Обложка
ищется

Обложка
пщется

XXII Сем. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

№ 262.

Вліяніе магнитизма на свѣтъ.

А. Корню. *)

Мм. Гг. Предметомъ моей бесѣды будетъ одно электро-оптическое явленіе, на первый взглядъ могущее интересовать только физиковъ, но никакъ не астрономовъ.

Вы, наоборотъ, придете къ тому заключенію, что наступитъ день, быть можетъ и не скоро, но не настолько, какъ это можетъ показаться—день, когда явленіе сослужитъ службу астрономіи, обогативши ее такими свѣдѣніями, относительно звѣздъ, какихъ въ настоящее время совершенно не имѣется.

Это явленіе состоитъ въ прямомъ дѣйствіи магнитизма на источники свѣта, въ измѣненіи періода колебаній и самого вида ихъ подъ вліяніемъ сильнаго магнита или сильнаго электрическаго тока. Явленіе это открыто *Zeeman*'омъ въ Амстердамѣ, толчокъ же къ открытію данъ электрохимической теоріей проф. *Lorentz*'а, соотечественника *Zeeman*'а.

Оптическое явленіе, которымъ выражается это дѣйствіе, чуть замѣтно, такъ что приходится прибѣгать ко всѣмъ рессурсамъ электромагнитизма для полученія сильнаго магнитнаго поля и ко всѣмъ оптическимъ средствамъ для обнаруженія этого чуть замѣтнаго дѣйствія; но дѣйствіе это существуетъ и, безъ сомнѣнія, физики найдутъ средства усилить его и сдѣлать доступнымъ наблюденію при такихъ условіяхъ, при какихъ въ настоящее время оно ускользаетъ отъ нашихъ инструментовъ.

*) Рѣчь, произнесенная Корню въ засѣданіи Французскаго Астрономическаго Общества 3 ноября 1897 г.

Никогда не слѣдуетъ отчаяваться въ томъ, что астрономія воспользуется наиболѣе неуловимыми оптическими явленіями. Наиболѣе поразительнымъ доказательствомъ тому является спектроскопія. Кто-бы могъ думать въ то время, когда Ньютонъ разложилъ солнечный лучъ на цвѣтные, что это столь грубое явленіе современемъ можно будетъ воспроизвести въ значительно болѣе отчетливомъ и большемъ видѣ? Солнечный спектръ, полученный Ньютономъ, былъ длиною въ нѣсколько миллиметровъ; цвѣта налегали другъ на друга; съ тѣхъ поръ, благодаря трудамъ Вульстена, Фраунгофера, Брьюстера, Физо, Кирхгофа, Лигстрема, Роланда лучи тщательно раздѣлены и рисунокъ солнечнаго спектра со всѣми темными линіями, служащими какъ-бы пограничными столбами, занимаетъ въ длину нѣсколько десятковъ метровъ, представляя всѣ имѣющіяся въ немъ детали. Благодаря такому изученію солнечнаго луча и лучей искусственныхъ источниковъ свѣта былъ открытъ спектральный анализъ. Благодаря анализу свѣта звѣздъ, мы въ настоящее время имѣемъ точныя свѣдѣнія относительно ихъ химическаго состава, относительно природы раскаленныхъ свѣтящихся элементовъ. Благодаря спектральному анализу мы убѣждаемся въ тождествѣ химическихъ элементовъ, существующихъ на звѣздахъ, съ элементами земными, это является изумительнымъ доказательствомъ единства состава вселенной. Благодаря спектральному анализу, по блестящей идеѣ Физо, мы можемъ измѣрять радіальную скорость звѣздъ, какъ-бы велико ни было раздѣляющее насъ разстояніе.

Все это слѣдствія опыта Ньютона.

Такимъ образомъ всѣ эти драгоцѣнныя и изумительно точныя свѣдѣнія заключаются въ лучахъ свѣта, посылаемаго звѣздами!

Развѣ намъ больше нечего узнавать? Развѣ мы выпытали всѣ тайны, заключающіяся въ каждомъ лучѣ? Развѣ не интересно, каково электрическое или магнитное состояніе свѣтилъ, каковы грандіозныя явленія, на нихъ происходящія?

Вотъ рядъ вопросовъ, разрѣшеніе коихъ представляетъ, по нашему мнѣнію, громадный интересъ для познанія физическаго состоянія звѣздъ. Явленія открытыя *Zeeman*'омъ могли-бы современемъ дать намъ возможность въ самомъ лучѣ свѣта, посылаемаго звѣздами, найти отвѣтъ на эти общіе вопросы; мало того — могли-бы намъ дать точныя данныя для опредѣленія по величинѣ и направленію электромагнитнаго поля, существующаго, вѣроятно, на каждой звѣздѣ, какъ оно существуетъ на землѣ.

Вотъ явленія, о которыхъ идетъ рѣчь.

Помѣстимъ между полюсами сильнаго *) электромагнита источникъ монохроматическаго свѣта, т. е. такого, который даетъ только лучи одного цвѣта напр, красное пламя литія, желтое — натрія, зеленое — таллія. Пока электромагнитъ не дѣйствуетъ, свѣтъ, изслѣдуемый сильнымъ спектроскопомъ, даетъ только одну свѣтлую линію; но лишь только замкнется сильный токъ, проходящій по обмоткѣ электромагнита, свѣтлая линія расширяется, двоится или даже троится, смотря по тому, откуда мы смотримъ.

*) 32000 един. C. G. S. Révue Scient. № 4. 1898 г.

Если смотрѣть вдоль оси электромагнита (для чего одинъ изъ полюсовъ просверливается насквозь), то свѣтлая линія двоится; если смотрѣть перпендикулярно къ оси, то эта линія троится. На первый взглядъ можно было бы подумать, что это явленіе происходитъ отъ возмущающаго дѣйствія магнитизма на теплые газы пламени; но это раздѣленіе одной линіи на двѣ, на три не есть только, такъ сказать, геометрическое явленіе — въ немъ есть болѣе интимная особенность. Свѣтъ каждой изъ этихъ раздѣленныхъ магнитизмомъ линій измѣнилъ свою природу: первоначально свѣтъ пламени былъ естественный, *не* поляризованный; теперь каждой изъ раздѣленныхъ линій соотвѣтствуетъ лучъ различнымъ образомъ поляризованный; въ направленіи оси, гдѣ линія двоится, одна изъ составляющихъ соотвѣтствуетъ лучу съ круговой поляризацией вправо, другая — съ круговой поляризацией влѣво. Такимъ образомъ свѣтовая волна, въ которой поперечныя колебанія были всевозможныхъ направленій, раздѣлилась на двѣ съ круговыми колебаніями вправо и влѣво. Болѣе того: раздвоеніе линіи показываетъ, что скорости распространенія этихъ двухъ волнъ различны, такъ какъ онѣ различно преломляются. Такъ какъ преломляемость измѣняется вмѣстѣ съ періодомъ колебаній, то мы заключаемъ, что по оси магнитизмъ раздвоилъ періодъ колебаній и раздѣлилъ ихъ на два круговыхъ.

По направленію, перпендикулярному оси магнита, магнитизмъ дѣйствуетъ еще сложнѣе въ одномъ отношеніи, такъ какъ первичную волну дѣлитъ на три, но проще въ другомъ отношеніи, такъ какъ всѣ три луча поляризованы прямолинейно: крайніе поляризованы параллельно оси, средній — перпендикуляно ей.

Я не буду болѣе останавливаться на механическомъ или кинематическомъ толкованіи этихъ явленій, ни на связи ихъ съ законами Френеля и Ампера. Я только укажу, какъ астрономія могла бы воспользоваться ими.

Возьмемъ для примѣра солнце: извѣстно, что на немъ происходятъ сильныя химическія реакціи, такъ какъ блестящія спектральныя линіи его атмосферы доказываютъ, что солнце усѣяно источниками свѣта. Но если на его поверхности имѣютъ мѣсто также электромагнитныя явленія, то вышеуказанные источники свѣта находятся въ условіяхъ опыта Zeeman'а: монохроматическіе лучи должны измѣниться, расшириться, раздвоиться, утроиться и поляризоваться вышеописаннымъ способомъ. Остается узнать, достаточна-ли напряженность магнитныхъ полей для того, чтобы эти столь неуловимыя явленія сдѣлать доступными наблюденію. Но, я повторяю, что это дѣло физиковъ найти лучшіе способы наблюденія или оптическія приспособленія для усиленія того, что въ настоящее время находится на предѣлѣ видимости. Я, по крайней мѣрѣ, надѣюсь, что этотъ методъ увѣнчается успѣхомъ: спектроскопъ обнаруживаетъ въ солнечныхъ протуберанцахъ такія особенности, которыя мнѣ кажутся плохо объясненными въ настоящее время. Эти громадныя и быстрыя преобразованія протуберанцевъ приписываютъ изверженіямъ, въ которыя я всегда плохо вѣрилъ. Не дадутъ-ли болѣе простое объясненіе этихъ явленій опыты *Zeeman*'а?

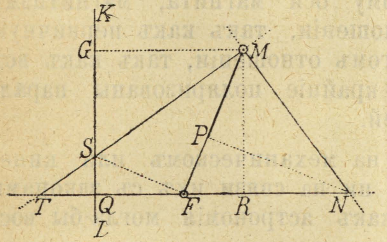
То же можно сказать и о тѣхъ раздвоеніяхъ въ спектрахъ звѣздъ, которыя въ настоящее время приписываютъ единственной извѣстной причинѣ ихъ т. е. двойной скорости и слѣд. существованію двухъ свѣтилъ. Полярископу предстоитъ рѣшить этотъ вопросъ независимо отъ гипотезъ; если свѣтъ раздвоенныхъ линій поляризованъ кругообразно или прямолинейно, то двоеніе слѣдуетъ приписать магнитному состоянію звѣзды, въ противномъ случаѣ — дѣйствительному существованію двухъ свѣтилъ.

Итакъ, вы видите, астрономія всегда должна пользоваться открытіями физики и особенно оптики, такъ какъ свѣтъ—вѣрный передатчикъ тайнъ строенія звѣздъ и мы далеко не выпытали всѣхъ ихъ.

Перевелъ *К. С.*

Общее свойство нормалей кривыхъ второго порядка.

Пусть точка M (фиг. 1) принадлежитъ кривой второго порядка, имѣющей фокусомъ точку F и директрисой прямую KL. Кривую эту я буду называть *данною*, хотя она и не обозначена на чертежѣ.



Фиг. 1.

