Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 91.

VIII Сем. 15 Марта 1890 г. № 7.

ОБЪ ОТНОШЕНІИ ОКРУЖНОСТИ КЪ ДІАМЕТРУ

и о квадратурѣ круга.

Въ этой замѣткѣ перечисляются*) въ хронологическомъ порядкѣ приближенныя значенія π, которыми пользовались разные народы, а также приводятся нѣкоторыя замѣчательныя выраженія отношенія окружности къ діаметру.

1. Древнѣйшій**) математическій памятникъ, дошедшій до насъ, есть такъ называемый папирусъ *Ринда****)*. Сочиненіе это есть по всей вѣроятности копія съ неизвѣстнаго намъ оригинала, составленная *Амесомъ* примѣрно за 2000 л. до Р. Х. Въ папирусѣ Ринда нѣтъ прямыхъ указаній на знаніе какого либо приближенія π, однако изъ приближенной квадратуры круга****), которою пользовались древніе Египтяне, можно

---

*) Перечисленіе сдѣлано настолько полное, насколько позволяли это имѣющіеся у меня подъ руками источники.

**) См. *Вашенко-Захарченко*. Исторія математики. *Бобынинъ*. Математика др. Египтянъ по папирусу Ринда. (Мат. Листокъ 1881 г.).

Ферд. Розенбергъ. Очер. Ист. Физики.

***) Онъ названъ такъ по имени прежняго владѣльца.

Папирусъ озаглавленъ слѣдующимъ образомъ: „Способы, при помощи которыхъ можно дойти до понимапія всѣхъ темныхъ вещей, всякихъ тайнъ, заключающихся въ предметахъ“.

****) Квадратомъ, равновеликимъ данному кругу, Египетскіе математики считали такой квадратъ, сторона котораго равна $\frac{8}{9}$ діаметра даннаго круга. Слѣдовательно, обозначая діаметръ черезъ d, имѣемъ

$$\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Отсюда

$$\pi=\frac{256}{81}=3,16.$$

См. *Бобынинъ* Матем. древ. Египтянъ.

вывести, что π принималось равнымъ $\frac{256}{81}=3{,}16$. По этому поводу пр. Ващенко-Захарченко *) замѣчаетъ: „выраженіе, полученное для π египетскими геометрами заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ оно было получено пріемомъ существенно отличнымъ отъ пріема употребленнаго Архимедомъ.....“

Остается только неизвѣстнымъ, было ли дѣйствительно извѣстно Египтянамъ найденное выше число.

2. Древнѣйшее китайское сочиненіе математическаго содержанія— есть „Девять отдѣловъ ариѳметики“. Хотя не имѣется положительныхъ указаній на то, когда составлено это сочиненіе, но несомнѣнно, что оно относится къ отдаленнѣйшему времени.

По свидѣтельству китайскихъ историковъ оно написано по повелѣнію императора Гвангъ-ти министромъ его Лишаномъ за 2637 л. до Р. Х. **).

Въ этой книгѣ принимается, что

$$\pi=3.$$

Впрочемъ позднѣйшіе комментаторы говорятъ, что автору этого сочиненія были извѣстны также и болѣе точныя выраженія π.

За 1500 л. до Р. Х. тѣмъ же приближеніемъ π пользовались и индусы, какъ видно изъ религіозно-математической книги озаглавленной *Сульвасутры* т. е. Правила Веревки ***).

Повидимому и евреи во времена Соломона (1100 л. до Р. Х.) тоже принимали $\pi=3$; это можно *отчасти* заключить изъ слѣдующаго мѣста Библіи ****), относящагося къ описанію храма Соломона:

„...И сдѣлалъ литое изъ мѣди море,—отъ края до края его 10 локтей, совсѣмъ круглое, вышиною въ 5 локтей и снурокъ въ 30 локтей обнималъ его кругомъ“.

3. Въ сочиненіи *Аіенъ-Акбери*, одного изъ индійскихъ браминовъ, принимается, что

$$\pi=\frac{3927}{1250}=3{,}1416\left(\text{до } \frac{1}{10^4}\right)$$

это приближеніе считается древнѣе Архимедовскаго *****).

4. *Архимедъ* за 287 л. до Р. Х. въ сочиненін „Объ измѣреніи круга“ доказываетъ, что

$$\pi>3\frac{10}{71}$$

*) См. *Ващенко-Захарченко*. Исторія математики, стр. 355.

**) Тоже стр. 354.

***) Тоже, стр. 383.

****) Третья книга царствъ. VII, 23.

*****) См. Начала Эвклида пр. *Ващенко-Захарченко*, стр. 298.

и

$$\pi > 3\frac{1}{7}.$$

Слѣдовательно

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ съ точн. до } \frac{1}{10^2}.$$

Архимедъ употреблялъ способъ периметровъ, ограничиваясь правильными 96-ти угольниками.

Евтокій *) упоминаетъ, что *Аполлоній Пергамскій* и *Филонъ Кидарскій* вычислили отношеніе окружности къ діаметру съ большимъ приближеніемъ, чѣмъ Архимедъ. Эти приближенія не дошли до насъ.

5. Арабскій математикъ *Магометъ Бенъ-Муза* **) въ своей алгебрѣ написанной около 830 г. по повелѣнію Калифа *Аль-Мамуна* такъ выражается объ отношеніи окружности къ діаметру: „число $\frac{22}{7}$ прилагается въ практической жизни, хотя и не вполнѣ точно; геометры обладаютъ двумя другими „методами".

Подъ этими методами, какъ оказывается далѣе, авторъ подразумѣваетъ два другія приближенія π, именно

$$\pi = \sqrt{10} \left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$$

и

$$\pi = \frac{3927}{1250}.$$

Надо думать, что эти послѣднія числа заимствованы изъ Индіи.

На подлинникѣ арабской рукописи „Алгебры" Магометъ-Бенъ-Муза находится слѣдующая замѣтка по поводу числа $\frac{22}{7}$ ***) „это есть приближеніе, а не истинная правда; никто не можетъ опредѣлить точное значеніе этого отношенія и найти дѣйствительную длину окружности, кромѣ того кому все извѣстно: ибо линія эта не есть прямая, которой длина можетъ быть точно опредѣлена. Это называется приближеніемъ, подобно тому какъ говорятъ о корняхъ квадратныхъ изъ ирраціональныхъ чиселъ, что они суть приближенія, а не точная истина. Одинъ Богъ знаетъ, какой есть точный корень. Лучшій способъ здѣсь указанный, это умножить діаметръ на 3 и $\frac{1}{7}$. Это самый скорый и самый легкій способъ. Богу извѣстно лучшее".

*) Тоже, стр. 309.

**) Физико-Матем. науки въ ихъ наст. и прошедшемъ. Очерки развитія матем. наукъ на западѣ.

***) См. *Ващенко-Захарченко*. Истор. Матем. стр. 467

6. *Абуль-Вефа* *), арабскій геометръ 10-го вѣка (940—998), находитъ отношеніе окружности къ діаметру, вычисляя периметры правильныхъ многоугольниковъ о 720 сторонахъ.

Найденное имъ значеніе π

$$3{,}14156815$$

разнится отъ истиннаго менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{10^4}$.

7. Извѣстный арабскій математикъ *Алькарги* (1010 г.) въ своемъ сочиненіи Кафи-филь-Гисабъ (все извѣстное по ариѳметикѣ) находитъ длину окружности, умножая діаметръ на $3\frac{1}{7}$, а длину діаметра,—раздѣляя окружность на $3\frac{1}{2}$ **). Предыдущія работы по отысканію π ему, повидимому, неизвѣстны.

Впрочемъ вообще араб. ученые, имѣя уже довольно точныя значенія π, стремятся найти еще новыя. Причина этого заключается, повидимому, въ томъ, что первоначально приближенія π были заимствованы отъ грековъ или индусовъ, а затѣмъ арабскіе ученые стремились самостоятельно вычислить отношеніе окружности къ діаметру.

