Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XV Сем. **№ 174.** № 6.

Содержаніе: Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго. *В. Кагана.*—Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ, (окончаніе). Проф. *Н. Любимова.*—Свойства поверхностей жидкихъ тѣлъ, (продолженіе). *К. Чернышева.*—Математическія мелочи: 1. Къ выводу формулы длины окружности. *В. Захарова.* 2. Тригонометрическое вычисленіе площадей сегмента и пояса круга. *А. Жбиковскаго.*—Разныя извѣстія.—Доставленныя въ редакцію книги и брошюры. — Задачи №№ 548 — 554. — Тема на премію. *С. Шатуновскаго.* — Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 352, 367, 434, 435, 437, 433 и (1 сер.) 477 и 510.—Справочная таблица № XXII. — Обзоръ научныхъ журналовъ. *Д. Е.* — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій.

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

Введеніе.

Помѣстивъ въ прошломъ номерѣ краткую біографію Лобачевскаго, редакція „Вѣстника" считаетъ себя обязанной познакомить своихъ читателей хотя бы въ общихъ чертахъ съ тѣми идеями, которыя создали ему послѣ смерти такую громкую извѣстность. Однако сдѣлать это не легко. На недоступность его ученія указываетъ уже тотъ фактъ, что его весьма мало понимали современники, что нуженъ былъ геніальный умъ Гаусса для того, чтобы усмотрѣть въ его „Воображаемой геометріи" глубокую идею, а не безплодную гимнастику досужаго ума. Математическія идеи вообще мало поддаются популяризаціи,—а менѣе всего въ тѣхъ своихъ частяхъ, которыя не могутъ быть демонстрированы реальными образами. Да не посѣтуетъ поэтому на насъ читатель, если чтеніе этого очерка не удовлетворитъ его вполнѣ. Если онъ вынесетъ изъ этой статьи хотя бы самое общее представленіе о той задачѣ, какую поставилъ себѣ Лобачевскій, — и о тѣхъ выводахъ, къ которымъ онъ пришелъ,—то этимъ будетъ вполнѣ достигнута та цѣль, которую имѣемъ въ виду, помѣщая этотъ очеркъ.

Математика, какъ наука, представляетъ собой послѣдовательное развитіе истинъ, которыя являются логическимъ слѣдствіемъ установленныхъ опредѣленій и допущенныхъ аксіомъ. Принципіально и тѣ и другія могутъ быть установлены совершенно произвольно, по крайней мѣрѣ — насколько ихъ совмѣстное существованіе не противорѣчитъ законамъ мышленія. Иными словами при выборѣ аксіомъ и опредѣленій мы обязаны руководиться только однимъ положенiемъ: тѣ опредѣленiя и аксiомы, которыя мы желаемъ положить въ основанiе системы, не должны находиться въ противорѣчiи другъ съ другомъ или съ тѣми выводами, которые являются ихъ логическимъ слѣдствiемъ. Доктрина, построенная на такихъ абсолютно произвольныхъ началахъ, не уступала бы нашему анализу ни въ стройности системы, ни въ логической достовѣрности*). Единственный упрекъ, который можно сдѣлать такой системѣ, заключается въ томъ, что она вполнѣ безплодна, что она представляетъ собой стройный, но вполнѣ бездѣльный рядъ умозаключенiй. Само собой разумѣется, что этого упрека вполнѣ достаточно, чтобы не признать за такой системой per se никакой цѣны. Наука имѣетъ болѣе серьезную задачу, нежели созданiе стройной системы умозаключенiй. Она должна прежде всего содѣйствовать изученiю окружающей природы и помочь человѣку въ борьбѣ съ послѣдней; это имѣется въ виду при построенiи научной системы. Геометрiя создавалась и развивалась крайне медленно, отвѣчая раньше всего на тѣ вопросы, которые намѣчались потребностями жизни. Само собой разумѣется, что геометрическiя опредѣленiя и аксiомы оказываются при такихъ условiяхъ далеко не произвольными.

Опредѣленiя геометрiи представляютъ собой отвлеченiе извѣстныхъ свойствъ наблюдаемыхъ нами объектовъ, а аксiомы являются истинами, установленными вѣковымъ опытомъ и наблюденiемъ. Но эти опредѣленiя допускаютъ двоякую формулировку: съ одной стороны можно ввести въ опредѣленiе термина тотъ образъ, то реальное представленiе, которое мы соединяемъ съ опредѣляемымъ понятiемъ; такое опредѣленiе называютъ „реальнымъ“; съ другой стороны, можно опредѣлить терминъ только группой свойствъ ему присущихъ и необходимыхъ для развитiя той теорiи, которую мы имѣемъ въ виду; такое опредѣленiе называютъ „формальнымъ“. Слѣдующiй примѣръ, надѣюсь, выяснитъ эти соображенiя.

Евклидъ опредѣляетъ прямую, какъ линiю, которая одинаково расположена по отношенiю ко всѣмъ своимъ точкамъ (*ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ αὐτῆς σημείοις κεῖται*). Это характерно реальное опредѣленiе прямой, описывающее ея форму; къ этому же типу принадлежитъ опредѣленiе: „прямая есть кратчайшее разстоянiе между двумя точками“. Первое изъ этихъ опредѣленiй не даетъ Евклиду ни одного свойства прямой, которымъ онъ могъ бы воспользоваться при развитiи своей системы. Вся теорiя прямолинейныхъ угловъ и фигуръ основана у Евклида на свойствѣ прямой, выраженной въ XII аксiомѣ [*Κοιναὶ ἔννοιαι, 9*], по которой „двѣ прямыя не могутъ заключать пространства“ или, говоря современнымъ языкомъ, прямая вполнѣ опредѣляется двумя точками. Второе опредѣленiе, хотя и находитъ себѣ примѣненiе въ геометрiи, но недостаточно; та же аксiома Евклида неизбѣжно должна прiйти къ нему на помощь. А между тѣмъ геометрическая система можетъ вполнѣ обойтись безъ опредѣленiя прямой, какъ кратчайшаго разстоянiя между двумя точками. XX предложенiе Евклида доказываетъ, что пря-

---

*) Замѣтимъ, что въ такой чисто формальной системѣ можно было бы и вовсе избѣжать аксiомъ.

мая короче ломанной, проходящей между тѣми же точками (основываясь, слѣдовательно, только на XII аксіомѣ); а отсюда уже не трудно вывести, что хорда короче дуги кривой, если опредѣлить длину послѣдней, какъ предѣлъ, къ которому стремится вписанная въ нее ломанная съ увеличеніемъ числа сторонъ послѣдней*).

Эти соображенія выяснили, надѣюсь, читателю, что наиболѣе цѣлесообразнымъ опредѣленіемъ прямой является слѣдующее: „прямая есть линія, которая вполнѣ опредѣляется двумя точками". Это опредѣленіе не заключаетъ вовсе описанія прямой, но за то въ немъ содержится тотъ существенный ея признакъ, который нуженъ геометру. Это опредѣленіе формальное **). Оно пріобрѣтаетъ еще болѣе важное значеніе, благодаря слѣдующему обстоятельству. Представимъ себѣ, что на плоскости была бы найдена другая линія, кривая, которая вполнѣ опредѣляется двумя точками; такъ какъ при развитіи теоріи прямолинейныхъ фигуръ мы основывались исключительно на этомъ свойствѣ прямой, то вся теорія могла бы быть цѣликомъ перенесена на всѣ тѣ фигуры, въ которыхъ прямыя были бы замѣнены этими новыми кривыми. Чтобы перейти отъ фиктивнаго случая къ дѣйствительно возможному, необходимо остановиться нѣсколько подробнѣе на этомъ вопросѣ.

Геометры настоящаго столѣтія немало потрудились надъ выясненіемъ тѣхъ принциповъ, на которыхъ построена элементарная геометрія. Эту работу нельзя считать законченной, тѣмъ не менѣе ихъ изслѣдованія установили (если не принимать во вниманіе деталей) всѣ тѣ формальныя положенія, на которыхъ зиждется современная геометрія. Мы конечно не имѣемъ возможности входить здѣсь въ подробный анализъ этихъ выводовъ. Но въ общихъ чертахъ намъ неоходимо съ ними познакомиться.

Въ основаніи нашей геометріи лежатъ понятія о величинѣ и формѣ, понятія основныя и неопредѣлимыя. Съ нашимъ представленіемъ о величинѣ неразрывно связаны нѣкоторыя ея свойства, совершенно независящія отъ той формы, которую имѣетъ та или другая величина, напр. „если къ равнымъ придать равныя, то получимъ равныя", „если къ неравнымъ придать равныя, то получимъ неравныя". Совокупность этихъ свойствъ составляетъ рядъ алгебраическихъ аксіомъ. Къ нимъ присоединяются аксіомы геометрическія, характеризующія пространственные образы. Такъ вся планиметрія основана прежде всего на томъ

*) Подробнѣе объ этомъ см. J. Hoüel „Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire". Евклидъ, конечно, по отношенію къ кривымъ этого не доказываетъ.