Пусть $MG \perp KL$; въ такомъ случаѣ, если числовой эксцентрицитетъ данной кривой обозначимъ черезъ e, то

$$\frac{MF}{MG} = e. \qquad (1)$$

Пусть $FQ \perp KL$ и $MR \perp FQ$. Если положимъ, что

$$FQ = q,\ FM = \varrho,\ \angle MFR = \varphi, \qquad (2)$$

то

$$MG = RQ = RF + FQ = \varrho\cos\varphi + q, \qquad (3)$$

и равенство (1) приметъ видъ:

$$\frac{\varrho}{\varrho\cos\varphi + q} = e, \qquad (4)$$

откуда

$$\varrho = \frac{eq}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (5)$$

Полагая здѣсь

$$eq = p, \qquad (6)$$

получаемъ *полярное* уравненіе кривыхъ второго порядка:

$$\varrho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (7)$$

Коэффиціентъ p называется *параметромъ* кривой второго порядка. Легко найти его геометрическое значеніе. Дѣйствительно, полагая $\varphi = \pm 90^0$ въ уравненіи (7), получаемъ: $\varrho = p$. Слѣдовательно параметръ представляетъ величину каждаго изъ двухъ радіусовъ векторовъ кривой, проведенныхъ изъ фокуса параллельно директрисѣ; иначе говоря, параметръ есть величина половины хорды, проведенной чрезъ фокусъ параллельно директрисѣ.

Пусть $FS \perp FM$ и $MN \perp MS$, въ такомъ случаѣ прямая MS, какъ извѣстно [1]), представитъ *касательную* къ кривой въ точкѣ M, а прямая MN называется *нормалью* кривой въ точкѣ M. Отрѣзокъ MT называется *длиною касательной*, отрѣзокъ MN — *длиною нормали*, отрѣзокъ RT — *подкасательною*, и отрѣзокъ RN — *поднормалью* [2]).

Пусть $NP \perp MF$. Положимъ, что

$$MP = u \tag{8}$$

и докажемъ, что $u = p$.

Такъ какъ $\triangle MPN \infty \triangle SFM$, то

$$\frac{MP}{PN} = \frac{SF}{FM}. \tag{9}$$

Но

$$\left.\begin{aligned} &MP = u, \\ &PN = PF.\operatorname{tg}\angle PFN = (\varrho - u)\operatorname{tg}\varphi, \\ &SF = \frac{QF}{\sin\angle QSF} = \frac{q}{\sin\varphi}, \\ &FM = \varrho; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

поэтому

$$\frac{u}{(\varrho - u)\operatorname{tg}\varphi} = \frac{q}{\varrho\sin\varphi}, \tag{11}$$

откуда

$$u = \frac{\varrho q}{\varrho\cos\varphi + q}, \tag{12}$$

или, вслѣдствіе уравненія (4),

$$u = eq, \tag{13}$$

и наконецъ, вслѣдствіе уравненія (6),

$$u = p, \tag{14}$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) См. мою статью: „Общее свойство касательныхъ къ кривымъ второго порядка“. В. О. Ф. и Э. М. № 257, стран.: 116—117.

[2]) К. А. Андреевъ. Основной курсъ аналитической геометріи. Ч. I. Харьковъ. 1887. стран.: 182—183, 212, 229—230.

М. А. Тихомандрицкій. Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія. Харьковъ. 1891. Стран.: 134, 139, 142—143.

Итакъ, *прямоугольная проекція длины нормали въ какой нибудь точкѣ кривой второго порядка на радіусъ векторъ, проведенный въ эту точку изъ фокуса кривой, равна параметру кривой.*

Эта теорема не нова, но общаго доказательства ея мнѣ не приходилось нигдѣ встрѣчать. Г-нъ Delens [3]) высказалъ мысль, что эта теорема является какъ бы непосредственнымъ геометрическимъ переводомъ фокуснаго полярнаго уравненія („comme la traduction géométrique immédiate de l'équation focale polaire“), но доказалъ онъ теорему только для эллипса, пользуясь тѣмъ его свойствомъ, что нормаль въ какой нибудь точкѣ эллипса служитъ биссектрисой угла, образованнаго радіусами векторами, проведенными въ эту точку изъ обоихъ фокусовъ.

С. Гирманъ (Варшава).

О сложеніи силъ въ гиперболическомъ пространствѣ.

Для вывода основныхъ соотношеній динамики я допускаю слѣдующія истины:

1) Силы, приложенныя къ твердому тѣлу, можно переносить по направленію ихъ дѣйствія.

2) Равнодѣйствующая двухъ равнонаправленныхъ силъ равна суммѣ ихъ и имѣетъ одинаковое съ ними направленіе.

3) Равнодѣйствующая двухъ противоположно направленныхъ силъ равна разности ихъ и имѣетъ одинаковое съ большей силой направленіе; если силы равны, то онѣ даютъ равновѣсіе; и наоборотъ: двѣ приложенныя въ одной точкѣ силы только тогда даютъ равновѣсіе, если онѣ равны и противоположно направлены по одной прямой.

Теорема I. *Если всѣ составляющія увеличиваются или уменьшаются одновременно въ одномъ и томъ же отношеніи, то въ томъ же направленіи и отношеніи измѣняется равнодѣйствующая*

Допустимъ, что всѣ составляющія увеличились въ n разъ (гдѣ n—число цѣлое). Мы можемъ тогда каждую изъ составляющихъ разбить на n равныхъ силъ и производить n разъ отдѣльно сложеніе. Равнодѣйствующая будетъ тогда равна n разъ взятой первоначальной равнодѣйствующей. Если n число дробное и равно $\frac{a}{b}$, то, принявъ за единицу общую мѣру a и b, мы найдемъ, что искомая равнодѣйствующая равна a разъ взятой равнодѣйствующей силъ, равныхъ 1; равнодѣйствующая же данныхъ составляющихъ равна b разъ взятой равнодѣйствующей силъ, равныхъ 1; слѣдовательно равнодѣйствующая уве-

[3]) Journal de Mathématiques spéciales. Publié sous la direction de M. de Longchamps. № 4 — Avril 1897. Paris. Page 89. Correspondance.

личилась въ $\frac{a}{b}$ разъ. Въ силу непрерывности выводъ имѣетъ мѣсто и для n ирраціональнаго.

Мы допустили, что составляющія увеличились. Допустивъ, что онѣ уменьшились, мы точно такъ же докажемъ, что и равнодѣйствующая уменьшилась во столько же разъ.

Теорема II. *Равнодѣйствующая двухъ равныхъ, дѣйствующихъ подъ угломъ въ данной точкѣ силъ направлена по биссектрисѣ этого угла.*

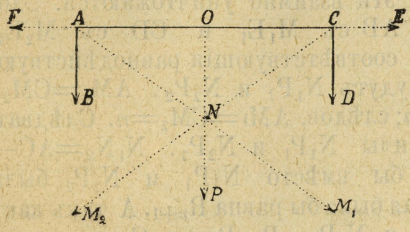
Если мы повернемъ плоскость вмѣстѣ съ силами другой стороной и произведемъ наложеніе такимъ образомъ, чтобъ первая сила совпала со второй и наоборотъ, то равнодѣйствующая должна очевидно, сохранить свое положеніе. Такъ какъ при такомъ поворотѣ сохраняетъ свое положеніе только биссектриса, то она и опредѣляетъ положеніе равнодѣйствующей.

Теорема III. *Если двѣ силы* AB *и* AC *дѣйствуютъ въ данной точкѣ* A *подъ какимъ нибудь угломъ, то, при безпрерывномъ возрастаніи одной изъ этихъ силъ, равнодѣйствующая стремится къ совпаденію съ ней, предполагая, что другая остается конечной.*

Бо́льшую силу AC разложимъ на двѣ силы: AD=AB и DC. Сложимъ AB и AD. Получимъ равнодѣйствующую этихъ силъ AE по биссектрисѣ $\angle$BAC. Съ силами AE и DC поступимъ такимъ же способомъ, что возможно, ибо предполагается, что AC становится больше всякой данной величины. Направленіе равнодѣйствующей получается отъ безпредѣльнаго биссецированія угловъ BAC, EAC и т. д.—слѣдовательно стремится совпасть съ AC.

Теорема IV. *Равнодѣйствующая двухъ равныхъ, одинаково направленныхъ, перпендикулярныхъ къ одной прямой (т. е. расходящихся) силъ направлена по прямой, перпендикулярной къ данной прямой въ серединѣ ея и одинаково направлена съ данными силами.*

Приложимъ (см. чер. 1) въ точкахъ A и C силы AE и CF, равныя между собою и противоположныя; такъ какъ онѣ уравновѣшиваются, то условія задачи не нарушаются. Мы можемъ выбрать эти силы по теоремѣ III столь большими, что AM_1, по которой направлена равнодѣйствующая силъ AB и AE, пересѣчется съ прямой CM_2, по которой направлена равнодѣйствующая силъ CD и CF въ какой нибудь точкѣ N.

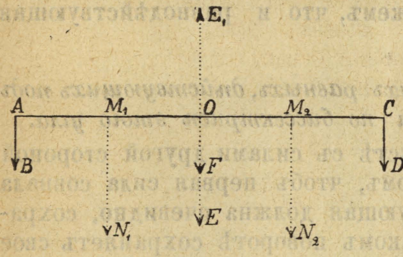


Фиг. 1.

Въ точкѣ N, слѣдовательно, приложены двѣ равныя силы NM_1 и NM_2; равнодѣйствующая ихъ пойдетъ по ONP, биссектрисѣ угла ANC. Въ $\triangle$ ANC $\angle$ NAC $=$ $\angle$ NCA; слѣдовательно, ON. равнодѣлящая угла ANC будетъ перпендикулярна къ AC въ ея серединѣ.

Теперь перейдемъ къ вычисленію равнодѣйствующей двухъ равныхъ расходящихся силъ. Условимся обозначать черезъ R_a равнодѣйствующую двухъ равныхъ расходящихся силъ, равныхъ единицѣ, разстояніе между которыми равно a.

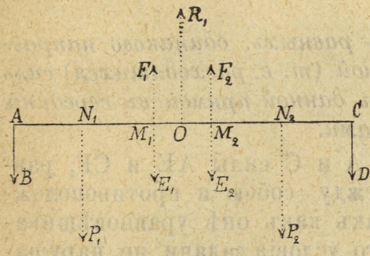
Возьмемъ (см. чер. 2) двѣ расходящіяся равныя силы AB и CD, разстояніе между которыми $=AC=2n$. Въ точкѣ O, серединѣ AC, приложимъ двѣ противоположныя, равныя и перпендикулярныя къ AC силы OE и OE_1, взаимно уравновѣшивающіяся. Выберемъ ихъ такъ, чтобъ $OE_1=OE=2AB$, или, взявъ $AB=1$, равнялось бы 2. Разложимъ OE на силы OF и FE равныя между собою, слѣдовательно, равныя 1 каждая. Сложимъ AB съ OF и CD съ FE. Такъ какъ $AO=OC=n$, то



Фиг. 2.

$M_1N_1=M_2N_2=R_n$. Сложимъ теперь M_1N_1 и M_2N_2 и назовемъ ихъ равнодѣйствующую R_m. Разстояніе между этими силами $M_1M_2=\frac{2n}{2}=n$. Слѣдовательно R_m (по теор. I) должно такъ относиться къ R_n, какъ M_1N_1, составляющая R_m, относится къ единицѣ, составляющей R_n. Т. е. $\frac{R_m}{R_n}=\frac{R_n}{1}$; $R_m=R_n^2$. Если мы отсюда вычтемъ силу $OE_1=2$, то получимъ равнодѣйствующую силъ AB и CD. Итакъ $R_{2n}=R_n^2-2$ (I).