8. *Леонардъ Пизанскій* ***) въ „Practica geometriæ" (1220) находитъ, что

$$\pi = 3{,}1418 \left(\text{среднее значеніе точное до } \frac{1}{10^3}\right)$$

Хотя онъ, подобно Архимеду, ограничивается правильными 96-ти угольниками, однако употребляетъ способы вычисленія болѣе совершенные чѣмъ тѣ, которыя употреблялись Архимедомъ.

9. *Петръ Мецій* ****) въ началѣ 16-го вѣка первый опредѣлилъ достаточно точное для многихъ случаевъ практики значеніе π. Найденное Меціемъ приближеніе

$$\frac{355}{113},$$

точное до $\frac{1}{10^6}$, имѣетъ еще то преимущество, что (какъ извѣстно), легко удерживается въ памяти.

10. *Вьета* (1540—1603), основатель алгебры, нашелъ для отношенія

*) Тоже, стр. 527.

**) Тоже, стр. 480.

***) Извѣстенъ также подъ именемъ Фибоначчи.

См. *Ващенко-Захарченко*. Ист. Мат. стр. 198.

****) См. Начала Эвклида, пр. *Ващенко-Захарченко*, стр. 310.

окружности къ діаметру слѣдующее замѣчательное выраженіе

$$\pi=\cfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

это первая по времени *формула*, опредѣляющая π *).

Пользуясь этою формулою, Вьета нашелъ приближеніе

$$\pi=3{,}1415926535$$

вѣрное до 10 знаковъ.

Со временъ Вьета прекращаются попытки ученыхъ къ отысканію точной квадратуры круга и всѣ усилія сосредоточиваются на возможно точномъ вычисленіи π.

11. *Бега-Эддинъ* **), послѣдній арабскій математикъ (1547—1622), въ книгѣ „Эссенція вычисленія" рекомендуетъ опредѣлять длину окружности посредствомъ нитки, а изъ нѣкоторыхъ формулъ его можно заключить, что π принималось равнымъ 2,91 ***).

12. Послѣднее самостоятельное китайское сочиненіе по математикѣ относится къ 1593 г. и называется „Начала искусства вычисленія". Въ немъ даны слѣдующія значенія π †):

$$\pi=3$$

$$\pi=\frac{160}{33}.$$

13. *Адріанъ-Романусъ* (1561—1615) ††), вычисляя периметры правильныхъ многоугольниковъ о

1073741824

сторонахъ, находитъ приближеніе π вѣрное до 16-го десят. знака; именно

$$\pi=3{,}14159265358979З$$

---

*) *Вьета* искалъ отношеніе площади квадрата, вписаннаго въ кругъ, къ площади этого круга при радіусѣ$=\frac{1}{2}$.

См. Начала Евклида, пр. *Ващенко-Захарченко*, стр. 311.

**) *Бега-Эддинъ* проситъ читателя, чтобы онъ его сочиненія давалъ только лицамъ, принадлежащимъ его семейству и желающимъ сочетаться съ искусствомъ вычисленія. Давать же его книгу—постороннему грубому жениху—*Бега Эддинъ* сравниваетъ съ украшеніемъ собаки жемчугомъ.

См. *Ващенко-Захарченко* Ист. матем. стр. 677.

***) Тоже, стр. 666.

†) Тоже, стр. 571.

††) См. Начала Евклида, пр. *Ващенко-Захарченко*, стр. 311.

Со временъ *Романуса* входитъ въ обычай обозначать отношеніе окружности къ діаметру греческою буквою π отъ слова Περιφερια.

14. *Лудольфъ* (изъ Кельна), вычисляя периметры правильныхъ многоугольниковъ о

36893488147419103232

сторонахъ, нашелъ такое приближеніе π, которое заключаетъ въ себѣ 36 вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ. По этому поводу пр. Ващенко-Захарченко замѣчаетъ *): „надо удивляться терпѣнію и усидчивости Лудольфа, потому что едва ли можно найти работу болѣе скучную и однообразную; въ ней мы не находимъ ни метода, ни пріемовъ, упрощающихъ вычисленіе. Какъ ни скучна была работа Лудольфа, но нашелся патеръ *Гримбергеръ*, который провѣрилъ всѣ вычисленія Лудольфа и нашелъ, что они вѣрны".

15. *Снелліусъ* (1591—1626) и *Гюгенсъ* **) (1629—1695) дали теоремы, значительно упрощающія вычисленіе π по способу периметровъ. Для полученія Архимедова отношенія Снелліусу достаточно было вычислить только периметры шестиугольниковъ.

16. *Валлисъ* ***) въ „Ариѳметикѣ безконечныхъ" далъ въ 1655 г. слѣдующее выраженіе π

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots$$

17. *Валлисъ*, недовольный точностью найденныхъ имъ приближеній для π, сообщилъ о своихъ работахъ *Лорду Брункеру* †), изобрѣтателю непрерывныхъ дробей. Тогда послѣдній нашелъ для π слѣдующую формулу

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2}+\cdots\cdots\cdots}}}}}$$

18. Съ открытіемъ исчисленія безконечно малыхъ явилась возможность вычислять π какъ предѣлъ ряда.

Первый по времени рядъ принадлежитъ *Лейбницу* ††) и есть слѣдующій

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots$$

---

*) Тоже, стр. 312.

**) Тоже, стр. 312 и 313.

***) *Euler*. Introduction à l'analyse infinitésimale, стр 142. Эта формула можетъ быть получена изъ разложенія Sinx въ безконечное произведеніе.

†) *Буняковскій*. Лексиконъ чистой и прикладной математики, стр. 247.

††) См. Journal de mathématiques speciales. 1883, стр. 237.

19. Посредствомъ ряда

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.5^3}+\dots\dots\dots\right)$$

Ланьи *) въ 1719 г. нашелъ величину π съ 127 десятичными знаками. Позже *Рихтеръ* **) довелъ вычисленіе до 333 знаковъ, а *Шенксъ* ***) помощью ряда †)

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\dots\dots\dots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\dots\dots\dots\right)$$

нашелъ 530 знаковъ.

Въ Ратклифской библіотекѣ въ Оксфордѣ есть рукопись, въ которой вычисленіе π доведено до 154 десят. знаковъ. По этой рукописи ††)

$$\begin{array}{lllll}\pi=3{,}14159 & 26535 & 89793 & 23846 & 26433 \\ 83279 & 50288 & 41971 & 69399 & 37510 \\ 58209 & 74944 & 59230 & 78164 & 06286 \\ 20899 & 86280 & 34825 & 34211 & 70679 \\ 82148 & 08651 & 32823 & 06647 & 09384 \\ 46095 & 50582 & 37172 & 53594 & 08128 \\ 4802 & & & & \end{array}$$

На практикѣ рѣдко бываетъ нужно болѣе 20 знаковъ. *Леманъ* †††) изъ Потсдама замѣчаетъ, что еслибы искать объемъ шара, имѣющаго радіусъ въ 8 трилліоновъ километровъ, то для вычисленія съ такою точностью, чтобы погрѣшность была меньше всякой микроскопической величины, было бы достаточно взять π только съ 90 десят. знаками.

Обращая π въ непрерывную дробь, получимъ

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots\dots}}}}}}}$$

---

*) См. *Буняковскій*. Лексик. чист. и прик. мат. стр. 191.

**) См. *Урусовъ*. Руководство къ геометр. стр. 419.

***) См. Journal des mathém. speciales, стр. 237.

†) Приведенные ряды получаются посредствомъ приличныхъ положеній изъ общаго ряда

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\dots\dots\dots$$

Можно получить также ряды изъ разлож. arc Sin$x$ и пр.; понятно, что подобныхъ рядовъ существуетъ множество. См. Euler Introductions и пр.

††) См. *Буняковскій*. Мат. лексик. стр. 190.