**) Вотъ еще примѣры для выясненія того же понятія: реальное опредѣленіе скорости перемѣннаго движенія: скоростью перемѣннаго движенія называется скорость, которую имѣла бы движущаяся точка въ данный моментъ, если бы сила, дѣлающая движеніе неравномѣрнымъ, перестала въ этотъ моментъ дѣйствовать; формальное опредѣленіе: скорость перемѣннаго движенія есть предѣлъ отношенія элемента пути къ элементу времени. Реальное опредѣленіе умноженія при дробномъ множителѣ; помножить a на $\frac{b}{c}$ значитъ составить изъ a новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы; формальное опредѣленіе: помножить на дробь значитъ помножить на числителя и раздѣлить на знаменателя.

свойствѣ плоскости, что отдѣльныя ея части могутъ быть приведены въ совмѣщеніе съ другими частями ея безъ деформаціи*). Основными опредѣленіями въ плоской геометріи служатъ опредѣленія тождества геометрическихъ фигуръ, какъ такихъ, которыя при совмѣщеніи совпадаютъ,—прямой, какъ линіи, которая на плоскости вполнѣ опредѣляется двумя точками. Представимъ себѣ, что мы такимъ образомъ установили-бы всѣ формальныя опредѣленія и аксіомы и построили-бы на нихъ теорію прямолинейныхъ фигуръ. Представимъ себѣ далѣе, что мы нашли-бы другую поверхность, къ которой были-бы приложими тѣ-же аксіомы и на которыхъ существовали-бы образы, обладающіе тѣми свойствами, которыя выражены въ формальномъ опредѣленіи образовъ планиметрическихъ; напр. существовали-бы линіи, которыя на этой поверхности вполнѣ опредѣляются двумя точками. Въ виду того, что на такой поверхности всѣ тѣ положенія, на которыхъ наша планиметрія построена, имѣютъ мѣсто, послѣдняя mutatis mutandis, т. е. съ замѣной образовъ планиметрическихъ имъ соотвѣтствующими, могла-бы быть цѣликомъ перенесена на эту поверхность. Это предположеніе отнюдь не фиктивное. Наоборотъ, на каждой поверхности, вообще говоря, существуютъ линіи, которыя на этой поверхности вполнѣ опредѣляются двумя точками; эти линіи сохраняютъ свою аналогію съ прямой и далѣе въ томъ отношеніи, что онѣ представляютъ собой кратчайшее разстояніе между двумя точками на этой поверхности; ихъ называютъ *геодезическими* линіями поверхности. Такъ на сферѣ геодезическими линіями являются окружности большихъ круговъ; сверхъ того сфера допускаетъ методъ наложенія, ибо каждая сферическая фигура можетъ быть перемѣщаема по сферѣ безъ деформаціи. Но, съ другой стороны, большой кругъ дѣйствительно вполнѣ опредѣляется двумя точками, лежащими на сферѣ, но только въ томъ случаѣ, если онѣ не представляютъ собой двухъ противоположныхъ полюсовъ. Это ограниченіе не даетъ возможности перенести плоскую геометрію на сферу цѣликомъ. Между сферической и плоской геометріей существуетъ аналогія, но не полная. Такъ какъ сфера представляетъ собой единственную поверхность, произвольныя части которой могутъ быть совмѣщены съ другими ея частями безъ деформаціи, то отъ указаннаго нами обобщенія плоской геометріи пришлось бы отказаться, если-бы счастливая мысль Гаусса не освѣтила-бы этого вопроса съ другой стороны.

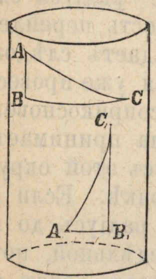
Представимъ себѣ цилиндръ и часть плоскости; послѣднюю можно обвить вокругъ цилиндра; при этомъ плоская поверхность конечно деформируется; но при такой деформаціи величина поверхности не измѣняется во всѣхъ ея частяхъ; т. е. каждый сколь угодно малый элементъ поверхности сохраняетъ свою величину; сохраняетъ также свою длину каждая линія во всѣхъ своихъ частяхъ. Такое совмѣщеніе двухъ поверхностей, при которомъ одна изъ нихъ деформируется, сохраняя однако величину каждаго элемента поверхности и длину каждаго линейнаго элемента, называется развертываніемъ одной поверхности на другую. Замѣчательное свойство поверхностей, развертываемыхъ одна на другую, заключается въ томъ, что геодезическія линіи одной изъ нихъ при этой деформаціи превращаются въ геодезическія линіи дру-

*) На этой аксіомѣ основанъ методъ наложенія.

гой поверхности. Это и понятно. Представимъ себѣ, напримѣръ, что прямая AB, на плоскости, при развертываніи*) послѣдней на цилиндрическую поверхность, не перешла-бы въ геодезическую линію. Это значило-бы, что на цилиндрѣ между точками A и B можно провести другую линію, болѣе короткую. Представимъ себѣ слѣдъ ея на плоскости, покрывающей цилиндръ и развернемъ послѣднюю; вторая линія при этомъ обратится въ плоскую кривую, проходящую между точками A и B, и такъ какъ обѣ линіи сохранятъ свою длину, то она окажется меньше прямой AB, а этого допустить нельзя. Изъ этого слѣдуетъ, что геодезическія линіи на цилиндрѣ имѣютъ троякую форму. Тѣ прямыя, которыя при развертываніи плоскости на цилиндръ остаются параллельными оси, сохраняютъ свою форму; перпендикулярныя къ ней прямыя обращаются въ круги, а наклонныя—въ винтовыя линіи.

Изъ сказаннаго вытекаетъ также, что каждая часть цилиндрической поверхности можетъ быть совмѣщена развертываніемъ со всякой другой частью послѣдней: дѣйствительно, для этого достаточно себѣ представить, что эта часть поверхности развернута сначала на плоскость, а затѣмъ перенесена на другую часть поверхности цилиндра.

Условимся теперь считать двѣ фигуры на кривой поверхности тождественными, если онѣ могутъ быть приведены въ совмѣщеніе деформаціей, характеризующей собой процессъ развертыванія. Такъ прямоугольные геодезическіе треугольники (фиг. 25) ABC и $A_1B_1C_1$ на цилиндрической поверхности, мы будемъ считать тождественными, хотя для ихъ совмѣщенія прямая AB должна деформироваться въ дугу круга A_1B_1, наоборотъ, дуга круга BC превращается въ прямую B_1C_1, а винтовая линія AC превращается въ винтъ A_1C_1 другого хода**). Теперь ясно, что поверхность, на которой такія положенія возможны, удовлетворяетъ тѣмъ формальнымъ положеніямъ, на которхъ построена плоская геометрія, если только всякимъ двумъ точкамъ на ней лежащимъ, соотвѣтствуетъ геодезическая линія, вполнѣ ими опредѣляемая. Планиметрія можетъ быть поэтому цѣликомъ перенесена на такую поверхность. Такъ плоская геометрія mutatis mutandis можетъ быть цѣликомъ перенесена на поверхность цилиндра и мы получаемъ наприм. слѣдующія положенія: „Изъ данной точки на цилиндрѣ можно провести только одну винтовую линію, перпендикулярную къ другому винту; эта линія будетъ короче всякой винтовой линіи, наклонной ко второй. Двѣ винтовыя линіи, одинаково наклоненныя къ третьей, параллельны“ и т. д. Все, что сказано о цилиндрической поверхности, справедливо также относительно конической, хотя на ней геодезическія линіи имѣютъ другую форму.



Фиг. 25.

Остается рѣшить вопросъ, какія поверхности допускаютъ такое совмѣщеніе однѣхъ своихъ частей съ другими. Это далеко не общее свойство

---

*) Сохраняемъ здѣсь установленный общій терминъ, хотя было-бы образнѣе сказать — „при навертываніи.“

**) Лица, желающія ближе познакомиться съ этимъ вопросомъ, найдутъ другое освѣщеніе этого предмета въ статьѣ Poincaré, помѣщенной въ № 143 и 144 „Вѣстника“.

