Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи V-го семестра № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 659—660.

Опытъ теоретическаго изслѣдованія природы доказательствъ, примѣняемыхъ въ математическихъ наукахъ.

Проф. С. Зарембы.

(Окончаніе).*

III. Логическое звено. Доказательства, принимающія форму простой послѣдовательности логическихъ звеньевъ. Развѣтвленныя доказательства.

§ 10. Прежде чѣмъ перейти къ тому, что, собственно, составляетъ предметъ настоящей главы, мы дадимъ опредѣленіе одного выраженія, которое въ послѣдующемъ будетъ намъ полезно въ смыслѣ значительнаго сокращенія рѣчи.

*) См. „Вѣстникъ", № 658

Если, разсматривая въ нѣкоторой теоріи какое-нибудь предложеніе (T), мы **скажемъ**, что **какое-нибудь** другое предложеніе (P) **является предложеніемъ, признаннымъ истиннымъ ранѣе**, то мы будемъ понимать подъ этимъ, что предложеніе (P) удовлетворяетъ какому-либо изъ слѣдующихъ трехъ условій:

1) оно совпадаетъ либо съ какой-нибудь изъ посылокъ, высказанныхъ раньше предложенія (T), либо съ какой-нибудь теоремой, доказанной раньше, чѣмъ было высказано это предложеніе;

2) оно выражаетъ часть изъ всего того, что утверждается въ какомъ-нибудь изъ предложеній, удовлетворяющихъ предыдущему условію;

3) оно выражаетъ то же самое, что и совокупность нѣкоторыхъ предложеній, изъ которыхъ каждое удовлетворяетъ какому-либо изъ двухъ предыдущихъ условій.

Такъ, напримѣръ, если, излагая нѣкоторый вопросъ по ариѳметикѣ, мы уже установили слѣдующія два предложенія:

(α) числа 2, 3, 5 и 7 — простыя числа,

(β) число 11 — простое число.

то въ этомъ случаѣ мы не только можемъ утверждать, что каждое изъ этихъ двухъ предложеній уже признано истиннымъ, но мы имѣемъ также право говорить, что между предложеніями, признанными истинными, находятся, напримѣръ, и слѣдующія:

„число 3 — простое число“,

„числа 2 и 11 — простыя числа“ и т. д.

§ 11. Предположимъ, что при изложеніи какой-нибудь математической теоріи (T) мы хотимъ доказать нѣкоторую теорему (A_0). Мы можемъ для этого искать, не встрѣчается ли между предложеніями, признанными истинными (§ 10) ранѣе, какое-нибудь условное предложеніе (C_1) либо такого рода, что его заключеніе совпадаетъ съ предложеніемъ (A_0), либо такого рода, что оно содержитъ, по крайней мѣрѣ, одно неопредѣленное и можетъ, путемъ замѣны неопредѣленныхъ соотвѣтствующими символами, быть преобразовано въ предложеніе (C_1'), заключеніе котораго совпадаетъ съ предложеніемъ (A_0). Предположимъ, что одно изъ указанныхъ условій осуществляется, и, смотря по тому, имѣетъ ли мѣсто первое или второе изъ нихъ, обозначимъ черезъ (A_1) предложеніе, составляющее условіе предложенія (C_1) или преобразованнаго изъ него предложенія (C_1').

Если оказывается, что предложеніе (A_1) является предложеніемъ, признаннымъ истиннымъ (§ 10) ранѣе, то предложеніе (A_0) нужно, очевидно, считать доказаннымъ. Мы будемъ говорить, что совокупность трехъ предложеній (A_1), (C_1) и (A_0) составляетъ **логическое звено**, въ которомъ **первой посылкой** является предложеніе (A_1), второй посылкой — предложеніе (C_1), а заключеніемъ — предложеніе (A_0).

Читателю нетрудно будетъ замѣтить, что классическій силлогизмъ является частнымъ случаемъ логическаго звена.

§ 12. Оставаясь при обозначеніяхъ предыдущаго параграфа и не мѣняя ни въ чемъ всѣхъ другихъ предположеній, откажемся теперь отъ предположенія, что предложеніе (A_1) является предложеніемъ, признаннымъ истиннымъ (§ 10) ранѣе. Въ такомъ случаѣ доказательство предложенія (A_0) сведется къ доказательству предложенія (A_1), и тогда придется искать доказательство предложенія (A_1), примѣняя тотъ же методъ, при помощи котораго мы пытались найти доказательство предложенія (A_0). Не считая нужнымъ останавливаться дальше на этомъ, замѣтимъ лишь, что, какъ легко видѣть, мы можемъ придти къ установленію послѣдовательности логическихъ звеньевъ, удовлетворяющей слѣдующимъ условіямъ:

1) первая посылка перваго звена входитъ въ число предложеній, признанныхъ истинными ранѣе;

2) первая посылка каждаго звена, начиная со второго, совпадаетъ съ заключеніемъ того звена, которое ему непосредственно предшествуетъ;

3) заключеніе послѣдняго звена совпадаетъ съ предложеніемъ, которое требовалось доказать;

4) вторая посылка каждаго звена входитъ въ число предложеній, признанныхъ истинными (§ 10) ранѣе.

Когда какая-нибудь послѣдовательность логическихъ звеньевъ удовлетворяетъ этимъ четыремъ условіямъ, она, очевидно, представляетъ собою доказательство того предложенія, которое мы хотѣли доказать, и это доказательство будетъ имѣть форму простой послѣдовательности логическихъ звеньевъ.