†††) Nouvelles Annales des Mathém. 1854, стр. 418.

Урусовъ. Геометрія, стр. 419.

Первыя приближенія суть

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}.$$

Третьи изъ нихъ приписывается *Ривардсу* *).

20. *Иванъ Бернулли* **) (1692) нашелъ слѣдующее символическое выраженіе для π:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\lg i}{i} \text{ (гдѣ } i=\sqrt{-1}),$$

которое можетъ быть приведено къ виду

$$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

21. Начертимъ на бумагѣ рядъ равноотстоящихъ параллельныхъ линій и будемъ бросать на бумагу цилиндрическую иглу, длина которой равна половинѣ разстоянія между параллельными,—замѣчая при этомъ каждый разъ, встрѣчаетъ или не встрѣчаетъ игла одну изъ параллельныхъ линій. Теорія вѣроятностей доказываетъ, что отношеніе числа бросаній къ числу встрѣчъ тѣмъ меньше отличается отъ π, чѣмъ больше число бросаній, такъ что предѣлъ отношенія числа бросаній къ числу встрѣчъ, при безграничномъ увеличеніи числа бросаній, есть число π.

Замѣчаніе это принадлежитъ, кажется, *Лапласу*.

22. Многочисленныя и безплодныя попытки отысканія точной квадратуры круга привели геометровъ къ убѣжденію въ невозможности этой задачи т. е. въ невозможности по данному радіусу окружности построить, посредствомъ циркуля и линейки, сторону квадрата равномѣрнаго данному кругу.

Убѣжденіе это выразилось въ слѣдующемъ заявленіи Парижской Академіи, напечатанномъ въ ея мемуарахъ за 1755 г.: „L'Académie a

---

*) Пользуюсь случаемъ, чтобы обратить вниманіе на нѣкоторую неточность довольно распространенную въ нашихъ учебникахъ.

Чтобы найти разложеніе π въ непрерывную дробь, берутъ обыкновенно нѣкоторое приближеніе π и, оперируя надъ нимъ извѣстнымъ образомъ, получаютъ непрерывную дробь, которую и принимаютъ за разложеніе π. При такомъ способѣ нѣкоторые частные знаменатели очевидно могутъ вовсе не принадлежать развертыванію π. Если же имѣютъ въ виду не собственно π, а нѣкоторую десятичную дробь, то не къ чему и упоминать объ отношеніи окружности къ діаметру.

Для полученія истиннаго разложенія π слѣдуетъ взять два приближенія π, одно по недостатку,—другое по избытку, развернуть каждое изъ нихъ въ непрерывную дробь и принять во вниманіе только тѣ частные знаменатели, которые общи обоимъ разложеніямъ.

**) См. *Буняковскій*. Лексик. чист. и прик мат., стр. 192.

Приведенное выраженіе легко получить изъ формулы:

$$e^{xi}=\mathrm{Cos}x+i\mathrm{Sin}x.$$

pris, cette année, la resolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpetuel."

Надо однако замѣтить, что это заявленіе академіи наукъ не было въ то время достаточно обосновано, потому что не существовало *доказательства* невозможности квадратуры круга.

Правда, что были попытки такого доказательства, принадлежащія *Грегори* и *Ньютону* *), но онѣ не признавались удовлетворительными.

Только въ 1761 г. *Ламбертъ* **) въ Memoires de Berlin далъ строгое доказательство теоремы о несоизмѣримости π и π^2.

Изъ теоремы Ламберта вытекало, что π не есть ирраціональное число, происходящее отъ извлеченія корня 2-ой степени изъ соизмѣримаго числа, но до доказательства невозможности квадратуры круга все таки было далеко и однимъ недоразумѣніемъ можно объяснить общераспространенное въ то время мнѣніе о доказанности упомянутой теоремы. Въ 1874 г. *Эрмитъ* въ мемуарѣ о показательныхъ функціяхъ ***) доказалъ, что число e, служащее основаніемъ Неперовскихъ логариѳмовъ, есть число трансцендентное, т. е. что оно не удовлетворяетъ никакому алгебраическому уравненію

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots\dots\dots\dots+kx+l=0$$

съ раціональными коэффиціентами a, b......l ****). По этому поводу знаменитый геометръ въ письмѣ къ Borchardt'у †) выражается такъ: „я не отважился однако на отысканіе доказательства трансцендентности числа π. Пусть попробуютъ другіе. Никто не будетъ счастливѣе меня отъ ихъ успѣха, но повѣрьте мнѣ, мой другъ, это будетъ стоить имъ нѣкоторыхъ усилій."

Наконецъ въ 1882 г. *Линдеманъ* ††) возвѣстилъ академіи наукъ, что имъ доказана трансцендентность числа π. Доказательство Линдемана основывается на искусномъ обобщеніи трудовъ *Эрмита*, и на формулѣ

$$e^{\pi i}=-1.$$

По мнѣнію *Руше* доказательство *Линдемана* допускаетъ дальнѣйшія упрощенія †††).

---

*) См. *Ващенко-Захарченко*. Начала Евклида, стр. 314

**) См. Journ. de mat. spec. стр. 238. 1883.

Доказательство несоизмѣримости π и π^2 можно найти въ учебникахъ геометріи *Лежандра* и *Билибина*.

***) См. Journal. de mat. spéciales. 1883, стр. 238.

****) См. *Марковъ*. Доказательство трансцендентности чиселъ e и π (невозможность квадратуры круга) 1883.

†) См. Journal des mat. spéciales, стр. 238. 1883 г.

††) *Lindeman*. Ueber die Zahl π. Mathematische Annalen. B. XX.

†††) *Rouché* et *Comberousse*. Traite de Geómétrie *(cinquième edition)*.

Изъ сопоставленія работъ *Линдемана* съ работами *Ванцеля* *) вытекаетъ невозможность квадратуры круга. Дѣйствительно *Ванцель* доказалъ, что всѣ построенія, производимыя циркулемъ и линейкою, могутъ дать только такія прямыя, взаимныя отношенія которыхъ выражаются числами алгебраическими, а такъ какъ отношеніе стороны квадрата, равномѣрнаго кругу, къ радіусу этого круга есть трансцендентное число $\sqrt{\pi}$, то отсюда слѣдуетъ невозможность квадратуры круга помощью циркуля и линейки.

Итакъ только въ наше время увѣнчался трудъ многихъ столѣтій.

М. Попруженко (Воронежъ).

РЕЦЕНЗІИ.

Начала алгебры. Учебное пособіе. П. И. Матковскій. Часть I. Кіевъ. 1890. 8°. VI+227 стр. Ц. 1 р. 50 к.

Раскройте любой учебникъ по элементарной алгебрѣ, и вы съ первыхъ же страницъ встрѣтите немало противорѣчій въ изложеніи, немало натяжекъ и недомолвокъ въ доказательствахъ; вы здѣсь не видите той опредѣленности, систематичности и строгости, которыми отличаются элементы геометріи. Я уже не говорю о томъ, что эти учебники, въ большинствѣ случаевъ, не удовлетворяютъ основнымъ педагогическимъ требованіямъ. Все это объясняется очень просто,—стоитъ только припомнить, что многіе изъ важнѣйшихъ отдѣловъ элементарной алгебры находятся еще въ довольно жалкомъ состояніи, если разсматривать ихъ съ научной точки зрѣнія, что даже лучшіе математическіе мыслители высказываютъ прямо противоположные взгляды относительно предметовъ первостепенной важности. Поэтому всякая новая попытка научнаго систематическаго изложенія основъ алгебры,—а тѣмъ болѣе попытка довольно удачная, должна быть встрѣчена нами съ полнымъ сочувствіемъ. Такую попытку мы видимъ въ „Началахъ алгебры“ г-на Матковскаго, который, судя по 1-ой части его труда, намѣренъ дать строгое научно-систематическое и вмѣстѣ съ тѣмъ полное изложеніе основъ алгебры.

