Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи III-го семестра № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 635—636.

О наблюденіяхъ полнаго солнечнаго затменія 8/21 августа 1914 г. астрономами Императорскаго Новороссійскаго университета.

Проф. А. Орлова.

Приготовленія.

Для производства наблюденій затменія солнца въ истекшемъ году, астрономическая обсерваторія Императорскаго Новороссійскаго Университета снаряжала двѣ экспедиціи: одну въ Крымъ — въ Ѳеодосію, другую въ Кіевъ. Кромѣ того, предполагалось вести наблюденіе и въ Одессѣ.

Благодаря средствамъ, отпущеннымъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія еще въ 1913 г., наши инструменты, намѣченные для наблюденія затменія, были посланы въ ремонтъ, одни въ г. Юрьевъ, другіе за-границу. Въ Юрьевѣ, подъ руководствомъ проф. К. Д. Покровскаго, механикомъ университета были приспособлены для фотографированія короны нашъ четырехметровый объективъ Кука съ геліоста-

*) Съ любезнаго разрѣшенія автора перепечатано изъ „Циркуляра по Одесскому Учебному Округу“, Декабрь, 1914.

томъ Фуно и метровый объективъ Цейса для снимковъ короны сквозь красный свѣтофильтръ.

По окончаніи ремонта, эти два прибора были привезены и установлены въ Ѳеодосіи и уже въ іюлѣ мѣсяцѣ можно было приступить къ предварительнымъ опытамъ съ ними. Для этой цѣли въ Ѳеодосію выѣхалъ нашъ астрономъ-наблюдатель Н. М. Ляпинъ.

Для Кіева предназначался астрографъ, пожертвованный намъ Августѣйшимъ Президентомъ Академіи Наукъ Его Императорскимъ Высочествомъ Великимъ Княземъ Константиномъ Константиновичемъ. Къ астрографу была въ прошломъ году заказана нами фирмѣ Гейде въ Дрезденѣ спеціальная монтировка. Заказъ былъ своевременно выполненъ и приборъ былъ урегулированъ для наблюденій еще въ началѣ іюля.

Въ Кіевъ предполагалъ ѣхать ассистентъ нашей обсерваторіи М. В. Васнецовъ съ оставленнымъ при университетѣ астрономомъ Н. В. Циммерманомъ и съ университетскимъ механикомъ І. А. Тимченко. Однако, Кіевская экспедиція, несмотря на матеріальную поддержку какъ со стороны физико-математическаго факультета нашего университета, такъ и со стороны Русскаго Астрономическаго Общества, не состоялась, такъ какъ, въ виду начавшихся военныхъ дѣйствій, въ Кіевъ съ большимъ грузомъ попасть было невозможно; кромѣ того, главный организаторъ Кіевской экспедиціи М. В. Васнецовъ, положившій много труда и энергіи на ея снаряженіе, былъ принятъ въ армію на военную службу.

Не состоялись также и наблюденія въ Одессѣ, такъ какъ шедшій уже въ Одессу рефракторъ Кука, посланный въ Англію для ремонта, былъ выгруженъ 20 іюля на Мальтѣ, а затѣмъ возвращенъ обратно въ Лондонъ, гдѣ находится въ мастерскихъ фирмы Кукъ и до сихъ поръ.

Вмѣсто Кіева, намъ удалось организовать экспедицію въ Бизюковъ монастырь, при чемъ неожиданно французскіе астрономы, прибывшіе было въ Россію для наблюденія и вызванные на родину въ ряды арміи, снабдили насъ цѣлой серіей поляризаціонныхъ приборовъ.

Въ поѣздкѣ въ Бизюковъ монастырь приняли участіе, кромѣ автора этихъ строкъ, еще Н. В. Циммерманъ, московскій астрономъ А. М. Рыбаковъ и студентъ нашего университета Д. В. Пясковскій.

Наблюденія.

Экспедиція въ Ѳеодосію для насъ была очень успѣшной. Здѣсь М. М. Ляпину удалось сдѣлать четыре прекрасныхъ снимка солнечной короны съ четырехметровой трубой при экспозиціи отъ 2-хъ до 5-ти секундъ. На снимкахъ очень хорошо видна внутренняя корона съ большой группой протуберанцевъ *). Сопоставляя снимки, можно

*) Проф. А. Я. Орловъ любезно предоставилъ въ распоряженіе редакціи эти снимки; но попытки воспроизвести эти тонкія изображенія при условіяхъ печатанія „Вѣстника“, къ сожалѣнію, не привели къ цѣли.

прослѣдить, какъ надвигалась луна, закрывая хромосферу и протуберанцы съ одной стороны и открывая ихъ съ другой.

Снимокъ со свѣтофильтромъ не представляетъ большого интереса, такъ какъ для подобныхъ фотографій нужно имѣть болѣе свѣтосильный объективъ, чѣмъ нашъ метровый объективъ съ отверстіемъ въ 3 дюйма.

Вторая экспедиція прибыла въ Бизюковъ монастырь за два дня и была любезно принята о. намѣстникомъ обители. Наканунѣ затменія въ монастырской трапезной комнатѣ мною была прочитана братіи, собравшимся въ монастырѣ богомольцамъ и экскурсантамъ лекція, въ которой я познакомилъ слушателей съ предстоящимъ явленіемъ и указалъ безопасные для глазъ способы наблюденія солнечнаго затменія.

Въ день затменія сначала было совсѣмъ пасмурно; передъ затменіемъ пошелъ даже дождь; но къ самому началу вступленія луны на дискъ солнца небо прояснилось; можно было наблюдать первое соприкосновеніе дисковъ солнца и луны. Многіе провѣряли свои часы по предсказанному астрономами моменту начала затменія. Вычисленія разошлись здѣсь съ наблюденіями всего лишь на 5 секундъ.

Передъ наступленіемъ полной фазы небо опять покрылось облаками; но къ моменту начала полной фазы облака немного разсѣялись; на потемнѣвшемъ фонѣ неба показались Венера, Меркурій, Леонисъ, и, наконецъ, внезапно вспыхнула неописуемая по своей красотѣ и причудливой формѣ матово-серебристая корона. Ея нѣжные лучи тянулись отъ солнца въ нѣкоторыхъ мѣстахъ на 3°; одинъ изъ лучей былъ рѣзко загнутъ и пересѣкалъ другіе.

Фотографія далеко не передаетъ тѣхъ интересныхъ подробностей, которыя представляются непосредственнымъ наблюденіямъ: за то она рисуетъ чрезвычайно мелкія детали у самаго края солнца, замѣтить которыя въ короткое время глазомъ нельзя.

Изученіе короны въ бинокль показало, что ея форма въ общемъ сходится съ той, которая была предсказана по теоріи Одесскаго астронома А. П. Ганскаго и которая соотвѣтствовала эпохѣ средней между maximum и minimum солнечныхъ пятенъ. Лучи короны окружали все солнце, но въ нѣкоторыхъ мѣстахъ они были болѣе вытянуты, чѣмъ въ другихъ.

Секундъ черезъ 50 по наступленіи полной фазы облака стали закрывать отъ нея корону и помѣшали произвести поляріскопическія наблюденія. Конецъ затменія мы наблюдали уже сквозь облако; но моментъ второго внутренняго касанія дисковъ солнца и луны отмѣчены нами съ полной увѣренностью. Переходъ отъ тьмы къ свѣту былъ очень рѣзокъ.

Наблюденная нами продолжительность полнаго затменія (122 сек.) значительно отличается отъ вычисляемой (129 сек.). Большое разногласіе теоріи съ наблюденіями зависитъ здѣсь, повидимому, главнымъ образомъ, отъ того, что при вычисленіяхъ затменія не принимается во вниманіе рельефъ лунной поверхности. Въ теоріи луну считаютъ за гладкій шаръ. На самомъ же дѣлѣ первый лучъ солнца въ концѣ полной фазы могъ прорваться, такъ сказать, преждевременно между лунныхъ горъ въ какую нибудь впадину луннаго края.

Нѣтъ, однако, сомнѣній, что и принятое при вычисленіяхъ положеніе луны и ея діаметръ нуждаются въ исправленіи. Къ этому заключенію приводитъ и то обстоятельство, что наблюденные моменты наступленія и окончанія какъ частнаго, такъ и полнаго затменія оказались въ среднемъ на 5 сек. меньше вычисленныхъ. Это указываетъ на необходимость увеличить тѣ долготы луны, которыя даются въ астрономическихъ календаряхъ. Нашъ астрономъ-наблюдатель Н. М. Ляпинъ еще въ началѣ текущаго года показалъ, что наблюденныя значенія прямого восхожденія (а слѣдовательно и долготы) луны не соглашаются съ теоріей.

По наблюденіямъ на меридіанномъ кругѣ Одесской обсерваторіи въ мартѣ, апрѣлѣ и маѣ, Н. М. Ляпинъ нашелъ слѣдующія поправки теоретическихъ значеній прямого восхожденія луны:

1914 г. мартъ $+11.''5$

апрѣль $+12.''7$

май $+13.''7$

Наблюденіе солнечнаго затменія вполнѣ подтверждаютъ этотъ интересный результатъ, показывающій, что мы еще не знаемъ точно движенія нашего спутника.

Само собою разумѣется, что окончательное заключеніе о поправкахъ лунныхъ таблицъ можно будетъ вывести изъ совокупности всѣхъ наблюденій, изъ которыхъ многія еще не опубликованы.

Во время полной фазы можно было наблюдать обычныя явленія, сопровождающія солнечное затменіе. Температура упала на 5°. Домашнія птицы собрались на нашестъ и т. д. Не было только паники; не было страха, о которомъ такъ часто пишутъ въ книгахъ. Наоборотъ, всѣ, наблюдавшіе затменіе, съ наступленіемъ полной фазы въ одинъ голосъ стали восхищаться невиданнымъ зрѣлищемъ поразительной красоты.

Темноты большой не было; возможно, что облака давали отраженный свѣтъ. Во время полной фазы можно было читать крупную печать.

Во время частнаго затменія большой интересъ вызвали наблюденія покрытія надвигавшейся на солнце луною большого солнечнаго пятна.

Очень рѣзко были видны также серпообразныя изображенія солнца на землѣ отъ лучей, пробивавшихся сквозь листву деревьевъ.

Отношеніе геологіи къ точнымъ наукамъ и замѣчанія о геологическомъ времени*).

А. Гаркера.

Переводъ съ англійскаго.

Часто говорятъ, что цифрами можно доказать что угодно. И дѣйствительно, съ помощью ряда ариѳметическихъ дѣйствій иногда приходятъ къ весьма страннымъ заключеніямъ. Но вина, конечно, не въ орудіи, а въ томъ, кто имъ пользуется. Особенно въ геологіи съ ея огромными періодами часто приходится перекидывать мосты черезъ очень большую пропасть между фактами и выводами; здѣсь на ряду съ остроумными соображеніями безусловно требуется чувство отвѣтственности при оперированіи числами. Въ подобныхъ случаяхъ вычисленіе отнюдь не является такимъ простымъ искусствомъ, какъ это можетъ казаться. Часто у меня въ борьбѣ съ такого рода задачами, а также, долженъ прибавить, при чтеніи нѣкоторыхъ весьма увлекательныхъ изысканій видныхъ геологовъ, являлось желаніе, чтобы какой нибудь любезный математикъ, выпустилъ небольшое руководство прикладной математики для работающихъ въ области описательныхъ наукъ. Когда вычисленіе основано на данныхъ, всегда только частичныхъ и въ лучшемъ случаѣ лишь грубо приближенныхъ, безусловно необходимо соблюдать особенныя предосторожности; въ дѣйствительности, однако, эти предосторожности слишкомъ часто не соблюдаются. Для полученія надежныхъ результатовъ мы должны представлять себѣ вѣроятную ошибку, присущую нашимъ наблюденіямъ, и должны знать, насколько первоначальная погрѣшность увеличивается въ процессѣ вычисленія. Когда результаты, полученные подобнымъ способомъ, примѣняются какъ звенья въ дедуктивной цѣпи, то здѣсь именно неизбѣжно накопленіе погрѣшностей. Въ такихъ случаяхъ отнюдь нельзя сказать, что цѣпь не прочнѣе, чѣмъ самое слабое ея звено: напротивъ того, оно гораздо слабѣе, чѣмъ ея слабѣйшее звено.

Не входя въ обсужденіе этихъ вопросовъ, — нѣкоторые изъ нихъ требуютъ, какъ я уже упомянулъ, содѣйствія спеціалистовъ, — я приведу для поясненія только одинъ примѣръ, — частое злоупотребленіе такъ называемыми средними числами. Предположимъ, напримѣръ, что мы желаемъ опредѣлить ежегодное количество ила, уносимаго теченіемъ Нила. Въ виду варіацій какъ сезонныхъ, такъ и случайныхъ, мы должны разсмотрѣть достаточное число наблюденій, правильно распредѣленныхъ во времени, и тогда средній выводъ, надлежащимъ образомъ взвѣшенный, даетъ намъ наилучшій результатъ, возможный при данныхъ обстоятельствахъ. Но предположимъ далѣе, что мы желаемъ опредѣлить количество осадка, который несутъ всѣ рѣки міра. У насъ

*) Читано въ Іоркширскомъ Геологическомъ обществѣ.

имѣются данныя, скажемъ, относительно девяти рѣкъ, данныя, которыя, несомнѣнно, сильно отличаются между собою въ отношеніи вѣроятной погрѣшности. Но если даже принять ихъ, какъ онѣ есть, то окажется, что въ водѣ рѣки Ріо-Грандъ количество осадка выражается $^1/_{291}$, а въ рѣкѣ Уругваѣ всего лишь $^1/_{10000}$, а прочимъ семи рѣкамъ соотвѣтствуютъ промежуточныя значенія. Наибольшее число, такимъ образомъ, въ тридцать четыре раза больше наименьшаго. Нѣкоторые геологи склонны при такихъ условіяхъ взять просто среднюю ариѳметическую этихъ чиселъ, и, удовлетворившись этимъ результатомъ, будутъ дѣлать изъ него самые широкіе выводы. Я не думаю, однако, чтобы средняя ариѳметическая девяти чиселъ, настолько расходящихся между собой, могла доставить количественныя свѣдѣнія, имѣющія какую-либо цѣнность. Для того, чтобы мы имѣли право пользоваться результатомъ, необходимо взять среднюю для гораздо болѣе обширнаго ряда данныхъ.