Чтобы дать простой примѣръ только-что указаннаго типа, остановимся на слѣдующихъ предложеніяхъ, заимствованныхъ изъ элементовъ ариѳметики:

(A_2) Каждый изъ символовъ 3 и 7 представляетъ собою цѣлое нечетное число.

(C_2) Если каждый изъ символовъ a и b представляетъ собою цѣлое нечетное число, то символъ*)

$$(a+b)$$

представляетъ собою цѣлое четное число.

*) Мы будемъ сохранять скобки даже тамъ, гдѣ ихъ обычно не употребляютъ, чтобы не имѣть надобности пользоваться посылками, касающимися скобокъ.

(C_1) Если символъ c представляетъ собою цѣлое четное число, то символъ c^2 представляетъ собою цѣлое число, дѣлящееся на 4.

Принявъ эти предложенія въ качествѣ постулатовъ, докажемъ слѣдующую теорему:

(A_0) Символъ

$$(3+7)^2$$

представляетъ собою цѣлое число, дѣлящееся на 4.

Для этого замѣтимъ, что, если мы замѣнимъ символомъ

$$(3+7)$$

неопредѣленное c въ условномъ предложеніи (C_1), то заключеніе этого послѣдняго предложенія совпадетъ съ предложеніемъ (A_0), которое именно и требуется доказать, а условіе разсматриваемаго условнаго предложенія приметъ слѣдующую форму:

(A_1) Символъ

$$(3+7)$$

представляетъ собою цѣлое четное число.

Но достаточно замѣнить неопредѣленныя a и b въ условномъ предложеніи (C_2) символами 3 и 7, чтобы заключеніе его совпало съ предложеніемъ (A_1), а условіе — съ посылкой (A_2). Слѣдовательно, доказательство теоремы (A_0) представляется въ видѣ простой послѣдовательности логическихъ звеньевъ и можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ: изъ предложеній (A_2) и (C_2) слѣдуетъ истинность предложенія (A_1), а предложенія (A_1) и (C_1) влекутъ за собою предложеніе (A_0), которое именно и требовалось доказать.

§ 13. Указанный въ § 12 методъ не всегда приводитъ насъ къ искомому доказательству. Иногда искомое доказательство получается путемъ повторнаго примѣненія метода, производимаго на основаніи слѣдующаго руководящаго замѣчанія: если дѣло обстоитъ такъ, что смыслъ какого-нибудь предложенія совпадаетъ со смысломъ совокупности (S) нѣкоторыхъ другихъ предложеній, то для доказательства даннаго предложенія достаточно доказать всѣ предложенія, принадлежащія къ системѣ (S). Получаемое такимъ путемъ доказательство уже не сводится къ простой послѣдовательности логическихъ звеньевъ, а принимаетъ форму комбинаціи нѣкотораго числа такихъ послѣдовательностей. Вполнѣ естественно будетъ называть такого рода доказательства р а з в ѣ т в л е н н ы м и д о к а з а т е л ь с т в а м и.

Чтобы дать примѣръ развѣтвленнаго доказательства, примемъ въ качествѣ посылокъ слѣдующія предложенія:

(1) Если три цѣлыхъ числа, a, b и c, удовлетворяютъ равенствамъ

$$a = b \quad \text{и} \quad b = c,$$

то

$$a = c.$$

(2) Если символы a и b представляютъ собою два цѣлыхъ числа, то символъ *)

$$(a + b)$$

также есть символъ цѣлаго числа.

(3) Если четыре цѣлыхъ числа a, b, a', b' удовлетворяютъ равенствамъ

$$a = a' \quad \text{и} \quad b = b',$$

то

$$(a + b) = (a' + b').$$

(4) Символъ 3 представляетъ собою цѣлое число.

(5) „ 7 „ „ „ „

(6) „ 8 „ „ „ „

(7) „ 5 „ „ „ „

(8) „ 10 „ „ „ „

(9) „ 13 „ „ „ „

(10) „ 23 „ „ „ „

(11) Имѣетъ мѣсто равенство

$$(3 + 7) = 10.$$

(12) Имѣетъ мѣсто равенство

$$(8 + 5) = 13.$$

(13) Имѣетъ мѣсто равенство

$$(10 + 13) = 23.$$

Теперь будемъ доказывать слѣдующую теорему:

*) Чтобы не имѣть надобности въ формулированіи посылокъ, относящихся къ употребленію скобокъ, мы, какъ мы уже дѣлали это въ другомъ примѣрѣ, сохраняемъ скобки даже тамъ, гдѣ принято ихъ опускать.

(*A*). Имѣетъ мѣсто равенство

$$[(3+7)+(8+5)]=23.$$

Доказательство.

Лемма I*). Символъ

$$(3+7)$$

обозначаетъ цѣлое число.

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ символами 3 и 7 неопредѣленныя a и b въ посылкѣ (2), то условіе этой посылки сдѣлается, въ силу посылокъ (4) и (5), предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе ея совпадетъ съ тѣмъ предложеніемъ, которое требуется доказать.

Лемма II. Символъ

$$(8+5)$$

обозначаетъ цѣлое число.

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ символами 8 и 5 неопредѣленныя a и b въ посылкѣ (2), то условіе этой посылки станетъ, въ силу посылокъ (6) и (7), предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе ея совпадетъ съ тѣмъ предложеніемъ, которое требуется доказать.

