Обложка
ищется

Обложка
ищется

ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 106.

IX Сем. 25 Ноября 1890 г. № 10.

КЪ ТЕОРІИ ВПИСАННЫХЪ и ОПИСАННЫХЪ
четыреугольниковъ.

1. *Теорема.* Въ описанномъ четыреугольникѣ:

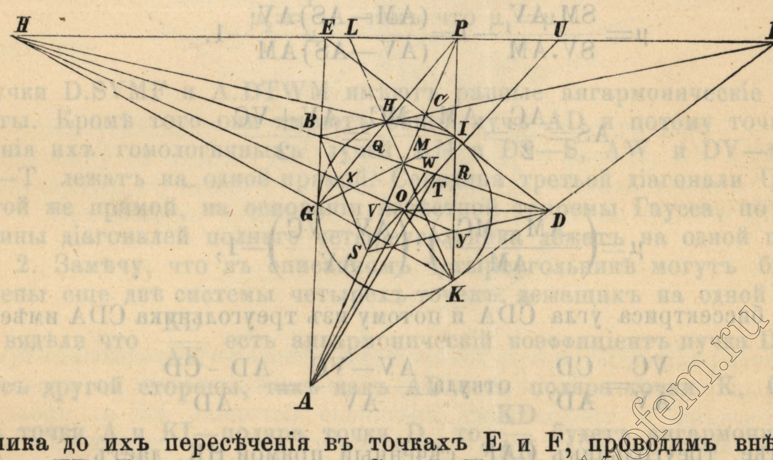
1) Двѣ прямыя, проходящія черезъ четыре точки касанія, и двѣ діагонали пересѣкаются въ одной точкѣ.

2) Центръ круга есть ортоцентръ треугольника, образуемаго тремя діагоналями.

3) Центръ круга и средины діагоналей лежатъ на одной прямой.

Доказательство. 1) Пусть четыреугольникъ ABCD (фиг. 22) описанъ около окружности, центръ которой находится въ O, и G, H, I, K— четыре точки касанія. Продолживъ противоположныя стороны четыре-

Фиг. 22.



угольника до ихъ пересѣченія въ точкахъ E и F, проводимъ внѣшнюю діагональ EF. Далѣе, соединяемъ G и I, H и K, G и H, H и I, I и K, K и G, продолжаемъ противоположныя стороны четыреугольника GHIK до ихъ встрѣчи въ точкахъ N и P, проводимъ внѣшнюю діагональ NP и продолжаемъ HK до пересѣченія съ NP въ точкѣ L. Пусть M будетъ точкою пересѣченія діагоналей GI и HK: проведемъ и неопредѣленно продолжимъ прямыя PM и NM, при чемъ послѣдняя пусть пересѣчетъ прямыя GH и IK въ точкахъ Q и R.

Такъ какъ въ полномъ четыреугольникѣ каждая діагональ дѣлится двумя другими гармонически, то пучекъ N.LHMK есть пучекъ гармоническій и слѣдовательно точка P есть сопряженно-гармоническая точки Q относительно линіи GH и точки R относительно линіи IK, откуда слѣдуетъ, что P есть полюсъ прямой NM; а такъ какъ поляры—точки B—GH и точки D—IK проходятъ черезъ P, то B и D лежатъ на прямой NM.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что точки A, M, C, P лежатъ на одной прямой.

Слѣдовательно прямыя AC, BD, GI, HK пересѣкаются въ точкѣ M и полюсы ихъ N, P, E, F лежатъ на одной прямой, что въ общемъ даетъ три системы четырехъ линій, пересѣкающихся въ одной точкѣ

a) AC, BD, GI, HK *b*) BD, EF, GK, HI *c*) AC, EF, GH, IK

что и требовалось доказать.

2) Мы уже видѣли, что три діагонали AC, BD, EF образуютъ своимъ пересѣченіемъ треугольникъ MNP, въ которомъ каждая вершина есть полюсъ противолежащей стороны и достаточно припомнить, что прямая, проходящая черезъ полюсъ и центръ управляющей окружности, перпендикулярна къ полярѣ, чтобы заключить, что O есть ортоцентръ треугольника MNP.

3) Пусть S, T, U будутъ соотвѣтственно срединами діагоналей AC, BD и EF. Соединяемъ S съ D, T съ A, проводимъ черезъ D и O прямую, которая пересѣчетъ AC въ V и черезъ A и O прямую, которая пересѣчетъ BD въ W. Опредѣлимъ ангармоническій коэффиціентъ μ пучка D. ASVM, для чего представимъ его въ видѣ

$$\mu=\frac{SM.AV}{SV.AM}-1=\frac{(AM-AS)AV}{(AV-AS)AM}-1.$$

Но

$$AS=\frac{AC}{2}=\frac{AM+MC}{2}=\frac{AV+VC}{2}$$

и потому

$$\mu=\left(\frac{AM-MC}{AM}\right):\left(\frac{AV-VC}{AV}\right)-1,$$

DV есть биссектриса угла CDA и потому изъ треугольника CDA имѣемъ:

$$\frac{VC}{AV}=\frac{CD}{AD},\quad \text{откуда}\quad \frac{AV-VC}{AV}=\frac{AD-CD}{AD}.$$

Далѣе, треугольникъ CAF, сѣченный прямой HK, даетъ

$$MC.FH.AK=AM.CH.FK$$

откуда, вслѣдствіе FH=FK, имѣемъ

$$\frac{MC}{AM}=\frac{CH}{AK}\quad \text{и}\quad \frac{AM-MC}{AM}=\frac{AK-CH}{AK}$$

но

$$CH=CI \text{ и } ID=DK,$$

такъ что

$$AK-CH=AK-CI=(AK+KD)-(CI+ID)=AD-CD,$$

и

$$\frac{AM-MC}{AM}=\frac{AD-CD}{AK}.$$

Подставляя найденныя нами величины $\frac{AV-VC}{AV}$ и $\frac{AM-MC}{AM}$ въ выраженіе μ, имѣемъ

$$\mu=\frac{AD}{AK}-1=\frac{KD}{AK}.$$

Подобнымъ же образомъ для ангармоническаго коэффиціента μ_1 пучка A.DRWM мы бы нашли величину

$$\mu_1=\frac{AK}{KD}, \quad \text{такъ что } \mu_1=\frac{1}{\mu}.$$

Далѣе, ангармоническій коэффиціентъ μ_2 пучка D.SVMF, дополнительнаго относительно пучка D.ASVM, имѣетъ выраженіемъ

$$\mu_2=\frac{1}{\mu}, \quad \text{такъ что } \mu_1=\mu_2$$

и пучки D.SVMF и A.DTWM имѣютъ равные ангармоническіе коэффиціенты. Кромѣ того они имѣютъ общій лучъ AD и потому точки пересѣченія ихъ гомологичныхъ лучей AM и DS—S, AW и DV—0, AT и DM—T лежатъ на одной прямой. Середина третьей діагонали U лежитъ на той же прямой, на основаніи извѣстной теоремы Гаусса, по которой средины діагоналей полнаго четыреугольника лежатъ на одной прямой.