всѣхъ поверхностей. Если бы мы срѣзали сегментъ трехоснаго эллипсоида вблизи большой оси и хотѣли бы привести его въ совмѣщеніе съ частью поверхности, прилегающей къ малой оси, то это оказалось бы безусловно невозможнымъ безъ растяженія поверхности и линій, на ней находящихся. Гауссомъ установленъ критерій для рѣшенія этого вопроса. Чтобы выяснить этотъ критерій, намъ необходимо познакомиться съ понятіемъ о кривизнѣ линій и поверхностей. Кривизной окружности называется величина, обратная радіусу. Терминъ этотъ становится вполнѣ понятнымъ, если обратимъ вниманіе на то, что съ увеличеніемъ радіуса окружность приближается къ касательной и потому въ каждой своей точкѣ представляется менѣе искривленной. Представимъ себѣ теперь произвольную кривую и касательную въ какой нибудь ея точкѣ. Мы всегда имѣемъ возможность провести безчисленное множество окружностей, касающихся этой прямой въ той же точкѣ и при томъ такъ, что кривая (или, по крайней мѣрѣ, части этой кривой, прилегающія къ данной точкѣ), будетъ проходить между окружностью и касательной.

Представимъ себѣ, что мы построили такую окружность съ весьма малымъ радіусомъ, который мы затѣмъ постепенно увеличиваемъ. Ясно, что при этомъ окружность будетъ приближаться къ кривой, что наступитъ наконецъ моментъ, когда дальнѣйшее увеличиваніе радіуса сдѣлается уже невозможнымъ въ томъ смыслѣ, что окружность перейдетъ на другую сторону кривой. Предѣльная окружность обладаетъ слѣдовательно тѣмъ свойствомъ, что между ней и кривой нельзя уже провести касательной окружности; она имѣетъ наиболѣе тѣсное соприкосновеніе съ кривой, наиболѣе приближается къ ней; ея кривизна принимается поэтому за мѣру кривизны въ этой точкѣ кривой; радіусъ этой окружности называютъ радіусомъ кривизны кривой въ этой точкѣ. Если мы имѣемъ дѣло съ прямой, то можно очевидно увеличить радіусъ до какихъ угодно размѣровъ, и окружность не сдѣлается предѣльной, потому что между нею и прямой все таки можно будетъ описать новую окружность. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что радіусъ кривизны прямой безконечно великъ, а самая кривизна равна нулю.

Въ кривой поверхности кривизна различныхъ ея сѣченій, проходящихъ чрезъ одну и ту-же точку, вообще говоря, различна. Очевидно при такихъ условіяхъ имѣется нѣкоторое сѣченіе, въ которомъ кривизна достигаетъ maximum'а, и, наоборотъ, сѣченіе въ которомъ она достигаетъ minimum'а*). Средняя пропорціональная между соотвѣтствующими имъ радіусами кривизны называется радіусомъ кривизны поверхности, а величина ей обратная называется кривизной поверхности въ этой точкѣ. Кривизна плоскости равна слѣдовательно нулю. Отличаютъ еще положительную и отрицательную кривизну поверхностей. Если наблюдателю, смотрящему съ одной стороны поверхности на нѣкоторую ея точку, всѣ сѣченія представляются выпуклыми или вогнутыми, то кривизна поверхности считается положительной. Такъ, напримѣръ, сфера представляетъ собой поверхность съ постоянной положительной кривизной.

---

*) Анализъ обнаруживаетъ, что эти сѣченія взаимно перпендикулярны. Ихъ называютъ главными сѣченіями поверхности.

Наоборотъ, если одни изъ этихъ сѣченій выпуклы, а другія вогнуты, то кривизна поверхности считается отрицательной. Такъ поверхность обыкновеннаго сѣдла имѣетъ отрицательную кривизну, потому что наблюдателю, смотрящему на поверхность сѣдла сверху, продольное сѣченіе представляется вогнутымъ, а поперечное выпуклымъ. Съ поверхностью, имѣющей постоянную отрицательную кривизну, намъ прійдется встрѣчаться ниже.

Въ знаменитомъ своемъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, Гауссъ обнаружилъ, что для того чтобы одна поверхность могла быть развернута на другую, необходимо и достаточно, чтобы кривизны поверхностей въ точкахъ приходящихъ въ совпаденіе— были равны. Поэтому для того, чтобы фигуру можно было перенести на любую часть кривой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы кривизна этой поверхности была одинакова во всѣхъ ея точкахъ. Такихъ поверхностей безчисленное множество; между ними имѣется безчисленное множество такихъ, въ которыхъ каждыми двумя точками опредѣляется геодезическая линія, и вся плоская геометрія можетъ быть перенесена на эти поверхности, по сколько она зависитъ отъ тѣхъ аксіомъ, и формальныхъ опредѣленій, которыя приведены нами выше.

Читателю, надѣюсь, ясно, что на такое обобщеніе мы имѣемъ право только въ томъ случаѣ, если система планиметріи была построена чисто формально; т. е. если мы въ нашихъ доказательствахъ опирались только на формальныя опредѣленія, вполнѣ отрѣшившись отъ того образа, который соединяется съ каждымъ терминомъ въ нашемъ представленіи. Иначе мы не были бы гарантированы въ томъ, что всѣ выводы не представляютъ собой специфическихъ свойствъ элементовъ той формы, которую мы имъ приписывали.

Въ этомъ заключается все значеніе формальной науки.

Однако изложенныя соображенія могутъ быть примѣнены еще и другимъ путемъ. Предположимъ, что мы построили геометрическую систему на какой-нибудь поверхности. Допустимъ далѣе, что независимо отъ этой системы, мы знаемъ какое-нибудь свойство (А) геометрическихъ образовъ, построенныхъ на этой поверхности; свойство, найденное нами, скажемъ, экспериментально. Представимъ себѣ другую поверхность, къ которой примѣняются всѣ тѣ формальныя положенія, изъ которыхъ мы исходили. Если бы оказалось, что это свойство (А) не оправдывается на второй поверхности, то мы были бы въ правѣ утверждать, что это свойство не представляетъ собой логическаго слѣдствія тѣхъ положеній, изъ которыхъ мы исходили.

Вотъ тѣ общія соображенія, которыя мы считали необходимымъ предпослать изложенію системы Лобачевскаго.

В. Каганъ (Одесса).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ.

ДАВЛЕНІЕ ВОЗДУХА.

Глава третья.

Нѣсколько замѣчаній о теоріи барометра.

(*Окончаніе* *).

„Но представимъ себѣ, что разсматриваемый нами столбъ есть столбъ воздуха, среди котораго распространенъ паръ. Допустить законъ Дальтона значитъ допустить, что и въ этомъ случаѣ, какъ скоро равновѣсіе установится, паръ долженъ имѣть точно такое распредѣленіе и точно такую упругость, какія онъ имѣлъ бы, если бы одинъ наполнялъ данный столбъ. Но такое рѣшеніе вопроса вовсе не есть необходимое: о явленіи можно имѣть совсѣмъ иное представленіе. Гдѣ-бы мы на протяженіи воздушнаго столба ни разсматривали опредѣленный объемъ воздуха, этотъ объемъ, взятый отдѣльно, *можетъ* принять въ себя,—при благопріятныхъ условіяхъ, если есть достаточное количество жидкости,—количество пара, потребное для насыщенія. Такимъ образомъ колонна воздуха, на всемъ протяженіи своемъ, при установившемся равновѣсіи, можетъ быть насыщена паромъ. При этомъ часть воздуха изъ верхнихъ слоевъ будетъ вытѣснена въ нижніе и упругость пара въ данномъ слоѣ не будетъ опредѣляться вѣсомъ всей колонны пара выше этого слоя, а просто будетъ придаваться къ упругости воздуха. Такое именно представленіе имѣлъ Пуассонъ, какъ видно изъ слѣдующаго любопытнаго мѣста его *Механики* **). Пуассонъ доказываетъ, что количество пара въ нашей атмосферѣ превышаетъ то, которое окружило-бы бы землю, если-бы воздуха не было, и вся атмосфера состояла изъ одного пара, который тогда дѣйствительно образовалъ-бы уравновѣшивающуюся въ себѣ атмосферу.

„Если-бы, говоритъ Пуассонъ, не существовала облекающая насъ атмосфера, то она замѣнилась-бы другой атмосферой, образованной водянымъ паромъ, который поднялся-бы съ моря. Законъ плотности въ различныхъ слояхъ ея и высота зависѣли-бы отъ закона температуръ, какой имѣлъ-бы мѣсто въ этой атмосферѣ и о которомъ мы не можемъ составить себѣ никакого понятія; но каковъ-бы этотъ законъ ни былъ, общій вѣсъ вертикальной цилиндрической колонны этого пара, имѣющей основаніемъ единицу поверхности, былъ-бы всегда равенъ упругой силѣ, соотвѣтствующей самой нижней точкѣ этой колонны; и если паръ достигъ maximum'а плотности, то эта сила будетъ зависѣть только отъ соотвѣтствующей температуры. На самомъ дѣлѣ мы не знаемъ, ка-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 164, 166, 169, 170 и 172.