Когда проблема затрагиваетъ еще и динамическіе принципы, то ловушки, подстерегающія неосмотрительнаго ученаго, иногда бываютъ скрыты болѣе глубоко. Для примѣра я возьму модели въ родѣ тѣхъ, которыя строятся для объясненія механизма складокъ и взбросовъ. Насколько мнѣ извѣстно, геологи никогда не принимаютъ въ соображеніе, какія условія необходимы для того, чтобы модель правильно представляла дѣйствіе оригинала. Различныя изображаемыя силы должны сохранить свои отношенія. Такъ какъ вѣсъ даннаго вещества уменьшается пропорціонально кубу линейныхъ измѣреній, то и другія силы нужно уменьшить въ такомъ же отношеніи; на дѣлѣ невозможно осуществить это требованіе для внутреннихъ силъ, противодѣйствующихъ деформаціи и разрыву. Кромѣ того, скорости движущихся частей должны быть уменьшены пропорціонально квадратному корню линейныхъ измѣреній, и благодаря этому оказывается совершенно невозможнымъ имитировать медленные процессы горообразованія. Подобнаго рода модели могутъ дать намъ полезныя *геометрическія* иллюстраціи, но совершенно ничего не даютъ для дѣйствительнаго выясненія *динамическихъ* вопросовъ. То же самое замѣчаніе примѣнимо къ моделямъ ледниковъ; но въ этомъ случаѣ для объясненія моей мысли даже нѣтъ надобности касаться искусственныхъ моделей: нѣкоторые геологи на основаніи наблюденій, относящихся къ альпійскому долинному леднику дѣлаютъ заключенія о континентальномъ равнинномъ ледникѣ, и не замѣчаютъ, что вслѣдствіе различія размѣровъ совершенно мѣняются механическія условія.

Экспериментъ несомнѣнно оказалъ цѣнныя услуги при изученіи частныхъ вопросовъ въ области физической геологіи, и это мы должны признать съ благодарностью. Но въ примѣненіи къ болѣе обширнымъ и сложнымъ проблемамъ имитирующій опытъ страдаетъ тѣмъ же недостаткомъ, что и математическій анализъ. Конкретную проблему онъ разрабатываетъ лишь въ произвольно упрощенной постановкѣ; но вѣдь между условіями, которыхъ невозможно реализовать въ лабораторіи, могутъ быть такія, которыя въ природѣ имѣютъ весьма существенное значеніе. Въ особенности это относится къ тому случаю, когда однимъ изъ факторовъ является время.

Есть, однако, другая область экспериментальной геологіи, въ которой мы въ правѣ ожидать чрезвычайно важныхъ результатовъ: это изученіе условій образованія и устойчивости различныхъ минераловъ съ цѣлью выясненія способа образованія огненныхъ и другихъ породъ. Въ теченіе послѣдняго столѣтія химики, въ особенности во Франціи посвящали свое вниманіе искусственному полученію нѣкоторыхъ породообразующихъ минераловъ. Фуке (Fouqué) и Мишель-Леви (Michel-Lévy) удалось даже воспроизвести нѣкоторые простѣйшіе типы огненныхъ породъ. Этимъ изысканіямъ мы обязаны полезными свѣдѣніями, которыя по большей части, однако, носятъ весьма общій характеръ. Усердныя изслѣдованія, производимыя въ настоящее время въ особенности въ географической лабораторіи Института Карнеги въ Вашингтонѣ, относятся къ другому роду: они отличаются систематичностью и высшей возможной степенью точности. Главная цѣль ихъ — примѣнить къ кристаллизаціи огненныхъ магмъ методы, оказавшіеся столь плодотворными въ другихъ отрасляхъ физической химіи. Этимъ вызвана необходимость работать въ гораздо болѣе обширной области температуръ сравнительно съ обычной лабораторной работой, а иногда приходится также прибѣгать къ высокимъ давленіямъ. Изслѣдователь сталкивается, кромѣ того, и съ другими практическими затрудненіями, связанными, главнымъ образомъ, съ медленностью, съ которой устанавливается равновѣсіе въ нѣкоторыхъ изслѣдуемыхъ превращеніяхъ. Можетъ быть, вслѣдствіе этихъ препятствій и отчасти, пожалуй, по скупости гг. просвѣщенныхъ милліонеровъ, — въ этихъ опытахъ издержки играютъ весьма вѣскую роль, — изслѣдованіе въ этомъ направленіи еще не шагнуло далеко. Но пока что не будетъ преувеличеніемъ, если мы скажемъ, что д-ръ Дэй (Day) и его коллеги въ Вашингтонѣ закладываютъ уже основаніе точной науки петрогенезиса.

Между геологическими вопросами, имѣющими количественную сторону, чаще всѣхъ другихъ подвергалась обсужденію проблема геологической хронологіи, привлекающая самый общій интересъ. Такъ какъ она, кромѣ того, въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ является родственной съ моей темой, то не будетъ лишнимъ дать краткій обзоръ исторіи и современнаго состояніи этой проблемы. Когда кому либо изъ насъ случалось разсказывать о томъ, какъ въ прошлыя времена мамонты бродили въ равнинахъ Holderness или какъ процвѣтали нѣкогда кораллы тамъ, гдѣ нынѣ высятся холмы Craven, большинству изъ насъ, я думаю, задавали такой вопросъ: когда это было? На это, вѣроятно, слѣдовалъ отвѣтъ, что геологія не пользуется обыкновенными мѣрами времени, но имѣетъ свою собственную систему хронологіи, не переводимую на годы и столѣтія. Долженъ, однако, сознаться, что такой отвѣтъ вызываетъ чувство неудовлетворенности и что я сочувствую спрашивающимъ профанамъ, которыхъ подобный отвѣтъ только подвергаетъ въ молчаніе, но не удовлетворяетъ. Дѣйствительно, достойно сожалѣнія, что наука, изучающая исторію прошедшихъ событій, не имѣетъ опредѣленной мѣры времени, чтобы размѣстить эти событія въ правильной перспективѣ.

Несомнѣнно, что первые приверженцы ученія о единообразіи*), основатели современной геологіи, не смущались подобными соображеніями. Ихъ реакція противъ стараго ученія о катастрофахъ побуждала ихъ постоянно напирать на чрезвычайную медленность геологическихъ процессовъ, и они должны были такимъ образомъ, допустить неограниченное время для прошедшихъ событій, о которыхъ свидѣтельствуютъ наслоенія земной коры. Гёттонъ (Hutton) не находилъ „ни слѣдовъ начала, ни видовъ на конецъ“; другими словами, онъ разсматривалъ геологическое время, какъ безконечное, и считать его столѣтіями было по его мнѣнію не легче, чѣмъ сосчитать песчинки на берегу моря. Это воззрѣніе позже получило подкрѣпленіе съ другой стороны, когда ученый міръ принялъ ученія Дарвина, которыя отодвигали, какъ думали, въ безконечно далекую эпоху начало жизни на землѣ. Геологи и біологи съ безмѣрной расточительностью одинаково черпали изъ фонда временъ.

Но это счастливое состояніе было нарушено внезапно, точно взрывомъ бомбы, лѣтъ пятьдесятъ тому назадъ, когда Вильямъ Томсонъ, впослѣдствіи лордъ Кельвинъ, опубликовалъ свою первую математическую работу объ этомъ и другихъ родственныхъ вопросахъ. Онъ показалъ, что наша планета, помимо измѣненій на ея поверхности, подвергается измѣненію вѣкового и, слѣдовательно, непреложнаго рода, а именно, она непрерывно теряетъ энергію въ формѣ теплоты, какъ доказано наблюденіями температурнаго градіента. Такъ какъ запасъ энергіи не можетъ быть неисчерпаемымъ, то мы должны придти къ заключенію, что существующій геологическій режимъ имѣетъ какъ начало, такъ и конецъ. Томсонъ старался найти предѣлъ истекшаго періода, разсматривая скорость охлажденія земного шара. Параллельное доказательство было основано на охлажденіи солнца.

Что касается критической части въ работѣ Томсона, то относительно нея, конечно, не можетъ быть сомнѣній. Предпринятая Гексли слабая попытка защитить ортодоксальную позицію была легко сломлена, и экстравагантность геологовъ получила, наконецъ, спасительный отпоръ. Но если мы отъ критики Томсона перейдемъ къ утверждаемымъ имъ положеніямъ, то картина мѣняется. Время, отпущенное, для геологической лѣтописи, въ началѣ колебалось въ широкихъ предѣлахъ, но позже они были сужены, и, наконецъ, въ 1899 г. лордъ Кельвинъ призналъ заключеніе Кларенса Кинга (Clarence King), что земной шаръ около 25 милліоновъ лѣтъ тому назадъ представлялъ собой расплавленную массу. Замѣчательно даже, что довольно много геологовъ согласилось добровольно подчиниться такому ограниченію. Несомнѣнно, извѣстную роль играло вліяніе авторитета лорда Кельвина, а нѣкоторыми, вѣроятно, руководило смутное чувство, что положеніе, достигнутое путемъ строгихъ математическихъ разсужденій, тѣмъ самымъ заслуживаетъ полнаго довѣрія. Но вѣдь много разъ уже указывалось, хотя столь же часто и забывалось,

*) Т. е. о непрерывности геологической эволюціи, въ противоположность теоріи катастрофъ.

Перев.

что продуктъ, получаемый съ математической мельницы, зависитъ отъ доставляемаго ей сырья. Какъ бы безупречно ни было математическое разсужденіе, оно доказываетъ только, что, принявъ тѣ или другія посылки, мы придемъ къ извѣстнымъ заключеніямъ. Можетъ быть самъ лордъ Кельвинъ, съ пыломъ проводя свои заключенія, не всегда напоминалъ объ основаніяхъ, на которыхъ они опирались, и позволительно думать, что многіе геологи прочитали только его выводы.

Доводы Кельвина основывались, конечно, на рядѣ допущеній. Въ настоящее время, при болѣе полномъ свѣтѣ знанія, достаточно указать одно допущеніе, которое въ 1862 г., повидимому, не вызывало почти сомнѣній. Лордъ Кельвинъ признавалъ, что земля теряетъ несомнѣнно, теплоту, но „возможно, что этотъ расходъ тепла не приводитъ къ охлажденію, а лишь къ исчерпыванію потенціальной энергіи каковой въ данномъ случаѣ врядъ ли можетъ быть что либо иное, кромѣ химическаго сродства между веществами, образующими часть земной массы“. Это допущеніе онъ однако, оставилъ, клкъ „чрезвычайно невѣроятное“, и далѣе исходилъ изъ предположенія, что единственной формой энергіи, которая можетъ идти въ счетъ, является теплота. Послѣ открытія радія мы знаемъ, что земля обладаетъ обширнымъ запасомъ потенціальной энергіи въ весьма концентрированномъ видѣ, о которомъ въ прежнія времена и не подозрѣвали. Стрѣттъ (Strütt) вычислилъ на основаніи очень простыхъ данныхъ, что наблюдаемый температурный градіентъ вполнѣ объясняется радіоактивностью если горныя породы на глубину сорока пяти миль содержатъ столько же радія, какъ на поверхности земли. Другими словами, при такомъ предположеніи, теплоты, развиваемой радіоактивными измѣненіями въ этомъ сравнительно тонкомъ слоѣ коры, достаточно, чтобы уравновѣсить расходъ тепла съ поверхности. Очевидно, поэтому, что дѣйствительная скорость охлажденія земли, — если, конечно, таковое имѣетъ мѣсто, — должна быть гораздо меньше, чѣмъ считалъ Кельвинъ, и его оцѣнка возраста земли должна возрасти въ огромнѣйшей степени.

Это еще не все. Изученіе различныхъ радіоактивныхъ элементовъ, содержащихся въ минералахъ и горныхъ породахъ, показало, что въ нѣкоторыхъ благопріятныхъ случаяхъ возможно непосредственно вычислить въ годахъ ихъ возрастъ. Нѣкоторыя оцѣнки этого рода были произведены и дали весьма щедрые результаты, удовлетворяющіе требованіямъ самыхъ взыскательныхъ приверженцевъ ученія, которое мы можемъ назвать реформированной теоріей единообразія.

Послѣ такого оборота вещей можно было ожидать, что старый споръ идетъ къ концу. Но перемѣна ситуаціи на дѣлѣ оказывается еще болѣе радикальной: за это время возникло грозное меньшинство геологовъ, которые на основаніи геологическихъ доводовъ требуютъ, чтобы оцѣнка времени не выходила изъ предѣловъ, указанныхъ лордомъ Кельвиномъ. По прежнему остается еще въ значительной части разногласіе между геологами и физиками, но теперь уже скупятся геологи, а щедрыми оказываются физики.

Въ мою задачу не входитъ подробный разборъ различныхъ геологическихъ доводовъ, посредствомъ которыхъ ограничиваютъ возрастъ земли промежуткомъ въ 80 — 100 милліоновъ лѣтъ. Въ общемъ примѣняютъ одинъ и тотъ же методъ. Вычисляютъ скорость какого-нибудь основного геологическаго процесса, напримѣръ, пониженія уровня суши вслѣдствіе размывающей дѣятельности воды, или скорость разрушенія суши вслѣдствіе растворенія, или скорость отложенія осадка, или возрастанія солености моря. Затѣмъ приблизительно оцѣниваютъ весь результатъ процесса за все геологическое время. Зная ежегодный приростъ и полное количество, можно простымъ дѣленіемъ найти время въ годахъ. Наблюденія, лежащія въ основѣ этихъ вычисленій, весьма ненадежны, и легко было бы привести примѣры легкомысленнаго обращенія съ числами, на которое я указалъ выше. Но самое слабое мѣсто всѣхъ такихъ разсужденій заключается въ предположеніи, что современную скорость какого-нибудь изъ этихъ геологическихъ процессовъ можно приравнить его средней скорости за все время.

Настоящая конфигурація земного шара и всѣ связанныя съ ней физическія условія, выработались путемъ продолжительной эволюціи. Если мы полагаемъ, что площадь суши въ конечномъ итогѣ всѣхъ превратностей въ цѣломъ возросла, что она получила болѣе сложное распредѣленіе и болѣе крутой рельефъ, то мы должны также считать, что различія температуры, влажности, вообще, климата въ разныхъ частяхъ земного шара постепенно усиливались все болѣе и болѣе, и всѣ геологическіе процессы пріобрѣтали все большую скорость по мѣрѣ того какъ земля становилась старше. Тогда какъ относительно этихъ в ѣ к о в ы х ъ измѣненій существуютъ различныя мнѣнія, никакихъ сомнѣній не можетъ быть о великихъ ц и к л и ч е с к и х ъ измѣненіяхъ, которыя повторялись нѣсколько разъ въ исторіи земли: циклъ всякій разъ начинается эпохой мощныхъ движеній коры и содержитъ цѣпь слѣдствій, сопровождающихъ эту новую ступень въ эволюціи земли. Подобный циклъ начался въ эпоху не очень отдаленную отъ насъ по геологическому счисленію, и мы живемъ вслѣдствіе этого въ періодъ особенно оживленной геологической дѣятельности, характеризующейся материковыми массами, поднятыми выше своего средняго уровня, и обширными областями недавно отложившихся пластовъ, подтачиваемыхъ разрушительными дѣятелями.