Лемма III. Символъ

$$[(3+7)+(8+5)]$$

обозначаетъ цѣлое число.

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ символами

$$(3+7) \quad \text{и} \quad (8+5)$$

неопредѣленныя a и b въ посылкѣ (2), то условіе этой посылки станетъ, въ силу леммъ I и II, предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе совпадетъ съ тѣмъ предложеніемъ, которое требуется доказать.

Лемма IV. Символъ

$$(10+13)$$

обозначаетъ цѣлое число.

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ символами

$$10 \quad \text{и} \quad 13$$

*) Леммой называется всякая теорема, встрѣчающаяся въ ходѣ доказательства какой-нибудь другой теоремы, если она выдвигается исключительно ради этого доказательства.

неопредѣленныя a и b въ посылкѣ (2), то условіе этой посылки станетъ, въ силу посылокъ (8) и (9), предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе совпадетъ съ тѣмъ предложеніемъ, которое требуется доказать.

Лемма V. Имѣетъ мѣсто равенство

$$[(3+7)+(8+5)]=(10+13).$$

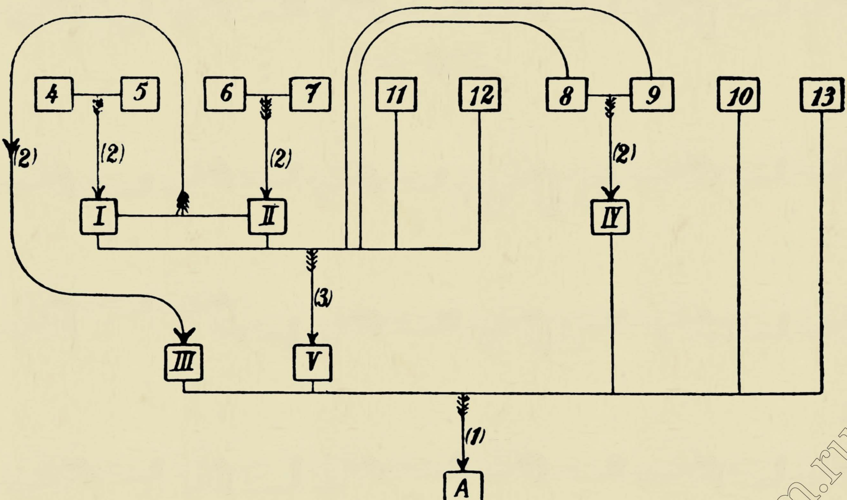
Дѣйствительно, если мы замѣнимъ символами

$$(3+7),\quad (8+5),\quad 10 \text{ и } 13$$

неопредѣленныя

$$a,\ b,\ a',\ b'$$

въ посылкѣ (3), то условіе этой посылки станетъ, въ силу леммъ I и II и посылокъ (8), (9), (11) и (12), предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе совпадетъ съ тѣмъ предложеніемъ, которое требуется доказать.



Черт. 1.

Теперь легко доказать самое предложеніе (A). Дѣйствительно, замѣняя въ посылкѣ (1) неопредѣленныя

$$a,\ b,\ c$$

символами

$$[(3+7)+(8+5)],\quad (10+13) \quad \text{и} \quad 23,$$

мы замѣчаемъ, что условіе этого предложенія становится, въ силу леммъ III и IV, посылки (10), леммы V и посылки (1[illegible]), предложеніемъ истиннымъ, а заключеніе совпадаетъ тогда съ предложеніемъ (A), которое какъ разъ и требовалось доказать.

Прилагаемая діаграмма позволяетъ составить себѣ представленіе объ общемъ ходѣ изложеннаго доказательства.

Въ этой діаграммѣ арабскія цифры указываютъ на посылки, а римскія — на леммы. Стрѣлки наглядно рисуютъ роль условныхъ предложеній, обозначенныхъ при помощи приписанныхъ сбоку этихъ стрѣлокъ арабскихъ цифръ. Линіи, которымъ не придана форма стрѣлокъ, служатъ къ тому, чтобы показать, въ какихъ комбинаціяхъ входятъ въ составъ каждаго логическаго звена посылки и леммы.

IV. Спеціальный методъ, примѣняемый къ доказательству условныхъ предложеній. Методъ математической индукціи. Методъ приведенія къ абсурду. Гипотетическіе постулаты.

§ 14. Съ перваго взгляда можетъ показаться, что категорическія предложенія являются единственными предложеніями, доказательство которыхъ можетъ принять одну изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущей главѣ формъ. Однако, это не такъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно замѣтить, что условіе и заключеніе условнаго предложенія могутъ сами быть условными предложеніями.

Вотъ, впрочемъ, простой примѣръ, того, что доказательство условнаго предложенія можетъ быть получено при помощи логическаго звена, составленнаго по изложенному въ § 11 образцу. Примемъ, въ качествѣ посылокъ, слѣдующія два предложенія:

(A_1) Если символы l, m, n представляютъ собою три какихъ-нибудь цѣлыхъ числа, то

$$l+m+n=l+(m+n).$$

(C) Если для какой-нибудь совокупности (E) будетъ истиннымъ слѣдующее предложеніе:

(P_1) Когда a, b и c обозначаютъ три какихъ-нибудь элемента изъ совокупности (E), то

$$a+b+c=a+(b+c),$$

— то въ этомъ случаѣ для данной совокупности будетъ истиннымъ также и слѣдующее предложеніе:

(P_2) Когда x, y, z, t обозначаютъ четыре какихъ-нибудь элемента изъ совокупности (E), то

$$x+y+z+t=x+(y+z+t).$$

Принявъ эти посылки, мы теперь легко докажемъ слѣдующую теорему:

(A_0) Если символы p, q, r, s представляютъ собою четыре какихъ-нибудь цѣлыхъ числа, то

$$p+q+r+s=p+(q+r+s).$$

Дѣйствительно, замѣнимъ въ условномъ предложеніи (C) неопредѣленныя:

элементъ изъ совокупности (E), a, b, c, x, y, z, t

слѣдующими элементами:

цѣлое число, l, m, n, p, q, r, s.