Возьмемъ теперь (см. чер. 3) двѣ расходящіяся силы $AB=CD=1$ на разстояніи $AC=2n+1$ и найдемъ ихъ равнодѣйствующую, т. е. R_{2n+1}. Въ точкахъ M_1 и M_2 направо и налѣво отъ середины O разстоянія AC на разстояніи $M_1O=M_2O=\frac{1}{2}$ приложимъ силы M_1E_1, M_1F_1 M_2E_2, M_2F_2, равныя 1 каждая и перпендикулярныя къ AC. Силы эти взаимно уничтожаются. Сложимъ AB съ M_1E_1 и CD съ M_2E_2; пусть соотвѣтствующія равнодѣйствующія будутъ N_1P_1 и N_2P_2. $AM_1=CM_2$;



Фиг. 3.

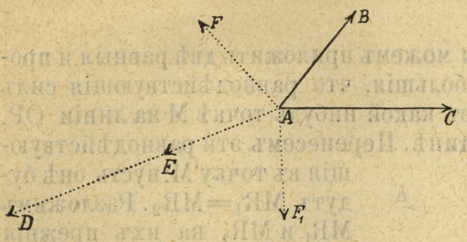
$AM_1+CM_2=AC-M_1M_2=2n+1-1=2n$; слѣдов. $AM_1=CM_2=n$. Слѣдват. $N_1P_1=N_2P_2=R_n$. Сложимъ теперь силы N_1P_1 и N_2P_2. $N_1N_2=AC-(AN_1+CN_2)=2n+1-n=n+1$. Если бы вмѣсто N_1P_1 и N_2P_2 были силы равныя 1, то ихъ равнодѣйствующая была бы равна R_{n+1}. А такъ какъ $N_1P_1=R_n$, то равнодѣйств. силъ N_1P_1 и $N_2P_2=R_n.\,R_{n+1}$. Сложимъ теперь силы M_1F_1 и M_2F_2. Такъ какъ $M_1M_2=1$, то ихъ равнодѣйств. равна R_1. Если мы изъ $R_n.\,R_{n+1}$ вычтемъ R_1, то получимъ равнодѣйств. силъ AB и CD. Итакъ

$$R_{2n+1}=R_n\,.\,R_{n+1}-R_1 \quad \text{(II)}.$$

Изъ формулъ (I) и (II), давая n значеніе 0, 1, 2 и т. д., получимъ значенія всѣхъ равнодѣйств. для n цѣлаго въ зависимости отъ R_1.

Докажемъ теперь, что равнодѣйствующая двухъ равныхъ расходящихся силъ больше суммы ихъ. Но для этого сперва докажемъ слѣдующ. леммы.

Лемма I (см. чер. 4). *Равнодѣйствующая двухъ силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку, меньше суммы составляющихъ.*



Фиг. 4.

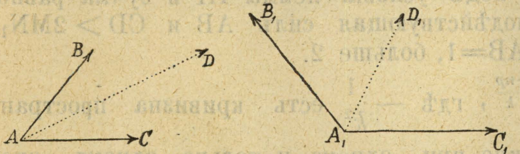
Докажемъ, что равнодѣйствующая не можетъ быть ни равна ни больше суммы слагающихъ. Допустимъ, что она равна этой суммѣ. Приложимъ въ точкѣ A силу AD, равную и противоположную равнодѣйствующей силъ AB и AC. AB, AC и AD даютъ равновѣсіе. Разложимъ AD на AE=AB и ED=AC. Сложимъ AB и AE, AC и ED. Получимъ двѣ силы AF_1 и AF, которыя должны уничтожиться взаимно; $\angle FAF_1$ долженъ, слѣдоват., равняться $2d$, т. е. $\angle FAD + \angle F_1AD = 2d$; но такъ какъ AF и AF_1 биссецируютъ свои углы, то $\angle FAD + \angle F_1AD = \angle FAB + \angle FAC$. Чтобы оба эти равенства могли существовать одновременно, необходимо, чтобъ $\angle BAC = O$, чего не дано.

Такимъ же путемъ докажемъ, что равнодѣйствующая не болѣе суммы слагающихъ, слѣдовательно, она меньше этой суммы.

Лемма II. *Равнодѣйствующая болѣе разности составляющихъ.*

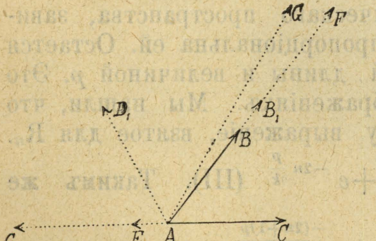
Если R будетъ равнодѣйствующей силъ a и b, то, по аксіомѣ 3, b будетъ равнодѣйствующей силъ R и a, a — равнодѣйствующая силъ R и b. По предыдущей леммѣ мы имѣемъ: $a < R + b$; отсюда: $a - b < R$ или $R > a - b$.

Лемма III. *Даны* (см. чер. 5) *двѣ системы силъ* AB *съ* AC *и* A_1B_1 *съ* A_1C_1; $AB=AC$; $A_1B_1=A_1C_1$; $A_1B_1 > AB$; $\angle BAC + \angle B_1A_1C_1 = 2d$. *Доказать, что* $AD + A_1D_1$, *гдѣ* AD *равнодѣйствующая силъ* AB *и* AC, *а* A_1D_1 — *равнодѣйствующая силъ* A_1B_1 *и* A_1C_1, — *больше* $AB + AC$ *или* 2AB.



Фиг. 5.

Къ системѣ BAE (см. чер. 6) приложимъ систему $B_1A_1C_1$ такъ, чтобъ A_1 совпало съ A, A_1B_1 пошло по AB_1, A_1C_1 по AC_1. Сложимъ силы AC и AC_1; такъ какъ онѣ противоположны и $AC_1 > AC$, то ихъ равнодѣйствующая будетъ $AE=AC_1-AC$; силы AB и AB_1, какъ одинаково направленныя, дадутъ $AF=AB+AB_1$. AG, равнодѣйствующая силъ AE и AF, по леммѣ II больше ихъ разности, или $AG > AF-AE$, или $AG > AB + AB_1 - AC_1 + AC$; такъ какъ $AB_1 = AC_1$, а $AC=AB$, то $AG > 2AB$. Тѣ же силы мы можемъ сложить иначе: AC съ LB и AC_1 съ AB_1; получимъ равнодѣйствующія AD и AD_1; равнодѣйствующая силъ AD и AD^1 бу-

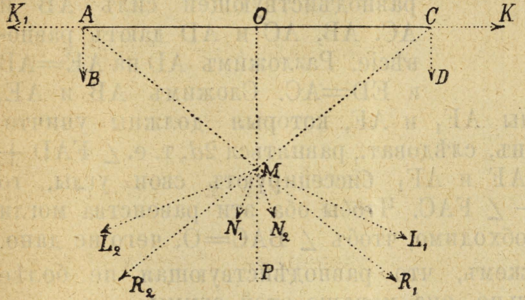


Фиг. 6.

детъ AG. По леммѣ I имѣемъ: $AD + AD_1 > AG$; или, такъ какъ $AD = A_1D_1$, $AD + A_1D_1 > 2AB$.

Теорема V. *Равнодѣйствующая двухъ равныхъ расходящихся силъ больше суммы ихъ.*

Въ точкахъ A и C (см. чер. 7) мы можемъ приложить двѣ равныя и противоположныя силы AK и CK_1 столь большія, что равнодѣйствующія силъ AB съ CK и CD съ CK_1 пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ M на линіи OP, перпендикулярной къ AE въ ея серединѣ. Перенесемъ эти равнодѣйствующія въ точку M; пусть онѣ будутъ $MR_1 = MR_2$. Разложимъ MR_1 и MR_2 на ихъ прежнія составляющія: $MN_1 = AB$, $ML_1 = AK$, $MN_2 = CD$, $ML_2 = CK_1$. Въ $\triangle$ AOM сумма угловъ $< 2d$; слѣдов. $\angle OAM + \angle OMA < d$ или же меньше $\angle OAM + \angle BAM$. Слѣдоват. $\angle OMA < \angle BAM$ или же $\angle R_1MP < \angle BAM$. Слѣдоват. при разложеніи MR_1 на прежнія соcтавляющія,



Фиг. 7.

MN_1, составляющая AB, пойдетъ влѣво отъ MP; точно такъ же MN_2 пойдетъ вправо отъ MP. Силы MN_1, MN_2, ML_1 и ML_2 мы можемъ сложить такъ: MN_1 съ MN_2 и ML_1 съ ML_2; такъ $ML_1 \perp MN_1$, а $ML_2 \perp MN_2$, то $\angle N_1MN_2 + \angle L_1ML_2 = 2d$; $ML_1 = ML_2$; $MN_1 = MN_2$; кромѣ того $ML_1 = AK$ можно выбрать больше AB или больше MN_1. Слѣдовательно система силъ при точкѣ M подходитъ подъ условія леммы III и сумма равнодѣйствующихъ, или же равнодѣйствующая силъ AB и $CD > 2MN_1$, т. е. больше 2AB, или, если AB=1, больше 2.

Положимъ $R_n = e^{\frac{np}{k}} + e^{\frac{-np}{k}}$, гдѣ $-\frac{1}{k^2}$ есть кривизна пространства. Такое равенство возможно при одномъ и только одномъ значеніи $p > 0$ ибо $e^x + e^{-x}$ постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ x при $x > 0$ отъ 2 до ∞. Отношеніе $\frac{x}{k}$ не зависитъ отъ выбора единицы мѣры, ибо самая величина k, по свойству гиперболическаго пространства, зависитъ отъ этой единицы, а именно прямо пропорціональна ей. Остается изслѣдовать зависимость между единицей длины и величиной p. Это изслѣдованіе основывается на слѣд. соображеніяхъ. Мы нашли, что $R_{2n} = R^2_n - 2$. Подставимъ въ эту формулу выраженіе, взятое для R_n. Тогда $R_{2n} = e^{\frac{2np}{k}} + e^{-\frac{2np}{k}} + 2 - 2 = e^{2n\frac{p}{k}} + e^{-2n\frac{p}{k}}$ (III). Такимъ же путемъ докажемъ, что $R_{2n+1} = e^{\frac{(2n+1)p}{k}} + e^{\frac{-(2n+1)p}{k}}$ (IV). Зная это, мы можемъ сказать, что, если $R_1 = e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}$, то R_x (для x цѣлаго) $= e^{\frac{px}{k}} + e^{\frac{-px}{k}}$ (V). Изъ формулы (V) можно обратно вывести что если нѣкоторое $R_n = e^{\frac{np}{k}} + e^{\frac{-np}{k}}$, то $R_1 = e^{\frac{p}{k}} + e^{\frac{-p}{k}}$. Предположимъ обратное; тогда мы можемъ принять, что R_1 равно нѣкоторому $e^{\frac{r}{k}} + e^{\frac{-r}{k}}$. По формулѣ (V) R_n на основанiи этого будетъ $= e^{\frac{nr}{k}} + e^{\frac{-nr}{k}}$. Слѣдовательно у насъ будетъ равенство:

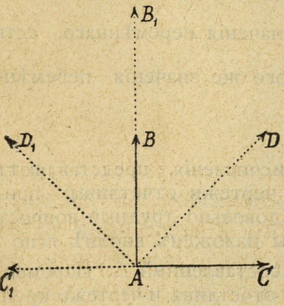
$e^{\frac{np}{k}} + e^{\frac{-np}{k}} = e^{\frac{nr}{k}} + e^{\frac{-nr}{k}}$ или же равенство вида $e^x + e^{-x} = e^y + e^{-y}$.

