Обложка
ищется

Обложка
пщется

XLI Сем. № 2.

Вѣстникъ Опытной Физики и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 482.

Благородные и радіоактивные газы.

Вилліама Рамзая, профессора Лондонскаго университета.

Докладъ, сдѣланный въ собраніи австрійскихъ инженеровъ и архитекторовъ въ Вѣнѣ.

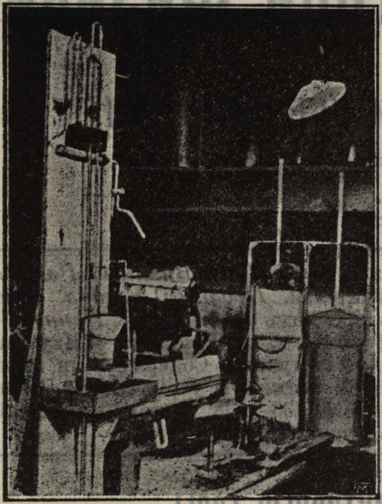
(*Окончаніе* *).

Каждому, несомнѣнно, не разъ приходилось усердно искать то, что лежитъ у него передъ глазами. Часто ищешь очки, которые только-что надвинулъ на лобъ. Такъ было и въ нашемъ случаѣ. Такіе индифферентные газы должны были существовать въ воздухѣ, если только вообще ихъ существованіе возможно; поэтому мы приготовили почти 15 литровъ аргона, удаливъ кислородъ изъ воздуха накаленною мѣдью, а азотъ — магніевыми опилками. Осталось относительно большое количество аргона. Тѣмъ временемъ д-ръ Гампсонъ (Hampson) и д-ръ Линде (Linde) опубликовали одновременно свои способы сжиженія воздуха; англійскій и германскій патенты были взяты въ теченіе того же мѣсяца. Рѣдко случается, что два совершенно независимыхъ другъ отъ друга открытія совершаются въ такой мѣрѣ одновременно, какъ это произошло въ настоящемъ случаѣ. Я былъ съ Гампсономъ въ хорошихъ отношеніяхъ, и, какъ только ему удалось получить жидкій воздухъ въ болѣе или менѣе значительномъ количествѣ, онъ мнѣ прислалъ его около 100 *см*^{3}.

Если хочешь воспользоваться новымъ веществомъ, то нужно знать его проявленія. Мы созвали нашихъ студентовъ и показали имъ замѣчательныя свойства жидкаго воздуха: какъ каучуковая трубка въ немъ затвердѣваетъ, какъ ртуть превращается въ твердое тѣло, какъ богатый кислородомъ газъ воспламеняетъ тлѣющую лучину и т. д. Послѣ

*) См. „Вѣстникъ", № 481.

ряда такихъ опытовъ у насъ осталось еще оклое 70 $см^3$ жидкости; она спокойно кипѣла въ трубкѣ. Мы отправились ѣсть; когда мы возвратились, то немного жидкости все еще у насъ оставалось. Я предложилъ тогда перевести этотъ остатокъ въ газометръ; мы получили при этомъ пару литровъ газа; по освобожденіи отъ кислорода и азота, этотъ газъ далъ спектръ, въ которомъ видны были двѣ очень свѣтлыя, незнакомыя еще намъ линіи, одна въ желтой части спектра, другая въ зеленой части. Кромѣ того, плотность этого газа была равна 22,5; т. е. она была слишкомъ велика въ сравненіи съ плотностью аргона (20), и было очевидно, что мы имѣли въ рукахъ еще болѣе тяжелый газъ. Полагаясь на новый спектръ, мы опубликовали объ открытіи криптона. Два дня спустя д-ръ Гампсонъ опять прислалъ намъ еще запасъ жидкаго воздуха; это дало намъ возможность перевести аргонъ въ жидкое состояніе; онъ представлялъ собою прозрачную, какъ вода, подвижную жидкость.

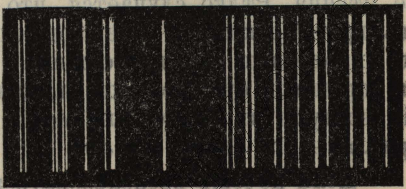


Фиг. 10.

Приборъ для приготовленія аргона въ большомъ количествѣ.

Съ лѣвой стороны виденъ ртутный насосъ. Сзади находится желѣзная трубка, содержащая мѣдь и нагрѣваемая въ газовой печи; видно также пламя газа. Спереди стоятъ резервуары для газовъ, содержащіе нечистый аргонъ. Съ правой стороны ртутнаго насоса видна печь для сожженія, въ которой находится стеклянная трубка съ магніевыми опилками. Сырой аргонъ очищается, проходя черезъ эту трубку, и попадаетъ затѣмъ во второй резервуаръ.

При перегонкѣ смѣси воды и алкоголя, какой ее получаютъ при броженіи, первыя порціи содержатъ почти чистый алкоголь; та жидкость, какъ, напримѣръ, алкоголь, которая кипитъ при болѣе низкой температурѣ, испаряется раньше; затѣмъ слѣдуютъ смѣси алкоголя и вода. Этотъ хорошо всѣмъ извѣстный способъ указалъ намъ путь для открытія нашего болѣе легкаго газа; та порція, которая раньше испаряется, должна была содержать этотъ газъ. Первые газовые пузырьки мы собрали поэтому отдѣльно, и мы не обманулись въ своихъ ожиданіяхъ. Спектръ получился блестящій и, очевидно, новый; трубка свѣтилась ярко-краснымъ свѣтомъ, происходившимъ отъ большого числа красныхъ линій. Когда мы въ первый разъ разсматривали этотъ спектръ, при этомъ находился и мой двѣнадцатилѣтній сынъ. „Отецъ“, сказалъ онъ, „какъ

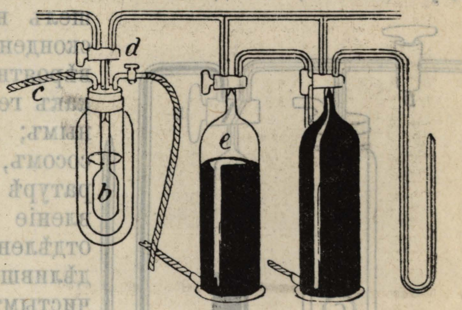


Красный. Фиг. 11. Фіолетовый.

Спектръ криптона.

называется этотъ красивый газъ?“ „Это еще не рѣшено“, отвѣтилъ я. „Что, онъ новый“? полюбопытствовалъ онъ. „Новооткрытый“, возразилъ я. „Почему бы въ такомъ случаѣ не назвать его novum, отецъ“? „Это не идетъ, потому что novum не греческое слово“, отвѣтилъ я; „мы назовемъ его неономъ; это по-гречески значитъ новый“. Вотъ такимъ-то образомъ газъ получилъ свое названіе.

По значенію найденной нами плотности болѣе легкой части воздуха, послѣдняя не находила себѣ подходящаго мѣста въ періодической системѣ. Какъ видно изъ таблицы, она должна была имѣть атомный вѣсъ 20, что соотвѣтствовало бы плотности 10, но найденная плотность всегда оказывалась ниже. Вскорѣ мы открыли въ ней присутствіе спектральныхъ линій гелія, что сейчасъ же и объяснило эту слишкомъ малую плотность. Теперь же на первый планъ выступилъ вопросъ объ отдѣленіи этихъ двухъ газовъ гелія и неона другъ отъ друга; мы пробовали произвести нѣчто въ родѣ дробной перегонки, растворяя эту смѣсь въ водѣ, въ алкоголѣ, въ бензолѣ, въ жидкомъ кислородѣ и даже въ жидкомъ азотѣ, но все безуспѣшно.

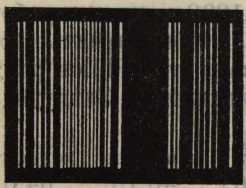


Фиг. 12.

Аппаратъ для сжиженія 15 литровъ аргона.

Водяной газометръ, изображенный на фиг. 10, соединялся съ трубкой *a*; черезъ каучуковую трубку жидкій воздухъ переводился въ вакуумъ; трубка *c* соединена съ воздушнымъ насосомъ системы Илеуса (Ileuss), и жидкій воздухъ, находящійся въ соприкосновеніи съ шарикомъ *b*, кипитъ подъ уменьшеннымъ давленіемъ; аргонъ сжижается въ сосудъ *b*. Когда весь аргонъ перешелъ въ жидкое состояніе, кранъ *d* поворачиваютъ такъ, что первыя порціи кипящаго аргона собираются въ сосудъ *e*. Этотъ пріемъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока отъ аргона не отдѣлятся неонъ и сопровождающій его гелій.

Тѣмъ временемъ я купилъ аппаратъ для сжиженія воздуха по Гампсону, и мы начали вскорѣ сами готовить жидкій воздухъ. Для отдѣленія неона и аргона мы употребили почти 30 литровъ жидкаго воздуха; остатки всѣ тщательно сохранялись. Потомъ Траверсъ и мой механикъ Гольдингъ (Holding) стали придумывать аппаратъ для сжиженія водорода.

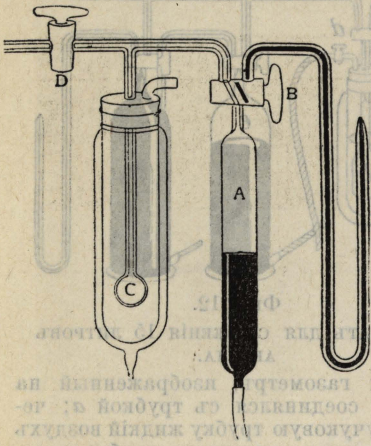


Красный. Фиг. 13. Фіолетовый.

Спектръ неона.

Хотя Ольшевскій и получилъ водородъ въ жидкомъ состояніи, но онъ наблюдалъ его только въ видѣ сильно кипѣвшей жидкости, въ толстостѣнной стеклянной трубкѣ. И Дьюаръ (Dewar) превратилъ водородъ въ жидкое состояніе, но способъ свой онъ тщательно скрывалъ, и мы знали, что никто не имѣлъ права вступить въ святыню „Royal Institution“, гдѣ Дьюаръ былъ самодержцемъ.