Вышедшая недавно первая часть этого сочиненія подраздѣлена на 3 книги; въ нихъ подготовляется весь количественный матеріалъ, надъ которымъ оперируетъ начальная алгебра. Здѣсь мы видимъ, какъ постепенно, по мѣрѣ надобности, вводится этотъ матеріалъ въ науку, какимъ законамъ подчиняется онъ и какими свойствами обладаетъ. Въ 1-ой книгѣ излагаются „абсолютныя раціональныя числа и основные законы операцій“, во 2-ой—„алгебраическія раціональныя числа и выраженія“ и въ 3-ей—„ирраціональныя числа и выраженія, мнимыя и комплексныя числа“.

Прежде всего нельзя не отмѣтить той стройности и систематичности, которыми отличается работа г-на Матковскаго. Въ его „Началахъ“ мы ясно видимъ какъ фундаментъ, на которомъ возводится стройное зданіе данной научной системы, такъ и каждую изъ его отдѣльныхъ частей. Основными положеніями, изъ которыхъ складываются всѣ истины элементарной алгебры, являются у него—идея о числѣ (рядъ натуральныхъ чиселъ) и отсюда вытекающее опредѣленіе равенства чиселъ (цѣлыхъ),

*) *Wantzel*. Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de géométrie peut se resoudre avec la règle et le compas. Journ. de mat. pures et appliq. 1 ser. II. 1837 г.

затѣмъ два основные закона, или (какъ называетъ авторъ) аксіомы—„законъ тожества“ и „законъ замѣщенія“ и наконецъ, рядъ опредѣленій, вводимыхъ въ изложеніе по мѣрѣ надобности. Всѣ остальныя истины, даже тѣ, которыя въ общепринятыхъ руководствахъ относятся къ разряду количественныхъ аксіомъ, доказываются уже при помощи этихъ основныхъ положеній.

Другою отличительною чертою „Началъ алгебры“, сравнительно съ обычными работами по этому предмету, является та послѣдовательность, съ которою авторъ проводитъ чрезъ весь свой трудъ одну и ту же,—правда, не новую, но очень важную—идею. Эту основную идею самъ авторъ выражаетъ, между прочимъ, въ такихъ словахъ: „введеніе новаго числа въ алгебру основывается только на опредѣленіи этого числа“ (стр. 212, подстр. примѣч.). Въ чемъ же заключается важность этого принципа? Извѣстно, что математическій анализъ своимъ развитіемъ и совершенствомъ главнымъ образомъ обязанъ тѣмъ символическимъ пріемамъ, которые имѣютъ въ немъ широкое примѣненіе. Человѣческій умъ съ трудомъ производитъ мыслительныя операціи надъ отвлеченными понятіями, не облекая ихъ въ какую-нибудь конкретную форму. Незамѣнимымъ подспорьемъ въ этомъ случаѣ является символизмъ: отвлеченныя теоремы становятся какъ-бы конкретными и операціи надъ ними облегчаются. Но этимъ не исчерпывается важное значеніе символовъ при мыслительныхъ операціяхъ. Дѣло въ томъ, что законы, которымъ подчиняются символы при своихъ комбинаціяхъ, вовсе не тождественны съ тѣми законами, которымъ подлежатъ при этомъ извѣстныя понятія, извѣстныя величины, соотвѣтствующія введеннымъ нами символамъ. Законы символовъ будутъ имѣть условный характеръ *). Мы, вводя эти символы въ наши операціи, сами подчиняемъ ихъ произвольнымъ, но затѣмъ разъ-навсегда однимъ и тѣмъ же законамъ, имѣя въ виду только, чтобы между законами, которымъ подчиняются явленія того и другого порядка, всегда существовало строгое соотвѣтствіе, т. е. чтобы за законами символовъ всегда скрывались одни и тѣ же законы соотносящихся величинъ. Само собою разумѣется, что законы, которымъ подчиняются эти символы, равно какъ и тѣ свойства символовъ, которыя при этомъ раскрываются, не должны находиться въ противорѣчіи какъ между собою, такъ и съ законами и свойствами тѣхъ однородныхъ символовъ, которые нами раньше введены. Обратимся теперь къ „Началамъ“ г-на Матковскаго и постараемся прослѣдить, насколько удачно проводитъ онъ въ своемъ трудѣ этотъ основной принципъ символизма.

Въ 1-ой книгѣ, указавъ на рядъ натуральныхъ чиселъ и установивъ понятіе равенства для *такихъ чиселъ*, а также два основные закона, авторъ переходитъ къ самымъ операціямъ надъ этими числами. При этомъ, только на сложеніе онъ смотритъ, какъ на самостоятельную, основную операцію, всѣ же остальныя операціи опредѣляетъ въ зависимости отъ сложенія. При изложеніи теоріи этихъ операцій авторъ очень подробно останавливается на выводѣ всѣхъ основныхъ законовъ, согласно которымъ комбинируются количественные символы элементарной алгебры (въ данномъ случаѣ соотвѣтствующіе натуральнымъ числамъ); онъ не упускаетъ изъ виду доказать однозначность вычитанія и дѣленія, а также отмѣтить, что прямыя операціи всегда возможны, между тѣмъ какъ обратныя—только въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Въ силу послѣдняго при изложеніи теоріи обратныхъ операцій для натураль-

*) Я не имѣю возможности въ данномъ случаѣ болѣе подробно останавливаться на этомъ вопросѣ. Считаю умѣстнымъ только напомнить, между прочимъ, читателямъ о методѣ кватерніоновъ Гамильтона и о работахъ по математической логикѣ Буля, Джевонса, Порѣцкаго и др.

ныхъ чиселъ, разсматриваются только возможныя разности и частныя. Затѣмъ, предпославши „нѣсколько предложеній изъ теоріи чиселъ", необходимыхъ при дальнѣйшемъ изложеніи, авторъ расширяетъ понятіе о числѣ, руководствуясь при этомъ такими соображеніями. „Частное $a:b$ вполнѣ понятно, когда дѣлимое a есть кратное дѣлителя b; въ противномъ случаѣ оно не представляетъ числа въ принятомъ до сей поры смыслѣ. Чтобы возможно было выразить всякое частное, расширимъ наше понятіе о числѣ, введя дробныя числа" (стр. 18); слѣдовательно частное $a:b$ должно разсматривать въ такомъ случаѣ, какъ новое число, которое обозначается символомъ $\frac{a}{b}$ и называется дробью или дробнымъ числомъ. Такимъ образомъ новый символъ $\frac{a}{b}$ является болѣе общимъ, нежели предыдущій количественный символъ a. Но раньше мы замѣтили, что символы подчиняются вообще условнымъ законамъ, а потому авторъ, приступая къ опредѣленію равенства и операцій надъ дробными числами, вполнѣ вѣрно замѣчаетъ: „Такъ какъ дробное число не обладаетъ пока никакими дальнѣйшими свойствами, то можемъ приписать ихъ ему произвольно, наблюдая при этомъ только, чтобы эти свойства не противорѣчили другъ другу и чтобы опредѣленія операцій надъ дробными числами включали бы въ себѣ извѣстные законы и условія операцій надъ цѣлыми числами" (стр. 49). Послѣ этого онъ совершенно произвольно устанавливаетъ равенство дробныхъ символовъ. „Если частныя $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ суть цѣлыя числа, то, какъ извѣстно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ когда $ad=bc$ и $\frac{a}{b}\lessgtr\frac{c}{d}$, когда $ad\lessgtr bc$. (Эти предложенія раньше доказаны были для цѣлыхъ чиселъ). Для обобщенія предыдущаго устанавливаемъ здѣсь слѣдующее понятіе о равенствѣ и неравенствѣ дробныхъ чиселъ: два числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, когда $ad=bc$. Поэтому, напр., $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$; $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$. Изъ двухъ чиселъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ первое называется большимъ или меньшимъ второго, смотря по тому, будетъ ли ad больше или меньше bc" (стр. 49).