Въ виду этихъ соображеній я того мнѣнія, что современная скорость размыванія и соотвѣтственнаго осажденія гораздо выше, чѣмъ средняя скорость, и потому основанная на этой послѣдней оцѣнка геологическаго времени должна оказаться значительно ниже дѣйствительности. Я не требую, чтобы вы непремѣнно согласились съ этимъ выводомъ, но желалъ бы, чтобы вы повременили съ его рѣшеніемъ, такъ какъ для геологіи было бы истиннымъ несчастьемъ, если бы она, столь недавно освободившись отъ однѣхъ оковъ, тотчасъ же промѣняла ихъ на другія, столь же тягостныя. Несомнѣнно во всякомъ случаѣ, что всѣ разнообразные геологическіе процессы, о которыхъ мы говорили въ связи съ даннымъ вопросомъ, зависятъ отъ условій, дѣлающихъ ихъ скорость весьма измѣнчивой. Это — часы, которые, то опаздываютъ, то спѣшатъ, то стоятъ, и никогда не могутъ служить надежнымъ измѣрителемъ времени. Въ этомъ направленіи мы не можемъ приблизиться къ достовѣрности даже для ближайшей къ намъ по времени главы геологической исторіи. Были сдѣланы, напримѣръ, попытки вычислить время окончательнаго отступленія ледника въ сѣверной Америкѣ по скорости отступленія Ніагарскаго водопада. Но наблюденіе показываетъ, что эта скорость колебалась въ широкихъ предѣлахъ даже въ теченіе послѣднихъ пятидесяти лѣтъ, и Джильбертъ (Gilbert) тщательно изучившій всѣ эти данныя, не рѣшился высказать какое-нибудь мнѣніе по этому вопросу.

Должны ли мы поэтому оставить всякую надежду найти пригодную мѣру времени въ геологіи? Я не дѣлаю такого вывода, но думаю, что мы должны внѣ области строго геологическихъ явленій поискать какихъ нибудь физическихъ процессовъ, скорость которыхъ не нарушалась бы отъ вліянія различныхъ условій. Какъ мнѣ кажется, есть только два класса процессовъ, удовлетворяющіе этому требованію: превращенія радіоактивной группы элементовъ и астрономическія движенія. Вѣроятно, въ одномъ изъ этихъ двухъ направленій и будетъ найдено рѣшеніе нашей проблемы.

Химики показали намъ, что радій образуется отъ самопроизвольнаго расщепленія уранія, при чемъ это превращеніе совершается, очевидно, въ двѣ фазы и сопровождается выдѣленіемъ трехъ атомовъ гелія. Но радій, въ свою очередь, также разлагается самопроизвольно, образуя эманацію радія, называемую нитономъ, и выдѣляя еще одинъ атомъ гелія. Нитонъ въ свою очередь подвергается дезинтеграціи и т. д.; одно превращеніе смѣняется другимъ. Конечнымъ продуктомъ является свинецъ, и при этомъ постепенномъ переходѣ уранія въ свинецъ всего выдѣляется восемь атомовъ гелія. Нѣкоторыя изъ этихъ различныхъ самопроизвольныхъ превращеній совершаются чрезвычайно медленно, а другія сравнительно быстро; но въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ скорость является постоянною, и, насколько можно судить по опыту, не зависитъ отъ температуры или давленія.

Проф. Стреттъ (Strutt) показалъ, что это постепенное выдѣленіе гелія можетъ быть положено въ основу метода для оцѣнки абсолютнаго возраста минераловъ и горныхъ породъ. Такъ, напримѣръ, фосфаты и нѣкоторыя желѣзныя руды богаты радіемъ, образовавшимся изъ уранія. Они содержатъ также гелій, и отношенія гелія къ уранію оказалось болѣе высокимъ въ болѣе древнихъ напластованіяхъ.

Основанная на этихъ данныхъ оцѣнка возраста приводитъ къ большимъ числамъ; напримѣръ, для гематита, лежащаго на каменноугольномъ извѣстнякѣ въ Кумберландѣ, получается возрастъ въ 140 милліоновъ лѣтъ, и даже эоценовыя желѣзныя руды Антрима насчитываютъ сорокъ милліоновъ лѣтъ. Въ результатѣ обнаружены нѣкоторыя неправильности; допускаемъ, конечно, что методъ имѣетъ свои слабыя стороны. Однако, если главный источникъ погрѣшности лежитъ, какъ представляется вѣроятнымъ, въ потерѣ гелія вслѣдствіе утечки, то найденныя числа окажутся ниже дѣйствительности. Гелій образуется изъ торіеваго ряда производныхъ, какъ и отъ ураніеваго ряда, и это необходимо принять въ расчетъ въ случаяхъ, когда найденъ торій. Стреттъ изслѣдовалъ также цирконы изъ различныхъ огненныхъ породъ и нашелъ согласные результаты для отношенія гелія. А. Гольмсъ (Holms) подошелъ къ этому вопросу другимъ путемъ: онъ разсматриваетъ отношеніе свинца къ уранію въ различныхъ минералахъ, богатыхъ этимъ послѣднимъ элементомъ. Огненныя породы девонской формаціи въ области Христіаніи имѣютъ, согласно вычисленію по этому методу, около 370 милліоновъ лѣтъ. Архейскія породы различныхъ странъ насчитываютъ отъ 1000 до 1600 милліоновъ лѣтъ. Числа, получаемыя Гольмсомъ, въ общемъ приблизительно вдвое больше чиселъ Стрётта; но если принять во вниманіе погрѣшность вслѣдствіе утечки гелія, которая доказана, то разногласіе такого рода должно считаться въ порядкѣ вещей на этой первоначальной стадіи изслѣдованія.

Другой методъ, предложенный для полученія абсолютной мѣры геологическаго времени, имѣетъ болѣе отвлеченный характеръ, хотя принципъ его достаточно простъ и заключается въ слѣдующемъ: открывъ какой нибудь ясно выраженный ритмъ или циклъ въ геологическихъ напластованіяхъ, приводятъ его въ связь съ какимъ нибудь извѣстнымъ періодическимъ измѣненіемъ земли. На этомъ принципѣ основана попытка Кролля (Croll) объяснить возвратныя ледниковыя эпохи. Но для нашей цѣли болѣе подходящей является теорія, основанная Блиттомъ (Blytt) на изученіи чередованій, наблюдаемыхъ въ послѣдовательномъ рядѣ осадочныхъ пластовъ. Несомнѣнно самый важный астрономическій циклъ большого періода это — связанный съ прецессіоннымъ движеніемъ, благодаря которому постепенно мѣняется отношеніе лѣта и зимы къ перигелію и афелію. Это связано съ измѣненіемъ относительной продолжительности лѣта и зимы и должно безъ сомнѣнія оказывать замѣтное дѣйствіе на климатическія условія, хотя относительно точной природы этого дѣйствія мнѣнія сильно расходятся. Измѣненія климата, въ свою очередь, влекутъ за собой различія въ природѣ осадковъ, отлагаемыхъ послѣдовательно въ одномъ мѣстѣ, и эти различія повторяются въ видѣ цикла, соотвѣтствующаго прецессіонному. Наиболѣе замѣчательнымъ дѣйствіемъ будетъ, вѣроятно, повторное чередованіе известняковъ и химическихъ осадковъ съ обломочными отложеніями.

Если бы задача не была сложнѣе сказаннаго то было бы достаточно въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ могутъ быть открыты такія чередованія, сосчитать ихъ подобно кольцамъ годичнаго роста въ деревѣ, принимая 21 000 лѣтъ на каждый циклъ напластованій, — таковъ періодъ прецессіи съ поправкой на движеніе перигелія. Если чередованія могутъ быть различены только въ нѣкоторыхъ частяхъ ряда пластовъ, то необходимо прибѣгнуть къ гипотезѣ для объясненія интерваловъ. Джильбертъ разсмотрѣлъ такимъ образомъ систему пластовъ толщиною въ 3900 футовъ, образующихъ часть мѣловой формаціи въ Колорадо. Чередованіе известковыхъ пластовъ глинистыми сланцами повторяется здѣсь четыре раза, а промежутки заняты непрерывающимися толщами сланцевъ. Соотвѣтственной части мѣловой эпохи Джильбертъ даетъ около двухсотъ милліоновъ лѣтъ, при чемъ степень достовѣрности выражаетъ числомъ 2, какъ „коэффиціентомъ безопасности".

Мы должны, однако, помнить, что образованіе пластовъ зависитъ помимо климата и отъ другихъ условій, а климатъ зависитъ не только отъ предваренія равноденствіи, но еще и отъ другихъ причинъ, и, кромѣ того, эти причины большей частью не могутъ быть названы періодическими, въ точномъ смыслѣ слова. Правда, есть другое астрономическое движеніе на которое указываетъ какъ Кролль, такъ и Блиттъ, а именно, измѣненіе эксцентриситета земной орбиты. Оно совершается періодически, приблизительно черезъ каждыя 90 000 лѣтъ; но есть значительныя неправильности, повторяющіяся каждыя 1 450 000 лѣтъ и образующія большій циклъ, обнимающій шестнгдцать меньшихъ. Измѣненіе эксцентриситета должно измѣнять дѣйствіе прецессіоннаго движенія; но Блиттъ доказываетъ, что оно вліяетъ также на эллиптическую форму самой земли, и такимъ образомъ вызываетъ измѣненіе береговыхъ линій. Онъ утверждаетъ, что прослѣдилъ это дѣйствіе такъ же какъ и климатическій циклъ, на третичныхъ пластахъ парижскаго бассейна и острова Уайта и приходитъ къ заключенію, что третичная эпоха обнимаетъ два большихъ цикла, т. е. около 3 000 000 лѣтъ.

Обыкновенно считали, что годъ является слишкомъ короткимъ періодомъ, чтобы оставить замѣтный слѣдъ въ геологической лѣтописи. Въ общемъ это, можетъ быть, вѣрно, но при нѣкоторыхъ благопріятныхъ обстоятельствахъ оказывается иногда возможнымъ сосчитать годичные слои напластыванія. Недавно Де Гееръ (De Geer) сдѣлалъ такую попытку на нѣкоторыхъ тонко-слоистыхъ глинахъ послѣдняго ледниковаго и послѣ-ледниковаго періодовъ въ Швеціи. Матеріалъ отлагался подъ ледниковыми потоками въ то время, когда ледъ отступалъ на болѣе высокое мѣсто. Вслѣдствіе этого сезонныя измѣненія были рѣзко выражены, а отложеніе осадка шло достаточно быстро, чтобы давать каждый годъ замѣтное приращеніе толщины. По этимъ даннымъ Де Гееръ вычислилъ, что отсупленіе послѣдняго ледяного покрова продолжалось около 5000 лѣтъ, а со времени отступленія льда прошло по его расчету 7000 лѣтъ.

Что касается болѣе продолжительныхъ астрономическихъ цикловъ, то ясно, что этотъ методъ содержитъ много гипотетическаго, и примѣненіе его, какъ признаетъ Блиттъ, представляетъ практическія затрудненія. Онъ имѣетъ спеціальный интересъ, такъ какъ благодаря ему детали стратиграфіи пріобрѣтаютъ новое значеніе, но въ качествѣ средства для установленія геологической хронологіи цѣнность его пока лишь потенціальная. Въ сравненіи съ нимъ методъ вычисленія геологическаго времени, основанный на радіи, сейчасъ, повидимому, сулитъ бо́льшія надежды.

Въ заключеніе намъ пріятно замѣтить, что эти примѣненія химіи, астрономіи и метеорологіи не только къ общимъ принципамъ геологіи, но и къ опредѣленной геологической проблемѣ краснорѣчиво свидѣтельствуютъ о коренномъ единствѣ различныхъ наукъ и о тѣхъ огромныхъ услугахъ, которыя онѣ могутъ оказывать одна другой.

Элементарное рѣшеніе задачи Бюффона по теоріи вѣроятностей.

Доложено математической секціи XIII-го Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ Тифлисѣ, 19 іюня 1913 года.

П. Флорова.

Скоро наступитъ время, и оно уже наступаетъ, когда интегральное исчисленіе перестанетъ быть кастовой тайной и сдѣлается всеобщимъ достояніемъ посредствомъ проведенія его черезъ среднія школы. Несмотря на это, навсегда останутся заманчивыми поиски элементарныхъ рѣшеній задачъ интегральнаго исчисленія. Такого рода рѣшенія помимо непосредственнаго интереса имѣютъ серьезное педагогическое значеніе, представляя собою не часто повторяющіяся возможности глубокаго проникновенія въ основы интегральнаго исчисленія. Вотъ причины, по которымъ я нахожу полезнымъ опубликовать настоящую замѣтку, содержащую въ себѣ элементарное рѣшеніе задачи по теоріи вѣроятностей знаменитаго французскаго ученаго XVIII-го столѣтія Бюффона. (Родился 7 сентября 1707 г., умеръ 16 апрѣля 1778 г.).

Задача Бюффона, какъ извѣстно, заключается въ слѣдующемъ.

На плоскость, покрытую рядомъ параллельныхъ полосъ одной и той же ширины a, брошена на удачу игла, длина которой l. Вычислить вѣроятность, что эта игла не вся цѣликомъ помѣстится въ одной полосѣ, но пересѣчетъ какую либо прямую, представляющую собой границу между двумя смежными полосами.

Рѣшеніе. Чѣмъ больше проведено полосъ на плоскости, тѣмъ болѣе благопріятныхъ случаевъ для помѣщенія иглы внутри какой либо полосы, но вмѣстѣ съ тѣмъ въ одинаковой пропорціи увеличивается и число благопріятныхъ случаевъ для пересѣченія иглы съ границами полосъ. Отсюда видно, что для рѣшенія задачи достаточно разсмотрѣть одну полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми*.

Различимъ два случая: $l \leqq a$ и $l > a$.

Случай, когда длина иглы не превосходитъ ширины полосъ.

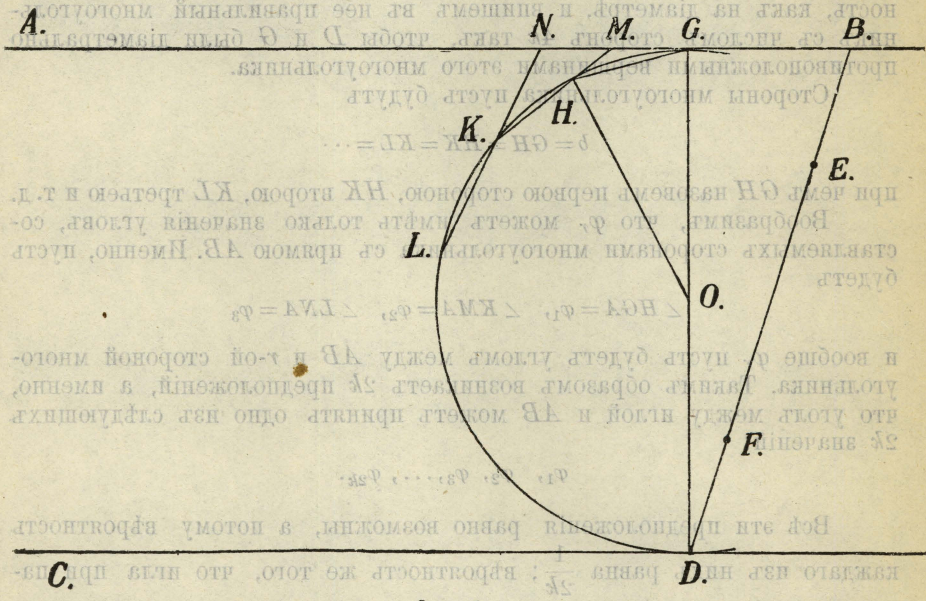
*) Эти соображенія не вполнѣ убѣдительны. Но сущность задачи Бюффона дѣйствительно сводится къ разсмотрѣнію одной полосы.