По истеченіи приблизительно двухъ мѣсяцевъ Траверсъ и Гольдингъ построили собственными руками машину, по образцу аппарата Гампсона, помощью которой, уже при первыхъ опытахъ, было приготовлено 80 *см*^{3} жидкаго водорода. Въ продолженіе получаса было закончено также отдѣленіе неона и гелія; при охлажденіи смѣси этихъ двухъ газовъ, находившихся въ колбочкѣ, жидкимъ водородомъ, перешелъ въ жидкое состояніе (или, лучше, сконденсировался, такъ какъ онъ былъ, вѣроятно, твердымъ) неонъ, между тѣмъ какъ гелій все еще оставался газообразнымъ; гелій выкачивался ртутнымъ насосомъ, а неонъ оставался. При температурѣ 20.5 выше абсолютнаго нуля давленіе его пара было равно 18 *мм*. По отдѣленіи гелія, аппаратъ нагрѣли, и выдѣлившійся черезъ насосъ неонъ оказался чистымъ. Теперь уже его плотность равнялась 10, соотвѣтственно атомному вѣсу 20; это, дѣйствительно, былъ, слѣдовательно, предсказанный мною еще „неоткрытый элементъ“.



Фиг. 14.

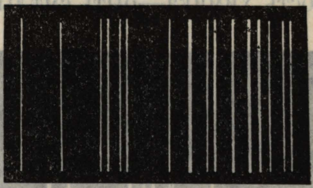
Аппаратъ для отдѣленія аргона, криптона и ксенона.

Аппаратъ этотъ въ общихъ чертахъ одинаковъ съ изображеннымъ на фиг. 12. Такъ какъ аргонъ уже большею частью отдѣленъ отъ криптона и ксенона, то достаточно имѣть малый аппаратъ. Смѣсь газовъ изъ сосуда *A* выпускается въ трубку *C*, и здѣсь конденсируются криптонъ и ксенонъ. Аргонъ сперва выкачивается черезъ крачъ *D*, потомъ слѣдуетъ криптонъ и, наконецъ, по удаленіи жидкаго воздуха, ксенонъ.

Остатки жидкаго воздуха были подвергнуты дальнѣйшему изслѣдованію. Послѣ длиннаго ряда фракціонировокъ, мы выдѣлили криптонъ, и, такъ какъ давленіе его при температурѣ кипящаго воздуха было только 12 *мм*, то представлялось возможнымъ отдѣлить аргонъ насосомъ, не теряя при этомъ слишкомъ много криптона. Мы все-таки продолжали выкачиваніе, чтобы удалить изъ колбочки и криптонъ. Мы замѣтили при этомъ, что, когда колбочка нагрѣлась, оставалось выкачать еще нѣсколько газовыхъ пузырьковъ; это маленькое количество газа было собрано отдѣльно, и по своему спектру газъ этотъ оказался новымъ; мы назвали его ксенономъ (чуждымъ). Опыты эти были произведены въ 1898 г., но ими работа наша только началась; понадобилось еще два года, чтобы изучить свойства этихъ газовъ. Осенью 1900 г. мы опубликовали въ „Philosophical Transactions“ полное описаніе аргона и его спутниковъ. Слѣдующая таблица даетъ нѣкоторыя свойства этихъ газовъ.

	гелій	неонъ	аргонъ	криптонъ	ксенонъ
Плотность газа	1.98	9.96	19.96	40.78	64.0
Атомный вѣсъ газа	3.96	19.92	39.92	81.56	128.0
Удѣльный вѣсъ жидкости . .	0.3(?)	1.0(?)	1.212	2.155	3.52
Точка кипѣнія жидкости . .	?	?	—186.1°	—151.7°	—169.1°
Точка плавленія элемента . .	?	?	—187.9°	—169.0°	—140.0°
Критическая температура . .	?	?	—117.4°	— 62.5°	+ 14.75°
Критическое давленіе . . .	?	?	40.2 *м*	41.24 *м*	42.5 *м*
Преломленіе газа (воздухъ = 1)	0.124	0.235	0.968	1.450	2.368

Мы часто имѣли случай наблюдать, что всѣ тѣ минералы, которые при нагрѣваніи выдѣляютъ гелій, содержатъ также уранъ. Возникало, слѣдовательно, предположеніе, что уранъ, именно, и есть тотъ элементъ, съ которымъ гелій находится въ минералахъ въ соединеніи. Мы произвели много опытовъ, чтобы установить, существуетъ ли опредѣленное соотношеніе между вѣсовымъ количествомъ урана и содержаніемъ гелія, но безуспѣшно. Мы часто пытались также соединить гелій съ ураномъ, но также безуспѣшно.



Красный. Фиг. 15. Фіолетовый.
Спектръ ксенона.

Г-жа Кюри (Curie), открывшая радій, замѣтила, что различные предметы, находившіеся вблизи ея препаратовъ радія, обладали „наведенной активностью". Вскорѣ послѣ этого д-ръ Шмидтъ (Schmidt) нашелъ, что аналогичный элементъ торій выдѣлялъ родъ газа, который также былъ радіоактивенъ. Рётгерфордъ и Содди (Soddy) въ Монреалѣ изслѣдовали этотъ газъ, а также аналогичный ему газъ, полученный изъ радія; они показали, что газы эти отличаются своей химической индифферентностью, и что они конденсируются при температурѣ кипящаго воздуха. Индифферентность эта, по отношенію къ химическимъ воздѣйствіямъ, напоминаетъ инертность газовъ группы аргона.

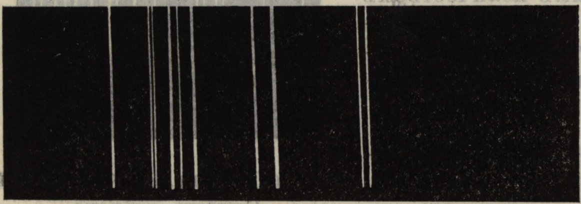
Хорошо извѣстно также, какъ супруги Кюри изслѣдовали различные, испускаемые радіемъ, лучи. Между ними нужно различать α, β и γ-лучи. Рётгерфордъ и другіе произвели приблизительное измѣреніе относительной массы частицъ, образующихъ α и β-лучи, и въ результатѣ получили, что частички α-лучей имѣютъ, приблизительно, ту же величину, что и молекулы водорода.

Рётгерфордъ и Содди предположили даже, что α-лучи, быть можетъ, состоятъ изъ атомовъ гелія.

По счастливой случайности, въ мою лабораторію въ ту пору прибылъ поработать у меня Содди. Мы сейчасъ же занялись изученіемъ свойствъ эманаціи радія. Работу съ новооткрытымъ газомъ начинаютъ изученіемъ его спектра, и въ 1902 г. мы произвели многочисленные опыты въ этомъ направленіи. Но количество эманаціи было все еще слишкомъ мало. Даже съ количествомъ эманаціи, полученнымъ отъ 50 *мг* бромистаго радія, намъ не удалось получить видимаго спектра. Только позже, послѣ отъѣзда Содди, намъ съ Колли счастье улыбнулось: работая съ бóльшимъ количествомъ эманаціи, мы отмѣтили нѣсколько линій и измѣрили длины ихъ волнъ.

При этихъ опытахъ мы съ Содди сдѣлали замѣчательное открытіе: мы нашли, что черезъ нѣкоторое время Гитторфова трубка, наполненная эманаціей, давала спектръ гелія. Это было нѣчто удивительное. Еще столѣтіе тому назадъ вѣрили во взаимное превращеніе металловъ; алхимики напрягли всѣ свои усилія на превращеніе не-благородныхъ металловъ въ золото. Въ настоящее время эту вѣру, или лучше, это суевѣріе оставили. Еще въ началѣ прошлаго столѣтія были болѣе склонны допускать возможность такого превращенія.

Въ 1811 году Гёмфри Дэви (Humphry Davy) писалъ: „Обязанность химика—быть смѣлымъ при изслѣдованіяхъ; онъ не долженъ забывать, какъ часто наука противорѣчитъ опыту. Вопросъ о разложеніи металловъ есть великая проблема истинной натурфилософіи“. Въ 1815 г. Фарадэй высказался подобнымъ же образомъ: „Разложить металлы, опять соединить ихъ и осуществить нелѣпое нѣкогда понятіе о превращеніи,— это проблемы, которыя въ настоящее время долженъ разрѣшить химикъ“.



Красный, Фиг. 16. Фіолетовый.

Эманація радія.

Нынѣ же Рётгерфордъ высказалъ идею, что радій разлагается на другія вещества; но всѣ эти тѣла, названныя „эманаціей“, радіемъ *A*, *B*, *C* и т. д., были по своимъ свойствамъ неизвѣстны. Радій же — самъ элементъ, одаренный опредѣленными свойствами; онъ образуетъ соли, сходныя съ солями барія, обладаетъ характернымъ спектромъ съ ясно выраженными красными линіями, его атомный вѣсъ, многократно опредѣленный, равенъ 226; короче говоря, радій долженъ быть названъ элементомъ. Самопроизвольное превращеніе его въ эманацію и въ радій *A*, *B*, и т. д., хотя и замѣчательно, но не производитъ впечатлѣнія трансмутаціи, потому что количество этихъ продуктовъ столь мало, что присутствіе ихъ можетъ быть опредѣлено лишь по ихъ электрическимъ дѣйствіямъ. Открытіе гелія, какъ продукта превращенія радія, пролило внезапно новый свѣтъ на это дѣло и увеличило вѣроятность гипотезы Рётгерфорда, что промежуточные продукты превращенія радія должны быть разсматриваемы, какъ нестойкіе элементы. Но этимъ не все еще сказано. При изслѣдованіи эманаціи я замѣтилъ, что она въ состояніи разлагать воду на кислородъ и водородъ. Хотя Гизелъ (Gisel) и раньше наблюдалъ, что газы, выдѣляющіеся изъ раствора радіевыхъ солей, состоятъ изъ смѣси водорода и кислорода, но фактъ тотъ, что эманація, которая выдѣляется изъ радія, есть настоящая причина этого разложенія воды.