2. Замѣчу, что въ описанномъ четыреугольникѣ могутъ быть назначены еще двѣ системы четырехъ точекъ, лежащихъ на одной прямой. Мы видѣли что $\frac{KD}{AK}$ есть ангармоническій коэффиціентъ пучка D.ASVM; но, съ другой стороны, такъ какъ AD есть поляра точки K, GK—поляра точки A и KI—поляра точки D, то $\frac{KD}{AK}$ будетъ ангармоническимъ коэффиціентомъ пучка K.DIOG (Вѣстникъ, № 66, стр. 112, предложеніе X). Слѣдовательно, пучки D.ASVM и K.DIOG имѣютъ равные ангармоническіе коэффиціенты и, кромѣ того, общій лучъ KD, откуда слѣдуетъ, что точки пересѣченія гомологичныхъ лучей KI и DS—Y, KO и DV—O, KG и DM—N лежатъ на одной прямой. Подобнымъ же образомъ доказывается, что точка пересѣченія SB и GH—X лежитъ на прямой NO, такъ что четыре точки N, X, O и Y лежатъ на одной прямой.

Соединивъ средину другой діагонали R съ вершинами A и C, мы бы получили аналогичную систему четырехъ точекъ, лежащихъ на одной прямой.

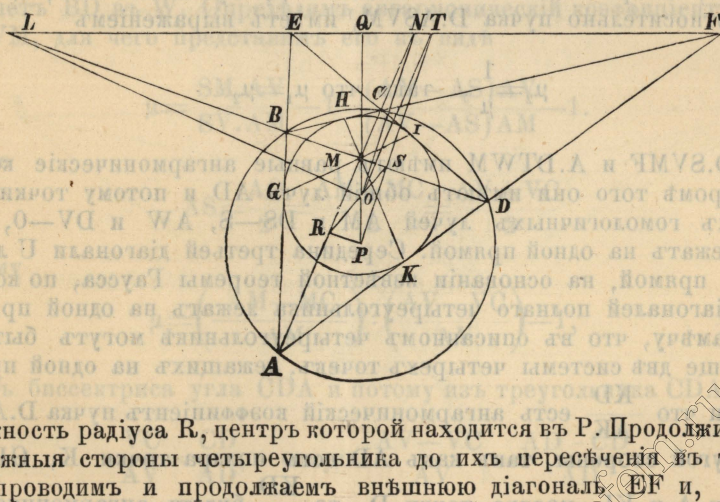
3. Очевидно, что доказанныя нами свойства описанныхъ четыреугольниковъ, путемъ надлежащаго измѣненія редакціи теоремъ, имѣютъ слѣдствіемъ нѣкоторыя замѣчательныя свойства четыреугольниковъ вписанныхъ. Мы отмѣтимъ одно изъ послѣднихъ, которымъ намъ сейчасъ придется воспользоваться: во вписанномъ четыреугольникѣ точка пересѣченія внутреннихъ діагоналей есть полюсъ внѣшней, принимая описанный кругъ за управляющую окружность.

4. Если въ четыреугольникѣ какъ суммы противоположныхъ сторонъ, такъ и суммы противолежащихъ угловъ равны, то онъ можетъ, какъ извѣстно, быть вписанъ и описанъ; при этомъ между радіусами r вписаннаго и R описаннаго круговъ и разстояніемъ ихъ центровъ d, аналогично разсматриваемому въ учебникахъ Элементарной Геометріи случаю треугольника, существуетъ постоянное отношеніе, къ выводу котораго мы и приступимъ.

5. *Задача.* По даннымъ радіусамъ r вписаннаго и R описаннаго круговъ описанно-вписаннаго четыреугольника опредѣлить разстояніе ихъ центровъ d.

Рѣшеніе. Пусть четыреугольникъ ABCD (см. фиг. 23) описанъ около окружности радіуса r, центръ которой находится въ O и вписанъ

Фиг. 23.



въ окружность радіуса R, центръ которой находится въ P. Продоживъ противоположныя стороны четыреугольника до ихъ пересѣченія въ точкахъ E и F, проводимъ и продолжаемъ внѣшнюю діагональ EF и, проведя внутреннія діагонали AC и BD, продолжаемъ ихъ до пересѣченія со внѣшней въ точкахъ L и N и соединяемъ L и N съ O. Далѣе, пусть будетъ R средина діагонали AC и S средина діагонали BD; соединяемъ R и S съ P, продолжаемъ PS до пересѣченія съ EF въ точкѣ T и соединяемъ T съ O. Наконецъ, пусть будутъ G, H, I и K четыре точки касанія; соединяемъ G и I, H и K.

По доказанному GI, HK, AC и BD пересѣкутся въ одной точкѣ M, которая, какъ точка пересѣченія внутреннихъ діагоналей описаннаго четыреугольника ABCD, будетъ полюсомъ внѣшней діагонали EF относительно окружности O и полюсомъ той же прямой EF относительно окружности P, какъ точка пересѣченія внутреннихъ діагоналей вписаннаго четыреугольника ABCD. Отсюда слѣдуетъ, что точки M, O, P лежатъ на одной прямой перпендикулярной къ EF: проводимъ эту прямую и продолжаемъ ее до пересѣченія съ EF въ точкѣ Q. По свойству полюса, имѣемъ

$$OM.OQ=r^2 \tag{1}$$

и

$$PM.PQ=R^2. \tag{2}$$

Далѣе, по доказанному, точки R, O, S лежатъ на одной прямой, которую и проводимъ. O есть ортоцентръ треугольника LMN, слѣдовательно LO и AC, NO и BD взаимно перпендикулярны; но кромѣ того, по свойству середины хордъ, PR перпендикулярна къ AC и PS къ BD; такъ что LO и RP съ одной стороны, NO и PS съ другой, перпендикулярныя къ одной и той же прямой, параллельны. Слѣдовательно

$$\angle LOR=\angle ORP;$$

но изъ вписуемаго четыреугольника MRPS

$$\angle ORP=\angle SMP$$

и затѣмъ, какъ углы съ перпендикулярными сторонами,

$$\angle SMP=\angle LTS,$$

такъ что

$$\angle LOR=\angle LTS$$

и четыреугольникъ LTSO вписуемъ. Поэтому уголъ LOT, имѣющій общую мѣру съ угломъ LST, уголъ прямой, и прямыя MN и OT, перпендикулярныя къ одной и той же прямой LO, параллельны.

Изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ QMN и QOT имѣемъ

$$\frac{QM}{QO}=\frac{QN}{QT},$$

а подобіе прямоугольныхъ треугольниковъ QON и QPT даетъ

$$\frac{QO}{QP}=\frac{QN}{QT},$$

слѣдовательно

$$\frac{QM}{QO}=\frac{QO}{QP}$$

и

$$QM.QP=\overline{QO}^2. \tag{3}$$

Изъ уравненій (1), (2) и (3) выводится d въ функціи r и R чисто алгебраическимъ путемъ. Представивъ ихъ въ видѣ

$$\mathrm{OM}(\mathrm{OM}+\mathrm{QM})=r^2 \qquad (1a)$$

$$(d+\mathrm{OM})(d+\mathrm{OM}+\mathrm{QM})=\mathrm{R}^2 \qquad (2a)$$

$$\mathrm{QM}(\mathrm{OM}+\mathrm{QM}+d)=(\mathrm{OM}+\mathrm{QM})^2, \qquad (3a)$$

раскрывъ скобки въ уравненіяхъ (2a) и (3a) и замѣнивъ $\mathrm{OM}(\mathrm{OM}+\mathrm{QM})$ черезъ r^2, мы имѣемъ

$$d^2+d(2\mathrm{OM}+\mathrm{QM})=\mathrm{R}^2-r^2 \qquad (4)$$

$$d\mathrm{QM}=r^2. \qquad (5)$$

Затѣмъ, опредѣляя изъ урав. (4) OM и вставляя найденную величину въ урав. (1a), мы получимъ новое уравненіе

$$(\mathrm{R}^2-r^2-d^2)^2-d^2\overline{\mathrm{QM}}^2=4r^2d^2 \qquad (6)$$

или, подставляя сюда, по урав. (5), вмѣсто $d^2\overline{\mathrm{QM}}^2$, r^4

$$(\mathrm{R}^2-r^2-d^2)^2-r^4=4r^2d^2. \qquad (7)$$

Рѣшая это уравненіе относительно d, мы имѣемъ

$$d=\sqrt{\mathrm{R}^2+r^2-\sqrt{4\mathrm{R}^2r^2+r^4}}. \qquad (8)$$

Знакъ перваго радикала не имѣетъ значенія, передъ вторымъ же взятъ знакъ (—), потому что, очевидно, $d<\mathrm{R}+r$.

Для дѣйствительнаго значенія d необходимо $\mathrm{R}\geq r\sqrt{2}$.

6. Нетрудно показать, что если между радіусами r и R двухъ окружностей и разстояніемъ ихъ центровъ d существуетъ отношеніе (8), то безчисленное множество четыреугольниковъ могутъ быть одновременно описаны около первой и вписаны во вторую.

Пусть будутъ (фиг. 23) O центръ окружности радіуса r и P центръ окружности радіуса R; проведя черезъ O и P прямую, беремъ на ней двѣ точки Q и M, опредѣленныя отношеніями (1) и (2) и черезъ Q проводимъ прямую EF, перпендикулярную къ PQ. Взявъ на окружности P произвольную точку A, проводимъ изъ нея двѣ касательныя AG и AK къ окружности O, которыя пусть пересѣкутъ прямую EF въ точкахъ E и F. Изъ точекъ E и F проводимъ вторыя касательныя EI и FH, пересѣкающіяся въ точкѣ C. Пусть EI пересѣкаетъ AF въ точкѣ D и FH пересѣкаетъ EA въ точкѣ B. Требуется доказать, что четыреугольникъ ABCD вписанъ въ окружность P.

Прямыя GI и HK, какъ поляры точекъ E и F пройдутъ черезъ полюсъ M прямой EF. Черезъ M, перпендикулярно къ GI проводимъ прямую, пересѣкающую окружность O въ точкахъ H′ и K′; черезъ H′ и K′ проводимъ касательныя къ окружности O, которыя своимъ пересѣченіемъ съ касательными къ точкамъ G и I образуютъ четыреугольникъ $A'B'C'D'$. Этотъ послѣдній вписуемъ, потому что сумма дугъ, половиною которой измѣряется прямой уголъ $H'MG$, равняется полуокружности и эта же сумма, какъ легко показать, служитъ мѣрою суммы угловъ $A'B'C'$ и $C'D'A'$; и точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ его E и F' лежатъ на прямой EF, какъ полюсы прямыхъ GI и $H'K'$, проходящихъ черезъ полюсъ M прямой EF; слѣдовательно, по доказанному центръ P' описанной окружности радіуса R' лежитъ на прямой QO и мѣсто его опредѣляютъ уравненія

$$P'M.P'Q=(R')^2 \tag{9}$$

$$QM.QP'=QO^2 \tag{10}$$

Но такъ какъ, по предположенію, существуютъ уравненія (1), (2) и (8), то существуетъ и легко выводимое изъ нихъ урав. (3), откуда слѣдуетъ совпаденіе точекъ P и P', а отсюда, по урав. (9) равенство радіусовъ R и R', т. е. совпаденіе окружностей P и P'.

Точки A и A', какъ легко показать, лежатъ съ одной стороны относительно K; слѣд. онѣ не могутъ лежать на окружности P и прямой DA, не совпадая. И такъ какъ изъ одной точки къ данной окружности нельзя провести болѣе двухъ касательныхъ, то прямыя AD и AD' совпадаютъ, откуда слѣдуетъ совпаденіе точекъ касанія K' и K, затѣмъ точекъ H' и H, которыя, по положенію своему не могутъ лежать на прямой KM и окружности O не совпадая; такъ что четыреугольники $A'B'C'D'$ и $ABCD$ совмѣстятся.

Теперь можно сдѣлать построеніе вписанно-описаннаго четыреугольника $ABCD$ независимымъ отъ линіи EF. Взявъ на окружности P произвольную точку D, проводимъ изъ нея къ окружности O обѣ касательныя, которыя пересѣкутъ окружность P въ точкахъ C и A. Изъ точки C проводимъ къ окружности O касательную, которая пересѣчетъ окружность P въ точкѣ B и соединяемъ A съ B. Требуется доказать, что AB есть касательная къ окружности O.

Проводимъ изъ A касательную къ окружности O, которая пересѣчетъ EF въ точкѣ E' и продолжимъ касательную AD до пересѣченія съ EF въ точкѣ F и изъ точекъ E' и F проводимъ вторыя касательныя къ окружности O, которыя, своимъ пересѣченіемъ въ точкѣ C' и пересѣченіемъ съ касательными AE' и AF въ точкахъ B' и D', образуютъ четыреугольникъ $AB'C'D'$, по предыдущему, вписанный въ окружность P. Какъ и прежде доказываемъ совпаденіе точекъ, D и D'; изъ этого послѣдняго слѣдуетъ совпаденіе линій DC и DC', точекъ C и C', линій CB и CB', точекъ B и B', а потому четыреугольники $ABCD$ и $AB'C'D'$ совмѣстятся. *В. Полтавцевъ* (Москва).

Сжатіе при распредѣленіи круговъ различныхъ діаметровъ въ ряды.

(Окончаніе) *).