Ред.

Представимъ себѣ, что игла упала по направленію BD (фиг. 1). Построимъ точки E и F такъ, чтобы было

$$BE = \frac{l}{2} \text{ и } DF = \frac{l}{2}.$$

Ясно, что если середина иглы упадетъ между точками E и F, то игла не пересѣчется ни съ AB, ни съ CD. Отсюда слѣдуетъ, что вѣроятность того, что игла, упавшая въ направленіи BD, вся цѣликомъ помѣстится въ полосѣ между AB и CD, равняется отношенію $\frac{EF}{BD}$, ибо вѣроятностью ожидаемаго событія называется отношеніе числа случаевъ, благопріят-



Фиг. 1.

ствующихъ этому событію, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ. Подобно тому, какъ изъ всѣхъ параллельныхъ полосъ оказалось необходимымъ и достаточнымъ разсматривать только одну, такъ изъ всѣхъ положеній иглы параллельныхъ BD необходимо и достаточно разсмотрѣть только положеніе BD, потому что съ возрастаніемъ числа положеній параллельныхъ BD въ одинаковомъ отношеніи увеличивается число случаевъ, благопріятствующихъ противоположному событію, т. е. пересѣченію иглы съ AB или съ CD.

Вѣроятность этого противоположнаго событія, которую мы назовемъ черезъ p_r выражается формулой:

$$p_r = 1 - \frac{EF}{BD} = \frac{EB + FD}{BD} = \frac{l}{BD}.$$

Пусть $BD = x$, $\angle ABD = \varphi_r$. Тогда изъ прямоугольнаго треугольника BGD, найдемъ:

$$DG = BD \sin \varphi_r \quad \text{или} \quad BD = \frac{a}{\sin \varphi_r}.$$

Слѣдовательно,

$$p_r = \frac{l \sin \varphi_r}{a}.$$

Это есть вѣроятность того, что игла, избравъ при паденіи направленіе, характеризуемое угломъ φ_r, пересѣчется въ этомъ направленіи съ одною изъ прямыхъ AB или CD. Опишемъ на DG окружность, какъ на діаметрѣ, и впишемъ въ нее правильный многоугольникъ съ числомъ сторонъ $4k$ такъ, чтобы D и G были діаметрально противоположными вершинами этого многоугольника.

Стороны многоугольника пусть будутъ

$$b = GH = HK = KL = \cdots$$

при чемъ GH назовемъ первою стороною, HK второю, KL третьею и т. д.

Вообразимъ, что φ_r можетъ имѣть только значенія угловъ, составляемыхъ сторонами многоугольника съ прямою AB. Именно, пусть будетъ

$$\angle HGA = \varphi_1, \quad \angle KMA = \varphi_2, \quad \angle LNA = \varphi_3$$

и вообще φ_r пусть будетъ угломъ между AB и r-ой стороной многоугольника. Такимъ образомъ возникаетъ $2k$ предположеній, а именно, что уголъ между иглой и AB можетъ принять одно изъ слѣдующихъ $2k$ значеній:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ldots, \ \varphi_{2k}.$$

Всѣ эти предположенія равно возможны, а потому вѣроятность каждаго изъ нихъ равна $\frac{1}{2k}$; вѣроятность же того, что игла при паденіи изберетъ направленіе φ_r и въ этомъ направленіи пересѣчется съ AB или CD, будетъ:

$$\frac{1}{2k} \cdot p_r = \frac{1}{2k} \cdot \frac{l}{a} \cdot \sin \varphi_2.$$

Наконецъ, вѣроятность того, что игла изберетъ какое нибудь изъ направленій

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ldots, \ \varphi_{2k}$$

и въ немъ пересѣчется съ AB или CD, будетъ на основаніи принципа полной вѣроятности

$$\frac{1}{2k} \cdot p_1 + \frac{1}{2k} \cdot p_2 + \frac{1}{2k} \cdot p_3 + \cdots + \frac{1}{2k} \cdot p_{2k}.$$

Означая эту вѣроятность черезъ P_k и замѣчая, что

$$p_1+p_2+\cdots+p_k=p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots+p_{2k},$$

получаемъ

$$P_k=\frac{1}{k}(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_k)$$

или, что то же

$$P_k=\frac{l}{ka}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\cdots+\sin\varphi_k).$$

Центральный уголъ, соотвѣтствующій хордѣ $GH=b$, равенъ $\frac{\pi}{2k}$. Соединивъ центръ круга съ вершиною H, найдемъ:

$$b=a\sin\frac{\pi}{4k}\quad \text{или}\quad a=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4k}}.$$

Поставивъ это значеніе a въ предыдущую формулу, получимъ:

$$P_k=\frac{4l\sin\frac{\pi}{4k}}{4kb}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\cdots+\sin\varphi_k).$$

Здѣсь $4kb$ означаетъ периметръ правильнаго $4k$-угольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a. Обозначивъ его черезъ q_{4k} и положивъ для краткости

$$\frac{\pi}{4k}=\omega=\angle HGA=\varphi_1,$$

будемъ имѣть

$$P_k=\frac{2l}{q_{4k}}(2\sin\omega\sin\varphi_1+\cdots+2\sin\omega\sin\varphi_k).$$

Принявъ во вниманіе, что

$$\angle GHO=\frac{\pi}{2}-\omega,\quad \angle KHO=\frac{\pi}{2}-\omega,\quad \angle KHG=\pi-2\omega,\quad \angle MHG=2\omega$$

по свойству внѣшняго угла треугольника послѣдовательно находимъ:

$$\varphi_2=\omega+2\omega=3\omega,\quad \varphi_3=3\omega+2\omega=5\omega,\quad \varphi_4=5\omega+2\omega=7\omega$$

. . . .

$$\varphi_k=(2k-3)\omega+2\omega=(2k-1)\omega.$$

Посредствомъ тригонометрическаго тождества

$$\cos(\varphi_r-\omega)-\cos(\varphi_r+\omega)=2\sin\omega\sin\varphi_r$$

получаемъ:

$$2\sin\omega\sin\varphi_r=\cos 2(r-1)\omega-\cos 2r\omega.$$

Положивъ здѣсь послѣдовательно

$$r=1,\quad r=2,\quad r=3,\ldots,\ r=k$$

будемъ имѣть:

$$2\sin\omega\sin\varphi_1=\cos O-\cos 2\omega,\quad 2\sin\omega\sin\varphi_2=\cos 2\omega-\cos 4\omega,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\omega\sin\varphi_k=\cos(2k-1)\,\omega-\cos 2k\omega.$$

Сложивъ это, найдемъ:

$$2\sin\omega\sin\varphi_1+\cdots+2\sin\omega\sin\varphi_k=1-\cos 2k\omega$$

и вслѣдствіе этого получимъ:

$$P_k=\frac{2l}{q_{4k}}(1-\cos 2k\omega).$$

Замѣстивъ ω его значеніемъ, получимъ:

$$\cos 2k\omega=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Слѣдовательно,

$$P_k=\frac{2l}{q_{4k}}.$$

Теперь остается заставить k неограниченно возрастать. Сдѣлавъ это и означивъ предѣлъ P_k черезъ P, найдемъ, что предѣлъ правильнаго $4k$-угольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a, будетъ длина этого круга или

$$\lim q_{4k}=\pi a.$$

Такимъ образомъ, окончательно получаемъ:

$$P=\frac{2l}{\pi a}.$$

Это есть вѣроятность того, что игла, избравъ при паденіи произвольное направленіе, пересѣчетъ въ этомъ направленіи одну изъ границъ между полосами.

Такъ рѣшается задача Бюффона для случая $l\leqq a$.

Случай, когда длина иглы превосходитъ ширину полосы.

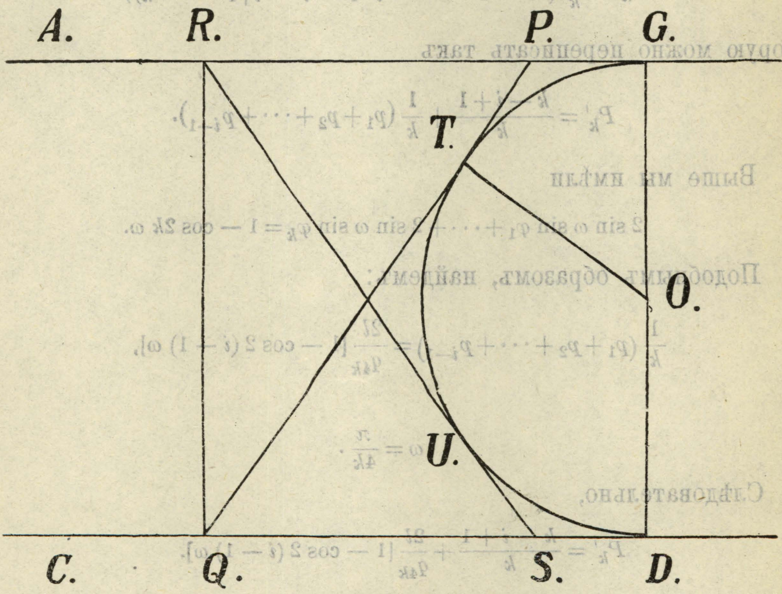
Къ полукругу, описанному на GD, какъ на діаметрѣ, проведемъ касательныя, отрѣзки которыхъ PQ и RS, лежащія внутри полосы, равнялись бы длинѣ иглы l и пусть точки касанія будутъ T и U. (фиг. 2).

Опять построимъ правильный $4k$-угольникъ и пусть i будетъ число его сторонъ, вписанныхъ въ дугу GT, $2k-2i$ число сторонъ, вписанныхъ въ дугу TU, и i число сторонъ, вписанныхъ въ UD*). Пусть еще будетъ

$$\angle APQ = \Theta \text{ и } \angle ARS = \pi - \Theta$$

Ясно, что если игла при паденіи изберетъ направленіе φ_r, при которомъ

$$\Theta \leqq \varphi_r \leqq \pi - \Theta,$$



Фиг. 2.

то вѣроятность встрѣчи иглы съ прямою AG и CD будетъ 1, т. е.

$$P_i = 1, \quad P_{i+1} = 1, \ldots \quad P_k = 1, \ldots \quad P_{2k-2i} = 1.$$

Если же случится

$$\varphi_r < \Theta \quad \text{или} \quad \varphi_r > \pi - \Theta,$$

то попрежнему будетъ

$$P_r = \frac{l \sin \varphi_r}{a}.$$

---

*) Ясно, что это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда отношеніе UT къ TG или къ UD есть раціональное число. Это предполагается настоящимъ разсужденіемъ, освободить которое отъ этого предположенія въ заключительной фазѣ доказательства не представитъ затрудненія.

Ред.

На основаніи сказаннаго вѣроятность P'_k того, что игла, превосходящая по своей длинѣ ширину полосъ, избравъ при паденіи одно изъ $2k$ равновозможныхъ направленій

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2k},$$

пересѣчетъ въ избранномъ направленіи какую либо прямую, разграничивающую полосы, выразится формулой

$$P_k' = \frac{1}{k}(p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1} + p_i + p_{i+1} + \cdots p_k),$$

которую можно переписать такъ

$$P_k' = \frac{k-i+1}{k} + \frac{1}{k}(p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1}).$$

Выше мы имѣли

$$2\sin\omega\sin\varphi_1 + \cdots + 2\sin\omega\sin\varphi_k = 1 - \cos 2k\,\omega.$$

Подобнымъ образомъ, найдемъ:

$$\frac{1}{k}(p_1 + p_2 + \cdots + p_{i-1}) = \frac{2l}{q_{4k}}[1 - \cos 2(i-1)\,\omega],$$

гдѣ

$$\omega = \frac{\pi}{4k}.$$

Слѣдовательно,

$$P_k' = \frac{k-i+1}{k} + \frac{2l}{q_{4k}}[1 - \cos 2(i-1)\,\omega].$$

Поставивъ сюда на мѣсто ω его значеніе, получимъ:

$$P_k' = \frac{k-i+1}{k} + \frac{2l}{q_{4k}}\left[1 - \cos\frac{\pi(i-1)}{2k}\right].$$

Найдемъ предѣльное состояніе этого равенства при условіи, что k неограниченно возрастаетъ. Пусть P' будетъ предѣлъ P_k'. Мы уже имѣли

$$\lim q_{4k} = \pi a.$$

Займемся вычисленіемъ отношенія:

$$\frac{i}{h} = \frac{4ib}{4kb} = \frac{4\,.\,ib}{q_{4k}} = \frac{4\,(TG)}{q_{4k}},$$

гдѣ (TG) означаетъ периметръ той части $4k$-угольника, которая вписана въ дугу TG. Принявъ во вниманіе равенства

$$\angle TPG + \Theta = \pi \quad \text{и} \quad \angle TPG + \angle TOG = \pi,$$

найдемъ

$$\angle TOG = \Theta,$$

вслѣдствіе чего для длины дуги TG получимъ:

$$TG = \frac{\Theta a}{2}.$$

На основаніи сказаннаго будемъ имѣть:

$$\lim \frac{i-1}{k} = \lim \frac{i}{k} = \frac{4 \lim (TG)}{\lim q_{1k}} = \frac{4 . TG}{\pi a} = \frac{2\Theta}{\pi}.$$

Посредствомъ этого для искомой вѣроятности найдемъ:

$$P' = 1 - \frac{2\Theta}{\pi} + \frac{2l}{\pi a}(1 - \cos\Theta).$$

Изъ прямоугольнаго треугольника RQP получимъ:

$$a = l \sin\Theta \quad \text{или} \quad a = l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right).$$

Отсюда находимъ:

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \Theta = \arccos\frac{a}{l}.$$

Замѣнивъ посредствомъ этихъ формулъ Θ и $\cos\Theta$ ихъ значеніями, получимъ:

$$P' = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{a}{l} + \frac{l}{a} - \sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}\right).$$

Въ сочиненіи проф. П. А. Некрасова „Теорія вѣроятностей". СПБ., 1912 г. эта формула выведена посредствомъ интегральнаго исчисленія (стр. 242). Академикъ А. А. Марковъ по поводу задачи Бюффона сообщаетъ любопытныя свѣдѣнія объ опытахъ Цюрихскаго профессора астронома Вольфа (А. А. Марковъ. „Исчисленіе вѣроятностей". СПБ., 1908 г. стр. 179).