Здѣсь, какъ видитъ читатель, ни слова не говорится о полученіи дробныхъ чиселъ путемъ измѣренія. Основное свойство дроби (неизмѣняемость ея величины отъ умноженія или дѣленія ея членовъ на одно и то же число) и вытекающій отсюда способъ приведенія дробей къ одному знаменателю являются въ данномъ случаѣ необходимымъ слѣдствіемъ изъ установленнаго нами *произвольно* понятіи о равенствѣ дробей. (Ср. съ обычнымъ изложеніемъ).

Исходя изъ той же точки зрѣнія, авторъ устанавливаетъ далѣе совершенно условно сложеніе новыхъ символовъ. „Чтобы установить понятіе о суммѣ дробныхъ чиселъ обращаемся къ извѣстному равенству $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, справедливость котораго была доказана для того случая, когда a и b суть кратныя c. Мы доставимъ этому равенству полную общность, если во всѣхъ случаяхъ подъ суммой двухъ чиселъ $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ будемъ разумѣть число $\frac{a+b}{c}$" (стр. 52). Такимъ образомъ и послѣднее равенство носитъ характеръ опредѣленія.

Для того чтобы установить произведеніе, разность и частное дробей, авторъ вездѣ пользуется извѣстными уже равенствами, справедливость которыхъ доказана была для того случая, когда $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$,....., входящія въ эти равенства, представляли собою цѣлыя числа. При этомъ онъ предоставляетъ этимъ равенствамъ полную общность, разумѣя подъ символами, входящими въ нихъ, дробныя числа. Замѣтимъ, что онъ опять доказываетъ однозначность вычитанія и дѣленія дробей и провѣряетъ, остаются ли въ силѣ для новыхъ символовъ раньше выведенные основные законы операцій.

Просмотрѣвши первую книгу, можно уже дальше предугадать, какъ авторъ будетъ вводить дальнѣйшій количественный матеріалъ алгебры и раскрывать его свойства. Вторую книгу онъ начинаетъ введеніемъ новаго символа $a-b$, (гдѣ a и b абсолютныя раціональныя числа—цѣлыя или дробныя, при чемъ a можетъ быть больше, меньше и равняться b), и этотъ символъ называетъ *алгебраическимъ числомъ;* опредѣленіемъ новаго символа является равенство $(a-b)+b=a$. Для этого новаго символа опять устанавливается понятіе о равенствѣ (стр. 65—66) на основаніи соображеній, которыя имѣютъ полную аналогію съ соображеніями, приведенными въ случаѣ дробей *). Расширивъ такимъ образомъ понятіе о числѣ, авторъ говоритъ: „Новое число $a-b$ называется *отрицательнымъ*, если a меньше b. Оно наз. *нулемъ* и обозначается символомъ 0, если $a=b$, т. е. $a-a=0$. Здѣсь впервые приписывается нулю характеръ числа и, такимъ образомъ, расширяется роль, отведенная ему въ системѣ счисленія“ (стр. 66). Нѣтъ надобности говорить о томъ, какъ устанавливаются всѣ операціи надъ алгебраическими числами, оправдываются законы для этихъ операцій и, наконецъ, выводятся правила для операцій надъ отрицательными числами. Сказаннымъ я, кажется, уяснилъ уже, что во взглядахъ и въ изложеніи автора видна послѣдовательность, опредѣленность и ясность.

Мы видимъ, что при подобной постановкѣ дѣла совершенно устраняется щекотливый вопросъ о связи операцій надъ цѣлыми числами съ операціями надъ дробями или же надъ отрицательными числами, а слѣдовательно устраняются и тѣ натяжки, которыя неизбѣжны при объясненіи способовъ производства операцій надъ этими символами. Ясно, что при такомъ научномъ изложеніи, вопросъ о томъ, имѣютъ ли отрицательныя числа самостоятельное значеніе или нѣтъ, устраняется самъ собою. Отрицательное число есть символъ, который, какъ мы видѣли, вводится для общности операцій независимо отъ того, существуютъ ли въ дѣйствительности величины, соотвѣтствующія этимъ символамъ, или нѣтъ; въ силу этого, при объясненіи дѣйствій надъ отрицательными числами, нѣтъ надобности прибѣгать къ идеѣ противоположности или же направленія, что необходимо при иной системѣ изложенія. Если же при этомъ говорятъ о томъ, что отрицательныя числа меньше положительныхъ и нуля, то такое понятіе, какъ мы видимъ, чисто условное **) (§§ 120, 146). При такомъ взглядѣ на алгебраическія числа объясненіе операцій надъ „алгебраическими выраженіями и формулами“ становится дѣломъ очень легкимъ; и дѣйствительно авторъ справляется съ этимъ вопросомъ совершенно свободно.

Въ третьей и послѣдней книгѣ мы находимъ, между прочимъ, довольно обстоятельное изложеніе „началъ теоріи предѣловъ“. Этотъ отдѣлъ является необходимымъ въ виду того, что авторъ, пополняя числовой рядъ новыми членами—ирраціональными числами, разсматриваетъ ихъ, какъ предѣлъ неограниченнаго ряда чиселъ, который удовлетворяетъ условіямъ существованія предѣла, но раціональ-

---

*) Для возможныхъ разностей въ 1-ой книгѣ доказано, что $a-b \gtreqless c-d$, если $a+d \gtreqless b+c$. Такое свойство распространяется условно и на алгебраическое число.

**) Не принявъ этого во вниманіе, такіе авторитеты, какъ д'Аламберъ и Карно, считаютъ ложнымъ взглядъ на отрицательныя числа, какъ на меньшія нуля.

нымъ предѣломъ не обладаетъ. Нѣтъ надобности останавливаться на томъ, какимъ образомъ авторъ проводитъ далѣе идею, положенную въ основаніе своего труда. Скажу только, что и при дальнѣйшемъ изложеніи онъ выполняетъ все это съ тѣмъ же искусствомъ и съ тою же послѣдовательностью, какъ и раньше.

Послѣдній численный символъ элемент. алгебры, отличный отъ прежде введенныхъ, есть мнимый символъ; съ его помощью дается самая общая форма алгебраическаго числа въ комплексномъ или составномъ выраженіи. Конецъ 3-ей книги авторъ отводитъ „геометрическому представленію чиселъ“, гдѣ мы находимъ геометрическое изображеніе мнимыхъ и комплексныхъ выраженій; при этомъ авторъ заключаетъ свою работу такими словами: „Изъ предыдущаго ясно, что не только дѣйствительныя, но также мнимыя и комплексныя числа имѣютъ реальный смыслъ“......... „Поэтому названіе *мнимое число* далеко не соотвѣтствуетъ сущности дѣла, ибо подъ *мнимымъ* мы разумѣемъ только то, что существуетъ въ воображеніи, но не имѣетъ мѣста въ дѣйствительности“...... (стр. 227). Эти строки, по моему мнѣнію, находятся въ противорѣчіи съ тѣмъ основнымъ принципомъ, который проходитъ чрезъ весь разсмотрѣнный нами трудъ, а также съ тѣми свойствами алгебраическихъ символовъ, которыя при этомъ раскрываются. Постараюсь выяснить это, насколько позволяетъ характеръ этой замѣтки.