Намѣреваясь изучить этотъ родъ электролиза, я подвергнулъ растворъ мѣднаго купороса дѣйствію эманаціи. Мѣдь была выбрана просто потому, что она при электролизѣ легко осаждается. Я былъ пораженъ, найдя, что выдѣлялась не чистая металлическая мѣдь, и еще болѣе удивился, когда я нашелъ, что, по удаленіи мѣди, весьма малый остатокъ давалъ спектръ литія. Была видна также и желтая натріевая линія, но въ этомъ не было ничего удивительнаго, такъ какъ опыты производились въ сосудахъ, содержащихъ натрій. Впервые это было замѣчено мною лѣтомъ 1906 г. Естественно, нужно было повторить опыты съ тщательно очищенными матеріалами, на что потребовался еще годъ; осенью 1907 года я уже нашелъ возможнымъ опубликовать результаты четырехкратно повторенныхъ мною опытовъ.

При этихъ опытахъ былъ изслѣдованъ также газъ, выдѣлявшійся изъ мѣдныхъ растворовъ. Тутъ мы опять замѣтили нѣчто поразительное. Вмѣсто наблюдавшейся раньше желтой линіи гелія, образовавшагося изъ эманаціи, былъ виденъ лишь спектръ аргона. Но не лишено возможности и то, что аргонъ могъ случайно проникнуть въ аппаратъ изъ воздуха; но эта гипотеза не объясняетъ еще отсутствія гелія. Я нашелъ также, совмѣстно съ моимъ ученикомъ Камерономъ (Cameron), что изъ воднаго раствора эманаціи выдѣляется вмѣстѣ съ гремучимъ газомъ неонъ, а не гелій. Наблюденіе это подтверждено теперь спектрографически. Производятся еще и другіе опыты, но еще рано высказаться относительно полученныхъ при этомъ результатовъ.

Но намъ кажется весьма вѣроятнымъ, что эманацію, стойкую по отношенію ко всѣмъ химическимъ реактивамъ, можно причислить къ ряду благородныхъ (недѣятельныхъ) газовъ. Если утвержденіе это справедливо, то эманація должна имѣть высокій атомный вѣсъ, потому что въ этомъ ряду свободны только два мѣста: одно — для элемента съ атомнымъ вѣсомъ $128 + 45 = 173$, и другое мѣсто для элемента съ атомнымъ вѣсомъ $128 + 90 = 218$. Съ другой стороны, есть основаніе предположить, что, если одинъ элементъ при какихъ-либо обстоятельствахъ пріобрѣтаетъ способность разлагаться, то продуктами этого распада будутъ элементы той же самой группы; и такъ какъ гелій, неонъ, — и возможно, что и аргонъ, — принадлежатъ къ газообразнымъ продуктамъ распада эманаціи въ зависимости отъ того, происходитъ ли разложеніе безъ внѣшняго вліянія, или отъ дѣйствія воды, или растворомъ мѣднаго купороса, и, далѣе, такъ какъ литій находится, повидимому, между продуктами воздѣйствія эманаціи на растворъ мѣднаго купороса, то кажется, что не исключено и то, что въ первомъ случаѣ только одна часть эманаціи даетъ такіе продукты, какъ гелій и неонъ, между тѣмъ какъ гораздо бóльшая часть, почти 92% общаго количества, служитъ источникомъ энергіи вѣдь эманація — источникъ необычайной энергіи. Одинъ куб. сантиметръ ея, если только мы могли бы столько собрать, выдѣлилъ, при разложеніи, больше теплоты, чѣмъ почти три милліона куб. сантиметровъ, т. е. три куб. метра, взрывающаго гремучаго газа. Въ самомъ дѣлѣ, благодаря доброжелательному содѣйствію Австрійской Академіи Наукъ, я имѣю теперь столько бромистаго радія, что каждые четыре дня я получаю, приблизительно, $1^1/_2$ *мм*³ эманаціи, слѣдовательно, эквивалентъ энергіи, содержащейся въ четырехъ литрахъ гремучаго газа. Ея химическое дѣйствіе необычайно велико: угольная кислота распадается на углеродъ и кислородъ, аммiакъ — на азотъ и водородъ, хлористый водородъ — на хлоръ и водородъ; синтетическое дѣйствіе эманаціи также не мало: такъ, дѣйствіемъ ея вновь соединяются выдѣленные изъ аммiака азотъ и водородъ — въ аммiакъ. Говоря короче, въ эманаціи мы имѣемъ химическое оружіе, превосходящее обычные реактивы настолько же, насколько современное ружье превосходитъ лукъ нашихъ предковъ.

Да будетъ же намъ дана возможность покорить съ ея помощью еще многія области.

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(*Продолженіе* *).

3. Мы переходимъ теперь къ современному развитію этихъ идей, которое, впрочемъ, оказало уже свое вліяніе и на Пеано. Я разумѣю ту обработку ученія о числѣ, которое кладетъ въ основу понятіе о комплексѣ, или множествѣ. Общую идею о комплексѣ—вы составите себѣ представленіе о широкомъ объемѣ этого понятія, если я скажу вамъ, что совокупность всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, съ одной стороны, и совокупность всѣхъ точекъ отрѣзка, съ другой стороны, представляютъ собой частные примѣры комплексовъ—эту общую идею впервые сдѣлалъ предметомъ систематическаго математическаго изслѣдованія Георгъ Канторъ (G. Kantor), профессоръ въ Галле; созданное имъ ученіе о комплексахъ, или множествахъ, (Mengenlehre) въ настоящее время значительно заинтересовало молодое поколѣніе математисковъ. Позже я еще попытаюсь дать вамъ возможность заглянуть въ эту теорію; здѣсь же я ограничусь слѣдующей краткой характеристикой этой новой системы ариѳметики: эта система старается свести свойства цѣлыхъ чиселъ и относящихся къ нимъ операцій къ общимъ свойствамъ комплексовъ и связанныхъ съ ними абстрактныхъ соотношеній; этимъ имѣется въ виду достигнуть возможно болѣе глубокаго обоснованія теоріи на наиболѣе общей основѣ. Въ качествѣ піонера этого направленія я долженъ указать еще Р. Дедекинда (R. Dedekind), который въ своей небольшой, но весьма содержательной книжкѣ „Что такое числа и каково ихъ значеніе“? **) впервые далъ такое обоснованіе ученія о цѣлыхъ числахъ. Къ этой точкѣ зрѣнія по существу примыкаетъ и Г. Веберъ (H. Weber) въ первой главѣ I-го тома „Энциклопедіи элементарной математики“. Однако, оказывается, что развитіе теоріи становится при этомъ настолько отвлеченнымъ и мало доступнымъ, что въ приложеніи къ третьему тому того же сочиненія авторъ былъ вынужденъ дать болѣе элементарное изложеніе того же предмета, оперирующее исключительно надъ конечными комплексами. На это приложеніе я настойчиво обращаю вниманіе всѣхъ, кто интересуется этимъ предметомъ.

---

*) См. „Вѣстникъ“, № 481.

**) R. Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen“. Braunschweig, 1888

4. Наконецъ, въ заключеніе, я хочу привести еще чисто формальную теорію числа, которая восходитъ еще до Лейбница и которая въ послѣднее время особенно выдвинута Гильбертомъ. Къ ариѳметикѣ относится въ этомъ смыслѣ его докладъ на третьемъ международномъ математическомъ конгрессѣ въ Гейдельбергѣ „Объ основахъ логики и ариѳметики"*). Точка исхода здѣсь заключается въ слѣдующемъ. Если мы уже располагаемъ одиннадцатью законами счета, то мы можемъ вести счетъ въ буквахъ *a*, *b*, *c*, выражающихъ любыя числа, совершенно не считаясь съ тѣмъ значеніемъ, которое таковыя имѣютъ, какъ числа. Или яснѣе: пусть *a*, *b*, *c*... будутъ вещи безъ всякаго значенія, вѣрнѣе, вещи, о значеніи которыхъ намъ ничего неизвѣстно. Положимъ также, что намъ все-же извѣстно, что надъ ними можноп роизводить операціи согласно перечисленнымъ одиннадцати основнымъ положеніямъ, хотя бы эти операціи не имѣли какого-либо извѣстнаго намъ содержанія; тогда мы можемъ оперировать надъ этими объектами совершенно такъ же, какъ и надъ обыкновенными числами; но при этомъ возникаетъ только вопросъ, не могутъ ли эти операціи когда-либо привести къ противорѣчію. Если обыкновенно говорятъ, что опытъ обнаруживаетъ существованіе чиселъ, для которыхъ перечисленныя правила имѣютъ мѣсто, и что въ этихъ правилахъ, слѣдовательно, нѣтъ противорѣчія, то теперь, когда мы отказываемся отъ реальнаго значенія этихъ символовъ, такого рода ссылка на наглядное представленіе уже недопустима. Вмѣстѣ съ тѣмъ возникаетъ совершенно новая задача доказать чисто логически, что при любыхъ операціяхъ надъ нашими символами согласно перечисленнымъ одиннадцати основнымъ законамъ, мы никогда не придемъ къ противорѣчію, т. е. упомянутые одиннадцать законовъ логически совмѣстны (consistent). Если мы вначалѣ, при изложеніи первой точки зрѣнія, сказали, что достовѣрность математики покоится на существованіи наглядныхъ объектовъ, для которыхъ имѣютъ мѣсто ея законы, то представитель настоящей формальной точки зрѣнія усматриваетъ достовѣрность математики въ томъ, что основные ея законы, съ чисто формальной точки зрѣнія, независимо отъ ихъ нагляднаго содержанія, представляютъ логически цѣльную систему, не содержащую противорѣчія.