Въ опытахъ Вольфа ширина полосъ была 45 *мл.*, а длина бросаемой иглы 36 *мл.*, и потому вѣроятность непомѣщенія иглы въ одной полосѣ, на основаніи формулы Бюффона, выражалась числомъ

$$\frac{72}{45\pi} = 0{,}5093\ldots$$

Игла была брошена на плоскость 5000 разъ, при чемъ 2468 разъ она помѣстилась вся внутри одной полосы, а 2532 раза отчасти въ одной, отчасти въ другой полосѣ; такъ что отношеніе числа бросаній, при которыхъ игла не помѣстилась внутри одной полосы, къ числу всѣхъ бросаній равно

$$\frac{2532}{5000} = 0{,}5064$$

и довольно близко подходитъ къ указанной выше вѣроятности непомѣщенія иглы въ одной полосѣ.

Въ этомъ результатѣ можно усмотрѣть нѣкоторое подтвержденіе теоремы Бернулли опытомъ. Интересно замѣтить, что результатомъ опытовъ Вольфа можно было бы воспользоваться и для вычисленія числа π; стоитъ только, на основаніи теоремы Бернулли, допустить приближенное равенство

$$\frac{72}{45\pi}=\frac{2532}{5000}.$$

Такимъ образомъ находимъ для π величину 3,159... которая отличается отъ истинной менѣе, чѣмъ на 0.02.

Тригонометрія въ ея связи съ геометріей *).

А. Стрѣтта.

I. Введеніе.

Въ настоящей статьѣ мы, во первыхъ, пользуясь одной геометрической теоремой и слѣдствіемъ изъ нея, даемъ новый выводъ формулъ для $\sin(\alpha\pm\beta)$ и $\cos(\alpha\pm\beta)$. Затѣмъ, примѣняя эти формулы и формулы изъ нихъ вытекающія, а также нѣкоторыя другія тригонометрическія формулы, мы даемъ новое доказательство нѣкоторыхъ важныхъ геометрическихъ теоремъ, въ томъ числѣ теоремы Пиѳагора, обобщеній теоремы Пиѳагора, теоремъ Чевы, Менелая, Птоломея, а также получаемъ нѣкоторыя новыя теоремы.

Обозначенія. — Мы обозначаемъ вершины треугольника черезъ A, B, C; противолежащія стороны соотвѣтственно черезъ a, b, c; соотвѣтствующія высоты черезъ h', h'', h''', а углы черезъ α, β, γ.

Отрѣзки, образуемые пересѣченіемъ сторонъ съ соотвѣтственными высотами и расположенные въ той послѣдовательности, въ которой ихъ нужно пробѣжать, чтобы попасть во первыхъ изъ A въ B, затѣмъ изъ B въ C и, наконецъ, изъ C въ A, мы обозначимъ черезъ c', c'' (отрѣзки на c), а a', a'' (отрѣзки на a), b', b'' (отрѣзки на b).

II. Формулы для $\sin(\alpha\pm\beta)$ и $\cos(\alpha\pm\beta)$.

Доказательство, основанное на примѣненіи одной геометрической теоремы и слѣдствія изъ нея.

А. — Формула для синуса суммы двухъ дугъ. — Такъ какъ сумма двухъ угловъ любого треугольника допол-

*) Настоящая статья заимствована нами изъ журнала „L'Enseignement Mathématique“. Не всѣ приводимые здѣсь выводы новы. Но намъ казалось, что изложенныя здѣсь соображенія представляютъ богатый матеріалъ для упражненій, которымъ преподаватель можетъ воспользоваться. *Ред.*

няетъ третій его уголъ до 180°, то соотвѣтственные синусы равны:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma. \tag{1}$$

Вполнѣ естественно поэтому искать новаго доказательства формулы для синуса суммы двухъ дугъ, исходя изъ этого равенства. Изъ фиг. 1 имѣемъ:

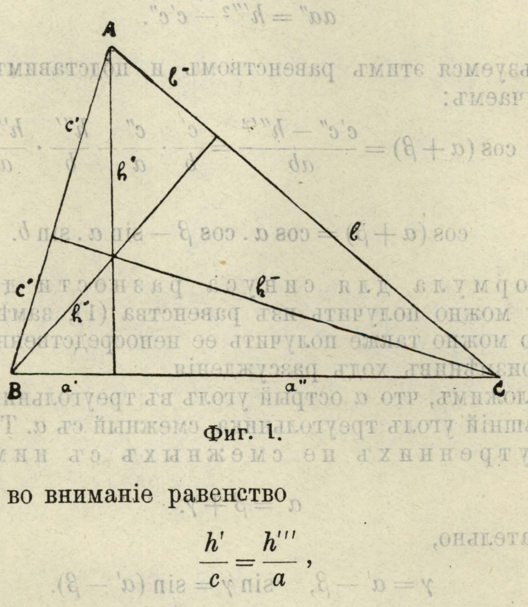
$$\sin\gamma=\frac{h'}{b},$$

и равенство (1) переходитъ въ

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h'}{b},$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h'.c}{b.c}=\frac{h'(c'+c'')}{b.c}=\frac{h'}{c}\cdot\frac{c'+c''}{b}.$$



Фиг. 1.

Принимая во вниманіе равенство

$$\frac{h'}{c}=\frac{h'''}{a},$$

получаемъ далѣе

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h'''}{a}\cdot\frac{c'+c''}{b}=\frac{h'''c'}{ab}+\frac{h'''c''}{ab},$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h'''}{b}\cdot\frac{c''}{a}+\frac{c'}{b}\cdot\frac{h'''}{a},$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta. \tag{I}$$

B. — Формула для косинуса суммы двухъ дугъ. — α, β и γ — углы треугольника. Имѣемъ:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma.$$

Фигура 1 даетъ намъ:

$$\cos\gamma=\frac{a''}{b}\cdot$$

Подставляя это равенство въ предыдущее, получаемъ:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{a''}{b}=-\frac{aa''}{ab}\cdot$$

Ниже мы докажемъ слѣдующее равенство:

$$h'''^2=c'c''+aa''$$

или

$$aa''=h'''^2-c'c''.$$

Воспользуемся этимъ равенствомъ и подставимъ его въ предыдущее. Получаемъ:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{c'c''-h'''^2}{ab}=\frac{c'}{b}\cdot\frac{c''}{a}-\frac{h'''}{b}\cdot\frac{h'''}{a},$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin b.$$

C. — Формула для синуса разности двухъ дугъ. — Эту формулу можно получить изъ равенства (1), замѣнивъ тамъ β черезъ $-\beta$. Но можно также получить ее непосредственно изъ фигуры 1, немного видоизмѣнивъ ходъ разсужденія.

Предположимъ, что α острый уголъ въ треугольникѣ, и обозначимъ черезъ α' внѣшній уголъ треугольника, смежный съ α. Тогда α' равенъ суммѣ внутреннихъ не смежныхъ съ нимъ угловъ:

$$\alpha'=\beta+\gamma.$$

Слѣдовательно,

$$\gamma=\alpha'-\beta,\quad \sin\gamma=\sin(\alpha'-\beta).$$

Подставляя сюда

$$\sin\gamma=\frac{h'}{b},$$

получаемъ:

$$\sin(\alpha'-\beta)=\frac{h'}{b}=\frac{h'(c'+c'')}{b\,.\,c}=\frac{h'}{c}\cdot\frac{c'+c''}{b},$$

$$\sin(\alpha'-\beta)=\frac{h'''}{a}\cdot\frac{c'+c''}{b}=\frac{h'''}{b}\cdot\frac{c'}{a}+\frac{c'}{b}\cdot\frac{h'''}{a}=\frac{h'''}{b}\cdot\frac{c'}{a}-\left(-\frac{c'}{b}\right)\cdot\frac{h'''}{a}\cdot$$

Но

$$\cos \alpha' = -\frac{c'}{b},$$

такъ какъ уголъ α' тупой. Слѣдовательно,

$$\sin (\alpha' - \beta) = \sin \alpha' . \cos \beta - \cos \alpha' . \sin \beta \text{*)}. \qquad \text{(III)}$$

D. — Формула для косинуса разности двухъ дугъ. — Можно получить эту формулу изъ равенства (II), замѣнивъ тамъ β черезъ $-\beta$. Можно также вывести ее изъ фигуры 1.

Пусть α будетъ острый уголъ треугольника, α' — внѣшній смежный съ нимъ. Имѣемъ:

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \gamma = \alpha' - \beta,$$

$$\cos \gamma = \cos (\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{aa''}{ab}, \quad h'''^2 = c'c'' + aa'',$$

$$\cos (\alpha' - \beta) = \frac{h'''^2 - c'c''}{ab} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} - \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a}.$$

α' — тупой уголъ. Слѣдовательно,

$$\sin \alpha' = \frac{h'''}{b}; \quad \sin \beta = \frac{h'''}{a}; \quad \cos \alpha' = -\frac{c'}{b}; \quad \cos \beta = \frac{c''}{a};$$

т. е.

$$\cos (\alpha' - \beta) = \cos \alpha' . \cos \beta + \sin \alpha' . \sin \beta. \qquad \text{(IV)}$$

III. Геометрическіе выводы, которые даетъ примѣненіе къ треугольнику тригонометрическихъ формулъ.

Примѣненіе къ треугольнику предыдущихъ формулъ, а также нѣкоторыхъ другихъ, изъ нихъ вытекающихъ, приводитъ насъ къ новымъ доказательствамъ нѣкоторыхъ важныхъ геометрическихъ теоремъ, а также къ нѣкоторымъ новымъ теоремамъ.

A. — Примѣненіе формулы для $\sin(\alpha + \beta)$. — (Доказательство обобщенной теоремы Пиѳагора).

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta.$$

Какъ видно изъ фигуры 1, мы можемъ написать:

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{h''}{c} \cdot \frac{a'}{c} + \frac{b''}{c} \cdot \frac{h'}{c} = \frac{a'h'' + b''h'}{c^2},$$

*) Выводъ связанъ, однако, съ предположеніемъ, что уголъ α' тупой.

или, принимая во вниманіе равенство $bh'' = ah'$,

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a' \cdot \dfrac{ah'}{b} + b''h'}{c^2} = \frac{h'}{b} \cdot \frac{aa' + bb''}{c^2}.$$

Но

$$\frac{h'}{b} = \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta).$$

Слѣдовательно,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta) \cdot \frac{aa' + bb''}{c^2},$$

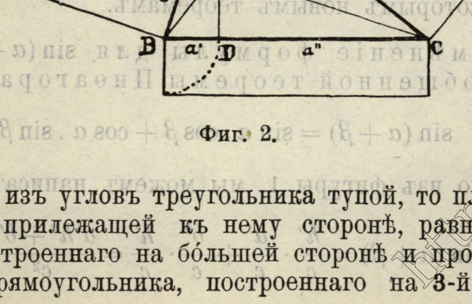
или

и аналогично:

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= aa' + bb'', \\ a^2 &= bb' + cc'', \\ b^2 &= cc' + aa''. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Равенства (1) выражаютъ слѣдующую теорему.

Теорема I. Во всякомъ остроугольномъ треугольникѣ площадь квадрата, построеннаго на одной изъ его сторонъ, равна суммѣ площадей двухъ прямоугольниковъ, построенныхъ каждый на одной изъ двухъ другихъ сторонъ треугольника и на проекціи первой стороны на нее (фиг. 2).



Фиг. 2.

Если одинъ изъ угловъ треугольника тупой, то площадь квадрата, построеннаго на прилежащей къ нему сторонѣ, равна площади прямоугольника, построеннаго на бо́льшей сторонѣ и проекціи 1-й на нее безъ площади прямоугольника, построеннаго на 3-й сторонѣ и проекціи 1-й на нее.

Примѣчаніе. Первое изъ равенствъ (1) можно также получить, подставивши въ формулу для $\sin(\alpha+\beta)$ равенства

$$\sin\alpha = \frac{h'''}{b} \text{ и } \cos\alpha = \frac{c'}{b};$$

но тогда нужно, послѣ повторенія всего предыдущаго хода разсужденій для полученія окончательнаго результата замѣнить cc' черезъ bb''.

Особенные случаи. — 1. $C = 90°$. Здѣсь h' совпадаетъ тогда съ b, h'' съ a. Слѣдовательно,

$$a' = a, \quad b'' = b,$$

и первое изъ равенствъ (1) переходитъ въ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(теорема Пиѳагора).

2. $A = 90°$. Отрѣзокъ h'' совпадаетъ съ c, слѣдовательно $b'' = 0$. Равенство

$$c^2 = aa' + bb''$$

переходитъ въ

$$c^2 = aa',$$

т. е.: въ прямоугольномъ треугольникѣ каждый катетъ есть средняя пропорціональная между всей гипотенузой и проекціей катета на гипотенузу.

Равенствамъ (1) можно придать другую форму, а именно:

$$c^2 = aa' + bb'' = a(a - a'') + b(b - b'), \quad c^2 = a^2 + b^2 - aa'' - bb'$$

Но

$$bb' = aa''.$$

Слѣдовательно,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa''. \tag{2}$$

(C — острый уголъ). Это — обобщенная теорема Пиѳагора.

В. — Примѣненіе формулы для $\cos(\alpha+\beta)$. — (Доказательство теоремы Пиѳагора).

Пусть α, β, γ будутъ углы треугольника. Имѣемъ тогда (фиг. 1):

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a-a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b}.$$

Но

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'c}{bc} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'+c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a'c''}{bc}.$$

Слѣдовательно,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left(\frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}\right),$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\left(\frac{a}{b}-\frac{a'c''}{bc}\right)\cdot$$

Сопоставивши это равенство съ равенствомъ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\cos\beta-\sin\alpha\,.\sin\beta,$$

получаемъ:

$$\sin\alpha\,.\sin\beta=\frac{a}{b}-\frac{a'c''}{bc}\cdot \tag{a}$$

Съ другой стороны

$$\sin\alpha=\frac{h'''}{b}=\frac{h''}{c},\quad \sin\beta=\frac{h'}{c}=\frac{h'''}{a},$$

откуда, между прочимъ, слѣдуетъ:

$$\sin\alpha\,.\sin\beta=\frac{h'''}{b}\cdot\frac{h'}{c}\cdot$$

Слѣдовательно,

$$\frac{h'h'''}{bc}=\frac{a}{b}-\frac{a'c''}{bc}=\frac{ac-a'c''}{bc},$$

или

$$h'h'''=ac-a'c''.$$

Путемъ циклической перестановки элементовъ треугольника получаемъ еще два равенства, которыя вмѣстѣ съ первымъ образуютъ слѣдующую группу:

$$\left.\begin{aligned} h'h''' &= ac-a'c'',\\ h''h' &= ba-b'a'',\\ h'''h'' &= cb-c'b'', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Равенства (3) выражаютъ слѣдующую теорему:

Теорема II. Площадь прямоугольника, построеннаго на двухъ высотахъ треугольника, равна площади прямоугольника, построеннаго на двухъ соотвѣтствующихъ сторонахъ, безъ площади прямоугольника, построеннаго на проекціяхъ этихъ сторонъ другъ на друга.