8. Иллюстрируемъ сказанное численнымъ примѣромъ. Возьмемъ систему круговъ B, радіусъ которыхъ положимъ равнымъ 1, и систему круговъ A, радіусъ которыхъ пусть равенъ 8, такъ что, какъ можно усмотрѣть изъ таблицы, помѣщенной въ параграфѣ 6, между двумя кругами A, помѣщается 3 кружка B, но уже не помѣщается 4. Положимъ опять послѣдовательно $p=0{,}0$, $0{,}1$, $0{,}2$, и т. д. и вычислимъ соотвѣтствующія величины сжатія по формуламъ (13), (16), (18). Мы получимъ слѣдующія значенія величины c:

p	c
$p=0{,}0$	$c=0{,}0000$
0,1	0,1967
0,2	0,2786
0,25	0,2727
0,3	0,2258
0,4	0,1579
0,5	0,1111
0,6	0,0769
0,7	0,0508
0,8	0,0303
0,9	0,0137
1,0	0,0000.

Наибольшее значеніе сжатіе имѣетъ при $p=0{,}2$, соотвѣтствующемъ $n=4m$.

То-же самое мы бы нашли при иныхъ значеніяхъ отношеній радіусовъ между смѣшиваемыми кругами, и мы можемъ высказать слѣдующее общее положеніе:

Наибольшее сжатіе происходитъ при простыхъ кратныхъ отношеніяхъ между числомъ смѣшиваемыхъ круговъ.

А именно, если кружки B таковы, что ихъ помѣщается k между кругами A, то наибольшее сжатіе происходитъ при $n=m(k+1)$.

9. Мы выражали въ предыдущемъ разсужденіи процентное содержаніе каждаго сорта круговъ въ смѣси, считая прямо *число* кружковъ

*) См. „Вѣстникъ" № 103 и 104.

того и другого рода, каковы бы ни были ихъ размѣры. Но для большей аналогіи съ химическими явленіями и со способомъ выраженія химическаго состава намъ бы слѣдовало выражать процентное содержаніе не числа круговъ каждаго рода въ смѣси, а длины, занимаемой обѣими системами круговъ въ суммѣ длинъ, когда обѣ системы разсматриваются отдѣльно. Выражаясь языкомъ, заимствованнымъ изъ химіи, мы можемъ сказать, что опредѣляли *объемное* содержаніе въ смѣси ея составныхъ частей, вмѣсто вѣсового, которому въ нашемъ случаѣ соотвѣтствуетъ содержаніе протяженій. Введемъ же новое опредѣленіе процентнаго содержанія, означивъ

$$P=\frac{ma}{ma+nb} \qquad Q=\frac{nb}{ma+nb}.$$

Тогда величины P и Q будутъ аналогичны вѣсовымъ процентамъ составныхъ частей смѣси.

Изъ формулы

$$\frac{P}{a}:\frac{Q}{b}=m:n=p:q,$$

которая получается изъ только что написаннаго равенства, видно, что всѣ найденныя нами равенства, выраженныя черезъ p и q могутъ быть переведены въ равенства, выраженныя черезъ P и Q простою замѣною p на $\frac{P}{a}$ и q на $\frac{Q}{b}$. И такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія формулы.

При $a:b<4$. Сжатіе при $Pb>Qa$

$$c=Q\frac{f}{b},$$

при $Pb<Qa$

$$c=P\frac{f}{a}.$$

При $a:b>4$ если между кругами A помѣщается k кружковъ B.

1. При

$$Qa<Pbk \qquad c=Q.$$

2. При

$$Pbk<Qa<Pb(k+1) \qquad c=\frac{1}{ab}[(Pb(k+1)-Qa)kb+(Qb-Pak)f].$$

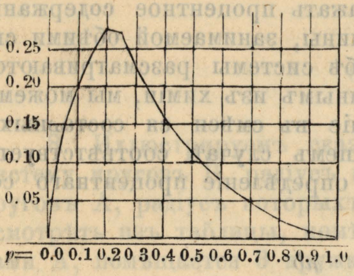
3. При

$$Qa>Pb(k+1) \qquad c=P\frac{f}{a}.$$

Вмѣсто Q можно было бы во всѣхъ этихъ формулахъ вставить $P=1-Q$, но онѣ отъ этого стали бы нѣсколько сложнѣе. Во всякомъ случаѣ и въ такой формѣ видно, что *сжатіе выражается въ видѣ ли-*

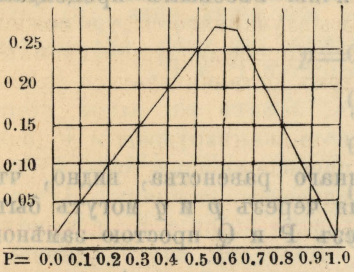
нейной функціи отъ количества P, т. е. сжатіе измѣняется пропорціонально этому количеству. При этомъ коэффиціентъ пропорціональности мѣняется скачками при переходѣ отъ одной формулы къ другой, при указанныхъ значеніяхъ величины P.

Фиг. 24.



10. Въ взятомъ нами численномъ примѣрѣ при $a:b=8$, наибольшее сжатіе происходитъ при P:Q=2:1, а крутые повороты въ сжатіи при P:Q=2:1 и P:Q=8:3. На фиг. 24 и 25 изображенъ графически ходъ сжатія при обоихъ способахъ опредѣленія состава смѣси. При первомъ способѣ, посредствомъ величинъ p и q, сжатіе возрастаетъ сперва по нѣкоторой выпуклой линіи AB, потомъ въ маломъ промежуткѣ отъ $p=0,2$ до $p=0,25$ убываетъ по нѣкоторой другой кривой линіи, весьма медленно, и наконецъ отъ $p=0,25$ до $p=1,0$ убываетъ по вогнутой линіи CD. При второмъ способѣ опредѣленія состава законъ измѣненія сжатія выражается ломанною линіею, состоящею изъ трехъ отрѣзковъ прямыхъ AB, BC, CD, изъ которыхъ первая и послѣдняя падаютъ довольно быстро, средняя, занимающая малый промежутокъ отъ $P=\frac{2}{3}$ до $P=\frac{8}{11}$, убываетъ медленнѣе.

Фиг. 25.



11. Д. И. Менделѣевъ установилъ слѣдующіе законы сжатія при смѣшеніи двухъ жидкостей, или при раствореніи твердаго тѣла въ жидкости.

1) Наибольшее сжатіе происходитъ при нѣкоторомъ простомъ кратномъ отношеніи между вѣсовыми количествами растворителя и растворяемаго тѣла, выраженными въ химическихъ паяхъ обоихъ тѣлъ.

2) Измѣненіе плотности раствора совершается не по одному и тому-же закону при всякомъ составѣ смѣси, а со скачками при нѣкоторыхъ простыхъ кратныхъ отношеніяхъ между растворителемъ и растворяемымъ тѣломъ.