Тогда гипотеза (P_1) и заключеніе (P_2) условнаго предложенія (C) преобразуются въ два предложенія, выражающихъ соотвѣтственно то же самое, что и предложенія (A_1) и (A_0). Такъ какъ первое предложеніе (будучи посылкой) является истиннымъ, то и второе необходимо будетъ истиннымъ, что и требовалось доказать.

§ 15. Хотя, согласно вышесказанному, и можетъ случиться, что доказательство какого-нибудь условнаго предложенія принимаетъ одну изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущей главѣ формъ, однако, вообще говоря, это происходитъ только въ довольно исключительныхъ случаяхъ.

Обычно приходится прибѣгать къ слѣдующему пріему: включаютъ на одинъ моментъ условіе теоремы, которую требуется доказать, въ число посылокъ и ищутъ доказательства предложенія, составляющаго заключеніе теоремы, при помощи методовъ, съ которыми мы познакомились въ предыдущей главѣ. Доказавши это предложеніе, мы, очевидно, докажемъ и самую теорему, которую требовалось доказать.

Чтобы дать простой примѣръ примѣненія этого метода, примемъ въ качествѣ посылки слѣдующее предложеніе:

(1) Если символы a, b, c представляютъ собою три цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ соотношеніямъ

$$a=b \quad \text{и} \quad b=c,$$

то

$$a=c.$$

Теперь будемъ доказывать слѣдующую теорему:

(T) Если символы p, q, r, s представляютъ собою цѣлыя числа, удовлетворяющія соотношеніямъ

$$p=q, \quad q=r, \quad r=s,$$

то

$$p=s.$$

Сообразно указанному методу, присоединимъ къ посылкѣ (1), въ качествѣ временной посылки, условіе теоремы (T). Другими словами, будемъ временно считать истинными слѣдующія семь предложеній:

(2) Символъ p представляетъ собою цѣлое число.

(3) „ q „ „ „ „

(4) „ r „ „ „ „

(5) „ s „ „ „ „

(6) Имѣетъ мѣсто равенство $p = q$,

(7) „ „ „ $q = r$,

(8) „ „ „ $r = s$.

Лемма I. Имѣетъ мѣсто равенство $p = r$.

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ неопредѣленныя

$$a,\ b,\ c$$

въ предложеніи (1) символами p, q, r, то условіе этого предложенія превратится въ предложеніе истинное, такъ какъ она по смыслу окажется эквивалентной совокупности посылокъ (2), (3), (4), (6) и (7). Съ другой стороны, при этой замѣнѣ заключеніе предложенія (1) совпадетъ съ той леммой, которую мы хотимъ доказать. Слѣдовательно, эта лемма доказана.

Теперь достаточно замѣнить неопредѣленныя

$$a,\ b,\ c$$

въ предложеніи (1) символами

$$p,\ r,\ s,$$

чтобы увидѣть, что совокупность посылокъ (2), (4), (5), вмѣстѣ съ леммой I и посылкой (8), съ одной стороны, и предложеніе (1), съ другой стороны, составляютъ первую и вторую посылки логическаго звена, въ которомъ заключеніемъ является соотношеніе

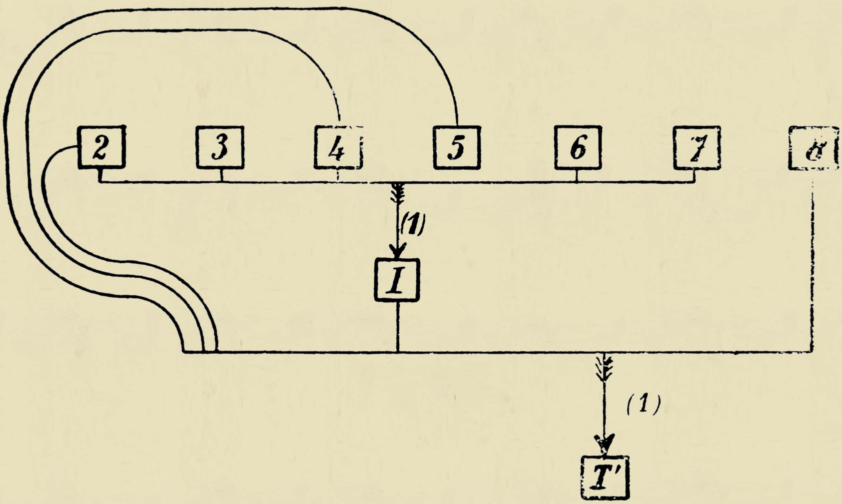
$$(T') \qquad p = s.$$

Но это соотношеніе представляетъ собою заключеніе теоремы (T). Слѣдовательно, согласно общимъ замѣчаніямъ, сдѣланнымъ выше, сама теорема (T) должна считаться доказанной.