Вернемся вновь къ равенству (a):

$$\sin\alpha\,.\sin\beta=\frac{a}{b}-\frac{a'c''}{bc},$$

и возьмемъ для $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ другую пару изъ указанныхъ для нихъ выше значеній. Получаемъ:

$$\sin\alpha\,.\,\sin\beta = \frac{h'''}{b}\cdot\frac{h'''}{a},$$

т. е.

$$\frac{h'''^2}{ab} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}, \quad h'''^2 = a^2 - \frac{aa'c''}{c}.$$

Но

$$aa' = cc'',$$

такъ какъ

$$\cos\beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a}.$$

Слѣдовательно,

$$h'''^2 = a^2 - c''^2,$$

или

$$a^2 = c''^2 + h'''^2, \tag{4}$$

и мы получили такимъ образомъ изъ формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ новое доказательство теоремы Пиѳагора (для прямоугольнаго треугольника BCF).

Изъ указанныхъ выше значеній для $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ слѣдуетъ еще также

$$\sin\alpha\,.\,\sin\beta = \frac{h''}{c}\cdot\frac{h'}{c}.$$

Сравнивая это равенство съ равенствомъ (a), находимъ:

$$\frac{h'h''}{c^2} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}, \quad h'h'' = \frac{ac^2}{b} - \frac{a'c''c}{b} = \frac{c\,(ac - a'c'')}{b};$$

подставляя же въ послѣднее равенство первое изъ равенствъ (3):

$$h'h''' = ac - a'c'',$$

получаемъ:

$$h'h'' = \frac{c\,.\,h'\,.\,h'''}{b},$$

или

$$\frac{h''}{h'''} = \frac{c}{b}. \tag{5}$$

Равенство (5) выражаетъ извѣстное свойство треугольника: Отношеніе двухъ высотъ треугольника равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ сторонъ.

Оставшаяся еще неиспользованной комбинація изъ указанныхъ выше значеній для $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ привела бы насъ опять къ только что доказанному свойству треугольниковъ.

C. — Примѣненіе формулъ для $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$. — Примѣненіе къ треугольнику формулы для $\sin(\alpha-\beta)$ приводитъ насъ къ тѣмъ же равенствамъ (1), что и примѣненіе формулы для $\sin(\alpha+\beta)$, а примѣненіе формулы для $\cos(\alpha-\beta)$ — къ тѣмъ же равенствамъ (3), (4) и (5), что и примѣненіе формулы для $\cos(\alpha+\beta)$.

D. — Примѣненіе формулы $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. — Примѣненіе къ треугольнику этой формулы даетъ намъ слѣдующую теорему.

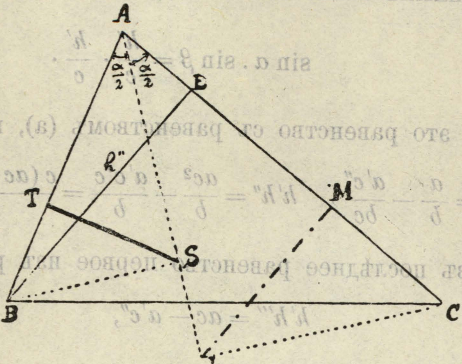
Теорема III. — Если изъ вершины B треугольника ABC опустить перпендикуляръ на биссектрису угла A, а изъ основанія S этого перпендикуляра — перпендикуляръ на сторону AB, то этотъ послѣдній по величинѣ своей равенъ всегда половинѣ высоты треугольника, опущенной изъ вершины B.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

слѣдуетъ (фигура 3):

$$\frac{BE}{c} = 2\cdot\frac{ST}{AS}\cdot\frac{AS}{c},$$



Фиг. 3.

или

$$ST = \frac{BE}{2} = \frac{h''}{2}, \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Точно такъ же получается:

$$LM = \frac{h'''}{2}.$$

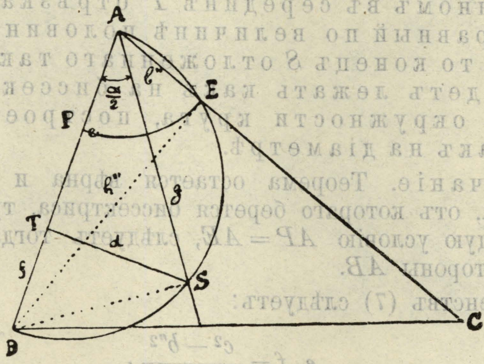
Можно при выводѣ равенства (6) пользоваться также равенствомъ

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BS}{c},$$

но тогда нужно произведенiе $BS\,.\,AS$ замѣнить черезъ $c\,.\,ST$.

E. — Примѣненiе формулы $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$. — Изъ этой формулы слѣдуетъ (фигура 4 *):

$$\frac{AE}{AB}=2\left(\frac{AS}{AB}\right)^2-1.$$



Фиг. 4.

Положимъ

$$AE=b'',\quad AB=c,\quad ST=d,\quad AT=e,\quad BT=f,\quad AS=g.$$

Наше равенство переходитъ тогда въ

$$\frac{b''}{c}=2\cdot\frac{g^2}{c^2}-1,$$

или

$$g^2=\frac{c\,(c+b'')}{2}.$$

Но

$$g^2=ce.$$

Слѣдовательно,

$$ce=\frac{c\,(c+b'')}{2},$$

*) Фигура 4 представляетъ собою повторенiе фигуры 3 съ нѣкоторыми добавочными линiями.

или

$$e = \frac{c + b''}{2}, \quad \text{и далѣе}, \quad f = \frac{c - b''}{2}, \tag{7}$$

такъ какъ $f = c - e$.

Итакъ, точка T есть середина отрѣзка BP. Такъ какъ сверхъ того точка S лежитъ на окружности круга, построеннаго на AB, какъ на діаметрѣ, то мы можемъ формулировать полученные результаты слѣдующимъ образомъ:

Теорема IV. — Если вокругъ вершины A треугольника, какъ вокругъ центра, радіусомъ, равнымъ разстоянію этой вершины отъ основанія E высоты треугольника BE, описать дугу, пересѣкающую сторону AB въ точкѣ P, и на перпендикулярѣ къ сторонѣ AB, возставленномъ въ серединѣ T отрѣзка BP, отложить отрѣзокъ, равный по величинѣ половинѣ упомянутой высоты BE, то конецъ S отложеннаго такимъ образомъ отрѣзка будетъ лежать какъ на биссектрисѣ угла A, такъ и на окружности круга, построеннаго на сторонѣ AB, какъ на діаметрѣ.

Примѣчаніе. Теорема остается вѣрна и въ томъ случаѣ, когда уголъ A, отъ котораго берется биссектриса, тупой, но точку P, удовлетворяющую условію $AP = AE$, слѣдуетъ тогда откладывать на продолженіи стороны AB.

Изъ равенствъ (7) слѣдуетъ:

$$e \,.\, f = \frac{c^2 - b''^2}{4}.$$

Съ другой стороны,

$$d = e \,.\, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad d = f \,.\, \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right),$$

т. е.

$$d^2 = e \,.\, f.$$

Слѣдовательно,

$$d^2 = \frac{c^2 - b''^2}{4}.$$

Но

$$d = \frac{h''}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{h''^2}{4} = \frac{c^2 - b''^2}{4}$$

или

$$c^2 = h''^2 + b''^2$$

теорема Пиѳагора.

F. — Примѣненіе соотношеній между элементами прямоугольнаго треугольника. — (Доказательство теоремъ о прямоугольныхъ треугольникахъ).

Пусть ABC будетъ прямоугольный треугольникъ, A — вершина прямого угла, p и q — проекціи b и c на гипотенузу a, а h — высота.

Рѣчь идетъ о слѣдующихъ соотношеніяхъ;

1. Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго или на косинусъ прилежащаго угла.

2. Катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ противолежащаго первому катету угла.

Изъ перваго отношенія слѣдуетъ:

$$b = a\cos C, \quad b = \frac{p}{\cos C},$$

Слѣдовательно,

$$b^2 = ap, \tag{8}$$

или:

I. Въ прямоугольномъ треугольникѣ каждый изъ катетовъ есть среднее пропорціональное между гипотенузой и проекціей катета на гипотенузу.

Изъ второго соотношенія слѣдуетъ:

$$h = p\,.\,\mathrm{tg}\,C \quad \text{и} \quad h = q\,.\,\mathrm{tg}\,B.$$

Слѣдовательно,

$$h^2 = p\,.\,q\,(\mathrm{tg}\,C\,.\,\mathrm{tg}\,B).$$

Но

$$\mathrm{tg}\,C\,.\,\mathrm{tg}\,B = 1.$$

Слѣдовательно,

$$h^2 = p\,.\,q,$$

или:

II. Высота, опущенная изъ прямого угла треугольника, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы, получающимися отъ пересѣченія гипотенузы съ высотой.

G. — Примѣненіе теоремы синусовъ. — (Доказательство теоремъ Чевы и Менелая).

1. Примѣненіе теоремы синусовъ къ треугольникамъ $PA'B$, $PB'C$, $PC'A$; $PA'C$, $PB'A$, $PC'B$ (фиг. 5) даетъ намъ:

$$\frac{a'}{l} = \frac{\sin\delta}{\sin A'}, \quad \frac{b'}{m} = \frac{\sin\varphi}{\sin B'}, \quad \frac{c'}{k} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin C'},$$

слѣдовательно,

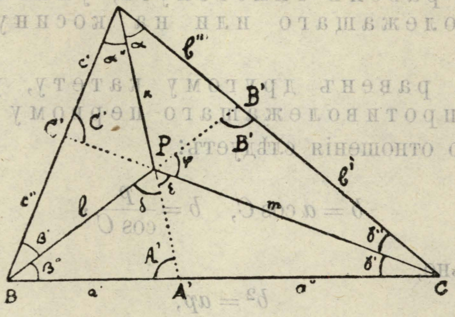
$$1)\quad \frac{a'\,.\,b'\,.\,c'}{k\,.\,l\,.\,m} = \frac{\sin\delta\,.\,\sin\varepsilon\,.\,\sin\varphi}{\sin A'\,.\,\sin B'\,.\,\sin C'},$$

и далѣе

$$\frac{m}{a''}=\frac{\sin A'}{\sin \varepsilon},\quad \frac{k}{b''}=\frac{\sin B'}{\sin \delta},\quad \frac{l}{c''}=\frac{\sin C'}{\sin \varphi},$$

слѣдовательно,

$$2)\quad \frac{k\,.\,l\,.\,m}{a''\,.\,b''\,.\,c''}=\frac{\sin A'\,.\,\sin B'\,.\,\sin C'}{\sin \delta\,.\,\sin \varepsilon\,.\,\sin \varphi}.$$



Фиг. 5.

Перемноживъ почленно равенства 1) и 2), получаемъ:

$$\frac{a'\,.\,b'\,.\,c'}{a''\,.\,b''\,.\,c''}=1,$$

или

$$a'\,.\,b'\,.\,c'=a''\,.\,b''\,.\,c'', \tag{10}$$

т. е. приходимъ къ теоремѣ Чевы.

Три прямыя, проходящія черезъ три вершины треугольника и пересѣкающіяся въ одной точкѣ, отсѣкаютъ на сторонахъ треугольника шесть отрѣзковъ такъ, что произведеніе трехъ не слѣдующихъ другъ за другомъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ остальныхъ.

Примѣчаніе. Къ теоремѣ Чевы привело бы насъ также примѣненіе теоремы синусовъ къ треугольникамъ

$$ABA',\ BCB',\ CAC';\quad ACA',\ BAB',\ CBC'.$$

Мы получили бы тогда

$$\frac{a'\,.\,b'\,.\,c'}{a''\,.\,b''\,.\,c''}=\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\beta''}{\sin\beta'}\cdot\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'}=\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{l}\cdot\frac{k}{m},$$

т. е.

$$a'\,.\,b'\,.\,c'=a''\,.\,b''\,.\,c''.$$

Особенный случай. Выражая какое либо изъ произведеній

$\cos\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma,\quad \sec\alpha\,.\,\sec\beta\,.\,\sec\gamma,\quad \operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta\,.\,\operatorname{tg}\gamma,\quad \operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta\,.\,\operatorname{ctg}\gamma$

черезъ элементы треугольника двумя различными способами и сравнивая получающіяся при этомъ два выраженія, мы получаемъ теорему Чевы для того особеннаго случая, когда прямыя, проходящія черезъ вершины треугольника, пересѣкаются въ его центрѣ тяжести.

Напримѣръ (фиг. 1):

$$\cos\alpha = \frac{c'}{b} = \frac{b''}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{b'}{a} = \frac{a''}{b},$$

слѣдовательно,

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma = \frac{c'}{b}\cdot\frac{a'}{c}\cdot\frac{b'}{a} = \frac{b''}{c}\cdot\frac{c''}{a}\cdot\frac{a''}{b}\cdot$$

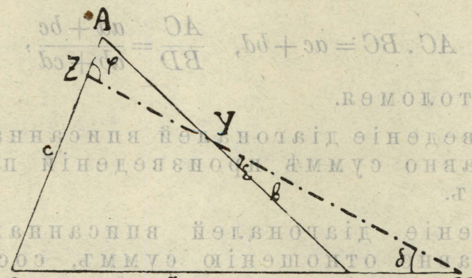
или

$$a'\,.\,b'\,.\,c' = a''\,.\,b''\,.\,c''.$$

2. Теперь разсмотримъ треугольникъ ABC и прямую, пересѣкающую стороны a, b, c соотвѣтственно въ точкахъ X, Y, Z и образующую съ ними углы δ, ε, φ (фиг. 6).

Примѣненіе теоремы синусовъ къ треугольникамъ AYZ, BZX, CXY даетъ намъ фиг. 6):

$$\frac{AY}{AZ} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}, \quad \frac{BZ}{BX} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \quad \frac{CX}{CY} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}.$$



Фиг. 6.

Перемноживъ почленно эти равенства, получаемъ:

$$\frac{AY\,.\,BZ\,.\,CX}{AZ\,.\,BX\,.\,CY} = 1,$$

или

$$AZ\,.\,BX\,.\,CY = AY\,.\,CX\,.\,BZ. \qquad (11)$$

т. е. теорему Менелая.

Прямая, лежащая въ плоскости треугольника, отсѣкаетъ на сторонахъ его шесть отрѣзковъ, такъ что произведеніе трехъ не слѣдующихъ другъ за другомъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ остальныхъ.