Это уравненiе можно представить въ видѣ: $e^x - e^y = e^{-y} - e^{-x}$ или же: $e^x - e^y = \frac{1}{e^y} - \frac{1}{e^x}$; или же: $e^x - e^y = \frac{e^x - e^y}{e^x\, e^y}$ или же: $(e^x - e^y)\, e^{x+y} = e^{x-y}$. Это уравненiе удовлетворяется рѣшенiями: $e^x = e^y$ и $e^x = e^{-y}$.

Какое бы рѣшенiе мы ни взяли, мы получимъ, что $R_1 = e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}$.

Такимъ образомъ, если $R_1 = e^{\frac{np}{k}} + e^{-\frac{np}{k}}$, то $R_n = e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}$ не только для n цѣлаго, но и для всякаго дробнаго соизмѣримаго. Отъ случая соизмѣримости можно прямо заключать къ случаю несоизмѣримости въ силу непрерывности измѣненiя равнодѣйствующей при непрерывномъ измѣненiи слагающихъ.

Лемма IV. *Равнодѣйствующая двухъ равныхъ, дѣйствующихъ подъ прямымъ угломъ, силъ равна корню квадратному изъ суммы ихъ квадратовъ.*



Фиг. 8.

Приложимъ въ точкѣ A (см. чер. 8) двѣ равныя силы $AC_1 = BB_1 = AB$ такъ, чтобы AC_1 была противоположна AC. AC и AC_1 уничтожаются; остается $AB = 2AB$. Сложимъ теперь силы иначе: AB съ AC и BB_1 съ AC_1; получимъ двѣ равныя силы, AD и AD_1, дѣйствующiя подъ прямымъ угломъ, равнод. которыхъ $= AB_1 = 2AB$. Если мы назовемъ равнодѣйствующую силъ AB и AC черезъ x, то равнодѣйствующая силъ AD и AD_1 будетъ $= \frac{x \cdot x}{AB} = \frac{x^2}{AB}$ слѣдов. $\frac{x^2}{AB} = 2AB$ или $x = AB\sqrt{2}$; полагая $AB = 1$, имѣемъ $x = \sqrt{2}$.

П. Юшкевичъ (Кишиневъ).

(*Окончанiе слѣдуетъ*).

РЕЦЕНЗІИ.

Дифференціальное и Интегральное Исчисленія съ приложеніями къ Анализу и Геометріи. Сост. А. Пароменскій С.-П. 1893 г.

Этотъ курсъ можетъ быть рекомендованъ, какъ весьма хорошее руководство для начинающихъ; при изложеніи авторъ придерживался болѣе нагляднаго, элементарнаго метода, сравнительно съ методами, обыкновенно принятыми въ курсахъ высшаго анализа.

Курсъ заключаетъ пять отдѣловъ: 1) введеніе въ Дифференціальное и Интегральное исчисленія, заключающее въ себѣ понятіе о функціяхъ, о предѣлахъ, о безконечно малыхъ и безконечно большихъ величинахъ, о сплошности функцій; 2) Дифференціальное исчисленіе; 3) Интегральное исчисленіе; 4) Приложенія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій къ Анализу; 5) Приложенія Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленій къ Геометріи. Въ курсъ не вошло интегрированіе дифференціальныхъ уравненій; въ четвертый отдѣлъ не вошло приложеніе для функцій болѣе чѣмъ объ одной перемѣнной; что касается до приложеній къ Геометріи, то они ограничиваются только плоскими кривыми и нахожденіемъ объемовъ и поверхностей тѣлъ. Статьи, заключающія приложенія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, изложены такъ, что лица, прочитавшія введеніе въ дифференціальное исчисленіе, дифференцированіе функцій объ одной перемѣнной независимой, понятіе объ интегралѣ и четыре пріема интегрированія, могутъ приступить къ чтенію главнѣйшихъ приложеній. Отличительную особенность курса, составленнаго А. Пароменскимъ, составляетъ чрезвычайная ясность изложенія; прекрасно выяснено понятіе о дифференціалѣ и интегралѣ, и сущность метода дифференціальнаго исчисленія. Курсъ снабженъ большимъ количествомъ рѣшенныхъ примѣровъ и, кромѣ того, къ каждой статьѣ приложенъ рядъ примѣровъ для упражненій, такъ что курсъ этотъ можетъ замѣнить и задачникъ. Уясненіе многихъ важныхъ понятій и доказательствъ ведется авторомъ при помощи чертежа; напр. такъ поступаетъ авторъ, выясняя главное свойство безконечно малыхъ величинъ, а именно, что отношеніе ихъ можетъ представлять собою перемѣнную конечную, безконечно малую и безконечно большую; на чертежѣ выяснено, что сумма безконечно малыхъ того-же порядка, при неопредѣленно возрастающемъ ихъ числѣ, по мѣрѣ уменьшенія каждаго слагаемаго, можетъ собою представить величину конечную. Чертежомъ прекрасно выяснено, что дифференціалъ есть самая простая изъ всѣхъ тѣхъ безконечно малыхъ, которыми подъ знакомъ предѣла можно замѣнить безконечно малое приращеніе функціи. Обращаетъ на себя вниманіе и геометрическое доказательство, что истинное значеніе дроби: $\frac{F(a)}{f(a)}$, обращающейся въ $\frac{0}{0}$ для даннаго значенія перемѣннаго, есть отношеніе производныхъ числителя и знаменателя, для того же значенія перемѣннаго, т. е. $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$.

Приложенія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія представляютъ большой интересъ, предметъ этотъ прекрасно изложенъ, чертежи отчетливы; приведено правило академика Чебышева о спрямленіи дугъ; довольно трудный вопросъ о кривизнѣ плоскихъ кривыхъ, кругѣ и радіусѣ кривизны изложенъ вполнѣ ясно.

Въ заключеніе нашей рецензіи замѣтимъ, что курсъ, составленный А. Пароменскимъ, изданъ Риккеромъ изящно, бумага хороша, шрифтъ отчетливъ и чертежи крупны и ясны; цѣна книги умѣренная, 4 руб., принимая во вниманіе, что книга эта можетъ быть и хорошимъ задачникомъ. Пожелаемъ этой книгѣ возможно большаго распространенія, какъ могущей вполнѣ способствовать хорошему усвоенію основаній дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, этихъ крайне важныхъ и плодотворныхъ отраслей математическихъ наукъ.

Г. Полоцкъ, 10 января 1898 г.

Преподаватель Полоцкаго Кадетскаго корпуса *В. А. Шидловскій.*

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

О вліяніи Х-лучей на осмотическія явленія. — (*H. Bordier.* Influence des rayons X sur le phénemène de l'osmose. C. R. CXXVI, 593). Извѣстно, что при диффузіи разнородныхъ жидкостей сквозь перепонку по обѣ стороны этой послѣдней устанавливается нѣкоторая, правда очень малая, разность потенціаловъ. Такъ какъ лучи Рёнтгена вообще вліяютъ на электрическія явленія, то можно было допустить, что они способны косвеннымъ образомъ влiять и на скорость диффузіи жидкостей сквозь перепонку. Это предположеніе оправдывается на опытѣ: x-лучи почти вдвое уменьшаютъ скорость диффузіи. Опыты были произведены слѣдующимъ образомъ: въ деревянный пропитанный парафиномъ и, слѣдовательно, проницаемый для x-лучей сосудъ наливалась вода; стеклянная воронка обвязывалась пузыремъ, наполнялась растворомъ соли или сахара и погружалась въ сосудъ съ водой. Подъ этимъ послѣднимъ помѣщалась фокусная трубка, построенная спеціально для статической машины по указаніямъ *Monell'я*, такъ что x-лучи проходили снизу вверхъ, сквозь дно сосуда и падали нормально на перепонку. Источникомъ электричества служила машина Бонетти съ двумя большими эбонитовыми цилиндрами. Кромѣ того авторъ пользовался прерывателями *Van Houten'a* и *Ten Broeck'a.* Благодаря этому получается такой-же эффектъ, какъ и отъ большой катушки Румкорфа, дающей искру въ 55 центиметровъ.

1-й опытъ.—Поверхность перепонки равна 6,6 cm, діаметръ трубки, гдѣ наблюдается поднятіе — 4 mm. Въ воронку налитъ растворъ сахара въ 30%: черезъ 30 мин. жидкость поднялась въ трубкѣ на 6 mm. Тогда въ теченіе 30 мин. вращали машину; жидкость поднялась еще на 3 mm. Машина была остановлена и въ слѣдующіе 30 мин. жидкость поднялась на 6,1 mm. Тогда снова машина была приведена въ дѣйствіе и за 30 мин. поднятіе равно 2,7 mm.

2-й опытъ.—Поверхность перепонки равна 38,46 cm. Діаметръ осмотической трубки—5 mm. Въ воронку налитъ насыщенный растворъ поваренной соли. Пока машина не дѣйствуетъ, жидкость поднимается на 27 mm въ 30 мин. Подъ вліяніемъ x-лучей высота поднятія уменьшается до 16,5 mm за то же время.

Остальные опыты дали тѣ же результаты.

Чтобы убѣдиться, что это замедленіе диффузіи обязано своимъ происхожденіемъ лучамъ Рёнтгена, а не производимому машиной электрическому полю, между трубкой Крукса и осмометромъ помѣщали алюминіевую пластинку, соединенную съ землей. Присутствіе этой пластинки не вліяло замѣтнымъ образомъ на явленіе. Слѣдуетъ поэтому допустить, что наблюдаемое замедленіе осмоса зависитъ отъ тѣхъ пертурбацій, которыя производятся лучами Рёнтгена въ электрокапиллярныхъ явленіяхъ, происходящихъ при осмосѣ въ перепонкѣ.