**) Traité de Mécanique. 3-me ed. Bruxelles. 1838 p. 403.

кая была-бы эта температура; можно думать, что она была-бы значительно меньше той, которая теперь существуетъ на земной поверхности, ибо упругая среда, находящаяся въ прикосновенiи съ этою поверхностью, имѣла-бы тогда значительно меньшую плотность, чѣмъ обыкновенный воздухъ. Но допустимъ, для примѣра, что эта температура была-бы сплошь $18^0,75$. Вѣсъ колонны водяной атмосферы, имѣющей основанiемъ квадратный дециметръ, не превышалъ-бы вѣса ртутной призмы того же основанiя и 0,016 метр. высоты, то-есть вѣса 0,16 литра ртути или около 2,300 граммовъ. Что касается до вѣса того количества водяного пара, какое можетъ содержаться въ *колоннѣ воздуха* нашей атмосферы, то оно зависитъ отъ закона пониженiя температуры въ вертикальномъ направленiи и не можетъ быть вычислено; но если основанiе колонны есть квадратный дециметръ, а нижняя температура $18^0,75$, то легко убѣдиться, что этотъ вѣсъ долженъ превосходить 2,300 граммовъ, такъ какъ на всемъ протяженiи колонны, гдѣ температура мало разнится отъ $18^0,75$, и до высоты, пока давленiе не сдѣлается равнымъ 0,016 м., всякiй литръ воздуха можетъ заключать въ себѣ до 16 миллиграммовъ пара. Такимъ образомъ атмосфера, которая давитъ на поверхность земли, вовсе не есть, какъ говорили прежде, причина, мѣшающая жидкостямъ испариться и разсѣяться въ пространствѣ; напротивъ того, ея присутствiе позволяетъ пару держаться надъ землею въ бо̀льшемъ количествѣ, чѣмъ какъ если-бы этой атмосферы не существовало".

„Нельзя не признать воззрѣнiе Пуассона болѣе естественнымъ, чѣмъ воззрѣнiе, основанное на принципахъ Дальтона. Во всякомъ случаѣ этотъ вопросъ имѣетъ только теоретическое значенiе.

„Наконецъ, мы должны отличать: 3) собственно *теорiю Дальтона*, придуманную имъ для того, чтобъ объяснить взаимное проникновенiе смѣшиваемыхъ газовъ и суммированiе ихъ упругостей. Теорiя эта, какъ мы видѣли, основывается на совершенно произвольномъ допущенiи, что между частицами разнородныхъ газовъ нѣтъ взаимнаго отталкиванiя, какъ между частицами одного и того же газа, и что смѣшанная атмосфера, достигнувшая состоянiя равновѣсiя, не только *можетъ быть разсматриваема* какъ состоящая изъ отдѣльныхъ атмосферъ, но и дѣйствительно состоитъ изъ такихъ независимыхъ атмосферъ. Мы видѣли, что теоретическiя соображенiя Дальтона были опровергнуты уже вскорѣ послѣ появленiя его теорiи. Дальтонъ самъ въ одномъ изъ своихъ позднѣйшихъ мемуаровъ (*Philos. Trans.* 1826, part II. 175) съ большою уступчивостью говоритъ о своей теорiи и признаетъ, что принятiе ея сопряжено съ большими трудностями. Вообще мы вправѣ сказать, что гипотеза Дальтона объ отсутствiи взаимодѣйствiя частицъ смѣшанныхъ газовъ или газовъ и паровъ не выдержала разбора, такъ что въ настоящее время въ курсахъ физики обыкновенно и не упоминается объ этомъ пунктѣ теорiи, и законъ смѣшенiя газовъ выражается въ простой формѣ: „упругость пара, насыщающаго пространство, въ воздухѣ и газахъ та же самая, какъ въ пустотѣ". Только изрѣдка можно встрѣтить намеки на первоначальную теорiю. Такъ на стр. 312 перваго тома Физики Пулье (7-е изданiе, 1856 г.) читаемъ: „при изслѣдованiи смѣшенiя газовъ и паровъ представляется теоретическiй вопросъ значительной важности, именно вопросъ о томъ, оказываютъ-ли частицы разнородныхъ газовъ давленіе однѣ на другія; давятъ-ли, напримѣръ, частицы воздуха на частицы водяного пара и наоборотъ. *Все, повидимому, указываетъ*, что взаимное дѣйствіе существуетъ только между частицами одного рода... Мы увидимъ, впрочемъ, изучая распространеніе звука въ смѣсяхъ этого рода (тутъ-же прибавляетъ Пулье), что существованіе равномѣрнаго сообщенія колебательнаго движенія предполагаетъ дѣйствіе на разстояніи между всѣми частицами безъ различія". Очевидно, что послѣднее указаніе вполнѣ разрушаетъ силу неопредѣленнаго выраженія о томъ, будто-бы *все* указываетъ на отсутствіе взаимодѣйствія разнородныхъ частицъ.

„Съ другой стороны, Дальтоново ученіе,—приведенное въ физикѣ въ формѣ простого выраженія явленія, замѣчаемаго въ ограниченныхъ сосудахъ, гдѣ паръ образуется среди газа,—въ метеорологіи было, какъ мы уже имѣли случай замѣтить, принято во всей широтѣ и повело ко многимъ, болѣе или менѣе произвольнымъ выводамъ. Разсмотрѣніе независимой атмосферы пара сдѣлалось однимъ изъ важныхъ пунктовъ метеорологическаго ученія. Метеорологи ссылаются на законъ и теорію Дальтона, какъ на доказанные въ физикѣ, тогда какъ физики оставляютъ и тотъ и другую въ сторонѣ, ограничиваясь явленіемъ, не имѣющимъ прямого приложенія къ вопросамъ метеорологіи. Такимъ путемъ и произошли тѣ сбивчивыя и неясныя понятія о роли пара, распространеннаго среди атмосферы, о которыхъ мы уже говорили. Ни одно изъ слѣдствій, выводимыхъ изъ приложенія теоріи Дальтона къ атмосферному пару, какъ мы видѣли, не оправдалось; тѣмъ не менѣе ученіе о независимой атмосферѣ пара остается общепринятымъ въ метеорологіи, такъ какъ оно кажется оправданнымъ въ физикѣ".

III.

Вода бываетъ въ атмосферѣ не только въ формѣ пара, но въ сгущенной формѣ тумана, облаковъ, дождя, снѣга. Спрашивается какое должно произойти измѣненіе въ давленіи данной атмосферной колонны если въ ней, вслѣдствіе, напримѣръ, проникновенія холоднаго потока, быстро произошло осажденіе пара и превращеніе его изъ упругаго состоянія въ жидкое? Какими послѣдствіями для атмосфернаго давленія долженъ сопровождаться такой переходъ? Этотъ вопросъ серьезно еще не затронутъ, хотя заслуживаетъ большого вниманія.

Если мы имѣемъ два соединенныя между собою пространства разной температуры, то, какъ извѣстно, паръ изъ болѣе теплаго дистилируется въ болѣе холодное. Не должно ли явленіе это имѣть мѣсто въ атмосферѣ, гдѣ вверху холоднѣе чѣмъ внизу? Явленіе было бы значительно и постоянно, если бы не было атмосферныхъ потоковъ.

Окончимъ замѣчанія наши указаніемъ на кинетическую теорію газообразныхъ тѣлъ, измѣняющую наши понятія о характерѣ и значеніи упругости и давленія газа, какъ вообще, такъ и въ случаѣ давленія барометрическаго. Теорія эта становится общепринятою и между тѣмъ какое множество соединенныхъ съ нею вопросовъ остается неразрѣшеннымъ! Мемуаровъ и трактатовъ математическаго содержанія, развивающихъ эту теорію, много, но опытныхъ изслѣдованій, произведенныхъ для оправданія теоріи, очень мало. Меня удивляетъ, что внѣ разбора и изслѣдованія оставленъ такой важный вопросъ, какъ истеченіе газа въ пустое пространство или въ упругую среду меньшаго давленія. Такое истеченіе, особенно истеченіе въ пустоту, ближайше связано съ предполагаемою скоростію частицъ, изъ которыхъ состоитъ данная масса газа. Если газъ вытекаетъ въ пустое пространство чрезъ данное отверстіе, то частицы его, очевидно, вторгаются въ это пространство съ тою скоростію, какая имъ присуща. Тотъ потокъ частицъ, который былъ бы отраженъ отъ стѣнки резервуара, если бы отверстіе было закрыто, выходитъ чрезъ отверстіе, продолжая путь съ тою скоростію, какую частицы эти имѣютъ. Скорость истеченія должна быть ближайше связана съ собственною скоростію частицъ. Къ сожалѣнію опытовъ съ истеченіемъ газовъ чрезвычайно мало и наиболѣе точные изъ нихъ —опыты Вейсбаха,—дѣлались при небольшихъ избыткахъ давленія.

Въ заключеніе укажу на замѣченное мною отношеніе между собственною скоростью частицъ газа, опредѣленною по кинетической теоріи, и скоростію его истеченія въ пустоту, вычисляемой по общимъ механическимъ соображеніямъ.