Только смотря на количественный матеріалъ, надъ которымъ оперируетъ алгебра, какъ на количественные символы, можно излагать алгебру въ такомъ видѣ, въ какомъ излагаетъ ее авторъ. Онъ пришелъ къ символамъ дробныхъ или отрицательныхъ чиселъ, вовсе не разсматривая тѣхъ реальныхъ величинъ, изъ разсмотрѣнія которыхъ можно было бы получить эти символы; онъ вводитъ ихъ не потому, что они имѣютъ реальный смыслъ, а потому, что въ ихъ введеніи встрѣчается логическая необходимость. При такомъ взглядѣ, вовсе устраняется, какъ я замѣтилъ раньше, вопросъ о томъ, имѣютъ ли вводимые символы реальное значеніе, ибо всякій символъ самъ по себѣ реальный*); а вопросъ о томъ, есть ли величины, соотвѣтствующія этимъ символамъ, является вопросъ *въ данномъ случаѣ* для насъ совершенно излишнимъ. Мы послѣ уже, переводя наши символы, такъ сказать, на реальный языкъ, видимъ, что въ большинствѣ случаевъ можно подыскать такія величины, которыя будутъ соотвѣтствовать установленнымъ символамъ, что эти символы всегда можно представить геометрически. На основаніи соображеній, подобныхъ предыдущимъ, мы вводимъ и мнимый символъ и составное выраженіе. Существованіе и послѣднихъ символовъ не требуетъ себѣ оправданія въ реальномъ существованіи какихъ-то „мнимыхъ величинъ“. Если эти символы намъ удается представить графически, то это еще не доказываетъ реальнаго существованія мнимыхъ величинъ. Сказанное я поясню примѣромъ. Масса какого-нибудь тѣла, положимъ масса m, есть, безспорно, величина реальная; мы должны представлять ее всегда, какъ величину абсолютную: отрицательной массы нѣтъ,—мы ее не знаемъ и не понимаемъ; но геометрически всякій можетъ изобразить и $-m$. Изъ этого однако еще не слѣдуетъ, что отрицательная масса имѣетъ реальное значеніе. Одно несомнѣнно, что для нея существуетъ символъ, и что надъ нимъ мы можемъ производить мыслительныя (математеческія) операціи, какъ и надъ символомъ, соотвѣтствующимъ реальной величинѣ. Безспорно также, что въ большинствѣ случаевъ бываетъ очень полезно переводить количественную мысль съ одного языка математики—языка

---

*) Послѣднее я говорю въ томъ смыслѣ, что *всякій* символъ имѣетъ одну и ту же роль: онъ служитъ при мыслительныхъ операціяхъ *конкретнымъ* знакомъ вмѣсто извѣстныхъ отвлеченныхъ понятій.

символовъ—на другой языкъ, т. е. обращаться къ геометрическому изображенію, но не слѣдуетъ только отсюда дѣлать тѣхъ выводовъ, къ которымъ приходитъ авторъ.

Наконецъ, можно согласиться съ авторомъ, что „названіе *мнимаго числа* далеко не соотвѣтствуетъ сущности дѣла“, но неудачнымъ въ этомъ случаѣ нужно считать не первую часть этого термина, какъ полагаетъ авторъ, а наоборотъ—вторую. Нужно различать число, величину отъ ихъ символовъ; и если отъ смѣшенія этихъ понятій касательно дробныхъ, отрицательныхъ и др. чиселъ не выходитъ никакой путаницы, то нельзя сказать того же относительно мнимыхъ выраженій. Если въ первомъ случаѣ, смѣшивая различныя понятія, мы находимъ себѣ оправданіе въ томъ, что есть реальныя величины, соотвѣтствующія отрицательнымъ и другимъ символамъ, то во второмъ случаѣ мы не имѣемъ никакого права и необходимости называть величиной, единицей, числомъ того, что не обладаетъ ни однимъ изъ существенныхъ признаковъ, входящихъ въ эти понятія. Болѣе удачными въ этомъ отношеніи нужно считать употребляемые нѣкоторыми термины: *мнимый символъ*, *мнимое выраженіе* и т. п.

Послѣдній параграфъ, такъ некстати попавшій въ трудъ г-на Матковскаго, своимъ появленіемъ, по всей вѣроятности, обязанъ излишнему вліянію нѣмецкой математической литературы, что подтверждается и тѣмъ, что изъ довольно большого числа иностранныхъ источниковъ (20), которыми пользовался авторъ при составленіи своего труда, самая значительная часть выпадаетъ на долю нѣмецкой литературы (17 ист.).

Кромѣ того можно сдѣлать автору еще одинъ незначительный упрекъ. Такъ какъ эта книга предназначена для лицъ уже знакомыхъ съ элементарной алгеброй (по крайней мѣрѣ, мы съ такой точки зрѣнія ее разсматриваемъ), то, я думаю, что та растянутость въ изложеніи, тѣ повторенія, которыя попадаются въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, а въ особенности примѣры, введенные кое-гдѣ (напр., на стр. 150—151) авторомъ, являются совершенно излишними.

Я не буду долѣе останавливаться какъ на разборѣ болѣе частныхъ вопросовъ, затронутыхъ въ „Началахъ алгебры“, такъ и на изложеніи всего того, чѣмъ настоящее сочиненіе отличается отъ обычныхъ работъ по этому предмету. Уже изъ этой краткой замѣтки становится яснымъ, сколько интереснаго и вмѣстѣ съ тѣмъ поучительнаго могутъ найти въ работѣ г-на Матковскаго не только лица, желающія болѣе близко и основательно ознакомиться съ этимъ предметомъ, не только приступающіе къ изученію высшаго анализа, но, мнѣ кажется, и многіе преподаватели, а въ особенности изъ начинающихъ. *К. Щ.* (Кіевъ).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Кіевское Физ.-Мат. Общ. 3-ье очер. засѣданіе (15-го марта 1890 г.). Предсѣдательствовалъ проф. Н. Н. Шиллеръ. За отсутствіемъ секретаря Общества обязанности его исполнялъ Э. К. Шпачинскій. Въ засѣданіи присутствовало 49 членовъ.

По выслушаніи и утвержденіи протокола предыдущаго засѣданія, были сдѣланы сообщенія:

1) *В. П. Ермаковымъ:* „О преподаваніи элементарной математики“. Свой взглядъ на преподаваніе математики въ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ референтъ формулировалъ въ слѣдующихъ основныхъ положеніяхъ: 1) теорію предмета ученики должны изучать и усвоить въ школѣ на урокахъ, 2) ученикамъ не

слѣдуетъ давать учебниковъ по ариѳметикѣ и алгебрѣ, 3) для внѣклассныхъ занятій ученикамъ могутъ быть задаваемы однѣ лишь задачи, 4) курсъ теоріи математики долженъ быть доведенъ до минимума и до возможной простоты, 5) преподаваніе математики должно быть направлено къ достиженію двухъ цѣлей: умѣнью вычислять и къ развитію мыслительныхъ способностей учениковъ. Затѣмъ референтъ болѣе подробно разсмотрѣлъ преподаваніе ариѳметики, отмѣтивъ тѣ отдѣлы, которые должны быть исключены изъ курса, какъ ненужные остатки старины. Къ таковымъ относятся, напримѣръ, статьи объ измѣненіяхъ суммы, разности, произведенія и частнаго, раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ, и въ особенности всѣ, такъ называемыя, „правила“: тройное, процентовъ, смѣшенія, цѣпное и пр., представляющія собою не что иное, какъ упражненія въ рѣшеніи задачъ. Такихъ „правилъ“ можно было бы придумать еще сколько угодно (напр. „правило курьеровъ“), усложняя и затрудняя безъ надобности изученіе столь простой науки какъ ариѳметика. Перейдя къ ариѳметическимъ задачамъ, референтъ на примѣрахъ указалъ до какихъ нелѣпостей доводитъ подчасъ составителей задачниковъ излишнее усердіе въ усложненіи условій задачи и объяснилъ эту моду на сложныя задачи желаніемъ подвергнуть ученика на испытаніяхъ зрѣлости экзамену чуть ли не по всѣмъ отдѣламъ ариѳметики при помощи одного лишь письменнаго отвѣта. Такъ называемыя „скобочныя“ задачи, по мнѣнію референта, такъ-же неумѣстны въ курсѣ начальной ариѳметики; отъ мальчика I-го либо II-го класса рано еще требовать сознательнаго усвоенія всей алгебраической символистики; достаточно если, вникнувъ въ условія предложенной задачи, ученикъ можетъ сказать какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ произвести для ея рѣшенія, хотя бы онъ и не сумѣлъ обозначить письменно всѣхъ дѣйствій при помощи знаковъ. Съ цѣлью развитія мыслительныхъ способностей ученика референтъ рекомендовалъ преподавателямъ останавливаться на разборѣ такихъ несложныхъ задачъ, которыя рѣшаются не однимъ только шаблоннымъ методомъ, а нѣсколькими; только путемъ сопоставленія различныхъ способовъ рѣшенія одной и той-же задачи учащійся можетъ пріучиться при рѣшеніи новой задачи избирать тотъ пріемъ ея рѣшенія, который въ данномъ случаѣ представляется наиболѣе удобнымъ. Въ заключеніе референтъ обратилъ вниманіе на то, что у преподавателей ариѳметики нѣтъ подъ руками такого систематическаго сборника задачъ, который предназначался бы исключительно для развитія сообразительности ученика. Показавъ на нѣсколькихъ примѣрахъ какимъ образомъ, исходя изъ любой задачи, можно составить цѣлый рядъ подготовительныхъ къ ней задачъ и, наоборотъ— путемъ послѣдовательныхъ обобщеній—цѣлый рядъ задачъ болѣе трудныхъ, референтъ замѣтилъ, что такимъ образомъ составленный сборникъ принесъ бы несомнѣнную пользу и, по всей вѣроятности, имѣлъ бы большой успѣхъ.