Слѣдуя методу, уже примѣнявшемуся въ § 13, можно представить тотъ путь, по которому мы шли при выводѣ равенства (T') изъ предложенiй

(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8),

при помощи слѣдующей дiаграммы:



Черт. 2.

§ 16. Методъ доказательства, извѣстный подъ названiемъ метода математической индукцiи, подходитъ, какъ мы увидимъ, подъ категорiю тѣхъ методовъ, которые мы уже изучали. Но въ виду замѣчательныхъ свойствъ лежащаго въ его основѣ постулата и въ виду плодотворности этого метода, онъ заслуживаетъ спецiальнаго изученiя, хотя его можно примѣнять только къ особенному классу теоремъ. Этотъ классъ состоитъ изъ теоремъ, которыя могутъ быть формулированы слѣдующимъ образомъ:

I. Если какой-нибудь символъ n представляетъ собою цѣлое число, не меньшее даннаго цѣлаго числа k, то нѣкоторое предложенiе (P), содержащее символъ n, является истиннымъ.

Всякое предложенiе, имѣющее такую форму, является, очевидно, предложенiемъ условнымъ, въ которомъ предложенiе (P) будетъ заключенiемъ, а условiемъ — слѣдующее предложенiе:

Символъ n представляетъ собою цѣлое число, не меньшее даннаго цѣлаго числа k.

Вотъ, для примѣра, теорема, принадлежащая къ разсматриваемому классу:

Если символъ n представляетъ собою цѣлое число, не меньшее числа 2, то сумма s_n всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до n включительно удовлетворяетъ слѣдующему равенству:

$$2 \, . \, s_n = n \, . \, (n + 1).$$

Въ математикѣ теоремы, принадлежащія къ типу I, доказываются обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

Сначала доказываются, при помощи пріемовъ, съ которыми мы познакомились выше, слѣдующія два предложенія:

(1) Предложеніе (P_k), въ которое послѣ замѣны символа n числомъ k превращается предложеніе (P), является истиннымъ.

(2) Если предложеніе (P_q), въ которое послѣ замѣны символа n какимъ-нибудь цѣлымъ числомъ q, не меньшимъ k, превращается предложеніе P, является истиннымъ, то будетъ истиннымъ также предложеніе (P_{q+1}), получаемое путемъ замѣны символа n въ предложеніи (P) цѣлымъ числомъ $q + 1$.

Когда это установлено, то доказательство заканчиваютъ слѣдующимъ утвержденіемъ:

(С) Слѣдовательно, предложеніе (P) является истиннымъ для всякаго цѣлаго значенія n, не меньшаго k, что и требовалось доказать.

Иногда, прежде чѣмъ формулировать предложеніе (C), говорятъ слѣдующее: „такъ какъ предложеніе (P) является истиннымъ для

$$n = k,$$

то оно, въ силу предложенія (2), будетъ истиннымъ для

$$n = k + 1;$$

будучи истиннымъ для

$$n = k + 1,$$

оно, въ силу предложенія (2), будетъ истиннымъ также для

$$n = k + 2$$

и т. д.“.

Такова точная формулировка этихъ доказательствъ, въ которыхъ находитъ себѣ примѣненіе математическая индукція и которыя называются поэтому доказательствами путемъ индукціи.

Легко видѣть, что въ доказательствахъ указаннаго вида теорема, которую требуется доказать, представляетъ собою заключеніе извѣстнаго логическаго звена, въ которомъ первой посылкой является совокупность предложеній (1) и (2), а второй посылкой — слѣдующій постулатъ, истинность котораго очевидна:

(A) Если цѣлое число p входитъ въ составъ нѣкоторой совокупности (E) и эсли при этомъ достаточно, чтобы какое-нибудь цѣлое число r, не меньшее p, входило въ составъ совокупности (E) для того, чтобы цѣлое число

$$r+1$$

также входило въ составъ этой совокупности, то въ этомъ случаѣ всякое цѣлое число, не меньшее p, входитъ въ составъ совокупности (E).

Дѣйствительно, замѣнимъ неопредѣленныя

p; нѣкоторая совокупность (E); r

въ предложенiи (A) слѣдующими выраженiями:

k; совокупность значенiй n, для которыхъ предложенiе (P) является истиннымъ; q.

Послѣ этой замѣны условiе предложенiя (A) превратится въ предложенiе, которое будетъ выражать то же самое, что и совокупность предложенiй (1) и (2), а заключенiе перейдетъ въ предложенiе, эквивалентное, по смыслу, теоремѣ (T), которую требуется доказать.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что доказательства „путемъ индукцiи" не отличаются по своей структурѣ отъ доказательствъ, которыя мы изучали раньше. Характерно для этихъ доказательствъ только пользованiе замѣчательнымъ постулатомъ (A).

Впрочемъ, „методъ математической индукцiи" играетъ такую важную роль, что Пуанкаре видитъ въ немъ главный источникъ успѣховъ математическихъ наукъ *).

Примѣровъ примѣненiя этого метода такъ много въ математическихъ сочиненiяхъ, что мы считаемъ лишнимъ давать ихъ въ этой статьѣ.

Въ заключенiе мы должны еще замѣтить, что методъ математической индукцiи существенно отличается отъ индуктивныхъ методовъ экспериментальныхъ наукъ. Въ обоихъ случаяхъ, дѣйствительно, происходитъ заключенiе отъ частнаго къ общему, но само заключенiе покоится, въ этихъ двухъ случахъ, на совершенно различныхъ основахъ.