По общей гидродинамической теоріи, скорость U истеченія газа въ пустоту выражается формулою.

$$U^2 = 2g\frac{p}{s},$$

гдѣ $g = 9^m,809$ ускореніе тяжести; p давленіе газа на единицу поверхности, s вѣсъ единицы объема газа въ данныхъ условіяхъ.

Съ другой стороны, по кинетической теоріи газовъ, собственная скорость G частицъ находится по формулѣ *).

$$G^2 = 3g\frac{pv}{q}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ v разсматриваемый объемъ газа, q вѣсъ этого объема. Сл. $\frac{q}{v} = s$ вѣсъ единицы объема.

Вставивъ величину q въ формулу (1), получимъ

$$G^2 = 3\frac{g\,p}{s}.$$

Сравнивая двѣ формулы, выражающія скорости U и G, видимъ, что

$$U^2 = {}^2/_3\,G^2;\ U = G\sqrt{{}^2/_3}.$$

---

*) Clausius, *Abhand. ü. d. Wärmetheorie*. 1864. 2 Abth, 255. Verdet, *Oeuvres*, VIII. 29 (1870 г.).

Чѣмъ объясняется это различіе и что собственно надлежитъ разумѣть подъ скоростію газа, истекающаго въ пустоту или въ среду меньшаго давленія? Удовлетворительнаго отвѣта на вопросы эти не имѣется.

Интересно, что по теоретическимъ изсѣдованіямъ Максвелля вычисляемая скорость G (соотвѣтствующая средней энергіи частицъ) не выражаетъ дѣйствительной скорости газовыхъ частицъ: частицы имѣютъ разнообразныя скорости, но между всѣми преобладаетъ въ каждомъ данномъ случаѣ одна, *вѣроятнѣйшая.* Скорость эта W, по Максвеллу, связана со скоростью G формулою

$$W^2 = {}^2/_3\, G^2.$$

Замѣчаемъ, что $U = W$. Скорость истеченія въ пустоту равна скорости W, ближе всего представляющей собою дѣйствительную скорость частицъ.

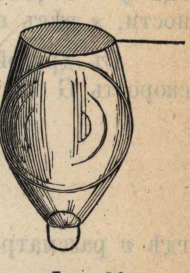
Проф. *Н. Любимовъ.*

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ЖИДКИХЪ ТѢЛЪ.

Опыты и наблюденія.

*(Продолженіе *)*

15. Приготовимъ большой пузырь и, укрѣпивъ его подъ кольцомъ, подвѣсимъ къ нему небольшое колечко съ петлей снизу, какъ показано на фиг. 26. Трубку, которая служитъ для выдуванія пузырей, обмокнемъ въ мыльную воду, введемъ вертикально сверху внутрь подвѣшеннаго пузыря и выдуемъ внутри его другой пузырь, нѣсколько меньшаго діаметра. Теперь нужно легкимъ толчкомъ стряхнуть пузырь съ трубки и вынуть послѣднюю. Остается еще удалить капли съ нижней части пузырей. Для этого ту же трубку вводимъ осторожно снизу внутри подвѣшеннаго колечка, поддерживая его рукою.



Фиг. 26

Кольцо растягиваетъ внѣшній пузырь, а внутренній сохраняетъ шарообразную форму. Поднимая нижнее колечко, можно придать и наружному пузырю шарообразный видъ. Опуская колечко, растягиваемъ внѣшній пузырь; при этомъ его стѣнки нажимаютъ на внутренній пузырь и оба принимаютъ овальную форму. Наконецъ, если выпускать воздухъ изъ внѣшняго пузыря (практика покажетъ, какъ это сдѣлать съ помощью той же трубки), то онъ будетъ облегать внутренній такимъ образомъ, что между ними останется едва замѣтное пространство. Тѣмъ не менѣе, вдувая воздухъ во внѣшній пузырь, легко видѣть, что пленки остаются раздѣльными. При этомъ второй пузырь можно заставить вращаться внутри перваго, если вдувать посильнѣе

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 163, 165, 171 и 173.

воздухъ. Проколовъ наружный пузырь, освобождаемъ внутренній, не нарушая его цѣлости*).

16. Внутренній пузырь можно выдуть изъ мыльной воды, къ которой прибавлено небольшое количество красящаго вещества, называемаго флуоресцеиномъ (на стаканъ мыльной воды слѣдуетъ положить краски не больше, чѣмъ сколько ея уложится на 3 mm. конца перочиннаго ножа). Тогда при солнечномъ или электрическомъ свѣтѣ (также при свѣтѣ гейслеровой трубки) внутренній пузырь будетъ флуоресцировать (свѣтиться) прекраснымъ зеленымъ свѣтомъ, при чемъ внѣшній остается совершенно темнымъ.

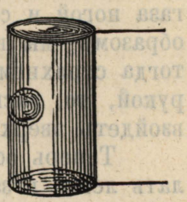
Такимъ образомъ флуоресцирующая краска не переходитъ съ одного пузыря на другой, откуда можно заключить, что обѣ пленки не касаются другъ друга.

17. Если внутренній шаръ наполнить свѣтильнымъ газомъ или водородомъ, то этотъ шаръ поднимется внутри внѣшняго и можетъ держать въ воздухѣ не только этотъ послѣдній вмѣстѣ съ нижнимъ колечкомъ, но еще и нѣкоторый грузъ, напр. клочекъ бумажки (фиг. 28). Само собою разумѣется, что внѣшній пузырь долженъ имѣть возможно большую величину (съ апельсинъ)**).

Фиг. 28.

18. Если пузырь съ воздухомъ, внутри котораго находится легкій шаръ, растянуть въ цилиндръ между двумя кольцами (фиг. 29), то шаръ будетъ кататься по стѣнкамъ пузыря, какъ въ твердой трубкѣ, если будемъ поднимать пузырь вверхъ тѣмъ или другимъ концомъ.

19. Если второй пузырь наполнить газомъ пополамъ съ воздухомъ и внутри его выдуть третій однимъ газомъ, то оба шара поднимутся кверху внутри перваго и мы будемъ имѣть систему трехъ касательныхъ сферическихъ поверхностей, поразительную по своей правильности.



Фиг. 29.

Наблюдая такую систему, можно думать, что предъ нами дѣйствительно геометрическое, а не физическое тѣло: мы видимъ строгое совершенство формъ поверхностей, тол-

*) Чтобы устранить возможность образованія капель внутри трубки (капель, которыя могутъ стекать въ пузырь и портить его), трубку слѣдуетъ приготовить изъ одного куска стекла, какъ показано на фиг. 27 или слѣдующимъ образомъ: короткій кусокъ широкой трубки закрываемъ съ обоихъ концовъ пробками, сквозь которыя вставляемъ два куска трубки; одинъ покороче для выдуванія пузыря, а другой подлиннѣе съ колѣномъ, чтобы брать въ ротъ. У этого послѣдняго внутренній конецъ слѣдуетъ оттянуть, чтобы тонкая струя воздуха равномѣрнѣе раздувала пузырь. Внутренній діаметръ трубки для пузыря долженъ быть не меньше 8 mm. Когда нужно увеличить пузырь, то, введя въ него намоченную трубку, слѣдуетъ прежде потянуть въ себя; тогда пленка внутри трубки поднимется вверхъ и лопнетъ. Безъ этой предосторожности внутри можетъ образоваться новый пузырь.

Фиг. 27.

**) Каучуковую трубку, проводящую газъ, можно положить на полъ и прижать ногой; тогда руки будутъ свободны для другихъ манипуляцій (поддерживанія колечка щина которыхъ ускользаетъ отъ нашего вниманія, а прозрачность дополняетъ иллюзію.

Въ этой системѣ интересно наблюдать изящныя ритмическія движенія. Вызвать ихъ можно различнымъ образомъ, напр. нажимая пленкой снизу на внѣшній шаръ.