Для выясненія и оцѣнки этой новой точки зрѣнія я долженъ сдѣлать еще нѣсколько замѣчаній.

a) Гильбертъ формулировалъ эти идеи по отношенію къ ариѳметикѣ и началъ ихъ разрабатывать, но онъ отнюдь не далъ полнаго развитія ихъ. Послѣ упомянутаго доклада онъ еще разъ возвратился къ этому предмету въ одной лекціи, но больше этими вопросами не занимался. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что здѣсь мы имѣемъ передъ собой только программу.

b) Попытка совершенно изгнать воззрѣніе и удержать только логическое изслѣдованіе представляется мнѣ въ полной мѣрѣ неосуществимой.

*) D. Hilbert. „Über die Grundlagen der Logik u. Arithmetik". Verhandlungen des III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8 bis 13 August 1904 (Leipzig 1905), pag. 174 f.f.

Нѣкоторый остатокъ, нѣкоторый минимумъ интуиціи всегда долженъ сохраниться, и эти остаточныя интуитивныя представленія мы необходимо должны соединять съ символами, надъ которыми оперируемъ, даже уже потому, что мы должны эти символы постоянно вновь узнавать,—хотя бы этотъ остатокъ и сводился только къ внѣшнему виду нашихъ символовъ.

c) Но примемъ даже, что поставленная задача дѣйствительно безупречно разрѣшена, что обнаружено чисто логически отсутствіе противорѣчія въ нашихъ одиннадцати основныхъ положеніяхъ. Но тогда все еще остается мѣсто возраженію, которому я придаю наибольшее значеніе. Нужно себѣ уяснить, что эти соображенія собственно обоснованія ариѳметики еще отнюдь не даютъ, и что въ этомъ порядкѣ идей его и нельзя провести. Именно, совершенно невозможно чисто логическимъ путемъ показать что законы, въ которыхъ мы обнаружили отсутствіе логическаго противорѣчія, дѣйствительно имѣютъ силу по отношенію къ числамъ, столь хорошо намъ извѣстнымъ эмпирически, что неопредѣленные объекты, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, могутъ быть отождествлены съ реальными числами, а сопряженія, которыя мы производимъ,—съ реальными эмпирическими процессами. Что здѣсь дѣйствительно достигается—это только расчлененіе обширной задачи обоснованія ариѳметики, мало доступной по своей сложности, на двѣ части; первая часть представляетъ собой чисто логическую проблему установленія независимыхъ другъ отъ друга основныхъ положеній, или аксіомъ, и доказательства ихъ независимости и отсутствія противорѣчія. Вторая часть задачи относится скорѣе къ теоріи познанія и въ извѣстной мѣрѣ выражаетъ примѣненіе названныхъ логическихъ изслѣдованій къ реальнымъ соотношеніямъ; къ разработкѣ этой второй задачи, строго говоря, еще не приступлено, хотя для дѣйствительнаго обоснованія ариѳметики и она необходимо должна быть исчерпана. Эта вторая часть вопроса представляетъ крайне глубокую задачу, трудность которой коренится въ общихъ проблемахъ теоріи познанія. Быть можетъ, я выражу наиболѣе ясно постановку этого вопроса, если выскажу нѣсколько парадоксальное утвержденіе, что всякій, который признаетъ чистой математикой только чисто логическое изслѣдованіе, необходимо вынужденъ будетъ отнести вторую часть проблемы обоснованія ариѳметики, а вмѣстѣ съ этимъ, стало быть, и самую ариѳметику, къ прикладной математикѣ.

Я считаю необходимымъ отчетливо все это здѣсь указать, такъ какъ въ этомъ именно пунктѣ наиболѣе часто возникаютъ недоразумѣнія вслѣдствіе того, что многіе просто не замѣчаютъ существованія этой второй задачи. Гильбертъ самъ отнюдь не стоитъ на этой точкѣ зрѣнія, и мы не можемъ признать ни одобреній ни возраженій его теоріи, которыя исходятъ изъ такого именно допущенія. Томэ (Thomae), профессоръ въ Вѣнѣ, остроумно назвалъ людей, стоящихъ на почвѣ этихъ чисто абстрактно логическихъ изслѣдованій о вещахъ, ничего не обозначающихъ, и о предложеніяхъ, ничего не выражающихъ, которые, такимъ образомъ, не только забываютъ эту вторую проблему, но вмѣстѣ съ ней и всю остальную математику,—мыслителями безъ мысли; конечно, это ироническое замѣчаніе не можетъ относиться къ лицамъ, которыя занимаются этого рода изслѣдованіями попутно, рядомъ съ многочисленными другими вопросами.

Въ связи съ этими разсужденіями объ основахъ ариѳметики, обзоръ которыхъ я вамъ изложилъ, я хочу представить вашему вниманію еще нѣкоторыя соображенія общаго характера. Многократно высказывалось мнѣніе, что обученіе математикѣ можно и даже должно вести строго дедуктивно, полагая въ основу цѣлый рядъ аксіомъ и развивая изъ него все остальное строго логически. Этотъ пріемъ, который такъ охотно поддерживаютъ историческимъ авторитетомъ *Евклида*, однако, отнюдь не соотвѣтствуетъ историческому ходу развитія математики. Напротивъ, въ дѣйствительности математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путемъ тончайшихъ развѣтвленій, идущихъ отъ корней, а разбрасываетъ свои вѣтви и листья вширь и вверхъ, распространяя ихъ зачастую внизъ, къ корнямъ. Совершенно такъ же и математика, оставляя образное выраженіе, начала свое развитіе съ опредѣленнаго пункта, соотвѣтствовавшаго, скажемъ, здравому человѣческому смыслу, и по мѣрѣ того, какъ мы восходили къ новымъ и новымъ познаніямъ, мы одновременно опускались также и внизъ къ изслѣдованію основаній науки. Такъ, напримѣръ, мы стоимъ теперь относительно основаній на совершенно другой точкѣ зрѣнія, чѣмъ та, которой придерживались изслѣдователи нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ; точно такъ же то, что мы выдаемъ за послѣдніе принципы, черезъ короткое время сдѣлается пережиткомъ, такъ какъ послѣднія истины будутъ все глубже и детальнѣе расчленяться и приводиться къ болѣе общимъ положеніямъ. *Въ основныхъ изслѣдованіяхъ въ области математики не можетъ быть и конечнаго перваго начала, которое могло бы служить абсолютной исходной точкой для преподаванія.*

Еще одно замѣчаніе я хотѣлъ бы сдѣлать, касающееся отношенія между логической и интуитивной математикой, между чистой и прикладной математикой. Я имѣлъ уже случай упомянуть, что въ школѣ приложеніе съ самаго начала сопровождаетъ обученіе ариѳметикѣ, что ученикъ не только долженъ понимать правила, но долженъ также учиться дѣлать изъ нихъ то или иное употребленіе. Такъ оно нормально должно было оставаться и всюду, гдѣ идутъ занятія математикой. Чисто логическія концепціи должны составить, такъ сказать, твердый скелетъ организма математики, сообщающій ей устойчивость и достовѣрность. Но самая жизнь математики, важнѣйшія наведенія и ея продуктивность относятся преимущественно къ ея *приложеніямъ*, т. е. къ взаимнымъ отношеніямъ ея абстрактныхъ объектовъ ко всѣмъ другимъ отраслямъ. Изгнать приложеніе изъ математики значило бы то же самое, что искать живое существо съ одной только костной основой безъ мускуловъ, нервовъ и сосудовъ.

Въ дѣлѣ научнаго изслѣдованія будетъ, конечно, всегда оставаться раздѣленіе труда между чистой и прикладной наукой, но, если только мы хотимъ сохранить здравое соотношеніе, мы должны заботиться о непрерывной связи между этими сторонами дѣла; здѣсь же я хотѣлъ бы съ особенной силой подчеркнуть то обстоятельство, что въ школѣ такого рода раздѣленіе труда, такого рода спеціализація отдѣльнаго учителя совершенно невозможна. Вообразите себѣ, напримѣръ,—чтобы это рѣзко выразить,—въ какой-либо школѣ учителя, который трактуетъ числа, какъ символы, лишенные значенія; другого, который умѣетъ изъ этихъ ничего не означающихъ символовъ выполучить наглядныя числа; наконецъ, третьяго, четвертаго, пятаго, которые владѣютъ приложеніями этихъ символовъ въ геометріи, механикѣ, физикѣ. Представьте себѣ, что въ распоряженіе всѣхъ этихъ различныхъ учителей будутъ предоставлены ученики. Вы понимаете, что такимъ образомъ дѣло обученія не можетъ быть организовано; этимъ путемъ предметъ не можетъ быть усвоенъ учениками, а различные учителя не смогутъ понимать другъ друга. Потребности школьнаго преподаванія, такимъ образомъ, предполагаютъ извѣстную разносторонность каждаго учителя, умѣнье довольно широко оріентироваться въ области чистой и прикладной математики въ самомъ широкомъ смыслѣ этого слова; этимъ путемъ учитель долженъ всегда создавать коррективъ противъ слишкомъ мелкаго расщепленія науки.

Я возвращусь здѣсь еще разъ къ упомянутымъ уже выше дрезденскимъ предложеніямъ, чтобы дать практическое направленіе всѣмъ послѣднимъ замѣчаніямъ. Въ этихъ предложеніяхъ мы настаиваемъ на томъ, чтобы прикладная математика, которая съ 1898 года введена въ испытаніе на учительское званіе, какъ особая спеціальность, была признана необходимой составной частью каждаго нормальнаго математическаго образованія, чтобы, такимъ образомъ, удостовѣреніе въ правѣ преподаванія чистой и прикладной математики выдавалось всегда совмѣстно. Наконецъ, упомянемъ также, что педагогическая коммиссія въ такъ называемой меранской программѣ ставитъ цѣлью обученіе математикѣ въ выпускномъ классѣ*). Эта цѣль должна быть трояқаго рода:

1) научный обзоръ систематическаго построенія математики;

2) умѣнье толково справляться съ численной и графической разработкой отдѣльныхъ задачъ;

3) нѣкоторое ознакомленіе съ значеніемъ математической мысли въ естествознаніи и современной культурѣ.