---

*) Пуанкаре. — «Наука и гипотеза».

§ 17. Методъ доказательства, называемый **методомъ приведенія къ абсурду**, находится въ тѣсной связи съ изложеннымъ въ § 15 методомъ доказательства условныхъ предложеній. Методъ приведенія къ абсурду состоитъ въ слѣдующемъ: чтобы доказать какую-нибудь теорему (T), мы временно принимаемъ въ число предложеній, признанныхъ истинными ранѣе (§ 10), предложеніе (T'), представляющее собою отрицаніе истинности предложенія (T), и, пользуясь методами доказательства, изложенными выше, мы доказываемъ нѣкоторое предложеніе (P'), представляющее собою отрицаніе истинности предложенія (P), о которомъ мы знаемъ, что оно является истиннымъ. Получивъ этотъ результатъ, мы заключаемъ, что предложеніе (T') является ложнымъ, и что, слѣдовательно, предложеніе (T) которое требовалось доказать, является истиннымъ.

Этотъ способъ разсужденія сводится къ тому, что сначала устанавливается, при помощи изложеннаго въ § 15 пріема, слѣдующее условное предложеніе: „если бы предложеніе (T') было истиннымъ, то было бы истиннымъ также предложеніе (P')“ *), а затѣмъ доказывается, при помощи методовъ, разсмотрѣнныхъ нами въ предыдущей главѣ, теорема (T), при чемъ пользуются слѣдующими постулатами, истинность которыхъ очевидна:

(1) Если предложеніе (P') представляетъ собою отрицаніе истиннаго предложенія (P), то оно является ложнымъ.

(2) Если въ какомъ-нибудь истинномъ условномъ предложеніи заключеніе (P') является ложнымъ, то условіе (T') этого условнаго предложенія также является ложнымъ.

(3) Если отрицаніе (T') какого-нибудь предложенія (T) является ложнымъ, то предложеніе (T) является истиннымъ.

Такимъ образомъ, доказательство какой-нибудь теоремы „путемъ приведенія къ абсурду“ не отличается по своему строенію отъ доказательствъ, разсмотрѣнныхъ раньше, и характернымъ его отличіемъ является въ дѣйствительности лишь особенная природа постулатовъ, на которое это доказательство опирается.

§ 18. Иногда случается, что какая-нибудь математическая теорія, какъ, напримѣръ, не-евклидова геометрія, ставитъ своей цѣлью изученіе того, что было бы въ томъ случаѣ, если бы нѣкоторыя условія (C) были выполнены **). Очевидно, что въ теоріи такого рода всѣ теоремы

*) Помѣщенное въ текстѣ въ кавычкахъ предложеніе является въ дѣйствительности предложеніемъ иллюзорнымъ (§ 9). Мы видимъ, такимъ образомъ, что предложенія этого рода могутъ въ математическихъ теоріяхъ играть, на одинъ моментъ, извѣстную роль.

**) Никакъ не могу согласиться съ тѣмъ, что неевклидова геометрія какъ логическое построеніе, чѣмъ-либо отличается отъ евклидовой геометріи; евклидова геометрія исходитъ отъ однихъ посылокъ, неевклидова — отъ друявляются въ дѣйствительности предложеніями условными, въ число условій которыхъ входитъ совокупность (E) предложеній, выражающихъ то обстоятельство, что условія (C) выполнены.

Чтобы умѣть примѣнять къ доказательству этихъ теоремъ методъ § 15 и избѣжать ненужныхъ длинотъ, мы разсматриваемъ предложенія, принадлежащія къ совокупности (E), какъ входящія въ число постулатовъ теоріи. Въ этомъ случаѣ предложенія, принадлежащія къ совокупности (E), представляютъ собою категорію постулатовъ, имѣющихъ ту особенность, что въ дѣйствительности мы совершенно не высказываемся о томъ, считаемъ ли мы эти постулаты истинными предложеніями. Естественно, какъ намъ кажется, назвать эти постулаты **гипотетическими** постулатами, сохранивъ за другими постулатами названіе **аксіомъ**. Можно, замѣтимъ мимоходомъ, дѣлить аксіомы на **аксіомы относительныя** и **аксіомы абсолютныя**, условившись считать нѣкоторую аксіому входящей въ составъ первой или второй категоріи въ зависимости отъ того, существуетъ ли какая-нибудь теорія, гдѣ данная аксіома является предложеніемъ, имѣющимъ характеръ теоремы, или такой теоріи не существуетъ.

Очевидно, что всякое опредѣленіе можетъ быть разсматриваемо, какъ гипотетическій постулатъ. Такъ, напримѣръ, можно считать, что обычное опредѣленіе параллельныхъ прямыхъ выражаетъ собою условіе о тождественности, по смыслу, утвержденія, что двѣ прямыя параллельны, и утвержденія, что данныя прямыя лежатъ въ одной и той же плоскости, не имѣя ни одной общей точки.

Сопоставляя эти замѣчанія съ замѣчаніями, сдѣланными въ § 6, мы приходимъ къ заключенію, что различныя подраздѣленія посылокъ какой-нибудь теоріи, какъ бы они ни были важны съ точки зрѣнія способа изложенія и ознакомленія съ теоріей, какъ цѣлымъ, носятъ ярко выраженный субъективный характеръ. Но важно замѣтить, что это обстоятельство нисколько не отражается на убѣдительности доказательствъ и вотъ почему: какъ мы уже указали въ § 4 и какъ это слѣдуетъ изъ разсужденій, изложенныхъ въ предшествующей и въ настоящей главѣ, изъ всѣхъ подраздѣленій предложеній, составляющихъ какую-нибудь математическую теорію, имѣетъ значеніе, съ точки зрѣнія строенія доказательствъ, только дѣленіе этихъ предложеній на посылки и на теоремы.