Систему трехъ пузырей можно получить слѣдующимъ образомъ:

Къ кольцу центиметровъ въ 5 діаметромъ прикрѣпимъ пузырь величиною въ большой апельсинъ. Другое кольцо въ 2—3 цм. діаметромъ, съ ручкой изъ проволоки, обмакнемъ въ мыльную воду, введемъ снизу вверхъ внутрь пузыря и укрѣпимъ его ручку также на штативѣ. Внутри перваго кольца вводимъ въ пузырь смоченную трубку и выдуваемъ внутренній пузырь, укрѣпивъ его въ самомъ началѣ его образованія на внутреннемъ кольцѣ. Дальше, наблюдая, чтобы оба пузыря не пришли въ соприкосновеніе, вынимаемъ трубку и, снова обмакнувъ ее въ мыльную воду и соединивъ съ газомъ, вводимъ сверху внутрь обоихъ пузырей и выдуваемъ третій, свободный. Наклонивъ трубку, стряхиваемъ этотъ пузырь и предоставляемъ ему подняться къ вершинѣ второго пузыря. Прежде чѣмъ вынуть освободившуюся трубку, впускаемъ немного газа во второй; при этомъ нужно обратить вниманіе, не осталась ли пленка въ трубкѣ, что могло бы повести къ образованію новаго пузыря. Какъ уже было указано въ опытѣ 15-мъ, въ этомъ случаѣ нужно потянуть въ себя воздухъ. Такъ какъ здѣсь пузырь надувался струей газа безъ помощи рта, то того же самаго достигнемъ слѣдующимъ образомъ: когда еще третій пузырь не совсѣмъ готовъ, закроемъ притокъ газа ногой и сожмемъ лѣвой рукой часть каучуковой трубки; такимъ образомъ мы втолкнемъ въ пузырь послѣднюю порцію газа и только тогда стряхнемъ пузырь. Если теперь освободить трубку, сжатую лѣвой рукой, то, расширяясь, она потянетъ газъ и пузырекъ внутри трубки взойдетъ вверхъ и лопнетъ.

Теперь остается вынуть трубку и внутреннее кольцо. Первое сдѣлать легко и затруднить можетъ только второе, Легче всего это удается сдѣлать, если первый пузырь достаточно великъ; поэтому въ концѣ всего его еще можно увеличить на сколько это позволитъ сдѣлать прочность пленки, съ которой мы должны быть знакомы изъ практики съ даннымъ мыльнымъ растворомъ.

К. Чернышевъ (Юрьевъ).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Къ выводу формулы длины окружности,

Для вывода формулъ длины окружности и площади круга по способу предѣловъ необходимо доказать, что разность между периметрами

и трубки для вдуванія). Для того, чтобы вынуть трубку, когда внутренній пузырь готовъ, нужно ее нагнуть и затѣмъ уже стряхнуть пузырь. Если этой предосторожности не сдѣлать, то легкій пузырь, поднимаясь вверхъ, можетъ соединиться съ внѣшнимъ вдоль стѣнокъ трубки.

вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около него правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, и тогда окружность, какъ постоянная величина, заключенная между двумя перемѣнными (т. е. периметрами), должна быть предѣломъ для обѣихъ перемѣнныхъ величинъ. Пріемъ, употребляемый для этого въ элементарной геометріи, напомнимъ, таковъ:

Описываютъ и вписываютъ въ данный кругъ одноименные правильные многоугольники, которые будутъ подобными. Называя периметръ описаннаго многоугольника черезъ P, вписаннаго черезъ p, апоѳему описаннаго черезъ R и вписаннаго черезъ a, имѣемъ

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{a} \text{ или } \frac{P-p}{p}=\frac{R-a}{a},$$

откуда

$$P-p=\frac{p}{a}\,(R-a).$$

Такъ какъ множитель $\frac{p}{a}$ величина конечная, а $R-a$ стремится къ нулю, то и разность $P-p$ также стремится къ нулю; а потому, обозначивъ длину окружности черезъ C, изъ неравенствъ

$$P>C>p$$

заключаемъ, что $C=\lim P=\lim p$.

Значитъ, все сводится къ тому, чтобы показать, что $R-a$ стремится къ нулю. Отступая отъ обычнаго способа разсужденія по поводу этой теоремы (т. е. что разность между радіусомъ и апоѳемой менѣе половины стороны правильнаго вписаннаго въ кругъ многоугольника), можно установить, такъ сказать, некосвенную зависимость между разностью $R-a$ и числомъ n сторонъ правильныхъ многоугольниковъ, вписываемыхъ въ кругъ и описываемыхъ около него,—а прямую (функціональную).

Для этого воспользуемся извѣстною теоремою:

„Если изъ какой нибудь точки, лежащей внутри правильнаго многоугольника, опустимъ перпендикуляры на всѣ стороны его, то сумма этихъ перпендикуляровъ, дѣленная на число сторонъ многоугольника, равняется апоѳемѣ".

Пусть периметръ описаннаго около даннаго круга правильнаго многоугольника P, периметръ вписаннаго одноименнаго многоугольника p, апоѳема перваго R, апоѳема втораго a, число сторонъ n. Возьмемъ на одной изъ апоѳемъ R произвольную точку и опустимъ изъ нея перпендикуляры на стороны обоихъ многоугольниковъ. Называя перпендикуляры на стороны описаннаго многоугольника черезъ H_1, H_2, H_3. H_n, а перпендикуляры на стороны вписаннаго черезъ $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$, можемъ написать, на основаніи вышеприведенной теоремы,

$$R=\frac{H_1+H_2+H_3+\;.\;\;.+H_n}{n};\; a=\frac{h_1+h_2+h_3+\;.\;\;.+h_n}{n}$$

откуда

$$R-a=\frac{H_1}{n}+\frac{H_2}{n}+\frac{H_3}{n}+\ldots+\frac{H_n}{n}-\frac{h_1}{n}-\frac{h_2}{n}-\frac{h_3}{n}-\ldots-\frac{h_n}{n}.$$

Такъ какъ H_1, $H_2 \ldots H_n$, h_1, $h_2, \ldots h_n$ при увеличенiи n не обращаются ни въ О, ни въ ∞, то для безконечно большого n разность $R-a$ стремится къ нулю.

В. Захаровъ (Саратовъ).

Тригонометрическое вычисленiе площадей сегмента и пояса круга.

Предполагаемъ, что данъ радiусъ круга r и центральный уголъ сегмента α^0. Площадь такого сегмента равна:

$$\frac{\pi r^2\alpha}{2.180}-\frac{r^2\mathrm{sn}\alpha}{2}=\triangle; \qquad (1)$$

раздробивъ α^0 и 180^0 въ секунды, получимъ:

$$\triangle=\frac{\pi r^2\alpha.3600}{2.180.3600}-\frac{r^2\mathrm{sn}\alpha}{2};$$

но $\frac{\pi}{180.3600}=\mathrm{sn}1''$, слѣдовательно

$$\triangle=\frac{r^2}{2}\alpha.3600.\mathrm{sn}1''-\frac{r^2\mathrm{sn}\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}\alpha.3600.\mathrm{sn}1''\left(1-\frac{\mathrm{sn}\alpha}{\alpha.3600\mathrm{sn}1''}\right); \qquad (2)$$

такъ какъ $\mathrm{sn}\alpha$ всегда менѣе выпрямленной дуги α, то дробь въ скобкахъ есть правильная и можно положить

$$\frac{\mathrm{sn}\alpha}{\alpha.3600.\mathrm{sn}1''}=\cos\varphi;$$

отыскавъ уголъ φ, будетъ:

$$\triangle=\frac{r^2}{2}\alpha.3600.\,\mathrm{sn}\,1''\,(1-\cos\varphi)=r^2.\alpha.3600.\mathrm{sn}\,1''.\mathrm{sn}^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (3)$$

Къ подобному виду можно привести и формулу для площади пояса круга.

Пусть въ кругѣ радiуса r, даны 2 сегмента съ центральными углами α^0 и β^0 и $\alpha>\beta$, тогда разность площадей этихъ сегментовъ выразитъ площадь пояса круга съ параллельными хордами, стягивающими дуги α и β. Площадь $\triangle_1$ большаго сегмента по формулѣ (2) равна

$$\frac{r^2}{2}\alpha.3600.\,\mathrm{sn}\,1''-\frac{r^2}{2}\mathrm{sn}\,\alpha.$$

Площадь $\triangle_2$ меньшаго сегмента по той же формулѣ будетъ

$$\Delta_2 = \frac{r^2}{2}\beta.3600.\mathrm{sn}\,1'' - \frac{r^2}{2}\mathrm{sn}\,\beta;$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta).\,3600.\,\mathrm{sn}\,1'' - \frac{r^2}{2}(\mathrm{sn}\alpha - \mathrm{sn}\beta)$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta)3600.\mathrm{sn}\,1''\left(1 - \frac{\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\beta}{(\alpha - \beta)3600.\mathrm{sn}\,1''}\right)$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{r^2}{2}(\alpha - \beta)\,3600.\mathrm{sn}\,1''\left(1 - \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta).\,3600.\,\mathrm{sn}\,1'')}\right); \quad (4)$$

положимъ

$$\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta).3600\,\mathrm{sn}\,1''} = \cos\varphi;$$

при этомъ можетъ быть 2 случая: первый, когда $\cos\varphi$ положительный, тогда:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = r^2(\alpha - \beta).3600.\mathrm{sn}\,1''\,\mathrm{sn}^2\frac{\varphi}{2}; \quad (5)$$

второй, когда $\cos\varphi$ отрицательный, тогда вмѣсто φ въ 1-ой четверти, надо взять $180 \mp \varphi$ и въ скобкахъ формулы (4) получится:

$$1 - \cos\,(180 \mp \varphi) = (1 + \cos\varphi) = 2\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

вслѣдствіе чего, выраженіе площади пояса круга будетъ:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = r^2(\alpha - \beta).\,3600\,\mathrm{sn}\,1''\cos^2\frac{\varphi}{2}. \quad (6).$$

А. Жбиковскій (Казань).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Папская обсерваторія. По сообщенію римскаго корреспондента газеты „Daily News“, папа римскій, весьма довольный результатами, полученными обсерваторіей, устроенной на башнѣ Павла VI, и отзывами ученыхъ о ея дѣятельности, рѣшилъ построить на башнѣ кіаромонтскаго музея новую обсевваторію, снабженную самыми сильными и усовершенствованными приборами. Особенное вниманіе будетъ обращено на примѣненіе фотографіи къ астрономіи.