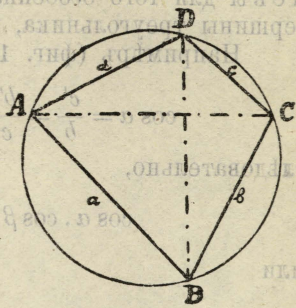
H.—Примѣненіе теоремы косинуса.—(Доказательство теоремы Птоломея).

Изъ фигуры 7 слѣдуетъ:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\cos B,$$

и далѣе,

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \,.\cos B,$$



Фиг. 7.

слѣдовательно,

$$\frac{a^2 + b^2 - \overline{AC}^2}{2ab} = \frac{\overline{AC}^2 - c^2 - d^2}{2cd},$$

или, рѣшая это уравненіе относительно $\overline{AC}$,

$$1)\quad AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}.$$

Точно такъ же

$$2)\quad BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

Перемноживъ и раздѣливъ почленно равенства 1) и 2) получаемъ:

$$AC \,.\, BC = ac + bd, \quad \frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+cd}, \tag{12}$$

т. е. теоремы Птоломея.

1. Произведеніе діагоналей вписаннаго четырехугольника равно суммѣ произведеній противолежащихъ сторонъ.

2. Отношеніе діагоналей вписаннаго четырехугольника равно отношенію суммъ, составленныхъ изъ произведеній сторонъ, пересѣкающихся на соотвѣтственныхъ діагоналяхъ.

IV. Примѣненіе равенствъ (3).

1. Пусть намъ данъ треугольникъ ABC. Мы строимъ треугольникъ $A'B'C'$, вершины котораго лежатъ въ основаніяхъ высотъ даннаго треугольника (фиг. 8). Примѣненіе равенствъ (3) позволяетъ намъ:

a. — Доказать приводимую ниже теорему.

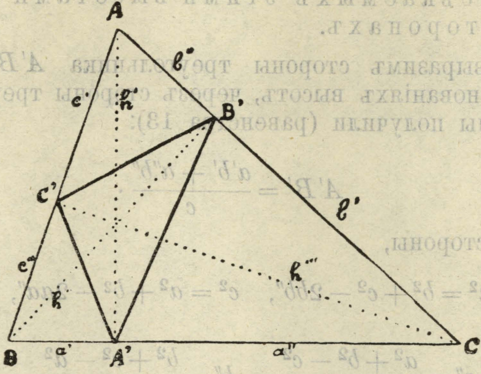
b. — Выразить стороны треугольника $A'B'C'$ черезъ стороны треугольника ABC.

a. — Второе изъ равенствъ (3) гласитъ:

$$h'h'' = ab - a''b'.$$

Съ другой стороны, вокругъ четырехугольника $ABA'B'$ можно описать окружность. Значитъ, можно примѣнить къ нему первую теорему Птоломея, согласно которой произведеніе его діагоналей равно суммѣ произведеній противолежащихъ сторонъ:

$$h'h'' = (A'B') \,.\, c + a'b''.$$



Фиг. 8.

Слѣдовательно,

$$(A'B') \,.\, c + a'b'' = ab - a''b',$$

или

$$A'B' = \frac{ab - a'b'' - a''b'}{c}\,.$$

Но

$$ab = (a' + a'')\,(b' + b'') = a'b' + a''b'' + a'b'' + a''b'.$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= \frac{a'b' + a''b''}{c}, \\ B'C' &= \frac{b'c' + b''c''}{a}, \\ C'A' &= \frac{c'a' + c''a''}{b}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

и аналогично:

или

$$\left.\begin{aligned} c \,.\, A'B' &= a'b' + a''b'', \\ a \,.\, B'C' &= b'c' + b''c'', \\ b \,.\, C'A' &= c'a' + c''a'', \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

т. е., мы получили слѣдующую теорему (равенства 13′):

Теорема V. Площадь прямоугольника, построеннаго на какой нибудь сторонѣ даннаго треугольника и на разстояніи между основаніями высотъ треугольника опущенныхъ на другія двѣ стороны, равна суммѣ площадей двухъ прямоугольниковъ, построенныхъ каждый на парѣ не слѣдующихъ другъ за другомъ отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ этими высотами на соотвѣтствующихъ сторонахъ.

b. Теперь выразимъ стороны треугольника $A'B'C'$, лежащаго вершинами въ основаніяхъ высотъ, черезъ стороны треугольника ABC (фиг. 8). Выше мы получили (равенства 13):

$$A'B' = \frac{a'b' + a''b''}{c}.$$

Съ другой стороны,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb'', \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'',$$

или

$$a'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad b'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Далѣе

$$a' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \quad b' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b},$$

такъ какъ

$$a' = a - a'', \quad b' = b - b''.$$

Подставивши эти значенія a', a'', b', b'' въ найденное выраженіе для $A'B'$, получаемъ:

$$A'B' = \frac{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}}{c},$$

или

$$A'B' = \frac{[a^2 + (b^2 - c^2)] \, . \, [a^2 - (b^2 - c^2)] + [b^2 + (c^2 - a^2)] \, . \, [b^2 - (c^2 - a^2)]}{4abc}.$$

или же послѣ всѣхъ упрощеній:

$$A'B' = \frac{c \, . \, (a^2 + b^2 - c^2)}{2ab};$$

аналогично получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} B'C' &= \frac{a \, . \, (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}, \\ C'A' &= \frac{b \, . \, (c^2 + a^2 - b^2)}{2ca}, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Эти равенства даютъ намъ искомое выраженіе сторонъ треугольника, лежащаго вершинами въ основаніяхъ высотъ, черезъ стороны даннаго треугольника.

2. Перемножимъ почленно первое изъ равенствъ (3)

$$h'h''' = ac - a'c'',$$

съ равенствомъ, вытекающимъ изъ фиг. 1:

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''}.$$

Получаемъ:

$$h'^2 = \frac{aa'c}{c''} - a'^2.$$

Съ другой стороны, каждая пара вершинъ въ треугольникѣ, вмѣстѣ съ основаніями высотъ, изъ нихъ опущенныхъ, лежитъ на окружности круга, имѣющаго діаметромъ лежащую между вершинами сторону, т. е.

Точки A, B, D, E (фиг. 9) лежатъ на окружности круга, имѣющаго діаметромъ сторону AB.

Точки B, C, E, F лежатъ на окружности круга, имѣющаго діаметромъ сторону BC.

Точки C, A, F, D лежатъ на окружности круга, имѣющаго діаметромъ сторону CA.

Слѣдовательно, на основаніи теоремы о сѣкущихъ:

$$aa'' = bb', \quad bb'' = cc', \quad cc'' = aa'.$$

Замѣняя поэтому aa' черезъ cc'' въ найденномъ выше выраженіи для h'^2, получаемъ:

$$h'^2 = c^2 - a'^2,$$

или

$$c^2 = a'^2 + h'^2;$$

теорема Пиѳагора.

Выраженію для h'^2 можно придать и слѣдующій видъ (фиг. 1):

$$h'^2 = \frac{aa'(c' + c'')}{c''} - a'^2,$$

или

$$h'^2 = a'(a - a') + \frac{aa'c'}{c''}.$$

Но

$$aa' = cc''.$$

Слѣдовательно,

$$h'^2 = a'a'' + cc', \quad \text{или} \quad h'^2 = a'a'' + bb''\,*), \tag{15}$$

такъ какъ $cc' = bb''$.

Равенства (15) выражаютъ слѣдующую теорему:

Теорема VI. Площадь квадрата, построеннаго на какой нибудь высотѣ треугольника, равна площади прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ, отсѣкаемыхъ высотою на соотвѣтствующей сторонѣ, плюсъ площадь прямоугольника, построеннаго на одной изъ двухъ другихъ сторонъ и на проекціи третьей стороны на нее.

Особенный случай.

$$A = 90^\circ; \quad b'' = c' = 0.$$

Равенства (15) переходятъ тогда въ

$$h'^2 = a'a'',$$

т. е.: высота прямоугольнаго треугольника есть средняя пропорціональная между отсѣкаемыми ею на гипотенузѣ отрѣзками.

Теорему VI можно разсматривать, какъ обобщеніе этого свойства прямоугольныхъ треугольниковъ.

Напишемъ теперь второе изъ равенствъ (15) въ нѣсколько иномъ видѣ (фиг. 1):

$$h'^2 = a'a'' + b'b'' + b''^2,$$

и сложимъ его почленно съ двумя другими, аналогично доказываемыми равенствами:

$$h''^2 = b'b'' + c'c'' + c''^2,$$

и

$$h'''^2 = c'c'' + a'a'' + a''^2.$$

Получаемъ:

$$h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2\,(a'a'' + b'b'' + c'c'') \quad \text{(I)}'$$

*) Аналогично получаются равенства для h''^2 и h'''^2. Одной изъ нихъ, а именно $h'''^2 = c'c'' + aa''$, мы воспользовались при выводѣ формулы для $\cos(\alpha+\beta)$.

Обращаемъ поэтому вниманіе на то, что эти формулы можно вывести независимо отъ этой формулы. Напримѣръ, по теоремѣ Пиѳагора: $b^2 = h'''^2 + c'^2$, $h'''^2 = b^2 - c'^2$. Далѣе по теоремѣ о сѣкущихъ: $bb'' = cc'$, $b = \frac{cc'}{b''}$, $h'^2 = \frac{bcc'}{b''} - c'^2 = \frac{cc'(b'+b'')}{b''} - c'^2 = c'(c-c') + \frac{cc'b'}{b''} = c'c'' + bb'$, $bb' = aa''$, $h'^2 = c'c'' + aa''$.

Первое изъ равенствъ (15):

$$h'^2 = a'a'' + cc',$$

даетъ намъ точно такъ же:

$$h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' + b'b'' + c'c''). \quad (I)''$$

Сопоставляя равенства (I)' и (I), находимъ:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2, \quad (16)$$

т. е. теорему VII.

Сумма площадей трехъ квадратовъ, построенныхъ на трехъ не слѣдующихъ другъ за другомъ отрѣзкахъ, отсѣкаемыхъ на сторонахъ треугольника соотвѣтствующими высотами, равна суммѣ площадей трехъ квадратовъ, построенныхъ на остальныхъ трехъ отрѣзкахъ.

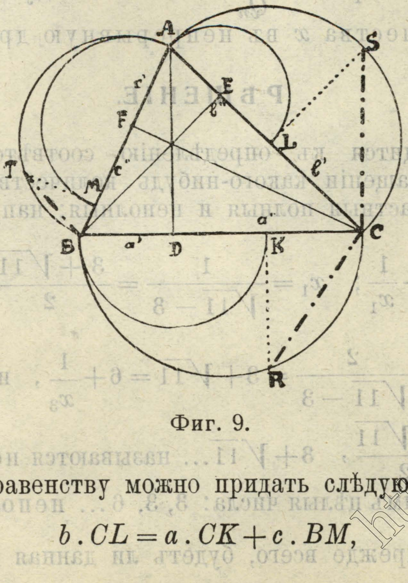
Замѣчаемъ, что равенство (16) было выведено безъ посредства теоремы Пиѳагора.

Геометрическое слѣдствіе. Изъ равенства (16) слѣдуетъ:

$$b'^2 - b''^2 = (a''^2 - a'^2) + (c''^2 - c'^2),$$

или

$$(b' + b'')(b' - b'') = (a'' + a')(a'' - a') + (c'' + c')(c'' - c').$$



Фиг. 9.

Послѣднему равенству можно придать слѣдующій видъ (фиг. 9):

$$b \,.\, CL = a \,.\, CK + c \,.\, BM,$$

или

$$\overline{CS}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{BT}^2.$$

Т. е., отрѣзки CS, CR и BT являются сторонами нѣкотораго прямоугольнаго треугольника, и мы получили слѣдующую теорему:

Теорема VIII. Если вокругъ основанiй высотъ треугольника, какъ центровъ, радiусами равными меньшимъ изъ отрѣзковъ, которые высоты отсѣкаютъ на соотвѣтствующихъ сторонахъ, описать окружности и въ точкахъ пересѣченiя этихъ окружностей съ большими отрѣзками возставить перпендикуляры къ сторонамъ до пересѣченiя съ окружностями, имѣющими стороны дiаметрами, то разстоянiя отъ точекъ пересѣченiя до тѣхъ концовъ большихъ отрѣзковъ, которые совпадаютъ съ вершинами треугольника, равняются сторонамъ нѣкотораго прямоугольнаго треугольника.

Примѣчанiе. Можно вывести теорему Пиѳагора изъ равенства (I)′ или (I)″, положивъ $A=90°$.

Ариѳметическая задача.

Дано ирраціональное количество $x=\dfrac{a+b\sqrt{m}}{c}$ и одна изъ его подходящихъ дробей $\dfrac{P_n}{Q_n}$; найти слѣдующія (не начиная обращенія количества x въ непрерывную дробь сначала).

РѢШЕНІЕ.

Вопросъ сводится къ опредѣленію соотвѣтствующаго полнаго частнаго. (При обращеніи какого-нибудь количества въ непрерывную дробь получаемъ частныя полныя и неполныя; напримѣръ:

$$\sqrt{11}=3+\frac{1}{x_1}\,;\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{11}-3}=\frac{3+\sqrt{11}}{2}=3+\frac{1}{x_2}\,;$$

$$x_2=\frac{2}{\sqrt{11}-3}=3+\sqrt{11}=6+\frac{1}{x_3}\,,\ \text{и т. д.}$$

Числа: $\sqrt{11}$, $\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$, $3+\sqrt{11}\ldots$ называются полными частными, а соотвѣтствующія имъ цѣлыя числа: 3, 3, 6... неполными частными).

Убѣждаемся прежде всего, будетъ ли данная дробь $\dfrac{P_n}{Q_n}$ больше или меньше x. Рѣшаемъ теперь въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе $P_n q - Q_n p = \pm 1$; верхній знакъ надо взять въ случаѣ $\frac{P_n}{Q_n} > x$, а нижній въ случаѣ $\frac{P_n}{Q_n} < x$, и беремъ наименьшее значеніе p и q. Тогда, на основаніи извѣстнаго свойства подходящихъ дробей $P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = \pm 1$, дробь $\frac{p}{q}$ будетъ подходящая дробь $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, предшествующая $\frac{P_n}{Q_n}$. По закону образованія подходящихъ дробей $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n t + P_{n-1}}{Q_n t + Q_{n-1}}$, гдѣ t означаетъ соотвѣтствующее неполное частное. Если же черезъ t будетъ обозначено полное частное, то ясно, что полученное будетъ равно данному ирраціональному количеству x, т. е., $\frac{P_n t + P_{n-1}}{Q_n t + Q_{n-1}} = x$, откуда опредѣляется t; $t = \frac{P_n - Q_n x}{Q_{n-1} x - P_{n-1}}$. Изъ найденнаго количества t опредѣляемъ неполное частное, такъ что получается слѣдующая и вообще слѣдующія подходящія дроби.