V. Критическая провѣрка предшествующихъ разсужденій.

§ 19. Раньше всего естественно спросить себя, можно ли сказать, что всякое математическое доказательство необходимо прини-

---

гихъ. Принципіальной логической разницы въ этомъ нѣтъ. Въ евклидовой геометріи также всѣ предложенія являются условными, въ число условій которыхъ входитъ совокупность постулатовъ.

Редакторъ.

маетъ одну изъ формъ, описанныхъ вкратцѣ въ двухъ предыдущихъ главахъ.

Мы думаемъ, хотя мы и не можемъ обосновать нашего мнѣнія строгимъ доказательствомъ, что дѣло обстоитъ именно такъ, если говорить о доказательствахъ полныхъ (т. е. о доказательствахъ, развитыхъ совершенно детально) и если принять во вниманіе, что, помимо развѣтвленій, изложенныхъ подробно въ § 13, доказательство какой-нибудь теоремы можетъ содержать и другія развѣтвленія, проистекающія изъ доказательства условныхъ предложеній, которыя составляютъ вторыя посылки нѣкоторыхъ логическихъ звеньевъ, встрѣчающихся въ ходѣ доказательства данной теоремы.

§ 20. Теперь мы перейдемъ къ разсмотрѣнію одного серьезнаго возраженія, которое можетъ быть выдвинуто противъ математическихъ доказательствъ, и которое можно формулировать слѣдующимъ образомъ: цѣлью математическихъ доказательствъ является, казалось бы, ограниченіе роли интуиціи при оцѣнкѣ степени правильности постулатовъ; однако, они не достигаютъ этой цѣли. Дѣйствительно, для того, чтобы судить, входитъ ли, въ смыслѣ § 10, какое-нибудь предложеніе въ число тѣхъ, которыя, съ точки зрѣнія данной теоріи, составляютъ совокупность предложеній, признанныхъ истинными ранѣе, мы должны прибѣгнуть къ интуиціи. Сверхъ того, когда мы составляемъ какое-нибудь логическое звено, мы путемъ интуиціи узнаемъ, какія неопредѣленныя должны входить въ составъ того условнаго предложенія, которымъ мы пользуемся, и опять-таки путемъ интуиціи мы оцѣниваемъ результатъ субституціи, выполняемой надъ неопредѣленными. Въ самомъ дѣлѣ, когда намъ дано доказательство какой-нибудь теоремы, мы можемъ дополнить его и доказать справедливость интуитивныхъ сужденій, которыя встрѣчаются въ ходѣ этого доказательства и которыя не фигурируютъ въ спискѣ постулатовъ; но тогда мы вновь введемъ логическія звенья съ сопровождающей ихъ цѣпью новыхъ интуитивныхъ сужденій. Такимъ образомъ, всякая математическая теорія, какъ бы она ни детализировала своихъ доказательствъ, будетъ содержать интуитивныя сужденія, не предусмотрѣнныя въ спискѣ посылокъ.

Безъ сомнѣнія невозможно отрицать справедливости этого замѣчанія. Однако, мы увидимъ въ § 25, послѣ того какъ познакомимся съ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ математическихъ теорій, что въ каждой изъ нихъ существуетъ извѣстная совокупность объектовъ, которые можно совершенно безошибочно указать и которые обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что всякое интуитивное сужденіе, относящееся къ какому-нибудь изъ этихъ объектовъ, если только оно встрѣчается въ теоріи, явно фигурируетъ среди постулатовъ. Впрочемъ, необходимо отмѣтить слѣдующее весьма важное обстоятельство: изучая математическія теоріи, мы убѣждаемся, а posteriori, что полныя математическія доказательства (§ 19) не оставляютъ въ умѣ никакихъ слѣдовъ сомнѣнія.

§ 21. Фактически мы почти никогда не развиваемъ полныхъ доказательствъ въ математическихъ теоріяхъ, такъ какъ доказательства сдѣлались бы тогда слишкомъ длинными. Мы вполнѣ въ правѣ сокращать доказательства, если только мы даемъ достаточныя указанія, чтобы читатель могъ самъ, безъ излишняго труда, заполнить всѣ пробѣлы.

Къ сожалѣнію, эти сокращенія заходятъ часто слишкомъ далеко и не только создаютъ большія трудности для читателя, но являются также источникомъ крупныхъ ошибокъ, такъ какъ забота о краткости мѣшаетъ автору, гораздо чаще, чѣмъ это можетъ казаться, замѣтить, что онъ и самъ не въ состояніи возстановить недостающихъ звеньевъ; по этой именно причинѣ неоднократно случалось, что ложныя предложенія выдавались за доказанныя теоремы.

VI. Совмѣстность и независимость системы постулатовъ. Техническіе термины и обычные термины. Специфическіе постулаты теоріи.

§ 22. Очевидно, что для того, чтобы выводы въ какой-нибудь математической теоріи (и вообще говоря — во всякой дедуктивной теоріи) были свободны отъ ошибокъ, необходимо, чтобы постулаты этой теоріи были совмѣстны между собою. Другими словами, должно быть выполнено слѣдующее условіе:

I. Если какое-нибудь предложеніе (P) представляетъ собою отрицаніе какого-нибудь постулата теоріи, то оно не можетъ быть слѣдствіемъ изъ другихъ постулатовъ данной теоріи.