Ко всѣмъ этимъ резолюціямъ я присоединяюсь съ глубочайшимъ убѣжденіемъ въ ихъ правильности.

(Продолженіе слѣдуетъ).

---

*) Reformvorschläge für den math. und naturw. Unterricht überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Aerzte zu Meran (Leipzig 1905). Этотъ отчетъ напечатанъ также въ общемъ отчетѣ коммиссіи на стр. 93 (см. нашу ссылку въ № 479 на стр. 529); свѣдѣнія о немъ можно найти также въ книгѣ Klein-Schimmack на стр. 208 (см. нашу ссылку въ № 479 на стр. 530).

О нѣкоторыхъ замѣчательныхъ плоскихъ кривыхъ.

Э. Наннэи.

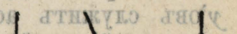
Мы хотимъ сообщить здѣсь нѣкоторыя свѣдѣнія о наиболѣе замѣчательныхъ кривыхъ порядка выше второго, пользуясь только элементарными знаніями. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы должны будемъ, поэтому, ограничиться тѣмъ, что дадимъ только опредѣленіе или способъ построенія; нѣкоторыя свойства намъ придется привести безъ доказательствъ.

Но мы думаемъ, что, несмотря на неизбѣжныя при этомъ неполноту и несовершенства, эта статья поможетъ нашимъ юнымъ читателямъ увеличить ихъ знанія и, можетъ быть, побудитъ ихъ въ будущемъ изучать съ бо́льшимъ интересомъ одну изъ самыхъ красивыхъ главъ геометріи.

Мы будемъ предполагать, что читатель знакомъ съ изображеніемъ кривыхъ въ Декартовыхъ и полярныхъ координатахъ.

Изъ источниковъ мы пользовались, больше другихъ, слѣдующими: Loria G., Spezielle algebraiche und transzendente ebene Kurven.— Gomez Texeira, Tratado de las curvas especiales notables.— Brocard H., Notes des bibliographie des courbes géometriques.— Cesàro E., Geometria intrinseca и, кромѣ того, спеціальными статьями, которыя мы будемъ указывать въ каждомъ случаѣ отдѣльно.

1. Аньезіана. Дана окружность (направляющій кругъ) радіуса p съ центромъ въ точкѣ C (фиг. 1).



Фиг. 1.

Будемъ разсматривать двѣ параллельныя касательныя, проходящія черезъ концы одного и того же діаметра OA. Примемъ прямую, на которой лежитъ діаметръ, за ось абсциссъ, а одну изъ касательныхъ, напримѣръ, ту, которая проходитъ черезъ точку O, за ось ординатъ. Изъ точки O проведемъ произвольную прямую и обозначимъ точки ея пересѣченія съ окружностью и со второй касательной черезъ P и Q. Изъ этихъ точекъ P и Q проведемъ прямыя, параллельныя осямъ координатъ, и обозначимъ точку пересѣченія этихъ прямыхъ черезъ M.

Будемъ разсматривать кривую, представляющую собою геометрическое мѣсто построенныхъ такимъ образомъ точекъ M, соотвѣтствующихъ различнымъ сѣкущимъ. Ее называютъ аньезіаной или кубической кривой Аньези, потому что ее изучалъ этотъ послѣдній (Maria Gaetana Agnesi) въ своихъ „Istituzioni di matematica“ (Vol. I, стр. 380). Самъ Аньези ее назвалъ верзьерой.

Уравненіе этой кривой въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ легко выводится слѣдующимъ образомъ:

Изъ подобія треугольниковъ OHP и OAQ имѣемъ:

$$\overline{OH}:\overline{OA}=\overline{HP}:\overline{AQ}, \text{ или } x:2p=\sqrt{x(2p-x)}:y\ ^{*}),$$

откуда

$$xy=2p\sqrt{x(2p-x)} \text{ и } xy^2=4p^2(2p-x);$$

это уравненіе 3-й степени.

Полагая въ уравненіи $y=0$, имѣемъ $x=2p$: значитъ точка A принадлежитъ кривой.

Рѣшая уравненіе кривой относительно y, имѣемъ:

$$y=\pm 2p\sqrt{\frac{2p-x}{x}},$$

откуда можно заключить, что прямая OA есть ось симметріи для кривой; отсюда же слѣдуетъ, что дѣйствительныя точки кривой имѣютъ абсциссы $x\leqslant 2p$, т. е. что вся кривая лежитъ внутри полосы, образованной тѣми двумя касательными къ направляющему кругу, которыя мы построили съ самаго начала.

Наконецъ, уравненію можно придать еще видъ:

$$x=\frac{8p^3}{y^2+4p^2},$$

изъ котораго видно, что для $y=\infty$ мы имѣемъ $x=0$, т. е., что ось y'овъ служитъ асимптотой кривой (т. е. касается ея въ безконечно удаленной точкѣ).

Замѣтимъ еще слѣдующее. Обозначая черезъ y_1 и y_1' ординаты двухъ точекъ, одна изъ которыхъ лежитъ на направляющемъ кругѣ, а другая на кривой, и которыя имѣютъ общую абсциссу x_1, имѣемъ:

$$y_1:y_1'=x_1:2p;$$

пользуясь этимъ равенствомъ, можно построить кривую по точкамъ, откладывая на ординатахъ y точекъ окружности отрѣзки y', удовлетворяющія равенству

$$y:y'=x:2p.$$

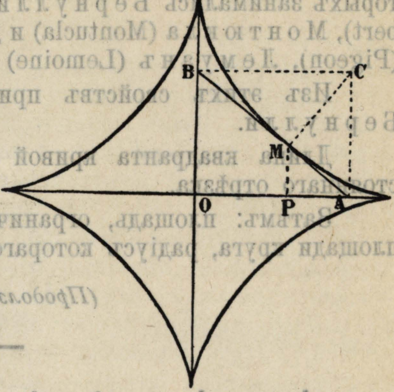
Можно доказать, но не элементарно, что площадь S, ограниченная кривой и ея асимптотой, равна $S=4\pi p^2$, т. е. что она въ 4 раза больше площади направляющаго круга; объемъ V тѣла, образованнаго вращеніемъ кривой около асимптоты, есть $V=\frac{\pi^2 p^3}{2}$.

---

*) $\overline{HP}$, какъ высота прямоугольнаго треугольника OPA (стороны PA нѣтъ на чертежѣ), есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы

Прим. перев.

2. Астроида. Даны двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, проходящія черезъ точку O (фиг. 2), и отрѣзокъ постоянной длины a. Этотъ отрѣзокъ движется такъ, что его концы A и B скользятъ по даннымъ прямымъ. Дополнимъ треугольникъ AOB до прямоугольника $AOBC$, и пусть M будетъ проекціей вершины его C на діагональ AB.



Фиг. 2.

Кривая, являющаяся геометрическимъ мѣстомъ построенныхъ такимъ образомъ точекъ M, называется астроидой, или эпициклоидой, или еще кубоциклоидой.

Астроиду можно получить еще такъ: даны два круга, и радіусъ одного въ четыре раза больше радіуса другого. Если меньшій кругъ катится, безъ скольженія, по окружности бо́льшаго, оставаясь все время внутри его, то каждая точка меньшей окружности описываетъ астроиду.

Найдемъ уравненіе этой кривой, принимая двѣ данныя прямыя за оси координатъ. Обозначимъ черезъ P основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на ось абсциссъ, и положимъ

$$OP = x, \quad OA = k.$$

Такъ какъ MP параллельно BO, то

$$\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{BA} : \overline{BM},$$

или (въ виду того, что $BM \,.\, BA = BC^2$ и, слѣдовательно, $BM = \frac{k^2}{a}$)

$$k : x = a : \frac{k^2}{a},$$

откуда

$$k = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, \quad \text{или} \quad k^2 = a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Совершенно аналогично, положивъ

$$MP = y, \quad OB = h,$$

получимъ:

$$h^2 = a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}}.$$

Такъ какъ $k^2 + h^2 = a^2$, то, складывая полученныя уравненія, и дѣля результатъ на $a^{\frac{2}{3}}$, мы получимъ:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Эта кривая имѣетъ нѣкоторыя важныя свойства, изученіемъ которыхъ занимались Бернулли (I. Bernoulli), Даламберъ (D'Alembert), Монтюкла (Montucla) и др., а въ болѣе позднѣе время Пижонъ (Pigeon), Лемуанъ (Lemoine) и Барбарэнъ (Barbarin).

Изъ этихъ свойствъ приведемъ здѣсь слѣдующее, найденное Бернулли.

Длина квадранта кривой равна утроенной длинѣ половины постояннаго отрѣзка.

Затѣмъ: площадь, ограниченная кривой, равна тремъ восьмымъ площади круга, радіусъ котораго равенъ постоянному отрѣзка.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Іонизація и свѣченіе, производимое фосфоромъ.

Е. и Л. Блохъ.

Явленіе свѣченія фосфора оставалось загадочнымъ до тѣхъ поръ, пока различные химики, въ частности Фуркроа (Fourcroy) и Воклэнъ (Vauquelin), не доказали, что оно находится въ связи съ окисленіемъ. Въ азотѣ и чистомъ водородѣ нѣтъ свѣченія, хотя наблюдается испареніе фосфора. Энергія свѣченія фосфора есть результатъ химическаго соединенія и связана съ легкимъ повышеніемъ температуры.