Самая большая буровая скважина будетъ просверлена въ Верхней Силезіи, близь Рибника, въ м-кѣ Парушовичѣ. Скважина эта и теперь уже имѣетъ глубину въ 2000 метровъ, а предполагается довести ее до 2500 метровъ. Пока буреніе пріостановлено для производства точныхъ опредѣленій температуры на различныхъ глубинахъ. Скважина въ нижней своей части имѣетъ всего лишь 7 цм. въ діаметрѣ. Сверленіе производилось при помощи трубокъ Гамесмана, весьма длинныхъ, ввинчивающихся одна въ другую и снабженныхъ на концѣ зубчатой коронкой, играющей роль бурава.

Пониженіе сѣверной части Франціи. Изъ сравненія старыхъ произведенныхъ Бурдалуэ, опредѣленій высотъ различныхъ точекъ рельефа Франціи съ результатами недавнихъ работъ Лаллемана слѣдуетъ, что югъ, а особенно юго-западъ Франціи, постепенно повышается, а весь сѣверъ Франціи до внутреннихъ департаментовъ осѣдаетъ, такъ что Парижъ напр. опускается ежегодно на 1,6 цм. и если такъ будетъ продолжаться, то черезъ 3000 лѣтъ вода Ламанша дойдетъ до собора Парижской Богоматери. Тогда самъ собой осуществится занимающій многихъ проэктъ превращенія Парижа въ морской портъ.

Сифонныя дороги. Такое названіе получили появившіяся недавно въ Соединенныхъ Штатахъ дороги, вагоны которыхъ приводятся въ движеніе струей углекислоты, выходящей изъ толстостѣннаго стального аппарата, наполненнаго сжатой углекислотой. Давленіе этой струи передается, при помощи особаго аппарата, колесамъ вагона.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Аналитическое и графико-аналитическое опредѣленіе разсчетныхъ моментовъ отъ подвижной системы грузовъ въ разрѣзныхъ балкахъ. *И. Гонести*, инженера путей сообщенія. Спб. 1893.

Отвѣтъ Р. Н. Савельеву. *О. Д. Хвольсона.* Спб. 1893.

Ученіе о движеніи и о силахъ. Лекціи *О. Д. Хвольсона.* 2-е изданіе. Спб. 1893. Ц. 2 р.

Актинометрическія изслѣдованія. Построеніе актинометра и пиргеліометра. *О. Хвольсона.* (Съ таблицею и 3-мя чертеж. въ текстѣ). (Прилож. къ LXXII-му тому записокъ Импер. академіи наукъ № 13). Спб. 1893. Ц. 1 р. 60 к.

Основанія ученія объ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ. *И. И. Боргмана*, профессора Импер. С.-Петербургскаго университета. Часть I. Электростатика и электрическій токъ. Спб. 1893.

Опредѣленіе постоянной капиллярности и угла соприкосновенія по размѣрамъ капли (Изъ физической лабораторіи Московскаго университета). *Н. П. Кастерина.* Спб. 1893.

Профессоръ Слугиновъ и „электромагнитная теорія свѣта“. *Д. А. Гольдгаммера,* доктора физики, э. о. профессора Казанскаго университета. Казань. 1893. Цѣна 30 к.

ЗАДАЧИ.

№ 548. Доказать, что выраженіе

$$\sum 2a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$

представляетъ точный квадратъ.

А. Гольденбергъ (Горки).

№ 549. Биссекторъ угла C въ треугольникѣ ABC пересѣкаетъ AB въ точкѣ D. Опредѣлить уголъ A, если извѣстно, что

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC-AC}{AD}.$$

В. Россовская (Курскъ).

№ 550. Въ данный кругъ вписать прямоугольникъ, въ которомъ периметръ длиннѣе высоты на данную прямую.

NB. Рѣшеніе требуется чисто геометрическое.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 551. Рѣшить систему

$$x^3+y^3=(x+y)^2;\ x^2+y^2=x+y+a.$$

И. Вонсикъ (Спб.).

№ 552. Даны двѣ окружности и на одной изъ нихъ точка A. Найти на этой же окружности такую точку X, чтобы касательная XM, проведенная изъ нея къ другой окружности, составляла съ прямой AX прямой уголъ.

С. Конюховъ (Тамбовъ).

№ 553. Опредѣлить minimum

$$x^m+\frac{1}{x^m}$$

при x положительномъ.

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 554. Магнитъ дѣйствуетъ какъ соленоидъ. Поставимъ рядомъ вертикальные соленоидъ и намагниченный стальной полый цилиндръ, имѣющіе оба наверху южный полюсъ. Опустимъ въ тотъ и другой стальной магнитъ, имѣющій также наверху южный полюсъ. Соленоидъ втянетъ этотъ магнитъ, а полый цилиндръ станетъ его выталкивать. Какъ выяснить наглядно причину, по которой соленоидъ и магнитъ производятъ въ разсматриваемомъ случаѣ противоположныя дѣйствія?

Проф. *О. Хвольсонъ* (Спб.).

ТЕМА НА ПРЕМІЮ.

Рѣшеніе уравненія $x^2-2y^2=\pm 1$ въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.

Изслѣдуя составъ двухъ цѣлыхъ чиселъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію

$$x^2-2y^2=+1,$$

можно показать, 1) что нахожденіе двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ приводится къ отысканію двухъ соотвѣтственно меньшихъ цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ либо этому уравненію, либо уравненію

$$x^2-2y^2=-1$$

и 2) что послѣднее уравненіе имѣетъ такое же свойство по отношенію къ первому.

Если теперь расположить въ два ряда

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots \text{ и } y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$$

въ порядкѣ возрастанія всѣ цѣлыя числа, удовлетворяющія уравненію $x^2-2y^2=\pm 1$, то легко показать, что числа x_{2n-1}, y_{2n-1}, x_{2n}, y_{2n} выражаются раціонально черезъ x_n и y_n и что между тремя послѣдовательными членами каждаго ряда существуетъ соотношеніе

$$x_n=2x_{n-1}+x_{n-2},$$

$$y_n=2y_{n-1}+y_{n-2}.$$

Эти соотношенія даютъ возможность выразить x_n и y_n прямо въ функціи n.

NB. Тема должна быть разработана безъ теоріи непрерывныхъ дробей.

С. Шатуновскій (Одесса).

УСЛОВІЯ ПРЕМІИ.—За три *лучшіе* отвѣта редакція назначаетъ три преміи книгами или журналами, по выбору самихъ авторовъ, стоимостью въ *шесть рублей* каждая. Въ счетъ преміи можетъ быть засчитана и подписная плата на „Вѣстникъ Оп. Физики", считая по 2 руб. за семестръ. Срокъ присылки преміи—15 іюня 1894 года.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 352 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^6+(b\sqrt{x}-\sqrt{x^3})^4-ax^2=(b-x)^4+x^4-a.$$

Приведя данное уравненіе къ виду

$$x^4(x^2-1)+(b-x)^4(x^2-1)=a(x^2-1),$$

разобьемъ его на два уравненія:

$$x^2-1=0, \text{ откуда } x=\pm 1,$$

и

$$x^4+(b-x)^4=a.$$

Послѣднее ур—іе легко преобазовывается въ

$$2[x^2(x-b)^2+2b^2x(x-b)]+b^4-a=0,$$

откуда легко опредѣлимъ $x(x-b)$, а слѣд. и x.

И. Вонсикъ (Воронежъ); *К. Щиголевъ, П. Писаревъ, К. Геншель* (Курскъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *В. А.* (Сѣдлецъ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 367 (2 сер.). Доказать справедливость слѣдующаго признака дѣлимости на 7. Пусть, напр., дано число 1691578. Отдѣливъ двѣ цыфры справа, находимъ въ умѣ остатокъ (1) отъ дѣленія 78 на 7 и записываемъ въ сторонѣ; оставшееся число удваиваемъ и съ полученнымъ числомъ 33830 поступаемъ точно также, т. е. находимъ второй остатокъ 2, удваиваемъ 338, находимъ третій остатокъ 6 и т. д. до конца. Если сумма всѣхъ остатковъ будетъ дѣлиться на 7, то и первоначальное число раздѣлится.

