{\log(1+v)^{\frac{1}{v}}},$$

откуда

$$\lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h} = \log a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{v=0}\log(1+v)^{\frac{1}{v}}} = \log a\cdot\frac{1}{\log e} = \log a.$$

Итакъ, [(4), (5), (6)],

$$\lim_{x=a}\frac{a^x - x^a}{a-x} = a^a\left[\lim_{h=0}\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^a - 1}{h} - \lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h}\right] = a^a(1 - \log a).$$

Д. Синцовъ (Харьковъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *Н. Нейцъ* (Самара); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ); *А. Сердобинскій* (Чита).

№ 71 (6 сер). *Доказать неравенство*

$$x^2 + xy + my^2 \geqq m$$

въ предположенiи, что x *— цѣлое число,* y *- цѣлое число, отличное отъ нуля, а* m *— цѣлое положительное число.*

Представимъ выраженiе $x^2 + xy + my^2 - m$ въ видѣ

$$(1) \qquad x^2 + xy + my^2 - m = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + (m-1)(y^2-1) + \left(\frac{3y^2}{4} - 1\right).$$

Такъ какъ y — цѣлое число, отличное отъ нуля, и такъ какъ m — цѣлое положительное число, то $m - 1 \geqq 0$, $y^2 - 1 \geqq 0$, а потому и $(m-1)(y^2-1) \geqq 0$. Кромѣ того и $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \geqq 0$. Если $|y| \geqq 2$, то $\frac{y^2}{4} \geqq 1$, $\frac{3y^2}{4} - 1 \geqq 2 > 0$. Итакъ, при $|y| \geqq 2$, имѣемъ

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \geqq 0, \quad (m-1)(y^2-1)^2 \geqq 0, \quad \frac{3}{4}y^2 - 1 > 0,$$

откуда [см. (1)] слѣдуетъ, что при $|y| \geqq 2$

$$(2) \qquad x^2 + xy + my^2 - m > 0.$$

Такъ какъ $y \neq 0$, то остается разсмотрѣть случай, когда $y = \pm 1$. Въ этихъ случаяхъ имѣемъ соотвѣтственно

$$(3) \qquad x^2 + xy + my^2 - m = x^2 \pm x = x(x \pm 1),$$

а потому выраженiе $x^2 + xy + my^2 - m$ можетъ быть отрицательно лишь при $x(x \pm 1) < 0$, т. е. тогда, если x лежитъ внутри промежутковъ отъ 0 до 1 или отъ 0 до (-1). Другими словами, выраженiе $x^2 \pm x$ отрицательно лишь тогда, если x есть правильная (положительная или отрицательная) дробь. Но по условiю x есть число цѣлое, а потому $x^2 \pm x \geqq 0$. Итакъ, при $y = \pm 1$ имѣемъ [см. (3)]

$$x^2 + xy + my^2 - m \geqq 0,$$

а потому вообще при данныхъ условiяхъ [см. (2)] $x^2 + xy + my^2 - m \geqq 0$, т. е.

$$x^2 + xy + my^2 \geqq m.$$

В. Маловичко (Херсонъ); *Н. Кирьяновъ* (Петербургъ). *И. Зюзинъ* (с. Архангельское).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Ф. Энриквесъ. *Вопросы элементарной геометріи*. Сборникъ статей. Перевелъ І. В. Яшунскій. Съ 149 чертежами въ текстѣ. Изданіе кн-ства „Physice“. С.-Петербургъ, 1913. Стр. VII + 377. Ц. 3 р.

А. А. Ляминъ. *Физико-Математическая Хрестоматія*. Томъ II — „Алгебра“. Изданіе фирмы „Сотрудникъ школъ“ А. К. Залѣсской. Москва, 1913. Стр. 284 Ц. 1 р. 50 к.

К. И. Сергѣевъ. *Единство въ основѣ космоса*. (Панъ-эфирная теорія мірозданія). Изданіе журнала „Физикъ-Любитель“. Николаевъ, 1912. Стр. 232. Ц. 95 коп.

Окт. Вржесневскій. *Доказательство аксіомы параллельныхъ прямыхъ* (5-й постулатъ Эвклида). Изданіе второе, дополненное предисловіемъ противъ Б. К. Млодзѣевскаго и по существу. Москва, 1913. Стр. 22. Ц 20 к.

Н. А. Бухаловъ. *Ученіе о параллельныхъ линіяхъ*. Изданіе 2-е, улучшенное, Казань, 1913. Стр. 24.

Таблицы **Н. А. Извольскаго** *для нагляднаго обученія сложенію дробей съ различными знаменателями*. Книгоиздательство „Школа“. Москва.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
ищется