Такое общее объясненіе свѣченія фосфора страдаетъ, однако, неточностью, ибо, согласно ему, слѣдовало бы ожидать, что въ чистомъ кислородѣ оно проявится сильнѣе, между тѣмъ какъ оно прекращается. Свѣченіе возобновляется лишь тогда, когда парціальное давленіе кислорода падаетъ ниже извѣстнаго предѣла, зависящаго отъ температуры. Давленіе, при которомъ свѣченіе достигаетъ максимума, значительно ниже атмосфернаго. Такимъ образомъ, какъ недостатокъ, такъ и избытокъ кислорода препятствуютъ свѣченію. Окисленіе фосфора со свѣченіемъ сопровождается многими другими замѣчательными явленіями. Прежде всего наблюдается образованіе значительнаго количества озона; во-вторыхъ, газъ, который находится въ соприкосновеніи съ фосфоромъ, становится проводникомъ электричества. Эта электропроводность, согласно опытамъ Л. и Е. Блохъ (Léon и Eugène Bloch), есть результатъ настоящей іонизаціи. Она происходитъ отъ большихъ іоновъ двухъ знаковъ,—значитъ, іоновъ малой подвижности,—замѣтно отличающихся отъ такъ называемыхъ малыхъ іоновъ, производимымъ лучами Рёнтгена и радіемъ. Измѣренія Гармса (Harms) подтвердили вышеизложенные результаты.

Если бы появленіе большихъ іоновъ наблюдалось только при свѣченіи фосфора, то къ послѣднему явленію прибавилось бы новое, необъяснимое. Но Е. Блохъ доказалъ, что образованіе большихъ іоновъ есть явленіе болѣе обыкновенное, чѣмъ даже предполагали.

Газъ, тщательно приготовленный съ точки зрѣнія химика, содержитъ почти всегда заряженные центры малой подвижности; наконецъ, газъ, получаемый изъ пламени, также содержитъ ихъ.

Очень важно сопоставить пламя со свѣтящимся фосфоромъ: и въ томъ и другомъ случаѣ подвижность образующихся іоновъ достигаетъ своего предѣльнаго значенія (въ высшей степени малой подвижности), если производятъ измѣренія на большомъ разстояніи отъ источника іонизаціи. По мѣрѣ приближенія къ пламени, газы, испускаемые имъ, содержатъ іоны все большей подвижности; около же свѣтящагося фосфора іоны меньшей величины, чѣмъ на большемъ разстояніи. Такимъ образомъ, въ случаѣ фосфора наблюдается іонизація, сопровождающая химическую реакцію, какъ и въ случаѣ пламени. Если надъ фосфоромъ пропускать струю воздуха медленно, то свѣченіе не измѣняется замѣтно; но если постепенно увеличивать скорость струи, то свѣченіе, раньше ограниченное поверхностью фосфора, продолжается въ сторону струи и, при извѣстной скорости, отдѣляется отъ фосфора, оставляя возлѣ него темный интервалъ. Употребляя длинную трубку, можно удалить свѣтящійся столбъ на нѣсколько метровъ отъ фосфора. Можно также подвинуть его къ краю трубки и вызвать свѣтящійся пучокъ въ воздухѣ. Усиливая еще токъ воздуха, можно совсѣмъ прекратить всякое свѣченіе.

Е. и Л. Блохъ старались установить, въ связи съ перемѣщеніемъ свѣченія, перемѣщеніе области іонизаціи и области образованія озона. Помѣщая конденсаторъ до, послѣ и въ области свѣченія, примѣняя тамъ же іодокрахмальную бумагу, они заключили, что въ области свѣченія образованія озона и іонизаціи совпадаютъ.

Отдѣленіе области свѣченія отъ фосфора показываетъ, что оно происходитъ не отъ окисленія твердаго фосфора, а нѣкотораго газа, выдѣляемаго фосфоромъ и извлекаемаго токомъ воздуха. Можно предположить, что это пары фосфора или фосфористаго ангидрида. Въ пользу послѣдняго предположенія многое говорятъ данныя опытовъ Юнгфлейша (Iungfleisch). Этотъ ученый показалъ, что, если надъ фосфоромъ пропускать инертный газъ (углекислоту, азотъ), то свѣченіе исчезаетъ, хотя пары фосфора образуются. По выходѣ на воздухъ пары фосфора производятъ едва замѣтное свѣченіе, не идущее дальше одного миллиметра. Кислородъ въ данномъ случаѣ дѣйствуетъ, какъ инертный газъ, при немъ даже не замѣчается никакого свѣченія по выходѣ струи на воздухъ.

Въ то же время Шенкъ (Schenk), Миръ (F. Mihr) и Ботьенъ (Bauthien) показали, что фосфористый ангидридъ разряжаетъ электроскопъ въ присутствіи воздуха. На основаніи такихъ данныхъ Е. и Л. Блохъ заключаютъ что свѣченіе обусловливается окисленіемъ фосфористаго ангидрида, который образуется при дѣйствіи кислорода воздуха на фосфоръ. Химическая реакція, дающая начало іонамъ фосфора, есть не что иное, какъ горѣніе фосфористаго ангидрида, и тѣмъ самымъ объясняется аналогичность фосфорныхъ іоновъ съ іонами пламени.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Дальнѣйшія изслѣдованія объ анодныхъ лучахъ. Въ № 458 „Вѣстника“ былъ помѣщенъ рефератъ о работахъ Герке (Gehrcke) и Рейхенгейма (Reichenheim). Въ настоящее время названные изслѣдователи опубликовали результаты дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованій по этому вопросу.

Въ прежнихъ изслѣдованіяхъ обнаруживалось, что въ анодахъ, сдѣланныхъ изъ соли, главнымъ образомъ, содержащихъ галоидныя соединенія различныхъ металловъ, въ особенности іодистыхъ металловъ, возникаютъ интенсивные анодные лучи. Причины этого авторы усматривали въ томъ, что эти соединенія обладаютъ малой теплотой плавленія и теплотой парообразованія. Однако, эти новыя изслѣдованія обнаружили, что здѣсь играютъ роль и другіе факторы.

Попутно было обнаружено, что въ трубкѣ, снабженной нѣсколькими анодами, интенсивные анодные лучи исходили изъ одного анода, не содержащаго вовсе соли, а состоящаго изъ мѣдной проволоки, заключенной въ открытую трубку. Повидимому, эта анодная струя происходила не отъ слѣдовъ соли, которые могли бы попасть на анодъ сосѣднихъ соляныхъ пластинокъ, а отъ другихъ причинъ. Одинъ разъ лучъ выходилъ не непосредственно отъ мѣдной проволоки, а начинался на оси въ трубкѣ, окружавшей анодъ; кромѣ того, онъ существенно отличался отъ обыкновенныхъ анодныхъ лучей цвѣтомъ, такъ какъ онъ не содержалъ спектральныхъ линій литія и натрія, но давалъ, главнымъ образомъ, линіи водорода.

При другомъ изслѣдованіи авторы обнаружили, что въ такъ называемомъ „положительномъ свѣтѣ“, при весьма высокомъ разряженіи и сильномъ токѣ, появляются положительные лучи. Они назвали эти лучи „стрикціонными“*) анодными лучами (Striktions-anodenstrahlen). Мы не имѣемъ возможности выяснять здѣсь тѣхъ основаній, въ силу которыхъ было подобрано такое названіе. Чтобы создать благопріятныя условія для появленія такого рода лучей, была приготовлена особаго рода разрядная трубка. Она состояла изъ двухъ стеклянныхъ шариковъ, по 10 *см.* въ діаметрѣ, каждый изъ которыхъ заканчивался электродомъ въ видѣ аллюминіевой чашечки. Въ горизонтальномъ направленіи шарики соединены стеклянной трубкой, имѣющей 8 *см.* въ длину и 7 *мм.* въ ширину; трубка входила приблизительно на 2 *см.* въ каждый изъ шариковъ.

Когда черезъ эту въ высшей степени разряженную трубку пропускали токъ отъ большого индукціоннаго аппарата, то, помимо лучей, выходившихъ изъ катода, въ соединительной трубкѣ появлялись „стрикціонные катодные“ лучи какъ въ томъ случаѣ, когда она была наполнена воздухомъ, такъ и въ томъ случаѣ, когда она наполнялась водородомъ. Это явленіе уже хорошо извѣстно. Эти лучи вызываютъ зеленое пятно фосфоресценціи на томъ мѣстѣ стекла, которое расположено противъ отверстія трубки на анодномъ шарикѣ. Положительныхъ лучей не было видно, и получить ихъ никакъ нельзя было.

Но положительные стрикціонные лучи немедленно появлялись, когда въ трубку вводилось небольшое количество іода и потомъ заново производили разрѣженіе. Они были наиболѣе интенсивны, когда трубка наполнялась водородомъ или свѣтильнымъ газомъ. Зеленому пятну флуоресценціи отвѣчало теперь желтое пятно на катодномъ шарикѣ, которое было вызвано розоватымъ остроконическимъ пучкомъ анодныхъ лучей. Лучи эти давали въ спектрѣ яркія линіи водорода, а вызванное имъ флуоресцирующее пятно — линіи D.

Такимъ образомъ ясно, что пары іода значительно способствуютъ образованію стрикціонныхъ анодныхъ лучей въ водородѣ. Стрикціонные катодные лучи отклоняются магнитомъ, а анодные нѣтъ. Пары брома, бромистаго, хлористаго и іодистаго водорода также способствуютъ появленію этихъ лучей, хотя и не въ такой мѣрѣ, какъ іодъ въ трубкѣ, наполненной водородомъ. Кромѣ водорода, въ присутствіи іода дали также положительные стрикціонные лучи кислородъ

*) Сохраняемъ нѣмецкое наименованіе, такъ какъ этотъ терминъ въ русской литературѣ еще не встрѣчается. *Ред.*

и гелій, азотъ же, напротивъ, не далъ ихъ. Въ кислородѣ эти лучи имѣли сѣрый цвѣтъ, въ геліи—красновато-зеленоватый. „Это имѣетъ такой видъ, какъ будто цвѣтъ анодныхъ лучей или, соотвѣтственно, интенсивность различныхъ испускаемыхъ ими спектральныхъ линій представляетъ собой функцію скорости движущихся частицъ. Въ случаѣ гелія зеленая линія, повидимому, свойственна, главнымъ образомъ, медленнымъ лучамъ, а желтыя и красныя линіи, главнымъ образомъ, быстрымъ". Безъ прибавленія іода кислородъ и гелій не даютъ вовсе стрикціонныхъ анодныхъ лучей.