Такъ какъ $100=7\times 14+2$, то данное число раздѣлится на 7, если удвоенное число сотенъ + остатокъ отъ дѣленія на 7 числа, составленнаго послѣдними двумя цыфрами, дадутъ число, кратное семи. Поступая съ удвоеннымъ числомъ сотень, какъ съ первоначальнымъ числомъ, получимъ требуемое доказательство.

М. Акопянцъ (Спб.); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 434 *) (2 сер.). Даны два числа. Цыфры второго тѣ же, что и перваго, только расположены въ обратномъ порядкѣ. Доказать, что 1) разность этихъ чиселъ дѣлится безъ остатка на 99, если число цыфръ нечетное; 2) разность ихъ квадратовъ всегда дѣлится на 99 безъ остатка.

Обозначимъ данныя числа черезъ N и N_1. Тогда

$$N = a10^{2n} + b10^{2n-1} + c10^{2n-2} + \ldots + x10^2 + y10 + z,$$
$$N_1 = a + b10 + c10^2 + \ldots + x10^{2n-2} + y10^{2n-1} + z10^{2n},$$
$$N - N_1 = a(100^n - 1) + 10b(100^{n-1}-1) + 10^2c(100^{n-2}-1) + \ldots$$
$$\ldots - 10^2x(100^{n-2} - 1) - 10y(100^{n-1} - 1) - z(100^n - 1).$$

Отсюда очевидно, что при нечетномъ числѣ цыфръ разность данныхъ чиселъ дѣлится на $100 - 1 = 99$.

---

*) Начиная съ этого №, будемъ помѣщать и рѣшенія задачъ, предложенныхъ въ XIV семестрѣ.

. Разность квадратовъ разлагается на произведеніе суммы на разность и поэтому при нечетномъ числѣ цыфръ дѣлится на 99. При четномъ числѣ цыфръ имѣемъ:

$$(N+N_1)(N-N_1)=[a(10^{2n-1}+1)+10b(10^{2n-3}+1)+\ldots.$$
$$+10y(10^{2n-3}+1)+z(10^{2n-1}+1)].[a(10^{2n-1}-1)+10b(10^{2n-3}-1)+$$
$$\ldots.-10y(10^{2n-3}-1)-z(10^{2n-1}-1)].$$

Такъ какъ первый множитель кратенъ 11-и, а второй 9-и, то разность квадратовъ данныхъ чиселъ всегда дѣлится на 99.

Л. Шестаковъ (Спб.); *Е. Пригоровскій* (Попова Гора); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *М. Абрамовъ* (Житоміръ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Бабанская* (неполн. рѣш.), *К. Исаковъ* (Тифлисъ); *Н. Нечаевъ*(?); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 435 (2 сер.). Двѣ окружности касаются внѣшне въ точкѣ А. На общей ихъ касательной, проходящей черезъ точку А, найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ обѣимъ окружностямъ, пересѣкались подъ даннымъ угломъ. Сколько рѣшеній?

1. На линіи центровъ строимъ дугу, вмѣщающую половину даннаго угла. Дуга эта пересѣчетъ общую касательную въ искомой точкѣ, что не трудно доказать. Очевидно, что и точка пересѣченія части дуги, находящейся по другую сторону линіи центровъ, удовлетворяетъ условію. Поэтому задача имѣетъ 4 рѣшенія.

2. На разстояніи отъ центра любой изъ окружностей до внѣшняго центра подобія строимъ дугу, вмѣщающую половину даннаго угла. Дуга эта пересѣчетъ взятую окружность въ одной изъ точекъ касанія.

С. Бабанская (Тифлисъ); *Ш. Табасаранскій* (Баку); *И. Ок—чъ* (Варшава); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *В Шишаловъ* (с. Середа); *Б. Лебедевъ* (Житоміръ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *А. П.* (Пенза); *А. Щиголевъ*, *П. Писаревъ* (Курскъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *Н. Нечаевъ*(?); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

NB. Всѣ, рѣшавшіе эту задачу, (кромѣ двухъ), упустили изъ виду, что задачѣ удовлетворяютъ 4 точки, и упоминаютъ лишь о двухъ рѣшеніяхъ.

№ 437 (2 сер.). Показать, что $xyz=0$, если

$$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$$

Такъ какъ

$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+xz)=1,$$

то

$$xy+yz+xz=0,$$

а такъ какъ

$$(x+y+z)^3=(x^3+y^3+z^3)+3(x+y+z)(xy+yz+xz)-3xyz=1,$$

то $xyz=0$.

Л. Шестаковъ (Спб.); *Е. Пригоровскій* (Попова Гора); *С. Бабанская*, *К. Исаковъ*, *С. Херодиновъ* (Тифлисъ); *В. Хардинъ* (Самара); *А. Абрамовъ* (Житоміръ); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *И. Ок—чъ* (Варшава); *А. Гуминскій* (Троицкъ); *В. Баскаковъ* (Ив.-Вознес.); *А. П.* (Пенза); *П. Ивановъ* (Одесса); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *С. Луневскій* (Калуга); А. *Охитовичъ* (Сарапуль); С. *Адамовичъ*, *Н. Щекинъ*, *П. Писаревъ*, *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Н. Нечаевъ*(?); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 438 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4+(2a-c)x^3+(a^2+2b+1)x^2+(2ab+a^2c-2a-bc)x+a^2+b^2+abc=0.$$

Открывъ скобки, можемъ сгруппировать члены такъ:

$$(x^4+2ax^3+a^2x^2)+(2bx^2+2abx)+b^2-(cx^3-a^2cx)-(bcx-abc)+$$

$$+(x^2-2ax+a^2)=[x(x+a)+b]^2-(x-a)c[x(x+a)+b]+(x-a)^2=0.$$

Дѣля все уравненіе на $(x-a)^2$, что возможно, ибо подстановка a вмѣсто x въ первую часть уравненія не обращаетъ ее въ нуль, получимъ

$$\left[\frac{x(x+a)+b}{x-a}\right]^2-c\left[\frac{x(x+a)+b}{x-a}\right]+1=0.$$

Полагая

$$\frac{x(x+a)+b}{x-a}=y,$$

получимъ квадратное относительно y уравненіе. Дальнѣйшее рѣшеніе очевидно.

Л. Шестаковъ (Спб.); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *В. Шишаловъ* (с. Середа).

№ 477 (1 сер.). Доказать неравенство

$$\lg(1+\delta)<\delta.$$

Неравенство это очевидно для чиселъ, большихъ единицы, при основаніи 10.

Если $\frac{1}{\delta}=m$ есть цѣлое число, то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3}+\ldots+\frac{1}{m^m}=$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots\ldots+\frac{1}{m^m};$$

такъ какъ

$$\left(1-\frac{1}{m}\right),\left(1-\frac{2}{m}\right),\left(1-\frac{3}{m}\right),\ldots.$$

правильныя дроби, то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots.m}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^m}+\ldots,$$

т. е.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3.$$

Если m—дробь, то всегда можно выбрать такое цѣлое число μ, что

$$\mu<m<\mu+1;$$

тогда

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)<3\left(1+\frac{1}{\mu}\right)<4.$$

Если m—отрицательное число, то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-p}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p=\left(\frac{q+1}{q}\right)^{q+1}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^q\left(1+\frac{1}{q}\right),$$

гдѣ q—положительное число, такъ какъ $p=m$ и $q=p-1$; поэтому

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<4$$

во всѣхъ случаяхъ и

$$(1+\delta)^{1/\delta}<4,$$

откуда послѣдовательно найдемъ

$$(1+\delta)^{1/\delta}<10,\ 1+\delta<10^\delta,\ \lg(1+\delta)<\delta.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ); *И. Вонсикъ* (Воронежъ).

№ 510 (1 сер.). Рѣшить задачу Евклида: въ большій изъ двухъ данныхъ концентрическихъ круговъ вписать правильный многоугольникъ четнаго числа сторонъ такъ, чтобы онъ не касался меньшаго круга.

Проводимъ діаметръ AF большей окружности и черезъ точку пересѣченія его M съ меньшей окружностью, ближайшую къ точкѣ A, касательную къ этой послѣдней пересѣкающую большую окружность въ точкахъ P и Q. Дѣля полуокружность большого круга пополамъ и продолжая это дѣленіе, дойдемъ до хорды AB, меньшей AP. Хорда эта и м. б. принята за сторону искомаго многоугольника.

А. Шульженко (Кіевъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій**.

Дозволено цензурою. Одесса, 9-го Ноября 1893 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Обложка
ищется

Обложка
ищется