Въ этой способности x-лучей замедлять осмотическія явленія надо вѣроятно искать причину физіологическаго ихъ дѣйствія на живыя ткани, въ которыхъ и процессы питанія и процессы выдѣленія продуктовъ обмѣна происходятъ путемъ диффузіи. *В. Г.*

Новый способъ опредѣленія удѣльной теплоты жидкостей.— (*K.-L. Litch.* A new Method of determining the Specific Heats of Liquids. Phys. Rev. XXVII, 182.—Journ. de Phys. VII, 164). Одинъ калориметръ ставится надъ другимъ. Въ верхній наливается изслѣдуемая жидкость, охлажденная до нѣкоторой температуры T_0. Въ нижній помѣщается та же жидкость при температурѣ T лабораторіи. Въ нижнемъ калориметрѣ помѣщается кромѣ того металлическая спираль, по которой проходитъ токъ, нагрѣвающій жидкость. Охлажденную жидкость заставляютъ истекать изъ верхняго калориметра въ нижній и такимъ образомъ компенсируютъ нагрѣваніе токомъ. Тогда

$$H = pc\,(T - T_0),$$

гдѣ p есть вѣсъ вытекшей жидкости, c — ея удѣльная теплота, а H — теплота выдѣляющаяся при явленіи *Joule*'я и опредѣляемая по силѣ тока и разности потенціаловъ.

Примѣняя этотъ способъ къ опредѣленію удѣльной теплоты воды при разныхъ температурахъ, можно убѣдиться, что ея удѣльная теплота нѣсколько уменьшается между 4⁰ и 30⁰, какъ это уже было указано *Rowland*'омъ:

Температура.	18⁰,8	19⁰,7	21⁰,05	21⁰,2
Удѣльная теплота . .	0,98075	0,98064	0,98035	0,98035

В. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Изъ числа разосланныхъ въ 1896 году Главной Физической Обсерваторіей штормовыхъ предостереженій оказались удачными:

для Балтійскаго и Бѣлаго морей 56,6⁰/₀
для Чернаго и Азовскаго морей 56,5⁰/₀

отчасти удачными:

для Балтійскаго и Бѣлаго морей 25,8⁰/₀
для Чернаго и Азовскаго морей 22,3⁰/₀

Около 4—6⁰/₀ предостереженій запаздываютъ, остальныя оказываются неудачными. Изъ числа предсказаній погоды оказываются удачными около 75⁰/₀, причемъ наибольшій ⁰/₀ удачъ приходится на предсказанія измѣненій температуры (85—90⁰/₀), наименьшій—относительно осадковъ (70⁰/₀). (Отчетъ по Гл. Ф. Обс.).

Фотографическая карта неба, начатая десять лѣтъ тому назадъ братьями *Henry* въ Парижѣ, скоро будетъ совершенно закончена. На ней отпечатались около 80,000,000 звѣздъ.

Въ Утрехтѣ образовался международный комитетъ для сбора пожертвованій на памятникъ скончавшемуся нѣсколько лѣтъ тому назадъ знаменитому голландскому метеорологу *Бюйсъ-Баллоту (Buys-Ballot)*, много занимавшемуся между прочимъ вопросомъ о зависимости направленія вѣтра отъ положенія минимумовъ барометрическаго давленія.

Скончавшійся недавно астрономъ *Philippe Plantamour* завѣщалъ городу Женевѣ свое имѣніе, гдѣ вѣроятно будетъ устроенъ ботаническій садъ, и 300,000 франковъ деньгами.

Франція разослала 56-и странамъ приглашенія принять участіе въ выставкѣ 1900 года. 49 правительствъ уже извѣстили о томъ, что они принимаютъ это приглашеніе, Египетъ отказался отъ участія, отъ остальныхъ странъ еще не получены отвѣты.

7/19 февраля сильнымъ вихремъ песокъ изъ Сахары былъ занесенъ на одинъ изъ Канарскихъ острововъ, такъ что тамъ образовался цѣлый песчаный дождь.

9 февраля (н. с.) сильнымъ землетрясеніемъ былъ разрушенъ городъ Бали-Керси близъ Константинополя: обрушились минареты и куполы 24-хъ мечетей, а также 6 публичныхъ бань. Сильно пострадали 4.000 домовъ. 20,000 жителей расположились лагеремъ въ окрестностяхъ города. Окрестные города тоже пострадали: въ Димирджикѣ совершенно разрушены 200 домовъ и 2 бани.

ЗАДАЧИ.

Задача № 465 (3 сер.), предложенная въ № 257 „Вѣстника", тожественна съ задачей № 400, напечатанной въ № 246. Вмѣсто задачи № 465 редакція предлагаетъ слѣдующую:

№ 465. Найти три цѣлыхъ и положительныхъ числа, зная, что сумма ихъ равна 10, а сумма ихъ двойныхъ произведеній равна 31.

№ 493. Показать, что при цѣлыхъ значеніяхъ m и n число

$$mn\,(m^4-n^4)$$

кратно 30-и.

(Заимств.) *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 494. Въ секторъ AOB вписанъ равносторонній треугольникъ MNP такъ, что одна изъ вершинъ его M совпадаетъ съ срединой дуги AB. Выразить его сторону черезъ радіусъ сектора и половину хорды.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 495. Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{2r_2}+\frac{1}{2r_3}=\frac{1}{h}+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2};$$

$$\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r}=p^2,$$

гдѣ r, r_1, r_2, r_3 суть радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ, h, h_1 и h_2 — высоты, а p — полупериметръ треугольника.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 496. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$x^3-yx^2+x-y=102.$$

Н. Чернякъ (Иркутскъ).

№ 497. Стороны AB и AD параллелограмма равны a и b, діагональ $AC=c$. На діагонали (или ея продолженіи) взята точка M; пусть

$AM = c'$. Пусть a' и b' суть прямоугольныя проэкціи AM соотвѣтственно на стороны AB и AD.

Доказать, что $$cc' = aa' + bb'.$$

Н. Степановъ (Москва).

№ 498. Токъ отъ 100 элементовъ Бунзена проходитъ въ цѣпи, внѣшнее сопротивленіе которой равно 10 омамъ. Опредѣлить, какова будетъ сила тока батареи изъ 100 элементовъ, расположенныхъ въ 4 ряда по 25 элементовъ въ каждомъ? Какъ нужно расположить элементы, чтобы сила тока въ цѣпи была наибольшая?

Электродвижущая сила элемента Бунзена—1,9 вольта; внутреннее сопротивленіе этого элемента—0,1 ома.

(Заимств.) *М. Г.*

Упражненія для учениковъ.

1. На сторонахъ прямого угла BAC отложены отрѣзки AB и AC изъ которыхъ второй въ два раза больше перваго; уголъ ABC раздѣленъ пополамъ: D—основаніе равнодѣлящей. Доказать, что отрѣзокъ AD равенъ сторонѣ правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ окружность радіуса AB и что BD—сторона правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ эту окружность.

2. Въ окружности, центръ которой O, проведены взаимно перпендикулярные радіусы OA и OB; хорда AB продолжена на разстояніе BC, равное AB; изъ C проведена сѣкущая CO, которая встрѣчаетъ окружность въ точкахъ D и D_1. Доказать что внѣшній отрѣзокъ CD этой сѣкущей равенъ удвоенной сторонѣ правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ окружность O. (Вся сѣкущая OD_1 равна удвоенной сторонѣ правильнаго *звѣздчатаго* десятиугольника, вписаннаго въ окружность O).

3. Окружность O раздѣлена на шесть равныхъ частей точками A, B, C, D, E, F; изъ точки A описана радіусомъ AC дуга, изъ точки D описана тѣмъ-же радіусомъ вторая дуга, которая пересѣкаетъ первую въ M; точка M соединена съ центромъ O. Доказать что OM — сторона квадрата, вписаннаго въ окружность O.

4. a) На окружности центра M взята точка N, изъ которой описана радіусомъ NM вторая окружность; AB—общая хорда; прямая AN встрѣчаетъ окружность N въ C, прямая CM встрѣчаетъ окружность M въ N_1, прямая AN_1 встрѣчаетъ окружность N въ C_1, прямая C_1M встрѣчаетъ окружность M въ N_2 и т. д. Доказать что хорды AN, NN_1 N_1N_2 ..... равны, по порядку, сторонѣ правильнаго 6-ти, 12-ти, 24-хъ-угольника, вписаннаго въ окружность M.

b) Прямая BN_1 встрѣчаетъ окружность N въ D_1, прямая D_1M пересѣкаетъ окружность M въ P_1, прямая BP_1 встрѣчаетъ окружность N въ D_2, прямая D_2M пересѣкаетъ окружность M въ P_2 и т. д. Доказать что хорды AN_1, AP_1, AP_2 ..... равны, по порядку, сторонѣ правильнаго 4-хъ, 8-ми, 16-ти-угольника, вписаннаго въ окружность M.

СПБ.
1 марта
1898 г.

А. Гольденбергъ.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 308 (1 сер.). Показать, что сумма чиселъ, меньшихъ m и взаимно простыхъ съ нимъ, равна произведенію числа этихъ чиселъ на $\frac{1}{2}$ m.

Пусть x есть нѣкоторое число, взаимно простое съ m; тогда и $m-x$ есть также число, взаимно простое съ m. Дѣйствительно, если-бы m и $m-x$ имѣли общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, то и разность

$$m-(m-x),$$

равная x, имѣла бы того-же общаго съ m дѣлителя, что противно сдѣланному относительно x предположенію.

Пусть рядъ

$$x,\ y,\ z\ \ldots .\ t,\ u,$$

есть рядъ чиселъ, меньшихъ m и взаимно простыхъ съ нимъ.

Тогда рядъ

$$m-x,\ m-y,\ m-z\ ..\ m-t,\ m-u$$

представляетъ собою также числа, меньшія m и взаимно простыя съ нимъ, и притомъ всѣ такія числа, такъ какъ всѣ члены этого ряда различны, а число ихъ равно числу членовъ перваго ряда. Поэтому сумма

$$[x+(m-x)]+[y+(m-y)]+\ldots .+[t+(m-t)]+[u+(m-u)]=m\varphi(m),$$

—гдѣ $\varphi(m)$ означаетъ число чиселъ, меньшихъ m и взаимно простыхъ съ m,—равна двойной искомой суммѣ, а слѣдовательно искомая сумма равна

$$\frac{1}{2}\,m\,\varphi\,(m).$$

П. Радаевъ (Кіевъ); *Н. П.* (Тифлисъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 365 (1 сер.). Найти цѣлыя положительныя числа a, b, c и d, удовлетворяющія условію

$$\frac{ad-1}{a+1}+\frac{bd-1}{b+1}+\frac{cd-1}{c+1}=d.$$

Замѣчая, что

$$\frac{ad-1}{a+1}=d-\frac{d+1}{a+1},\quad \frac{bd-1}{b+1}=d-\frac{d+1}{b+1},\quad \frac{cd-1}{c+1}=d-\frac{d+1}{b+1}$$

приводимъ предложенное уравненіе къ виду

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2\,\frac{d}{d+1}\,. \quad (1)$$

Такъ какъ вторая часть уравненія (1) при всякомъ цѣломъ и положительномъ d не меньше 1, то дроби

$$\frac{1}{a+1},\ \frac{1}{b+1},\ \frac{1}{c+1}$$

не могутъ быть одновременно меньше $\frac{1}{3}$. Поэтому одно изъ чиселъ $a+1$, $b+1$, $c+1$ не больше 3-хъ.