Далѣе, Герке и Рейхенгеймъ перешли къ изслѣдованію вопроса, вліяетъ ли на образованіе стрикціонныхъ анодныхъ лучей форма трубки. Однако, уменьшеніе просвѣта въ соединительной трубкѣ, повидимому, никакого вліянія не оказало. Но за то замѣтное вліяніе оказывалъ кусокъ на концѣ трубки, входящій въ катодный шарикъ. Если этотъ кусокъ дѣлали короче, то интенсивность анодныхъ лучей значительно падала. Повидимому, и размѣръ обоихъ шариковъ играетъ важную роль. Когда діаметръ шарика дѣлали въ 3 *см.* вмѣсто обычныхъ 8—12 *см.*, то ясно выраженныхъ анодныхъ лучей нельзя было получить. Напротивъ, мало значенія имѣетъ, повидимому, матеріалъ трубки; съ кварцевой трубкой были получены также хорошіе результаты.

Авторы уже прежде нашли на анодныхъ лучахъ, получаемыхъ отъ анодовъ изъ литія, натрія и стронція, очень быстрое паденіе потенціаловъ у анодовъ. Измѣренія, съ помощью различныхъ зондовъ, вводимыхъ въ трубку, обнаружили и для стрикціоннаго анода значительный градіентъ потенціальной функціи. Напротивъ, у катода при появленіи стрикціонныхъ лучей нельзя было констатировать замѣтнаго паденія потенціала.

Авторы изслѣдовали далѣе своеобразное явленіе, обнаруживающееся на самомъ анодѣ. „Прежде всего бросается въ глаза появляющееся уже при сравнительно небольшомъ разрѣженіи, когда никакихъ лучистыхъ явленій не обнаруживается, ненормальное развитіе аноднаго свѣченія, а при дальнѣйшемъ разрѣженіи не нормальные размѣры темнаго аноднаго пространства. Кромѣ того, даже обыкновенный алюминіевый анодъ въ присутствіи паровъ іода даетъ настоящіе анодные лучи. Въ трубкахъ, имѣющихъ алюминіевые аноды съ небольшой поверхностью, эти лучи очень ярко свѣтятся".

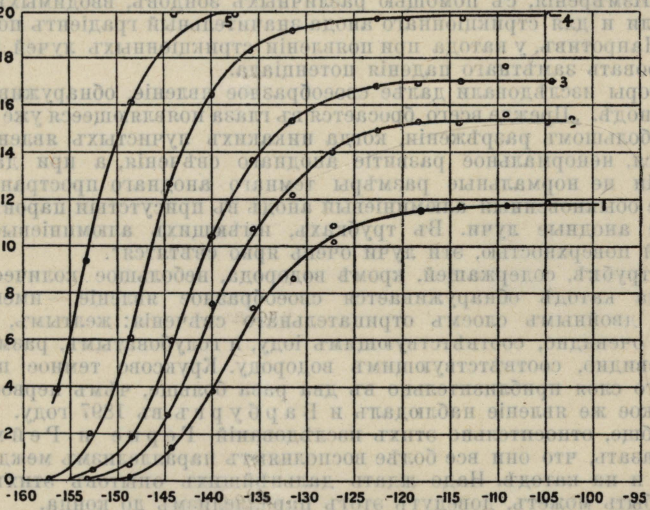
Въ трубкѣ, содержащей, кромѣ водорода, небольшое количество паровъ іода, и на катодѣ обнаруживается своеобразное явленіе,—именно, катодъ окруженъ двойнымъ слоемъ отрицательнаго свѣченія: желтымъ, рѣзко очерченнымъ, очевидно, соотвѣтствующимъ іоду, и голубоватымъ, размытымъ свѣтомъ, очевидно, соотвѣтствующимъ водороду. Круксово темное пространство послѣдняго слоя приблизительно въ два раза больше, чѣмъ первое. Приблизительно такое же явленіе наблюдалъ и Варбургъ въ 1897 году.

Вообще, относительно этихъ изслѣдованій Герке и Рейхенгейма можно сказать, что они все болѣе восполняютъ параллелизмъ между явленіями на анодѣ и на катодѣ. Надо ждать дальнѣйшихъ опытовъ этихъ физиковъ, которые, быть можетъ, доведутъ этотъ параллелизмъ до конца.

Содержитъ ли атмосфера Марса водяной паръ? Было много споровъ по вопросу о томъ, содержитъ ли атмосфера Марса водяной паръ. Различные изслѣдователи, какъ, напримѣръ, Жансенъ (Janssen), Гёггенсъ (Huggens) и Фогель (Vogel), нашли въ спектрѣ атмосферы Марса линію водорода и полагали поэтому, что на поставленный выше вопросъ необходимо отвѣтить утвердительно. Болѣе позднія изслѣдователи, какъ Келеръ (Keler) и Кампбель (Kampbell) показали, однако, что при спектроскопическомъ изслѣдованіи луннаго свѣта, когда луна стоитъ близко отъ Марса, можно обнаружить водородныя линіи. Такимъ образомъ казалось вѣроятнымъ, что присутствіе водяныхъ паровъ обусловливается только поглощеніемъ земной атмосферы, такъ какъ луна, во всякомъ случаѣ, паровъ не содержитъ. Въ Флагстафской обсерваторіи (Arizona, *USA*) уже давно удѣляли много вниманія этому вопросу. Особенно много занимался изслѣдованіемъ атмосферы Марса П. Ловель (P. Lovell) спектрографическими и спектроскопическими методами, однако, безъ достаточно опредѣленныхъ результатовъ. Въ настоящее время, однако, Ловелю удалось въ сотрудничествѣ со Слиферомъ (Slipher) получить спектрограммы, которыя даютъ уже возможность со значительной увѣренностью сказать, что водяные пары въ атмосферѣ Марса имѣются;

именно, Ловель и Слиферъ получили рядомъ фотографическіе снимки солнца, Марса и луны, на пластинкахъ чувствительныхъ для крайняго краснаго свѣта. Водородныя линіи отличались большой интенсивностью. Марсъ стоялъ на высотѣ 43°, луна на высотѣ 30°, но пластинки обнаружили водородныя линіи только въ атмосферѣ Марса. Въ докладѣ французской академіи наукъ Ловель признаетъ, такимъ образомъ, доказаннымъ существованіе водорода въ атмосферѣ Марса.

Сгущеніе эманацій актинія и торія. (Philosophical Magazine, № 91). Въ іюльской книжкѣ „Phil. Mag." помѣщено чрезвычайно важное и интересное сообщеніе о конденсаціи эманацій торія и актинія. Авторъ статьи Кинушита (Kinushita) напоминаетъ намъ, что Рётгерфордъ (Rutherford) и Содди (Soddy) получили впервые конденсацію эманаціи радія при температурѣ — 150°С, при чемъ существуетъ очень незначительная разница между температурой полнаго улетучиванія эманаціи и ея конденсаціи. Эманація торія начинаетъ конденсироваться при — 120°С и при — 150°С почти совершенно сгущается. Тобдстейнъ (Tobdstein) производилъ опыты надъ конденсаціей эманаціи актинія, но его опыты только теперь получили свое завершеніе; было установлено, что и въ этомъ случаѣ эманація актинія начинаетъ конденсироваться при — 120°С. Результаты опыта могутъ быть наглядно представлены при помощи прилагаемой діаграммы. Абсцисса представляетъ собой



градацію температуры, а ординаты — разность $s_T - s_0$, гдѣ s_T и s_0 суть значенія s, т. е. отклоненія стрѣлки гальванометра при температурѣ T и 0; эта разность пропорціональна количеству выдѣляющейся эманаціи. Кривыя (1), (2), (3), (4) и (5) суть кривыя различныхъ трубокъ, употреблявшихся во время опыта. Если эманація съ начальной активностью I_0 достигла электроскопа послѣ пребыванія T секундъ въ спирали, то ея активность становится $I_0 e^{-\lambda T}$, если не имѣетъ мѣсто конденсація. Степень опаденія золотого листочка пропорціональна $I_T e^{-\lambda T}$; значитъ, $I_t = k\frac{ds}{dt} = I_T e^{-\lambda T}$, гдѣ k есть постоянная, s — отлетъ золотого листочка во время t, λ — радіоактивная постоянная эманаціи. Пусть s_T и s_0 будутъ значенія s во время $t = T$ и $t = 0$, тогда послѣ интегрированія

$$k(s_T - s_0) = \frac{I_T}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}), \text{ или } I_T = \frac{k\lambda(s_T - s_0)}{1 - e^{-\lambda T}}.$$

При тѣхъ же условіяхъ былъ продѣланъ опытъ съ эманаціей торія, при чемъ на этотъ разъ діаграмма получилась нѣсколько иного вида;

температура конденсаціи колебалась между—137° и — 146,5°C. Произведенные въ то же время опыты Генріота (Henriot) дали, приблизительно, тѣ же результаты. Такимъ образомъ, можетъ считаться вполнѣ установленнымъ, что эманація актинія конденсируется всецѣло при — 150°C, т. е. при тѣхъ же температурахъ, какъ и эманація торія. *А. Л.*

Новый элементъ въ минералахъ. Минералы торіанитъ, реинитъ и молибденитъ, какъ открылъ М. Огава (Masataca Ogawa), содержатъ новый элементъ, съ характерными физическими и химическими свойствами. Его хлористое соединеніе даетъ въ спектрѣ линію длиной волны въ 4882 $\mu\mu$. Его атомный вѣсъ около 100. Онъ восполняетъ мѣсто въ періодической системѣ между молибденомъ и рутеніемъ. По предложенію Рамзая онъ названъ Ниппоніемъ со знакомъ *Np*. *Е. Б.*

ЗАДАЧИ.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 133 (5 сер.). Доказать, что сумма квадратовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на простое число вида $4n+3$ лишь въ томъ случаѣ, если каждое изъ нихъ дѣлится на него.