3) Въ промежуткѣ между двумя скачками разности плотностей возрастаютъ пропорціонально процентному содержанію растворѣннаго вещества, выраженному въ вѣсовой мѣрѣ, или другими словами графическое изображеніе измѣненія плотностей съ измѣненіемъ процентнаго содержанія состоитъ изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ отрѣзковъ прямыхъ линій наклоненныхъ подъ разными углами къ горизонтальной оси, и не непремѣнно составляющихъ одну непрерывную ломанную линію.

Законы эти представляютъ весьма близкую аналогію съ найденными и указанными нами выше законами сжатія при смѣшеніи кружковъ различныхъ діаметровъ. Мы не должны ожидать полнаго тождества законовъ для обоихъ явленій уже по одному тому, что разсматривали кружки, и распредѣленіе ихъ вдоль одной прямой, между тѣмъ какъ растворы суть тѣла, занимающія пространство трехъ измѣреній, и сжатіе при смѣшеніи тѣлъ можетъ представлять нѣкоторыя частныя различія отъ сжатія при смѣшеніи круговъ.

12. Во всей нашей статьѣ мы разсматривали только *наибольшее* сжатіе при распредѣленіи кружковъ, т. е. сжатіе при наиплотнѣйшемъ распредѣленіи ихъ. Не меньшій интересъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ представляло бы изслѣдованіе *средняго* сжатія, т. е. сжатія при *случайномъ* распредѣленіи кружковъ. Положимъ, что мы имѣемъ сосудъ содержащій весьма большое число кружковъ A и B, въ данной пропорціи. Будемъ вынимать изъ этого сосуда кружки наудачу, какъ въ лоттереѣ, и укладывать ихъ подрядъ въ томъ порядкѣ, въ которомъ они появятся. Уставивъ такимъ образомъ m кружковъ A и n кружковъ B, мы получимъ въ результатѣ нѣкоторую длину, которая будетъ вообще говоря меньше чѣмъ сумма длинъ, занимаемыхъ этими кружками въ отдѣльности, но больше чѣмъ длина, занимаемая ими при наиплотнѣйшемъ распредѣленіи. Величину получающагося при этомъ случайнаго сжатія можно опредѣлить, пользуясь извѣстными основными теоремами теоріи вѣроятностей или теоріи комбинацій. Но мы не будемъ останавливаться здѣсь на этой задачѣ.

Можно было бы разсмотрѣть еще сжатіе при нѣкоторыхъ дополнительныхъ ограниченіяхъ относительно распредѣленія кружковъ. Проводя аналогію между нашими кружками и химическими атомами, мы можемъ сказать, что можно было бы изслѣдовать сжатіе при распредѣленіи атомовъ въ большія или меньшія частицы, т. е. при томъ условіи, чтобы кружки того или другого рода распредѣлялись непремѣнно попарно или группами по три, по четыре и т. д. Въ этомъ случаѣ оказалось бы конечно, что наибольшее сжатіе было бы меньше чѣмъ при свободномъ распредѣленіи, но снова обнаружился бы *законъ простыхъ кратныхъ отношеній*, и при томъ съ большимъ разнообразіемъ этихъ отношеній, чѣмъ прежде. Точно также сохранился бы и законъ пропорціональности сжатія процентному содержанію кружковъ одного рода въ смѣси въ предѣлахъ правильныхъ измѣненій сжатія, т. е. между каждыми двумя скачками, опредѣляемыми относительными размѣрами кружковъ.

Наконецъ можно бы еще обобщить задачу, разсматривая смѣси не двухъ, а большаго числа системъ кружковъ различныхъ діаметровъ, или даже большого числа кружковъ, между которыми нѣтъ двухъ равныхъ, и т. п. Но наибольшій интересъ представляетъ все таки простѣйшій случай, изученный нами ни предыдущихъ страницахъ, и обобщеніе задачи не привело бы вѣроятно къ новымъ простымъ законамъ сжатія, помимо указанныхъ выше для простѣйшаго случая.

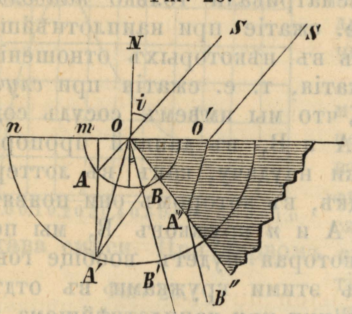
І. А. Клейберъ (Спб.).

ПРОСТЫЕ ФИЗИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

III. Построеніе ахроматической комбинаціи призмъ.

Изъ закона Декарта-Снелліуса слѣдуетъ весьма простой способъ (Гюйгенса) построенія хода луча при переходѣ его изъ одной средины съ показателемъ преломленія m въ другую съ показателемъ преломленія n. Пусть OO′ (фиг. 26) есть плоскость, раздѣляющая обѣ средины; SO направленіе падающаго луча. Около точки O опишемъ двѣ концентрическія окружности радіусами m и n. Продолжимъ направленіе падающаго луча до точки A встрѣчи его съ окружностью m; изъ точки A проводимъ AA′ перпендикулярно къ плоскости OO′; точка A′, гдѣ AA′ встрѣчаетъ окружность n, опредѣлитъ направленіе OA′ преломленнаго луча. Ибо

Фиг. 26.



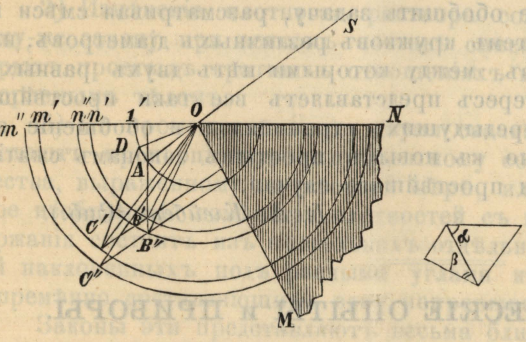
$$\frac{\mathrm{Sin}\, i}{\mathrm{Sin}\, r}=\frac{n}{m}=\frac{A'O}{AO}=\frac{\mathrm{Sin}\, CAO}{\mathrm{Sin}\, CA'O}$$

если AA′ параллельна ON.

На основаніи того же правила легко построить ходъ лучей въ призмѣ. Если SO′ есть лучъ падающій, параллельный SO, то O′A″, параллельная OA′, есть направленіе луча въ призмѣ. Направленіе выходящаго луча A″B″ найдемъ, проведя A′B перпендикулярно ко второй грани призмы OA″. Точка B пересѣченія A′B съ окружностью m опредѣлитъ направленіе OB, параллельное выходящему лучу A″B″.