Итакъ или

$$a+1 \leqslant 3, \text{ или } b+1 \leqslant 3, \text{ или } c+1 \leqslant 3$$

откуда, такъ какъ $a>0$, или

$$a=1{,}2, \text{ или } b=1{,}2 \text{ или } c=1{,}2.$$

Вслѣдствіе симметричности уравненія (1) относительно a, b, c безразлично, на какомъ изъ трехъ предположеній остановиться.

Пусть

$$a=1{,}2. \qquad (2)$$

Какъ было указано выше,

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geqslant 1.$$

Полагая a равнымъ 1 или 2 (см. 2), найдемъ:

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geqslant \frac{1}{2},$$

а потому одна изъ дробей $\frac{1}{b+1}$, $\frac{1}{c+1}$ не меньше $\frac{1}{4}$, откуда

$$\text{или } b+1 \leqslant 4, \text{ или } c+1 \leqslant 4.$$

Слѣдовательно, такъ какъ

$$b>0,\ c>0,$$

$$\text{или } \quad b=1, 2, 3; \quad \text{или } c=1, 2, 3,$$

причемъ опять безразлично, какое изъ предположеній выбрать. Пусть

$$b=1, 2, 3 \qquad (3).$$

Итакъ a и b имѣютъ соотвѣтственно значенія

1, 1, или 1, 2, или 1, 3, или 2, 1, или 2, 2, или 2, 3.

Вслѣдствіе симметріи уравненія (1) относительно a и b второе и четвертое изъ шести указанныхъ предположеній сводятся къ одному. Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} a &= 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2 \\ b &= 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

и соотвѣтственно (к строке b)

Пусть, например҄ъ, $a=1$, $b=2$. Подставляя эти значенія въ уравненіе (1), имѣемъ:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c+1}=\frac{2d}{d+1},$$

откуда

$$c=\frac{11-d}{7d-5}.$$

Рѣшая неравенство $7d-5>11-d$, находимъ, что при $d>2$ знаменатель дроби $\frac{11-d}{7d-5}$ уже больше числителя.

При $d=1$, $c=5$; при $d=2$, $c=1$.

Пятое изъ предположеній (I) вовсе не даетъ цѣлыхъ значеній для c и d, а первое, третье и четвертое — даютъ новыя рѣшенія, которыя легко вывести изъ нихъ, примѣняя къ нимъ пріемъ, примѣненный ко второму предположенію.

Вотъ полная таблица отвѣтовъ, гдѣ, впрочемъ, a, b и c могутъ еще мѣняться значеніями:

$$\begin{aligned} a &= 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2 \\ b &= 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 2 \\ c &= 2{,}1;\ 5{,}1;\ 3,\ \ 2 \\ d &= 2{,}3;\ 1{,}2;\ 1,\ \ 1. \end{aligned}$$

Въ этой таблицѣ соотвѣтственныя значенія a, b, c, d подписаны одно подъ другимъ.

Указанный методъ годенъ и для того случая, если не исключить и нулевыя рѣшенія. Тогда таблица пополняется новыми рѣшеніями, напр. $a=1$, $b=2$, $c=0$, $d=11$.

Дали неполныя рѣшенія *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 356 (2 сер.). Найти двузначное число, котораго наименьшій дѣлитель (большій единицы) равенъ суммѣ его цифръ.

Всѣ двузначныя числа, оканчивающіяся нулемъ, дѣлятся на сумму цифръ и на 2, а потому изъ чиселъ такого рода лишь 20 удовлетворяетъ требованію задачи. Пусть теперь цифра единицъ y будетъ отлична отъ нуля. Для того, чтобы искомое число $10x+y$, гдѣ x — цифра десятковъ, дѣлилось на сумму цифръ $x+y$, необходимо и достаточно, чтобы разность

$$10x+y-(x+y)=9x$$

дѣлилась на $x+y$. Такъ какъ $x+y$ по условію задачи есть число простое,—иначе искомое число имѣло бы дѣлителя, большаго единицы и меньшаго $x+y$, — то либо 9, либо x должно дѣлиться на $x+y$. Но, по предположенію, y отлично отъ нуля, а потому x не дѣлится на $x+y$. Значитъ число 9 дѣлится на простое число $x+y$, откуда

$$x+y=3.$$

Ни x ни y не равны нулю; поэтому искомое число есть либо 12, либо 21. Изъ нихъ лишь второе удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. Итакъ имѣемъ два рѣшенія: 20 и 21.

И. Вонсикъ (Воронежъ): *О. Озаровская* (С.-Петербургъ); *П. Ивановъ* (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 379 (3 сер.). Показать, что десятичная дробь

0, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 .....

не есть дробь періодическая.

Предположимъ, что данная безконечная десятичная дробь есть періодическая, и пусть a — число цифръ ея періода. Цифры періода могутъ быть вообще либо одинаковы, либо различны. При первомъ допущеніи, — что цифры періода одинаковы, — мы найдемъ, что въ предложенной дроби лишь одна цифра повторяется безконечное число разъ, а остальныя девять цифръ — конечное, что противно закону образованія дроби. Остановимся на второмъ предположеніи; пусть нѣкоторая цифра a до періода повторялась подрядъ не больше n разъ; въ періодической же части она можетъ повторяться подрядъ не болѣе $a-1$ разъ, такъ какъ уже доказано, что не всѣ цифры періода одинаковы. Итакъ разсматриваемая цифра a не могла бы повторяться при сдѣланномъ предположеніи болѣе A разъ, гдѣ A есть $\angle M$ большее изъ чиселъ n и $a-1$. Между тѣмъ законъ образованія дроби вводитъ въ нее группы цифръ, состоящія изъ неограниченнаго повторенія одной и той же цифры, такъ какъ въ составъ дроби входитъ каждое изъ чиселъ вида

$$a,\ aa,\ aaa,\ \ldots\ldots$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 441 (3 сер.). Данъ треугольникъ ABC съ основаніемъ AC и медіаной BD; проведены биссекторы угловъ, образуемыхъ медіаной съ основаніемъ, до пересѣченія ихъ со сторонами AB и BC даннаго треугольника соотвѣтственно въ точкахъ M и N. Доказать, что прямая MN параллельна основанію даннаго треугольника и вывести на основаніи этой теоремы способъ проведенія черезъ данную на плоскости точку прямой, параллельной данной прямой.

Изъ равенствъ $AD=DC$,

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AD}{DB},\ \frac{CN}{NB}=\frac{DC}{DB}$$

находимъ, что

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NB},$$

а потому прямыя MN и AC параллельны.

Отсюда вытекаетъ слѣдующій способъ проведенія черезъ данную на плоскости точку прямой, параллельной другой данной прямой XY: соединимъ точку M съ надлежащимъ образомъ выбранной точкой D прямой XY посредствомъ наклонной MD; тогда одинъ изъ угловъ между прямыми MD и XY будетъ острый; пусть XDM будетъ этотъ уголъ; отложимъ уголъ XDZ, вдвое большій угла XDM, такъ, чтобы точка M лежала внутри угла XDZ; проведемъ черезъ точку M прямую, встрѣчающую стороны DX и DZ этого угла соотвѣтственно въ точкахъ A и B; отложимъ на прямой XY отрѣзокъ $DC=AD$, построимъ биссекторъ угла CDB и продолжимъ его до встрѣчи съ прямой CB въ нѣкоторой точкѣ N.

Прямая MN есть искомая.

И. Поповскій (Умань); *Е. Ивановъ* (Новочеркасскъ); *И. Евдокимовъ* (Тула); *Лежебокъ* и *Г.* (Иваново-Вознесенскъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *А. Д.* (Иваново-Вознесенскъ); *Я. Полушкинъ* (Знаменка); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Сибирякъ* (Томскъ); *Н. Крыловъ* (д. Плахтянка); *П. Бугровъ* (Полтава); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *К. Зновицкій* (Кіевъ); *А. Евлаховъ* (Владикавказъ); *В. Абрамовъ* (Житоміръ); *Юргенсонъ* (Юрьевъ); *С. Розенблатъ* (Житоміръ) *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 443 (3 сер.). Рѣшить уравненія

$$x+y+z+u=a$$
$$(x+y)(z+u)=b$$
$$(x+z)(y+u)=c$$
$$(x+u)(y+z)=d.$$

Принимая $x+y$ и $z+u$ за неизвѣстныя, находимъ изъ перваго и второго уравненія:

$$x+y=\frac{a+R}{2} \qquad (1)$$

$$z+u=\frac{a-R}{2} \qquad (2),$$

гдѣ
$$R=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$x+z=\frac{a+R'}{2} \;..(3),\quad y+u=\frac{a-R'}{2} \qquad (4),$$

и
$$x+u=\frac{a+R''}{2} \quad (5),\qquad y+z=\frac{a-R''}{2} \qquad (6),$$

гдѣ
$$R'=\pm\sqrt{a^2-4c},\qquad R''=\pm\sqrt{a^2-4d}.$$

Вычитая уравненіе (6) изъ суммы уравненій (1), (3), находимъ:

$$x=\frac{a+R+R'+R''}{4}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$y=\frac{a+R-R'+R''}{4},\quad z=\frac{a-R+R'-R''}{4},\quad u=\frac{a-R-R'-R''}{4}.$$

Такъ какъ знаки трехъ радикаловъ R, R', R'' могутъ быть выбраны произвольно, то для каждаго изъ неизвѣстныхъ получаемъ вообще по восьми рѣшеній; но каждому опредѣленному рѣшенію для одного изъ нихъ отвѣчаетъ лишь одно опредѣленное рѣшеніе для каждаго изъ трехъ остальныхъ неизвѣстныхъ.

И. Евдокимовъ (Тула); *Лежебокъ* и *Г.* (Ив.-Вознесенскъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *Ф. Шнейдеръ* (Бѣлостокъ).

Большинство рѣшившихъ задачу дали неполное рѣшеніе, т. е. не получили всѣхъ восьми рѣшеній.

№ 444 (3 сер.). Опредѣлить объемъ собирающей чечевицы, зная ея толщину и полную поверхность.

Пусть p—толщина чечевицы, S—ея полная поверхность, x и y—высоты, а R и R_1—радіусы кривизны сегментовъ, изъ которыхъ состоитъ чечевица; наконецъ V—объемъ чечевицы.

Изъ условій задачи имѣемъ:

$$2\pi Rx + 2\pi R_1 y = S \qquad (I)$$

$$x \pm y = p \dots\dots\dots \qquad (II)$$

$$V = \pi x^2 \left(R - \frac{x}{3}\right) \pm \pi y^2 \left(R_1 - \frac{y}{3}\right); \qquad (III)$$

Верхніе знаки относятся къ двояковыпуклой чечевицѣ, нижніе — къ вогнутовыпуклой.