Примѣръ 1. Дано $x = \frac{3 + 5\sqrt{17}}{7}$ и подходящая дробь $\frac{27}{8}$.

Находимъ, $\frac{27}{8} > \frac{3 + 5\sqrt{17}}{7}$; поэтому составляемъ уравненіе $27q - 8p = 1$ и получаемъ рѣшеніемъ $p = 10$, $q = 3$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{10}{3}$. Слѣдовательно,

$$\frac{27t + 10}{8t + 3} = \frac{3 + 5\sqrt{17}}{7}, \text{ откуда } t = \frac{3(3 + 5\sqrt{17}) - 7.10}{7.27 - 8(3 + 5\sqrt{11})} = \frac{27 + 7\sqrt{17}}{5}.$$

Цѣлая часть этого выраженія 11, а потому $t = 11 + \frac{1}{t_1}$; откуда

$$t_1 = \frac{5}{7\sqrt{17} - 12} = \frac{4 + \sqrt{17}}{7} = 1 + \frac{1}{t_2} \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{27.11 + 10}{8.11 + 3} = \frac{307}{91}, \quad \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{307.1 + 27}{91.1 + 3} = \frac{334}{94} \text{ и т. д.}$$

Примѣръ 2. $x = \sqrt{11}$, $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1257}{379}$. Такъ какъ $\frac{1257}{378} < \sqrt{11}$, то составивъ, уравненіе $1257q - 379p = -1$, получаемъ $p = 199$, $q = 60$; слѣдовательно,

$$\frac{1257t + 199}{379t + 60} = \sqrt{11}, \text{ откуда } t = \frac{199 - 60\sqrt{11}}{379\sqrt{11} - 1257} = \frac{3 + \sqrt{11}}{2} = 3 + \frac{1}{t_1};$$

такъ что

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{1257.3 + 199}{379.3 + 60} = \frac{3970}{1197} \text{ и т. д.}$$

Прибавимъ, что предложенное правило относится не только къ ирраціональнымъ величинамъ 2-ой степени; оно примѣнимо также къ величинамъ какой-угодно другой степени. Такъ, напримѣръ, если $x=\sqrt[3]{3}$, а подходящая дробь его $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{10}{7}<\sqrt[3]{3}$, то $10q-7p=-1$, $p=3$, $q=2$, и $\frac{10t+3}{7t+2}=\sqrt[3]{3}$; отсюда $t=\frac{3-2\sqrt[3]{3}}{7\sqrt[3]{3}-10}=1+\frac{1}{t_1}$, и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{10.1+3}{7.1+2}=\frac{13}{9}$.

Я. Зингеръ.

Помѣщая настоящую замѣтку, обращаемъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Во всемъ ходѣ разсужденія авторъ фактически не опирается на то, что $\frac{P_n}{Q_n}$ есть одна изъ подходящихъ дробей той непрерывной, въ которую развивается число x. Вѣдь весь процессъ, повидимому, можно было бы выполнить, если бы за $\frac{P_n}{Q_n}$ взять на удачу любую несократимую дробь. Въ чемъ же сказалось бы то обстоятельство, что $\frac{P_n}{Q_n}$ дѣйствительно есть подходящая дробь упомянутаго выше разложенія?

Редакція.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

М. г., г-нъ редакторъ!

Докладчиками и оппонентами II-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики въ вечернемъ засѣданіи 30 декабря 1913 г. секціи III было приведено мое обоснованіе правила знаковъ для тупыхъ угловъ, предложенное мною въ 1912 г. въ сборникѣ моихъ задачъ по тригонометріи (з. 351 — 8 и 783 — 7) и затѣмъ въ докладѣ моемъ 24 іюня 1913 г. въ соед. засѣд. матем. секціи и секціи педагогич. вопросовъ на XIII Съѣздѣ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей въ Тифлисѣ 16 — 24 іюня 1913 г. о моемъ обоснованіи тригонометріи (отпечатанъ отдѣльной брошюрой; см. стр. 15, § 6, Правило Дек.) безъ упоминанія объ источникахъ. Въ виду этого дѣлаю настоящее сообщеніе, чтобы интересующіеся вопросомъ могли найти болѣе подробное его изложеніе. То же относится и къ затронутому докладчиками вопросу объ изученіи функцій (см. сборникъ з. 45 — 51).

Вмѣстѣ съ тѣмъ не откажите опубликовать мое заявленіе о желательности установленія правила, чтобы промежутки между однородными съѣздами съ однородными отдѣлами были не менѣе полутора лѣтъ, а не полъ года, какъ это было между съѣздомъ въ Тифлисѣ и Москвѣ, а также, чтобы нумерація съѣздовъ велась полная, захватывая и тѣ съѣзды, которые составляютъ часть другихъ съѣздовъ съ болѣе обширною программою.

Примите увѣренія въ совершенномъ къ Вамъ уваженіи *П. Курилко.*

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Малининъ. *Курсъ физики.* Для женскихъ учебныхъ заведеній. Изданіе 21-е, пересмотр. проф. О. Д. Хвольсономъ. Изд. Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Стр. 359. Ц. 1 р. 35 к.

Л. П. Николенко-Сагарда. *Искусственные способы рѣшенія алгебраическихъ уравненій высшихъ степеней.* Показательныя и логариѳмическія уравненія. Изд. С. А. Козловскаго. Бѣлая-Церковь, 1915. Стр. 48. Ц. 50 к.

А. И. Никитинъ. *Первая ступень изъ геометріи для начальной школы.* Изд. 2-ое. переработ. Москва, 1915. Стр. 80. Ц. 30 к.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 271 (6 сер.). Доказать справедливость формулы

$$n\,(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqq(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ любыя положительныя числа. Въ какомъ случаѣ въ этой формулѣ возможенъ знакъ равенства?

Л. Закутинскій (Черкассы).

№ 272 (6 сер.). Изъ точки B нѣкоторой прямой возставленъ перпендикуляръ AB, а затѣмъ на той же прямой отъ точки B отложены послѣдовательно отрѣзки BC, CD и DE, каждый изъ которыхъ равенъ отрѣзку AB. Вычислить безъ помощи тригонометріи сумму угловъ ADB и AEB.

А. Иткинъ (Петроградъ).

№ 273 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе

$$4\varphi\,(xy)=7\varphi(x)\,\varphi\,(y),$$

гдѣ $\varphi\,(n)$ при n цѣломъ и положительномъ обозначаетъ вообще число чиселъ не превосходящихъ n и взаимно простыхъ съ n.

Н. С. (Одесса).

№ 274 (6 сер.). Рѣшить и изслѣдовать систему уравненій

$$ax + b(y+z) = (a-b)^2,$$

$$ay + b(z+x) = 0,$$

$$az + b(x+y) = a(b-2a) + b^2.$$

(Заимств.).

ПОПРАВКИ.

1) Въ задачѣ **№ 219**, помѣщенной въ № 620 «Вѣстника», вмѣсто словъ «любое неотрицательное число» слѣдуетъ читать «любое положительное число».

Примѣчаніе. Можно сохранить и прежній текстъ задачи, если только обѣ части предложеннаго для доказательства неравенства умножить на $a^{\frac{n-1}{2}}$.

2) Въ задачѣ **№ 234**, помѣщенной въ № 623—624, въ концѣ условія слѣдуетъ добавить: «гдѣ m — длина вышеупомянутой медіаны».

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 224 (6 сер.). *Въ треугольникъ данной площади* q *вписанъ квадратъ такъ, что одна изъ сторонъ его лежитъ на одной изъ сторонъ треугольника, а концы противоположной стороны лежатъ на двухъ другихъ сторонахъ треугольника. Въ какомъ случаѣ площадь вписаннаго въ треугольникъ квадрата достигаетъ maximum'а?*

Пусть въ треугольникъ ABC вписанъ квадратъ $MNPQ$, вершины котораго M и N лежатъ на сторонахъ AB и AC, а вершины P и Q на сторонѣ BC. Проводимъ высоту AD треугольника ABC и полагаемъ $BC = x$, $AD = y$. По условію $\frac{xy}{2} = q$, или (1) $xy = 2q$. Положивъ $MN = u$ и записавъ, что въ подобныхъ треугольникахъ AMN и ABC сходственныя стороны MN и BC пропорціональны проведеннымъ къ нимъ высотамъ, имѣемъ

$$\frac{u}{x} = \frac{y-u}{y}, \quad \text{откуда} \quad u = \frac{xy}{x+y}, \quad [\text{см. (1)}] \quad (2) \quad u = \frac{2q}{x+y}.$$

Изъ равенста (1) слѣдуетъ, что

$$(3) \quad y = \frac{2q}{x}, \quad \text{откуда} \quad x + y = x + \frac{2q}{x}, \quad \text{или} \quad x + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2q},$$

а потому сумма $x + y$ достигаетъ minimum'а, равнаго $2\sqrt{2q}$, при условіи $\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{x}} = 0$, т. е. при $x = \sqrt{2q}$; при этомъ значеніи x [см. (3)] и $y = \sqrt{2q}$.

Поэтому при $x=y=\sqrt{2q}$ [см. (2)] сторона квадрата достигаетъ maximum'a, равнаго $\frac{2q}{2\sqrt{2q}}$, или $\sqrt{\frac{q}{2}}$, а потому и площадь его достигаетъ наибольшаго значенія, равнаго $\frac{q}{2}$. Итакъ площадь вписаннаго въ треугольникъ постоянной площади q квадрата достигаетъ наибольшаго значенія, равнаго $\frac{q}{2}$, если сторона, на которой лежитъ одно изъ основаній треугльника и высота его равны $\sqrt{2q}$. Существуетъ безчисленное множество такихъ треугольниковъ; сли принять за общее ихъ основаніе отрѣзокъ, равный $\sqrt{2q}$, то вершины искомыхъ треугольниковъ лежатъ на прямой, параллельной этому отрѣзку и отстоящей отъ него на разстояніи, равномъ также $\sqrt{2q}$.

N. N. (Тифлисъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 227 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе*

$$yz(7x-10)+7(x+z)-10=0.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ

$$7(xyz+x+z)=10(yz+1),$$

получаемъ отсюда, что

$$\frac{xyz+x+y}{yz+1}=\frac{10}{7}$$

или, какъ это легко провѣрить,

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}.$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства, если первоначальное уравненіе имѣетъ цѣлыя положительныя рѣшенія, должна дать разложеніе дроби $^{10}/_{7}$ въ непрерывную дробь съ тремя цѣлыми частными. Но

$$\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}},$$

откуда, въ силу извѣстнаго предложенія объ однозначности разложенія обыкновенной дроби въ непрерывную (конечно, съ надлежащей оговоркой о послѣднемъ частномъ, которое можетъ равняться единицѣ), вытекаетъ, что данное уравненіе имѣетъ лишь одно цѣлое положительное рѣшеніе, а именно $x=1$, $y=2$, $z=3$.

В. Ревзинъ (Сумы); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ).

№ 229 (6 сер.). *Построить при помощи алгебраическихъ операцій функцію* ...*енную для всѣхъ цѣлыхъ значеній* x *и принимающую при* x *чет*-... *авное данному числу* **a**, *а при* **x** *нечетномъ значеніе, равное дан*-

...n

— принимаетъ при n цѣломъ и четномъ значеніе

...омъ и нечетномъ — значеніе, равное нулю. На оборотъ, выраженіе $\dfrac{1-(-1)^n}{2}$ при n цѣломъ и четномъ равно нулю, а при n цѣломъ и нечетномъ — единицѣ. Поэтому функція $f(x)$, опредѣляемая равенствомъ

$$f(x)=\frac{[1+(-1)^n]\,a}{2}+\frac{[1+(-1)^n]\,b}{2},$$

или же

$$f(x)=\frac{a+b}{2}+\frac{(-1)^n(a-b)}{2}$$

принимаетъ при n четномъ значеніе, равное a, а при n нечетномъ — значеніе, равное b.

В. Ревзинъ (Сумы); *Н. С.* (Одесса).

№ 232 (6 сер.). *Пусть* n — *любое цѣлое положительное число. Доказать, что всякое число* a, *взаимно простое съ* 10, *будучи возвышено въ степень съ показателемъ* 100n + 1, *даетъ результатъ, оканчивающійся тѣми же тремя послѣдними цифрами, какъ и число* a.

Разсмотримъ разность $a^{100}-1$. Представляя ее въ видѣ

$$(a^{50}+1)(a^{50}-1)=(a^{50}+1)(a^{25}+1)(a^{25}-1)$$

и замѣчая, что a, будучи по условію взаимно простымъ съ 10, есть число нечетное, убѣждаемся, что каждый изъ двучленовъ $a^{50}+1$, $a^{25}+1$, $a^{25}-1$ дѣлится на 2. Поэтому разность $a^{100}-1$ дѣлится на 8. Съ другой стороны, замѣчая, что $\varphi(125)=125\,(1-{}^1\!/_5)=100$ (гдѣ φ — символъ числа всѣхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго числа и взаимно простыхъ съ нимъ) находимъ, что $a^{100}-1=a^{\varphi(125)}-1$, гдѣ a, какъ число, взаимно простое съ 10, есть число, взаимно простое и съ 125. Поэтому, согласно съ теоремой Эйлера (или, какъ ее иначе называютъ, — съ обобщенной теоремой Ферма), разность $a^{100}-1$ дѣлится на 125. Будучи кратна взаимно простыхъ чиселъ 8 и 125, разность $a^{100}-1$ кратна, при a взаимно простомъ съ 10, и ихъ произведенія, т. е. 1000. Разсмотримъ теперь, попрежнему при a взаимно простомъ съ 1000, разность $a^{100n+1}-a$. Такъ какъ

$$a^{100n+1}-a=a\,(a^{100n}-1)=a[(a^{100})^n-1]$$

и такъ какъ разность $(a^{100})^n-1$ дѣлится на $a^{100}-1$, а разность $a^{100}-1$ кратна 1000, то и разность $a^{100n+1}-a$ кратна 1000, откуда слѣдуетъ, что числа a^{100n+1} и a оканчиваются одинаковыми тремя послѣдними числами. Конечно, для того, чтобы примѣнить это предложеніе къ однозначному или двузначному числу a, надо его дополнить справа двумя или однимъ нулемъ; напримѣръ, если $a=7$, то число 7^{100n+1} оканчивается цифрами 007; если $a=49$, то 49^{100n+1} оканчивается цифрами 049.

Замѣчаніе. Дѣлимость разности $a^{100}-1$ можно вывести также изъ дѣлимости ея на a^2-1 и изъ нечетности a, такъ какъ извѣстно, что квадратъ нечетнаго числа есть число вида $8k+1$, гдѣ k — цѣлое число.

В. Ревзинъ (Сумы); *Н. С.* (Одесса); *Н. Гольдбуртъ* (Вильна) *Н. К-н*... (Петроградъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Изд...

Дозволено военной цензу...

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Б...

Обложка
ищется

Обложка
пщется