Задача построенія ахроматической комбинаціи призмъ заключается въ слѣдующемъ: дана призма съ преломляющимъ угломъ α, сдѣланная изъ такого вещества, что показатели преломленія для двухъ какихъ либо лучей спектра суть n' и n''. Требуется отыскать преломляющій уголъ β другой призмы изъ другого матеріала такой, чтобы оба вышеуказанные луча спектра, пройдя и черезъ вторую призму, вышли послѣ преломленія въ ней параллельными между собою. Показатели преломленія для обоихъ лучей во второй призмѣ суть m' и m''. Построеніе изображено на фиг. 27. Пусть лучъ входитъ въ призму изъ пустоты, которой показатель преломленія есть 1. Изъ точки O проводимъ окружности радіусами 1, n', n'', m' и m''. Пересѣченіе продолженія падающаго луча OS съ окружностью 1 есть A. Черезъ A проводимъ перпендикуляръ къ грани призмы ON; пересѣченіе этого перпендикуляра съ окружностями n' и n'' въ точкахъ B′ и B″ опредѣлитъ направленіе лучей OB′ и OB″ въ первой

Фиг. 27.



призмѣ. Во второй призмѣ тѣ-же лучи имѣютъ направленіе OC′ и OC″, причемъ точки C′ и C″ суть пересѣченія линій C′B′ и C″B″, проведенныхъ перпендикулярно ко второй грани призмы, съ окружностями m' и m''. Уголъ C′C″B″ есть искомый преломляющій уголъ β второй призмы;

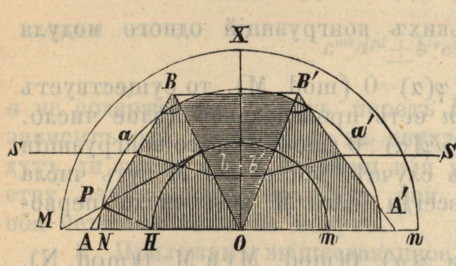
OD есть направленіе луча по выходѣ изъ второй призмы, такъ какъ C″D перпендикулярна ко второй грани второй призмы. Вотъ нѣкоторыя числа, могущія служить при построеніи полыхъ призмъ съ различными жидкостями.

Сѣрнистый углеродъ	Пок. прел. для фраунг. лин.	C=1,624.	(m')
	„ „ „ „ „	F=1,658.	(m'')
Вода	„ „ „ „ „	C=1,331.	(n')
	„ „ „ „ „	F=1,337.	(n'')
Бензинъ	„ „ „ „ „	C=1,495.	
	„ „ „ „ „	F=1,512.	
Раствор. хлор. кальц. (плот. 1,3)	„ „ „ „ „	C=1,414.	
	„ „ „ „ „	F=1,423.	

IV. Построеніе призмы à vision directe.

Задача заключается въ томъ, чтобы построить комбинацію въ простѣйшемъ случаѣ изъ трехъ призмъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что какой либо лучъ, напр. желтый, послѣ прохожденія черезъ нихъ выходитъ по направленію параллельному первоначальному. Пусть одна изъ призмъ съ преломляющимъ угломъ BOB′=2β (фиг. 28) сдѣлана изъ матеріала, показатель преломленія котораго по отношенію къ желтому лучу есть m. Отыщемъ преломляющій уголъ α, который должны имѣть двѣ другія призмы, сдѣланныя изъ матеріала, показатель преломленія котораго по отношенію къ желтому лучу есть n. Такъ какъ по условію задачи падающій лучъ a'S′ и выходящій aS параллельны, то вслѣдствіе симметричности чертежа bb' также параллельна aS. Въ такомъ случаѣ ходъ лучей будетъ тотъ же, какъ и въ томъ случаѣ, если бы лучъ шелъ по ломанной baS. Построеніе будетъ слѣдующее: проводимъ OX, дѣлящую уголъ 2β пополамъ, и OM ей перпендикулярную. Около точки O описываемъ окружности радіусами 1, m и n, считая показатель преломленія воздуха за 1. Изъ M ведемъ перпендикуляръ къ OB; получимъ направленіе OP луча въ призмѣ α. Соединяемъ P съ H и возставляемъ къ PH перпендикуляръ APB до встрѣчи съ BO. Уголъ ABO будетъ искомый.

Фиг. 28.



Вотъ нѣкоторыя числа.

Показ. преломл. луча D	для воды	1,332.
„ „ „	для сѣрнист. углер.	1,633.
„ „ „	для бензина. . . .	1,5.
„ „ „	для хлорист. кальція (пл. 1,3).	1,417.

Сдѣлавъ указанныя построенія, какъ видно, нетрудно устроить изъ полыхъ стеклянныхъ призмъ, какъ призму ахроматическую, такъ и à vision directe.

А. Л. Корольковъ (Кіевъ).

КЪ ДѢЛИМОСТИ ЧИСЕЛЪ ВИДА $10^{2^n}+1$.

1. $$10^{16}+1=353.449.641.1409.69857.$$

Это равенство легко повѣряется непосредственнымъ умноженіемъ.

2. Прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію второго случая дѣлимости, сдѣлаемъ нѣсколько предварительныхъ замѣчаній.

Если при цѣлыхъ a и M полиномъ $\varphi(a)$, заключающій цѣлыя положительныя степени a съ цѣлыми коэффиціентами, дѣлится на M безъ остатка, то по предложенію Гаусса, это выражается формулой

$$\varphi(a)\equiv 0(\text{mod. M}),$$

причемъ самая формула получаетъ названіе конгруэнціи модуля M.

Укажемъ слѣдующія свойства конгруэнцій, непосредственно проистекающія изъ общеизвѣстныхъ алгебраическихъ теоремъ:

1) Въ конгруэнціи $\varphi(a)\equiv 0(\text{mod. M})$ можно измѣнить знакъ полинома $\varphi(a)$, не нарушивъ конгруэнціи.

2) Алгебраическая сумма нѣсколькихъ конгруэнцій одного модуля M есть конгруэнція того же модуля.

3) Если существуетъ конгруэнція $\varphi(a)\equiv 0$ (mod. M), то существуетъ и конгруэнція $n\varphi(a)\equiv 0(\text{mod. M})$, гдѣ n есть произвольное цѣлое число.

4) Если существуетъ конгруэнція $n\varphi(a)\equiv 0$ (mod. M), то конгруэнція $\varphi(a)\equiv 0$ (mod. M) существуетъ въ томъ случаѣ, когда n и M суть числа первыя между собою, слѣдовательно всегда, если M есть число первоначальное.

5) Если существуютъ конгруэнціи $\varphi(a)\equiv 0(\text{mod. M})$ и $\text{M}\equiv 0(\text{mod. N})$, то существуетъ конгруэнція $\varphi(a)\equiv 0(\text{mod. N})$.

Когда $\varphi(a)$ есть биномъ, то конгруэнція $\varphi(a)\equiv 0$ (mod. M) называется двучленной. Изъ свойствъ двучленныхъ конгруэнцій докажемъ слѣдующее: изъ двухъ двучленныхъ конгруэнцій одного модуля M, заключающихъ въ себѣ одно и то же алгебраическое количество a, можно исключить это послѣднее, т. е. образовать новую двучленную конгруэнцію модуля M, этого количества не содержащую.

Пусть мы имѣемъ двѣ двучленныя конгруэнціи

$$a^k b^l \pm c^m \equiv 0 \text{ (mod. M)}$$

$$a^n d^p \pm e^q \equiv 0 \text{ (mod. M)},$$

изъ которыхъ требуется исключить a.