Обозначая черезъ r радіусъ общаго основанія сегментовъ, находимъ:

$$r^2 = (2R - x)x = (2R_1 - y)y,$$

откуда

$$2Rx - 2R_1 y = x^2 - y^2,$$

или (уравненіе II)

$$2Rx - 2R_1 y = (x \mp y)p \qquad (IV)$$

Помножая уравненіе IV на π и рѣшая его совмѣстно съ уравненіемъ I относительно πRx и $\pi R_1 y$, получимъ:

$$\pi Rx = \frac{S + \pi p(x \mp y)}{4}$$

$$\pi R_1 y = \frac{S - \pi p(x \mp y)}{4}.$$

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на x, а второе на y и складывая ихъ или вычитая, находимъ:

$$\pi Rx^2 \pm \pi R_1 y^2 = \frac{Sp}{4} + \frac{\pi p(x \mp y)^2}{4}. \qquad (V)$$

Такъ какъ (уравненіе III)

$$V = \pi Rx^2 \pm \pi R_1{}^2 - \frac{\pi}{3}(x^3 \pm y^3),$$

или (уравненіе II)

$$V = \pi Rx^2 \pm \pi R_1 y^2 - \frac{\pi}{3} p.\,(x^2 \mp xy + y^2),$$

то (уравненіе V)

$$V = \frac{Sp}{4} - \pi p\left[\frac{x^2 \mp xy + y^2}{3} - \frac{(x \mp y)^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{Sp}{4} - \frac{\pi p(4x^2 \mp 4xy + 4y^2 - 3x^2 \pm 6xy - 3y^2)}{12}.$$

Или же

$$V = \frac{Sp}{4} - \frac{\pi p.(x \pm y)^2}{12} = \frac{Sp}{4} - \frac{p^3}{12}.$$

М. К.; *Лежебокъ Г.* (Ив. Вознесенскъ); *Е. Ивановъ* (Новочеркасскъ); *А. Д.* (Ив.-Вознесенскъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *И. Поповскій* (Умань); *Сибирякъ* (Томскъ).

Примѣчаніе. Всѣ, приславшіе рѣшеніе этой задачи, предполагали, что $R = R_1$; отвѣтъ нисколько не зависитъ отъ равенства или неравенства кривизнъ двухъ частей чечевицы, какъ это видно изъ выше изложеннаго рѣшенія.

№ 449 (3 сер.). Въ данный правильный шестиугольникъ вписать другой правильный шестиугольникъ съ данной стороной.

Обозначимъ данный правильный шестиугольникъ черезъ $ABCDEF$, центръ его черезъ O, а вершины вписаннаго въ него правильнаго шестиугольника, лежащія соотвѣтственно на сторонахъ AB, BC, CD, DE, EF, FA —черезъ A', B', C', D', E', F'. Изъ равенства треугольниковъ $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$, $D'EE'$, $E'FF'$, $F'AA'$ находимъ, что

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF',$$

откуда слѣдуетъ, что треугольники AOA', BOB', COC' DOD', EOE', FOF', также равны между собой, а потому

$$OA' = OB' = OC' = OD' = OE' = OF'.$$

Итакъ, если одинъ правильный шестиугольникъ вписанъ въ другой, то центры ихъ совпадаютъ. Отрѣзокъ OA', равный, какъ радіусъ круга описаннаго около правильнаго шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$, сторонѣ его $A'B'$, заключается по величинѣ между $AO = AB$ и апоѳемой правильнаго шестиугольника $ABCDEF$. Слѣдовательно задача возможна лишь въ томъ случаѣ, когда сторона $A'B'$ второго правильнаго шестиугольника не болѣе стороны и не менѣе апоѳемы даннаго шестиугольника. Наоборотъ, если это условіе выполнено, то, описавъ изъ O окружность радіусомъ $A'B'$, найдемъ въ пересѣченіи со сторонами шестиугольника $ABCDEF$ вообще 12 точекъ. Соединяя ихъ черезъ одну, получимъ вообще два правильныхъ шестиугольника со сторонами, равными $A'B'$. Задача легко обобщается на случай правильнаго многоугольника съ любымъ числомъ сторонъ.

М. Зиминъ (Орелъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *Е. Ивановъ* (Новочеркасскъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

1897.—№ 2.

Sur les coniques circonscrites a un triangle. Par *M. A. Krahe*. Всѣ разсужденія и выводы въ этой статьѣ вполнѣ алгебраическіе, основаны на приложеніи нормальныхъ координатъ къ изслѣдованію коническихъ сѣченій. Редакція *Mathesis*'а замѣчаетъ, что въ статьѣ нѣтъ ничего новаго.

Notre supplément. Историческія и библіографическія указанія относительно не эвклидовой геометріи.

Notes mathématiques. 5. *Notes de géometrie analytique.*

6. *Théorème d'Arithmétique.* Изъ безчисленнаго множества треугольныхъ чиселъ получается безчисленное множество полныхъ квадратовъ.

Ибо, если положить, что треугольное число

$$\frac{n(n+1)}{2} = p^2,$$

то изъ него получимъ новое треугольное число по ур-нію

$$\frac{(4n^2+4n)(4n^2+4n+1)}{2} = (2p)^2(2n+1)^2;$$

число это есть также полный квадратъ, и т. д. *(I. Collette)*

Congrès international de mathématiciens. Сообщается, что въ текущемъ 1897 г. 9-го, 10-го и 11-го августа состоится въ Цюрихѣ международный конгрессъ математиковъ.

Bibliographie. Cours de Géometrie descriptive. Par *X. Antomari.* Paris 1897. Prix: 10 fr.

Solutions de questions proposées. №№ 267, 803, 978, 1095, CLXXXII

Questions d'examen. № 781, 782

Questions proposées. №№ 1101—1110.

Publications récentes.

Théorèmes sur les triangles trihomologiques. Par *M. H. Van Aubel.* Приведенныя здѣсь теоремы относятся къ т-рмъ $M_a M_b M_c$ и $N_a N_b N_c$, *изобарическимъ* съ даннымъ тр-мъ ABC *); главнѣйшія изъ этихъ теоремъ суть слѣдующія:

1897.—№ 3.

(Продолженіе статьи *M. Van Aubel'я* о трояко-перспективныхъ тр-хъ). На сторонахъ тр-ка ABC построимъ равнобедренные подобные и сходственно расположенные тр-ки BA_1C, CB_1A, AC_1B и обозначимъ чрезъ D, E, F точки, дѣлящія стороны BC, CA и AB въ одномъ и томъ-же отношеніи. Чтобы прямыя, проходящія чрезъ A_1, B_1, C_1 и параллельныя AD, BE, CF пересѣкались въ одной точкѣ M, необходимо и достаточно, чтобы A_1, B_1, C_1 были вершинами *перваго тр-ка Брокара* для тр-ка ABC; при этомъ условіи, прямыя, проходящія чрезъ A_1, B_1, C_1 и параллельныя BE CF, AD и CF, AD, BE по три пересѣкаются въ точкахъ N и P.

Notes mathématiques. 7. *Sur les triandles semiconjugués.* Тр къ, составленный двумя касательными къ коническому сѣченію и хордою, соединяющею точки касанія, можно назвать *самосопряженнымъ* тр-мъ, такъ какъ полярой каждой изъ вершинъ такого тр-ка служитъ одна изъ его сторонъ. Основываясь на теоремахъ Паскаля и Бріаншона, J. N. доказываетъ теорему:

Два самосопряженныхъ тр-ка относительно одного и того-же коническаго сѣченія суть одновременно вписанные и описанные тр-ки для двухъ другихъ коническихъ сѣченій.

8) **Sur l'extraction de la racine carrée des nombres.** Обозначимъ чрезъ d число десятковъ и чрезъ u число единицъ, заключающихся въ корнѣ $\sqrt[n]{N}$, такъ-что

$$(10d+u)^n < N < (10d+u+1)^n.$$

M. Barbette замѣчаетъ, что число пробъ для опредѣленія u чрезъ дѣленіе имѣетъ высшимъ предѣломъ своимъ цѣлую часть выраженія

$$E_n = 1 + \frac{10(n-1)}{d\times 2!} + \frac{10(n-1)(n-2)}{d^2\times 3!} + \frac{10(n-1)(n-2)(n-3)}{d^3\times 4!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{10\ n-1)}{d^{n-3}\times 2!} + \frac{10}{d^{n-2}} + \frac{9}{nd^{n-1}}.$$

9) **Sur les triangles sphériques.** Теорема. *Пусть a, b, c и A, B, C суть сто-*

---

*) Если M есть какая-нибудь точка въ плоскости тр-ка ABC, то величины α, β, γ, пропорціональныя площадямъ тр-въ MBC, MCA, MAB, наз. *барицентрическими* координатами точки M относительно тр-ка ABC. Измѣняя порядокъ сторонъ тр-ка ABC, относительно которыхъ берутся координаты α, β, γ, замѣтимъ, что для однихъ и тѣхъ же значеній этихъ координатъ существуютъ шесть точекъ:

$M_a(\alpha, \beta, \gamma)$, $M_b(\beta, \gamma, \alpha)$, $M_c(\gamma, \alpha, \beta)$ и $N_a(\alpha, \gamma, \beta)$, $N_b(\gamma, \beta, \alpha)$, $N_c(\beta, \alpha, \gamma)$.

Точки M_a и N_a, M_b и N_b, M_c и N_c наз. *изобарически сопряженными*, а тр-ки $M_a M_b M_c$ и $N_a N_b N_c$ *изобарическими* относительно тр-ка ABC.

1) Тр-ки $M_a M_b M_c$ и ABC—трояко-перспективны (или трояко-гомологичны).

2) Тр-ки $M_a M_b M_c$ и $N_a N_b N_c$ —трояко-перспективны.

3) Тр-къ $M_a M_b M_c$ и тр-къ DEF, вершины котораго суть точки, дѣлящія стороны тр-ка ABC въ одномъ и томъ-же отношеніи, трояко-перспективны.

4) Тр-къ $N_a N_b N_c$ и тр-къ, вершины котораго суть точки, дѣлящія въ одномъ и томъ-же отношеніи стороны тр-ка $M_a M_b M_c$,—трояко-перспективны.

роны и углы сферическаго тр-ка. Если $sn^2 \frac{1}{2} a$ *равенъ, больше или меньше суммы* $sn^2 \frac{1}{2} b + sn^2 \frac{1}{2} c$, *то уголъ A равенъ, больше или меньше суммы* $B+C$.

10) 19-го февраля текущаго 1897 г. скончался въ Берлинѣ знаменитый германскій математикъ *Weierstrass*, родившійся въ Вестфаліи 31-го октября 1815 года.

Démonstration de la propriété fondamentale des Wronskiens. Par. *M. A. Demoulin. Опредѣлителемъ Вронскаго* $W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ для n данныхъ функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отъ x наз. опредѣлитель, составленный изъ этихъ ф-цій и ихъ производныхъ $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(n-1)}$, т. е.

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots\ldots\ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots\ldots\ldots, & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \ldots\ldots\ldots, & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Одно изъ свойствъ этихъ ф-цій выражается равенствомъ

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^n \cdot W\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right)$$

На основаніи этого равенства *M. Demoulin* доказываетъ теорему:

Если опредѣлитель Вронскаго для данныхъ фу-цій одной перемѣнной тождественно равенъ нулю, то эти ф-ціи связаны между собой линейнымъ однороднымъ уравніемъ съ постоянными коэффиціентами.