А. Турчаниновъ (Брестъ).

№ 134 (5 сер.). Найти четыре послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа такъ, чтобы кубъ наибольшаго изъ нихъ равнялся суммѣ кубовъ остальныхъ трехъ чиселъ.

В. Шлыгинъ (Москва).

№ 135 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4+2x^2+24x+37=0.$$

С. Адамовичъ (Сув. кад. корп.).

№ 136 (5 сер.). Я родился въ девятнадцатомъ вѣкѣ. Въ 1908 году число моихъ лѣтъ равнялось суммѣ цифръ года моего рожденія. Когда я родился?

П. Лихницкій.

№ 137 (5 сер.). Построить треугольникъ ABC по высотѣ $AD=h$, медіанѣ $AM=m$ и по разстоянію $EF=l$ основаній E и F внутренняго и внѣшняго биссекторовъ AE и AF.

(Заимств.).

№ 138 (5 сер.). Одинъ изъ угловъ вписаннаго въ кругъ четырехугольника—прямой. Продоливъ двѣ его противоположныя стороны, воспользоваться полученной фигурой для доказательства формулы

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 59 (5 сер.). *Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи* n *число*

$$n^3(n^3-1)(n^3+1)$$

кратно 504.

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Представивъ разсматриваемое выраженіе въ одномъ изъ видовъ

$$n^3(n^3-1)(n^3+1)=n^3(n^6-1)=n^3(n^2+n+1)(n-1)(n+1)(n^2-n+1),$$

приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ. Если n четно, то n^3 кратно 8; если n нечетно, то произведеніе $(n-1)(n+1)$ двухъ послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ (изъ которыхъ одно навѣрно кратно 4), тоже кратно 8. Итакъ, разсматриваемое выраженіе при n цѣломъ кратно 8. Если n кратно 7, то и разсматриваемое выраженіе кратно 7; если n не кратно 7, то, по теоремѣ *Fermat*'а, n^6-1 кратно 7. Итакъ, при всякомъ цѣломъ n разсматриваемое выраженіе кратно 7. Если n кратно 3, то n^3 кратно 9. Если n не кратно 3, то $n=3k\pm 1$, гдѣ k есть число цѣлое. При $n=3k+1$ произведеніе

$$(n-1)(n^2+n+1)=(n-1)[(n-1)^2+3n]=3k(9k^2+3n)=9k(3k^2+n)$$

кратно 9, а при $n=3k-1$ произведеніе

$$(n+1)(n^2-n+1)=(n+1)[(n+1)^2-3n]=3k(9k^2-3n)=9k(3k^2-n)$$

кратно 9. Итакъ, разсматриваемое выраженіе при всякомъ цѣломъ n кратно 9. Будучи при цѣломъ n кратно 7, 8, 9, число $n(n^3+1)(n^3-1)$ кратно произведенія $7.8.9=504$.

В. Добровольскій (Брянскъ).

№ 62 (5 сер.). *Разложить на множители выраженіе*

$$a^{5x}+a^x+1.$$

Представивъ данное выраженіе послѣдовательно въ видѣ:

$$a^{5x}+a^x+1=a^{5x}-a^{2x}+a^{2x}+a^x+1=a^{2x}(a^{3x}-1)+(a^{2x}+a^x+1)=$$

$$=a^{2x}(a^x-1)(a^{2x}+a^x+1)+(a^{2x}+a^x+1)=[a^{2x}(a^x-1)+1](a^{2x}+a^x+1)=$$

$$=(a^{3x}-a^{2x}+1)(a^{2x}+a^x+1),$$

приходимъ къ искомому разложенію.

С. Кудинъ (Москва).; *П. Барановскій* (Фу-дзядзянъ, Манчжурія).

№ 63 (5 сер.). *Доказать, что при* p *цѣломъ и положительномъ выраженіе*

$$4^{2p}-3^{2p}-7$$

кратно 84.

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Такъ какъ разность четныхъ одинаковыхъ степеней $4^{2p}-3^{2p}$ кратна суммы $4+3=7$, то и все разсматриваемое выраженіе кратно 7. Изъ тожества

$$4^{2p}-3^{2p}-7=4^{2p}-4-(3^{2p}+3)=4(4^{2p-1}-1)-3(3^{2p-1}+1) \qquad (1)$$

мы видимъ, что данное выраженіе кратно также каждаго изъ чиселъ 4 и 3. Дѣйствительно, число $4(4^{2p-1}-1)$ кратно 4, и сумма $3^{2p-1}+1=3^{2p-1}+1^{2p-1}$ одинаковыхъ нечетныхъ степеней кратна суммы $3+1=4$; итакъ, все данное выраженіе дѣлится на 4. Точно такъ же число $4^{2p-1}-1=4^{2p-1}-1^{2p-1}$ кратно разности $4-1=3$, и число $3(3^{2p-1}+1)$ тоже кратно 3; значитъ [см. (1)], и все данное число кратно 3. Будучи кратно взаимно простыхъ чиселъ 7, 4 и 3, разсматриваемое выраженіе кратно ихъ произведенія $7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$.

Я. Л. (Одесса); *С. Кудинъ* (Москва).

№ 64 (5 сер.). *Зная, что*

$$a+b+c=0,$$

вычислить числовую величину выраженія

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{(a^5+b^5+c^5)}.$$

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Подставляя изъ даннаго соотношенія $a+b+c=0$ значеніе a въ предложенное для вычисленія выраженіе, находимъ съ помощью формулы бинома:

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{a^5+b^5+c^5}=\frac{[b^3+c^3-(b+c)^3][(b+c)^2+b^2+c^2]}{b^5+c^5-(b+c)^5}=$$

$$=\frac{-(3b^2c+3cb^2)\,.\,2(b^2+bc+c^2)}{-(5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+bc^4)}=\frac{-6bc(b+c)(b^2+bc+c^2)}{-5bc[(b^3+c^3)+2(b^2c+bc^2)]}=$$

$$=\frac{6(b+c)(b^2+bc+c^2)}{5(b+c)[(b^2-bc+c^2)+2bc]}=\frac{6(b^2+bc+c^2)}{5(b^2+bc+c^2)}=\frac{6}{5}.$$

Я. Л. (Одесса); *С. Кудинъ* (Москва); *М. Добровольскій* (Сердобскъ).

№ 68 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^6-3x^5+x^4+3x^3-2x^2+1=0.$$

Записавъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$x^6-3x^5+3x^4-x^3-2x^4+4x^3-2x^2+1=0,$$

$$x^3(x^3-3x^2+3x-1)-2x^2(x^2-2x+1)+1=0,$$

$$x^3(x-1)^3-2x^2(x-1)^2+1=0,$$

или

$$[x(x-1)]^3-2[x(x-1)]^2+1=0, \qquad (1)$$

полагаемъ:

$$x(x-1)=z. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) находимъ:

$$z^3-2z^2+1=0,$$

или, разлагая лѣвую часть на множителей,

$$(z-1)(z^2-z-1)=0,$$

откуда

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad z_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Подставляя найденныя значенія z въ равенство (2), получимъ три квадратныхъ уравненія:

$$x^2-x-1=0,\quad x^2-x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0,\quad x^2-x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=0,$$

рѣшая которыя находимъ корни даннаго уравненія:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{2\sqrt{5}+3}}{2},\quad x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{2\sqrt{5}-3}}{2},$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$.

С. Кудинъ (Москва); *Ф. Рапопортъ* (Одесса).

№ 69 (5 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$y^3 + z^3 = 7x^3,$$
$$y + z - 3x = 0,$$
$$z - x = y - 2.$$

(Заимств. изъ *L'Éducation mathématique*).

Представивъ второе изъ данныхъ уравненій въ видѣ:

$$y + z = 3x, \tag{1}$$

возвышаемъ обѣ части въ квадратъ и вычитаемъ изъ полученнаго равенства первое изъ данныхъ уравненій. Тогда находимъ:

$$(y + z)^3 - y^3 - z^3 = 27x^3 - 7x^3, \quad \text{или} \quad 3y^2z + 3yz^2 = 20x^3,$$
$$20x^3 - 3yz(y + z) = 0. \tag{2}$$

Подставивъ въ уравненіе (2) вмѣсто $y + z$ [см. (1)] $3x$, получимъ:

$$20x^3 - 9xyz = 0, \quad \text{или} \quad x(20x^2 - 9yz) = 0,$$

откуда

$$\text{либо} \quad x = 0, \tag{3}$$
$$\text{либо} \quad 20x^2 - 9yz = 0. \tag{4}$$

Полагая въ данной системѣ [см. (3)] $x = 0$, находимъ:

$$y^3 + z^3 = 0, \quad y + z = 0, \quad y - z = 2.$$

Рѣшая совмѣстно послѣднія два уравненія, находимъ $y = 1$, $z = -1$, причемъ эти значенія y и z удовлетворяютъ также соотношенію $y^3 + z^3 = 0$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ рѣшенію

$$x = 0, \quad y = 1, \quad x = -1 \tag{5}$$

данной системы. Записавъ третье изъ данныхъ уравненій въ видѣ $y - z = 2 - x$, рѣшаемъ его совмѣстно съ уравненіемъ (1) относительно y и z. Тогда получимъ:

$$y = x + 1, \quad z = 2x - 1. \tag{6}$$

Подставляя эти значенія y и z въ равенство (4), находимъ:

$$20x^2 - 9(x + 1)(2x - 1) = 0,$$

или, послѣ раскрытія скобокъ и приведенія,

$$2x^2 - 9x - 9 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Подставляя эти значенія x въ равенство (6), приходимъ къ новымъ рѣшеніямъ:

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5, \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{5}{2}, \quad z = 2.$$

Такимъ образомъ, формулы (6) и (7) даютъ всѣ рѣшенія предложенной системы.

С. Кудинъ (Москва); *Н. С.* (Одесса); *М. Добровольскій* (Сердобскъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
пщется

Обложка
ищется