Элементарная Алгебра доказываетъ слѣдующія конгруэнціи

$$a^{2n}-b^{2n}\equiv 0 \ [\text{mod.} (a\pm b)]$$

$$a^{2n+1}\pm b^{2n+1}\equiv 0 \ [\text{mod.} (a\pm b)],$$

во второй изъ которыхъ должны быть взяты одновременно оба $+$ или оба $-$. Слѣдовательно по пункту (5) конгруэнція

$$a \pm b = 0 \text{ (mod. M)}$$

для всякаго цѣлаго m имѣетъ слѣдствіемъ конгруэнцію

$$a^m \pm b^m = 0 \text{ (mod. M)},$$

гдѣ знакъ передъ b^m зависитъ какъ отъ знака передъ b въ данной конгруэнціи, такъ и отъ четности или нечетности m.

Разумѣя подъ p наименьшее кратное чиселъ k и n и положивъ $\frac{p}{k}=s$ и $\frac{p}{n}=t$, мы извлечемъ изъ двухъ данныхъ конгруэнцій двѣ новыя

$$a^p b^{ls} \pm c^{ms} = 0 \text{ (mod. M)}$$

$$a^p d^{pt} \pm e^{qt} = 0 \text{ (mod. M)}$$

и, умножая первую изъ нихъ на d^{pt}, вторую на b^{ls}, затѣмъ вычитая вновь полученныя конгруэнціи, имѣемъ новую

$$c^{ms} d^{pt} \pm b^{ls} e^{qt} = 0 \text{ (mod. M)},$$

a не содержащую. Знакъ передъ $b^{ls}e^{qt}$ въ этой послѣдней конгруэнціи зависитъ отъ знаковъ $\pm$ въ двухъ данныхъ, а также и отъ того, будутъ ли числа s и t четными или нечетными. Замѣтимъ, что по свойству наименьшаго кратнаго они суть числа первыя между собою и оба четными быть не могутъ.

3. Приложимъ вышесказанное къ доказательству конгруэнціи

$$10^{256}+1=0 \text{ (mod. 10753)},$$

гдѣ модуль 10753 есть число первоначальное.

Установимъ систему легко повѣряемыхъ конгруэнцій одного модуля 10753, котораго, для краткости, мы обозначать не будемъ:

(1) $$1+3.7.2^9=0.$$

(2) $$7^2.2^2.5.11-3^3=0.$$

(3) $$5^2.7^3+2.3^2.11^2=0.$$

(4) $$2.3.5.19^2-7.11=0.$$

(5) $$5.2^{11}+19.3^3=0.$$

(6) $$5.3^7-2.7.13=0.$$

(7) $$13^2+2^3.3^3.7^2=0.$$

Исключая 19 изъ конгруэнцій (4) и (5), имѣемъ

(8) $$5^3.2^{23}+3^5.7.11\equiv 0.$$

Исключая 13 изъ конгруэнцій (6) и (7), имѣемъ

(9) $$5^2.3^{11}+2^5.7^4\equiv 0.$$

Исключеніе 11 изъ конгруэнцій (2) и (8) даетъ

(10) $$5^4.2^{25}.7-3^8\equiv 0.$$

По исключеніи 11 изъ конгруэнцій (2) и (3), получаемъ

(11) $$5^4 2^3 7^7+3^8\equiv 0.$$

Исключая 3 изъ конгруэнцій (10) и (11), имѣемъ

(12) $$2^{22}+7^6\equiv 0$$

и исключая то же число изъ конгруэнцій (1) и (10), получаемъ

(13) $$2^{97}7^9 5^4-1\equiv 0$$

наконецъ, исключеніемъ того же числа изъ конгруэнцій (1) и (9), находимъ

(14) $$2^{104}7^{15}+5^2\equiv 0.$$

Исключеніе 7 изъ конгруэнцій (12) и (13) даетъ

(15) $$2^{260}5^8+1\equiv 0$$

и исключая то же число изъ конгруэнцій (12) и (14), получаемъ

(16) $$2^{318}+5^4\equiv 0.$$

По исключеніи 5 изъ конгруэнцій (15) и (16), находимъ

(17) $$2^{896}+1\equiv 0.$$

Представляя конгруэнцію (15) въ видѣ

(18) $$10^8.2^{252}+1\equiv 0$$

и, исключая 2 изъ конгруэнцій (17) и (18), имѣемъ искомую

(19) $$10^{256}+1\equiv 0 \pmod{10753}.$$

В. Полтавцевъ (Москва).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданія математическаго отдѣла Учебно-Воспитательнаго Комитета Педагогическаго Музея въ С.-Петербургѣ. $18^{90}/_{91}$ учебнаго года, 29 ноября.

А. Д. Путята показалъ возможность полученія элементарнымъ путемъ формулы для суммированія произведеній чиселъ натуральнаго ряда.

И. М. Травчетовъ показалъ пріемы ознакомленія учащихся съ понятіемъ о числѣ, какъ предѣлѣ чиселъ возрастающихъ или убывающихъ, и съ простѣйшими свойствами числовыхъ рядовъ.

15 декабря. *З. Б. Вулихъ* ознакомилъ съ сочиненіемъ Рейдта „Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen".

С. И. Шохоръ-Троцкій указалъ какимъ образомъ можно уяснить учащимся причины, почему извѣстному дѣйствію съ дробями придаютъ названіе „умноженія".

П. А. Литвинскій сдѣлалъ обзоръ математической библіографіи за истекшій учебный годъ (по работѣ В. Н. Тресковскаго).

Рѣшено устроить въ П. Музеѣ библіографическій каталогъ выходящихъ книгъ, который ежемѣсячно обѣщалъ пополнять новыми свѣдѣньями Вл. Н. Тресковскій.

Секретарь математическаго отдѣла *П. Литвинскій*.

ЗАДАЧИ.

№ 131. Вывести формулу объема треугольной, усѣченной параллельно основанію, пирамиды

$$V=(B+b+\sqrt{Bb})\frac{h}{3},$$

дополняя пирамиду до призмы, имѣющей съ ней общія основаніе, одно изъ боковыхъ реберъ и высоту. *М. Чубинскій* (Воронежъ).

№ 132. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC изъ вершины прямого угла B опущенъ на гипотенузу AC перпендикуляръ BD. Найти на гипотенузѣ такую точку E, чтобы

$$\overline{BE}^2+3\overline{BD}^2=\overline{AC}^2.$$

Указать другія свойства прямой BE. *Ш.*

№ 133. Дана прямая MN и окружность центра O и радіуса R. Найти отношеніе радіусовъ r и r_1 двухъ окружностей, касательныхъ къ прямой MN въ одной и той-же произвольной ея точкѣ P, и касательныхъ также къ данной окружности O. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 134. Рѣшить систему уравненій

$$x^{-3}y^3+1=\frac{3700x^{-3}}{x+y}$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(x+y)^2}=\frac{x+y}{250(\sqrt{x}-\sqrt{y})}.$$

Н. Карповъ (Златополь).