Sur une conique inscrite ou circonscrite a un triangle. Par *M. Stuyvaert.*

Solutions de questions proposées. №№ 999, 1016, 1018, 1020—1023, 1031.

Questions d'examen. №№ 783—789.

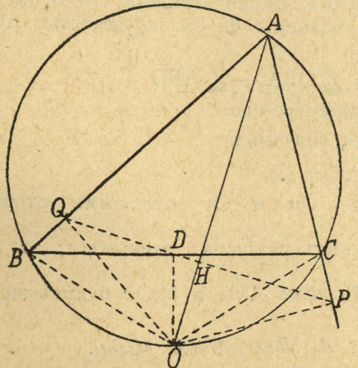
Questions proposeés. №№ 1108—1114.

Д. Е.

JOURNAL
de mathématiques élémentaires.

1896.—№ 1.

Sur quelques identités trigonométriques. Par. *E. M. Langley.* Около тр-ка ABC опишемъ окружность и изъ средины O дуги BC опустимъ перпендикуляры OP и OQ на стороны AC и AB (фиг. 1).



Фиг. 1.

$$\angle AOP = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{B+C}{2};$$

$$\angle COP = \angle AOP - \angle AOC = \frac{B+C}{2} - B = \frac{C-B}{2}$$

Такъ-какъ прямоуг. тр-ки OPC и OQB равны, то $BQ = PC$ и $AP + AQ = AB + AC$; но $AP = AQ$, поэтому

$$AP = AQ = \frac{b+c}{2}$$

и

$$CP = BQ = \frac{c-b}{2}.$$

Изъ прямоугольныхъ тр-въ OPC и OPA

$$PO = AP \operatorname{ctg} AOP = \frac{b+c}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B+C}{2},$$

$$PO = PC. \operatorname{ctg} COP = \frac{b-c}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C-B}{2};$$

слѣдов.

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B-C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B+C)}.$$

Если прямая PQ пересѣкаетъ BC и AO въ D и H, то D есть средина BC OD $\perp$ BC и прямоуг. тр-ки OCD и OPH подобны;

слѣдов.

$$\frac{OP}{OC} = \frac{PH}{CD} = \frac{AP. \sin \frac{A}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{b+c}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}{\frac{a}{2}};$$

изъ тр-ка же OCP имѣемъ:

$$\frac{OP}{OC} = \cos COP = \cos \frac{C-B}{2};$$

слѣдов.

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{C-B}{2}},$$

или

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B \quad C}{2}}.$$

Résolution de l'équation $a \sin x + b. \cos x = c$. Par. *M. Lauvernay.*

Если въ ур-нiи $a \sin x + b. \cos x = c$ положить $x = \alpha + \varphi$, то оно приметъ видъ $(a \sin \varphi + b. \cos \varphi) \cos \alpha + (a \cos \varphi - b \sin \varphi) \sin \alpha = c$.

Положимъ $a \ \mathrm{cs}\ \varphi - b \sin \varphi = 0$;

тогда

$$\frac{\cos \varphi}{b} = \frac{\sin \varphi}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\ \mathrm{cs}\ \varphi + a \sin \varphi}{a^2+b^2}$$

и

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

опредѣливъ такимъ образомъ углы φ и α, найдемъ и уголъ x.

Для геометрическаго построенiя угла x построимъ прямоугольный тр-къ AOB, у котораго катеты AO и BO равны a и b; описавъ около вершины его B окружность радiусомъ c, обозначимъ чрезъ D и D' пересѣченiя ея съ окружностью AOB. Углы

$$x' = \angle OBA + \angle ABD' \text{ и } x'' = \angle OBA - \angle ABD$$

будутъ значенiя x, удовлетворяющiя предложенному ур-нiю.

Другое рѣшенiе. Положивъ $\sin x = u$, $\cos x = v$, получимъ

$$au + bv = c, \quad u^2 + v^2 = 1.$$

На взаимноперпендикулярныхъ осяхъ Ou и Ov отложимъ отрѣзки $OP = \frac{c}{a}$ и $OQ = \frac{c}{b}$ и опишемъ около O окружность радiусомъ равнымъ 1; эта окружность пересѣчется съ прямой PQ въ M и M'; углы MOu и M'Ov будутъ значенiя x, удовлетворяющiя данному ур-нiю.

Etude sur l'involution généralisée. Par *A. Noyer A. Ch. Michel.*

Note sur l'extraction des racines carrées et cubiques. Par *M. Aubry.* Авторъ предлагаетъ еще новый способъ для извлеченія корней. Если положить $N = a^2 \pm b$, то вслѣдствіе равенства $\frac{N}{a^2} = 1 \pm \frac{b}{a^2}$ извлеченіе корня квадратнаго изъ N приводится къ опредѣленію $\sqrt{1+x}$, гдѣ $x = \frac{\pm b}{a^2}$, величина абсолютно < 1. Пусть

$$\sqrt{1+x} - 1 = y, \text{ или } \qquad y^2 = x - 2y. \qquad (1).$$

Положивъ $\pm y^{\kappa} = Mx - Ny$, на основаніи условія (1), получимъ

$$\mp y^{\kappa+1} = Nx - (Mx + 2N)\,y;$$

слѣдовательно, если $A = 1$, $B = 2$, $C = Ax + 2B$, $D = Bx + 2C$, $E = Cx + 2D, \ldots$ то члены ряда

$$Ax - By,\ Bx - Cy,\ Cx - Dy, \ldots$$

суть степени y^2, y^3, $y^4, \ldots$; а такъ какъ $y < 1$, то эти члены приближаются къ нулю, а слѣдов. дроби

$$\frac{Ax}{B}, \frac{Bx}{C}, \frac{Cx}{D}, \ldots \qquad (2)$$

приближаются къ y.

Умножая равенство (1) на y и принимая во вниманіе то-же равенство, последовательно получимъ:

$$y^3 = -2x + (4 + x)\,y,$$
$$y^4 = (4x + x^2) - (8 + 4x)\,y,$$
$$y^5 = -(8x + 4x^2) + (16 + 12x + x^2)\,y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm y^n = \left[2^{n-2}x + \frac{n-3}{1}2^{n-4}x^2 + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}2^{n-6}x^3 + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3}2^{n-8}x^4 + \ldots\right] -$$
$$-\left[2^{n-1} + \frac{n-2}{1}2^{n-3}x + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}x^2 + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}x^3 + \ldots\right]y.$$

Такъ-какъ y^n съ возрастаніемъ n приближается къ О, то изъ этихъ равенствъ получимъ выраженія (2), последовательно приближающіяся къ y, именно:

$$\frac{2x}{4+x}, \frac{4x + x^2}{8 + 4x}, \frac{8x + 4x^2}{16 + 12x + x^2}, \ldots\ldots$$

$$\frac{2^{n-2}x + \frac{n-3}{1}2^{n-4}x^2 + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}2^{n-6}x^3 + \ldots\ldots}{2^{n-1} + \frac{n-2}{1}2^{n-3}x + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}x^2 + \ldots\ldots}.$$

Методъ этотъ примѣнимъ къ извлеченію корней высшихъ степеней.

Въ заключеніе авторъ указываетъ, какъ, пользуясь тѣмъ-же методомъ, можно найти приближенное значеніе положительнаго корня ур-нія

$$x^3 \pm ax = b \quad \text{при } b > 0.$$

Un théorème de géometrie élémentaire. Par *M. E. Duporcq.* Теорема. *Половина произведенія діаметровъ круговъ описаннаго около тр-ка и вписаннаго въ него равна степени центра вписаннаго круга относительно круга описаннаго.*

Авторъ доказываетъ эту теорему, пользуясь методомъ взаимныхъ поляръ.

Correspondance. (A propos de la question 655).

Baccalauréats. (1895).

Questions résolues. №№ 634 et 675, 652, 653, 689.

Questions proposées. №№ 697—700.

Rappel de questions non résolues. №№ 7, 23, 119, 148.

Д. Е.

Присланы въ редакцію книги и брошюры:

64. *Роб. Люпке.* **Основанія электрохиміи.** Переводъ со 2-го дополненнаго изданія „*Dr. Rob. Lüpke,* Grundzüge der Elektrochemie auf experimenteller Basis“. *С. И. Созоновъ.* Съ 55-ю рис. въ текстѣ. СПБ. Цѣна 1 р. 50 к

65. **Совѣты мужчинамъ и женщинамъ какъ предохранять себя отъ зараженія сифилисомъ и венерическими болѣзнями.** Врача *Е С. Гребенюка.* Переводъ съ малороссійскаго. СПБ. 1897. Ц. 25 к.

66. **Примѣненіе числового анализа къ рѣшенію одного геометрическаго вопроса.** *А. П. Минина.* Отд. оттискъ изъ IX тома Трудовъ Отдѣленія Физическихъ Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи. М. 1897.

67. *А. П. Мининъ.* **Сборникъ задачъ по аналитической геометріи.** М. 1897. Ц. 50 к.

68. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая русско-нѣмецкая азбука** для обученія въ мѣсяцъ нѣмецкому чтенію, письму и разговору съ образцами письма и картинками. XII изданіе. Варшава 1898. Ц. 10 к

69. **Ежегодникъ коллегіи Павла Галагана.** Съ 1-го Октября 1896 года. Кіевъ 1897.

70. **Практическое значеніе сельско-хозяйственно-метеорологическихъ наблюденій и краткое руководство для производства ихъ.** Составилъ *П. И. Броуновъ.* (Метеорологическаое Бюро Ученаго Комитета Министерства Земледѣлія и Государственныхъ Имуществъ). СПБ. 1897.

71. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая метода или Русско-Нѣмецкій учебникъ** для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. Высшій курсъ VI изданіе. 5-ый выпускъ. Варшава. 1897. Ц. 20 к.

72. **Эфемериды звѣздъ (В. К. Деленъ) на 1898 годъ** для опредѣленія времени и азимута помощью переноснаго пассажнаго имнструмента, установленнаго въ вертикалѣ Полярной. Изд. Русскаго Астрономическаго Общества. СПБ. 1897.

73. *Плято ф. Рейсснера.* **Новѣйшая метода или Русско-Нѣмецкій учебникъ** для обученія въ три мѣсяца нѣмецкому чтенію, письму и разговору безъ помощи учителя. Высшій курсъ. VI изданіе. 6-й вып. Варшава. 1897. Ц. 20 к.

74. *К. Ціолковскій.* **На лунѣ.** Фантастическая повѣсть. Съ оригинальными рисунками художника А. Гофмана. Москва. 1893.

75. **Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution,** showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year endig June 30, 1893. Report of the U. S. National Museum. Washington, 1895.

76. — For the year ending June 30, 1894. Washington, 1896.

77. — To July, 1895. Washington. 1896.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Апрѣля 1898 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Обложка
ищется

Обложка
ищется