Сообщеніе В. П. Ермакова вызвало оживленныя пренія, въ которыхъ принимали участіе гг. Шиллеръ, Григорьевъ, Щербина и Мацонъ.—Н. Н. Шиллеръ высказалъ мнѣніе, что при преподаваніи ариѳметики въ тѣхъ учебныхъ заведеніяхъ, гдѣ учащимся предстоитъ еще курсъ алгебры, было бы непроизводительной затратой времени останавливаться слишкомъ долго на упражненіяхъ въ рѣшеніи такихъ задачъ, какія рекомендуются референтомъ, такъ какъ нѣсколько позднѣе каждую изъ нихъ учащійся сумѣетъ свести на рѣшеніе простого алгебраическаго уравненія.— С. С. Григорьевъ изложилъ причины, по которымъ онъ не можетъ согласиться съ мнѣніемъ референта о безполезности учебниковъ ариѳметики и алгебры, въ особенности въ рукахъ учениковъ старшихъ классовъ.—К. М. Щербина замѣтилъ, что низводя преподаваніе математики въ средне-образовательной школѣ до упражненій въ рѣшеніи задачъ, мы съ такимъ же правомъ могли бы обучать учениковъ какой нибудь шахматной игрѣ, ибо и въ этомъ случаѣ мы бы развивали ихъ мыслительныя способности въ столь-же почти одностороннемъ направленіи.

2) *В. И. Фабрицiусъ:* „О кометахъ". Указавъ при помощи спеціально приготовленныхъ рисунковъ какъ велико бываетъ разнообразіе кометъ по внѣшнему ихъ виду и не находя возможнымъ дать въ наше время опредѣленный отвѣтъ на общій вопросъ: „что такое комета?", референтъ старался доказать только, что во 1-хъ) изъ числа всѣхъ кометъ, заблудившихся въ районъ притягательнаго дѣйствія нашей солнечной системы, мы можемъ наблюдать лишь весьма незначительную ихъ часть, такъ какъ громадное большинство описываетъ свой путь на такомъ отъ насъ разстояніи, что не могутъ быть видимы съ земли, и во 2-хъ) объяснилъ почему число кометъ, описывающихъ эллиптическія орбиты около солнца и, стало быть, возвращающихся къ намъ періодически, постепенно увеличивается.

Нѣкоторыя гипотетическія положенія референта вызвали возраженія со стороны гг. Суслова, Хандрикова, Шиллера и Хруцкаго.

Сообщеніе Э. К. Шпачинскаго за позднимъ временемъ отложено до будущаго засѣданія, назначеннаго на 22-е марта.

Закрытой баллотировкой были избраны въ дѣйствительные члены Общества:

1) П. М Севостьяновъ, 2) С. К. Ильяшенко, 3) Д. П. Извѣковъ, 4) И. Ф. Дювре, 5) С. А. Щеніовскій, 6) И. Н. Шафрановскій, 7) В. П. Богаевскій и 8) Н. Ѳ. Рудольфъ.

Слѣдующее засѣданіе назначено на 22-е марта. *Ш.*

4-ое очер. засѣданіе (22-го марта 1890 г.). Предсѣдательствовалъ проф. Н. Н. Шиллеръ. За отсутствіемъ Секретаря Общества обязанности его исполнялъ Э. К. Шпачинскій. Въ засѣданіи присутствовало 33 члена. По выслушаніи и утвержденіи протокола предыдущаго засѣданія предсѣдатель предложилъ присутствующимъ членамъ и гостямъ вывести разъ на всегда изъ употребленія во время засѣданій Общества неумѣстный обычай рукоплесканій. Предложеніе это было принято. Затѣмъ были сдѣланы научныя сообщенія:

1) *Э. К. Шпачинскій*: „О попыткѣ г. Бахметьева найти зависимость между направленіемъ термоэлектрическаго тока и періодической системой химическихъ элементовъ". Сославшись на статью г. Бахметьева: „Термоэлектрическія изслѣдованія", помѣщенную въ 9-мъ Выпускѣ Журнала Русскаго Физ.-Химическаго Общества за 1889 г., референтъ показалъ, что та искусственная, чисто внѣшняя связь, какую авторъ статьи старается установить между направленіемъ термотока и атомнымъ вѣсомъ металловъ, не можетъ имѣть въ настоящее время ни научнаго, ни практическаго значенія.

2) *В. П. Ермаковъ*: „О приближенномъ вычисленіи". Референтъ указалъ нѣсколько элементарныхъ правилъ при выполненіи по приближенію четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ десятичными дробями *).—Сообщеніе вызвало нѣсколько замѣчаній со стороны гг. Чирьева и Мацона.

3) *А. Л. Корольковъ:* „О нѣкоторыхъ погрѣшностяхъ при изложеніи механическихъ свѣдѣній въ курсѣ физики". Обыкновенный выводъ формулы пространствъ въ равноускоренномъ движеніи грѣшитъ тѣмъ, что въ немъ пространства пройденныя въ безконечно-малые промежутки времени, замѣняются пространствами, которыя были бы пройдены въ томъ случаѣ, если бы тѣло двигалось равномѣрно съ начальною скоростью для этого промежутка. Подобную замѣну можно сдѣлать только въ томъ случаѣ, если отношеніе замѣняющей и замѣняемой величинъ стре-

---

*) Будетъ помѣщено въ „Вѣстникѣ" въ видѣ отдѣльной замѣтки.

мится въ предѣлѣ къ единицѣ, что въ курсахъ не доказывается и не можетъ быть доказано при томъ опредѣленіи скорости, которое обыкновенно встрѣчается въ элементарныхъ учебникахъ. (Скорость въ данный моментъ есть скорость такого равномѣрнаго движенія, которое тѣло получило бы въ случаѣ устраненія съ этого момента дѣйствія постороннихъ силъ). Въ этомъ опредѣленіи ничего не говорится о *дѣйствительно проходимомъ пространствѣ*, и потому оно вовсе не годится. Референтъ предложилъ свой выводъ формулы пространства, исходя изъ опредѣленія, что равнопеременное движеніе есть такое, при которомъ тѣло въ равные послѣдовательные произвольные промежутки времени проходитъ пространства, возростающія (или убывающія) на равныя величины. Отсюда получится формула

$$S=\left(k-\frac{a}{2}\right)t+\frac{at^2}{2},$$

гдѣ k есть пространство, пройденное въ 1-ый промежутокъ времени, а $(k+a)$— пространство пройденное во 2-ой такой-же промежутокъ времени.—Референтъ находитъ, что вообще въ начальныхъ курсахъ слѣдуетъ больше заботиться о точности изложенія и замѣнять нестрогія доказательства опытною повѣркою. Для примѣра былъ приведенъ совершенно строгій, принаровленный къ гимназическому курсу выводъ формулы ускоренія по радіусу.