№ 135. Рѣшить уравненіе

$$x^4-4x+3=0.$$

Такимъ же пріемомъ рѣшить уравненіе:

1) $$x^4-4x+\frac{n^2-2}{n}=0$$

и второе, еще болѣе общее:

2) $$x^4+ax+\frac{n^3-a^2}{4n}=0.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 136. Даны точки А и В и между ними двѣ параллели CD и EF. Провести сѣкущія AXY и BZX (черезъ X, Y, Z обозначены точки пересѣченія съ параллелями) такъ, чтобы отрѣзки ZX и ZY были равны. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

NB. Просимъ не смѣшивать этой задачи съ задачею того-же автора, помѣщенной въ № 104 „Вѣстника" подъ № 122.

№ 137. Показать, что сумма квадратовъ сторонъ гармоническаго четыреугольника равна удвоенному произведенію двухъ медіанъ *), выходящихъ изъ концовъ какой либо стороны и продолженныхъ до встрѣчи съ описанной около четыреугольника окружностью.

И. Пламсневскій (Темиръ-ханъ-Шура).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 11 (2-ой серіи). Въ кругъ O вписанъ косоугольный треугольникъ ABC; черезъ его вершины проведены діаметры AD, BE и CF; точки D, E, F соединены съ ближайшими къ нимъ вершинами треугольника. Доказать, что площадь полученнаго такимъ образомъ вписаннаго шестиугольника вдвое больше площади треугольника ABC.

NB. Справедливо ли это для случая, когда центръ O описанной окружности лежитъ внѣ треугольника?

$\triangle ABC$ равновеликъ четыреугольнику BFAE, потому что $\triangle OBC$ равновеликъ $\triangle OBF$, $\triangle CAO$ равновеликъ $\triangle FAO$ и $\triangle BAO$ равновеликъ $\triangle EAO$. Но $BFAE={}^1/_2 BFAECD$, потому что

$$\triangle BOD=\triangle EOA,\quad \triangle DOC=\triangle AOF \quad \text{и} \quad \triangle COE=\triangle FOB;$$

отсюда слѣдуетъ, что и площадь $\triangle$-ка $ABC={}^1/_2 BFAECD$, что и требовалось доказать.

*) См. зад. № 101 въ № 101 „Вѣстника" и № 123 въ № 104 „Вѣстника".

Если O лежитъ внѣ $\triangle$-ка ABC, то доказанная теорема не имѣетъ мѣста, что видно изъ чертежа.

Н. Волковъ, *М. Балдинъ 2-ой* и *М. Б—въ* (Спб.), *А. П.* и *Н. Николаевъ* (Пенза). Ученики: 6-ой Спб. г. (6) *Н. М.*, 3-й Московск. г. (6) *Н. С.*, Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ*, Курск. г. (6) *Л. Л.*, Житомир. г. (6) *М. А.*, Кам.-Под. г. (8) *Я. М.*

№ 235. На двухъ данныхъ отрѣзкахъ, не лежащихъ на одной прямой, построить два подобные и обратно расположенные треугольника такъ, чтобы они имѣли общую вершину и чтобы данные отрѣзки были соотвѣтственными сторонами.

Пусть данные отрѣзки будутъ AB и CD; соединяемъ накрестъ A съ D и B съ C; прямыя AD и BC пересѣкаются въ M; проводимъ окружности: одну черезъ A, B и M, другую черезъ C, D и M; эти окружности имѣютъ еще и другую общую точку F; $\triangle$-ки AFB и CFD и суть искомые.

Въ самомъ дѣлѣ очевидно, что $\angle AFB = \angle CFD$, кромѣ того изъ подобія треугольниковъ AFD и BFC слѣдуетъ, что

$$\frac{AF}{FB} = \frac{DF}{FC}.$$

А. Бобятинскій (Барнаулъ), *С. Блажко* (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *Мясковъ* (Слонимъ) *Д. Левандо* (Кишиневъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Кричевскій* (Харьковъ), *Н. Волковъ* (Спб.).

№ 397. Рѣшить систему уравненій

$$x^2+xy+y^2=c^2$$
$$y^2+yz+z^2=a^2,$$
$$z^2+zx+x^2=b^2.$$

Вычтя второе уравненіе изъ перваго и третьяго, получимъ

$$(x-z)(x+y+z)=c^2-a^2$$
$$(x-y)(x+y+z)=b^2-a^2.$$

Положимъ

$$x+y+z=m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

тогда

$$(x-z)m=c^2-a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$(x-y)m=b^2-a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Изъ (1), (2) и (3) опредѣляемъ x, y и z

$$x=\frac{m^2+b^2+c^2-2a^2}{3m}$$

$$y=\frac{m^2+a^2+c^2-2b^2}{3m}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

$$z=\frac{m^2+a^2+b^2-2c^2}{3m}$$

Подставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій полученныя значенія для x, y и z, будемъ имѣть биквадратное уравненіе относительно m

$$m^4-(a^2+b^2+c^2)m^2+(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2\ \ b^2c^2)=0,$$

откуда

$$m=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{3(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}}{2}}\ .$$

Зная m легко опредѣлить x, y и z, подставивъ въ выраженія (a) вмѣсто m—его значеніе.

А. Шульженко (Кіевъ), *Н. Волковъ* (Спб.). Ученики: 1-ой Спб. г. (7) *А. К*, Кіевск. р. уч. (6) *А Ш.*

№ 515. На какомъ разстояніи отъ земли по направленію линіи, соединяющей центры земли и луны, должно находиться тѣло, чтобы оно не падало ни на землю, ни на луну. Массу луны можно принять $={}^1/_{81}$ массы земли, а разстояніе луны отъ земли 60,157 земнымъ радіусамъ.

Для того, чтобы тѣло, находящееся между землею и луною, не падало ни на одну ни на другую, необходимо слѣдующее условіе: квадратъ разстоянія этого тѣла отъ земли долженъ быть во столько разъ больше квадрата разстоянія его отъ луны, во сколько масса земли больше массы луны, т. е.

$$\frac{x^2}{(60{,}157-x)^2}={}^{81}/_1,$$

гдѣ x—разстояніе тѣла отъ земли; извлекая корень квадратный изъ обѣихъ частей, получаемъ

$$\frac{x}{60{,}157-x}=9,$$

откуда $x=54{,}1413$ земнымъ радіусамъ.

Н. Кастеринъ (?), *В. Шидловскій* (Полоцкъ), *Н. Волковъ* (Спб.), *А. Шульженко* (Кіевъ). Ученики: Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*, Курск. г. (8) *Т. Ш.* и *В. Х.*, Чер. г. (6) *В. Д.* и (8) *Д. З.*, Ворон. к. к. (7) *Г. У.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 30 Января 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.

Обложка
пщется

Обложка
ищется