Въ преніяхъ, вызванныхъ этимъ сообщеніемъ, принимали участіе гг. Ермаковъ, Зонненштраль, Чирьевъ, Шиллеръ, Мацонъ и Косоноговъ.

4) *Г. Н. Флоринскій* показалъ также свой выводъ формулы пространства равноускореннаго движенія, который почти совершенно совпадаетъ съ выводомъ, предложеннымъ г. Корольковымъ *).

Въ дебатахъ, вызванныхъ этими двумя рефератами принимали участіе, кромѣ гг. Королькова и Флоринскаго, еще гг. Григорьевъ и Шиллеръ.

5) *В. П. Ермаковъ* изложилъ свой взглядъ на „центробѣжную силу" и опредѣлилъ таковую, какъ (фиктивную) силу инерціи, развивающуюся при измѣненіи направленія движенія **).

Въ преніяхъ принимали участіе гг. Шиллеръ, Корольковъ, Родзевичъ и Мацонъ.

Закрытой баллотировкой оказались избранными въ дѣйствительные члены Общества: Петръ Петровичъ Ермаковъ, Иванъ Ивановичъ Зеховъ, Андрей Григорьевичъ Серговскій и Николай Михайловичъ Чередѣевъ (проживающій въ г. Калязинѣ) ***).

Предложены въ дѣйствительные члены Общества: Θеодоръ Васильевичъ Кочержинскій, Алексѣй Ерофѣевичъ Любанскій и Іосифъ Бернардовичъ Лесманъ.

Заявлены спеціальныя сообщенія со стороны гг. Букрѣева, Суслова, Фабриціуса, В. Ермакова и Шиллера.

Заявлены сообщенія общедоступнаго характера со стороны гг. Хандрикова, Чирьева, Фабриціуса (окончаніе), Королькова, Мацона и Шиллера.

Слѣдующее засѣданіе (спеціальное) назначено на 12-ое апрѣля. *Ш.*

---

*) Иной выводъ той-же формулы былъ помѣщенъ г. Флоринскимъ въ № 31 „Вѣстника" (см. стр. 150 сем. III).

**) Будетъ помѣщено въ „Вѣстникѣ" въ видѣ отдѣльной замѣтки.

***) Всѣхъ дѣйствительныхъ членовъ Общества къ 22-му марта 1890 года состоитъ 78.

ЗАДАЧИ.

№ 38. Внутри равносторонняго треугольника, площадь котораго равна 64□, взята точка, изъ которой на стороны треугольника опущены перпендикуляры, относящіеся между собою по длинѣ какъ 1:4:7. Опредѣлить площадь треугольника, образованнаго прямыми, соединяющими основанія этихъ перпендикуляровъ. *Н. Соболевскій* (Москва).

№ 39. На сторонахъ даннаго угла M взяты въ произвольномъ разстояніи отъ вершины два равные произвольные отрѣзка AB и CD. Черезъ точки M, C и B, а также черезъ точки M, A и D проведены окружности, вторая точка пересѣченія которыхъ есть N. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки N. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 40. Рѣшить уравненіе

$$\frac{px}{ax^2+mx+b}+\frac{qx}{ax^2+nx+b}=c.$$

Мясковъ (Слонимъ).

№ 41. Не рѣшая квадратнаго уравненія, найти максимумъ выражеія

$$(5x-2a)(b-2x)$$

А. Войновъ (Харьковъ).

№ 42. Дано кубическое уравненіе

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

корни котораго суть α, β и γ. Обозначимъ вообще черезъ S_m сумму m-ыхъ степеней этихъ корней (т. е. $S_m=\alpha^m+\beta^m+\gamma^m$) и черезъ S_{-m} сумму $\alpha^{-m}+\beta^{-m}+\gamma^{-m}$. Показать какимъ образомъ опредѣлятся суммы S_1, S_2, S_3......, а также суммы S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}...... въ зависимости отъ коэффиціентовъ уравненія p, q и r. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ)

№ 43. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу, помѣщенную въ Сборн Триг. задачъ В. П. Минина (№ 850, стр. 111, изд. 2-ое 1887 г.):

„На берегу рѣки возвышается колонна, на которой укрѣплена статуя; у подножія колонны стоитъ часовой. Высота колонны$=h$, высота статуи$=m$, ростъ часового$=l$. Наблюдатель, находящійся на другомъ берегу рѣки, видитъ часового подъ угломъ зрѣнія равнымъ углу, составленному двумя лучами, изъ которыхъ одинъ проведенъ изъ глаза наблюдателя къ подошвѣ статуи, а другой—изъ глаза наблюдателя къ вершинѣ статуи. Опредѣлить ширину x рѣки". *Н. Николаевъ* (Пенза).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 500. Упростить выраженіе

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Извѣстно, что

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}},$$

на основаніи чего данное выраженіе приметъ такой видъ:

$$\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2+(\sqrt{3}+1)}+\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2-(\sqrt{3}-1)},$$

или

$$\frac{\sqrt{2}\{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\}}{6}=\sqrt{2},$$

что и представляетъ данное выраженіе въ упрощенномъ видѣ.

И. Пастуховъ (Пермь), *Н. Карповъ* (Лубны), *С. Кричевскій* (Ромны). Ученики: Курск. г. (6) *А. Ш.*, (8) *А. П*, *С. Д.* и *С. Г.*, Кіев. р. уч. (6) *А. Ш.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.* и *Г. У.*, Короч. г. *Н. М.*, (8) *И. С.*, Могил. г. (8) *Я. Э.*, Полоцк. к. к. (7) *Г. М.*, Кременч. р. уч. (6) *І. Т.*, Спб. Ек. ц. уч. (7) *В. М.*, Могил.-Под. р. уч. (6) *С. И.*; 1-й Спб. г. (7) *К. К.*

№ 502. Точка D окружности соединена съ вершинами вписаннаго равносторонняго треугольника ABC. Показать, что одна изъ трехъ полученныхъ линій равна суммѣ двухъ другихъ.

Въ самомъ дѣлѣ четыреугольникъ ADBC даетъ:

$$AB.CD=AD.CB+AC.BD,$$

откуда

$$CD=\frac{AD.CB+AC.BD}{AB}=\frac{AB(AD+DB)}{AB},$$

т. е.

$$CD=AD+DB.$$

П. Трипольскій (Полтава), *В. Ивановъ* (Златоп.), *Н. Николаевъ* и *Спиридоновъ* (Пенза), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *И. Пастуховъ* (Пермь). Ученики: 1-й Кіев. г. (8) *А. Шлж.*, Златоп. г. (6) *С. К.*, 1-й Спб. г. (7) *К. К.*, Полтав. Дух. Сем. (4) *С. З.*, Т.-Х.-Ш. р. уч. (7) *А. Б.*, Кіев. р. уч. (7) *Л. А.*, 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, Кременч. р. уч. (6) *І. Т.*, Полоцк. к. к (7) *Б.*, Могил.-Под. р. уч. (6) *С. И—ъ*, Короч. г. (6) *Н. М.*, (7) *П. П.*, (8) *И. С.*, Курск. г. (6) *А. Ш.*, *В. К.*, *Ѳ. А.*, (7) *П. Ч.*, *В. Х.*, (8) *А. П.*, *С. Д.* и *Т. Щ.*, 2-й Кіевск. г. (8) *В. М.*, Великол. р. уч. (6) *А. В.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 13 Апрѣля 1890 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
пщется

Обложка
ищется