Кромѣ этого условія, существуетъ еще одно, которое, не будучи, какъ предыдущее, условіемъ правильности теоріи, является, несомнѣнно, условіемъ ея совершенства: постулаты теоріи должны быть независимы. Другими словами:

II. Ни одинъ постулатъ теоріи не можетъ быть слѣдствіемъ изъ другихъ постулатовъ ея.

Вопросъ, удовлетворяетъ ли данная система постулатовъ тому или другому изъ приведенныхъ только-что двухъ условій, сводится, очевидно, къ слѣдующему вопросу:

III. Является ли данное предложеніе (P) слѣдствіемъ изъ данной системы другихъ предложеній (S)?

Можетъ явиться желаніе считать этотъ вопросъ эквивалентнымъ слѣдующему:

IV. Представляетъ ли собою система предложеній (S) совокупность посылокъ, достаточную для того, чтобы, слѣдуя указаніямъ, изложеннымъ въ главахъ III и IV, доказать предложеніе (P)?

Такая интерпретація вопроса III представляла бы то крупное преимущество, что давала бы (по крайней мѣрѣ, теоретически) общій критерій для отвѣта на предлагаемый вопросъ. Дѣйствительно, легко видѣть, что конечное число (которое, правда, можетъ быть очень большимъ) испытаній необходимо привело бы насъ къ цѣли. Но на самомъ дѣлѣ указанная интерпретація вопроса III не удовлетворяетъ требованіямъ науки (и она не совпадаетъ съ принятой въ современныхъ трудахъ). Дѣйствительно, можно прежде всего спросить себя, не существуетъ ли какого-нибудь метода дедуктивнаго доказательства, существенно отличнаго отъ тѣхъ, которые мы разсматривали въ главахъ III и IV. Затѣмъ, если даже читатель согласится съ нами, что такого метода не существуетъ, возникаетъ другая трудность, которую мы лучше всего выяснимъ на частномъ примѣрѣ.

Разсмотримъ слѣдующія три предложенія:

(1) Каждой конечной послѣдовательности цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствуетъ, въ силу нѣкотораго соглашенія (C), вполнѣ опредѣленная точка.

(2) Если какая-нибудь конечная послѣдовательность цѣлыхъ чиселъ (s) является результатомъ транспозиціи двухъ послѣдовательныхъ членовъ въ извѣстной другой послѣдовательности цѣлыхъ чиселъ (s'), то точки, соотвѣтствующія, въ силу соглашенія (C), послѣдовательностямъ (s) и (s'), совпадаютъ.

(P) Если двѣ конечныя послѣдовательности цѣлыхъ чиселъ (σ) и (σ') состоятъ изъ элементовъ одной и той же совокупности цѣлыхъ чиселъ и отличаются другъ отъ друга только порядкомъ, въ которомъ, въ каждой изъ нихъ, расположены числа, принадлежащія къ разсматриваемой совокупности, то точки, соотвѣтствующія, въ силу соглашенія (C), послѣдовательностямъ (σ) и (σ'), совпадаютъ.

Теперь поставимъ себѣ слѣдующій вопросъ:

(Q) Является ли предложеніе (P) слѣдствіемъ изъ предложеній (1) и (2)?

Каждый математикъ отвѣтитъ на этотъ вопросъ утвердительно, а когда его попросятъ обосновать свой отвѣтъ, онъ докажетъ предложеніе (P), при чемъ включитъ въ число посылокъ предложенія (1) и (2), но совокупность посылокъ, которыя онъ приметъ, будетъ содержать въ себѣ, кромѣ предложеній (1) и (2), еще и другія предложенія.

Если бы нашему математику возразили, что предложенія (1) и (2) не представляютъ собой всей совокупности посылокъ, на которыхъ основывается его доказательство, онъ не сталъ бы отрицать этого, но прибавилъ бы, что онъ совершенно точно установилъ, что предложенія (1) и (2) не могутъ быть истинными безъ того, чтобы оказалось истиннымъ также предложеніе (P), и что, слѣдовательно, онъ вполнѣ обосновалъ свой отвѣтъ.

Такимъ образомъ, вопросъ III самъ по себѣ далеко не такъ простъ и ясенъ. Чтобы дать ему удовлетворительную интерпретацію, необходимо сначала познакомиться съ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ математическихъ теорій.

§ 23. Чтобы выяснить это свойство, обратимся къ частному примѣру и воспользуемся для этого тѣмъ примѣромъ, которымъ мы, въ совершенно другихъ цѣляхъ, уже пользовались въ § 15. Въ этомъ примѣрѣ мы приняли, въ качествѣ единственной посылки, слѣдующее предложеніе:

(1) Если символы a, b, c представляютъ собою цѣлыя числа, удовлетворяющія соотношеніямъ

$$a = b \quad \text{и} \quad b = c,$$

то

$$a = c.$$

Затѣмъ мы доказали слѣдующую теорему:

(T) Если символы p, q, r, s представляютъ собою цѣлыя числа, удовлетворяющія соотношеніямъ

$$p = q, \quad q = r \quad \text{и} \quad r = s,$$

то

$$p = s.$$

Только для того, чтобы заставить читателя внимательнѣе остановиться на всей этой маленькой теоріи, состоящей изъ приведенныхъ двухъ предложеній, мы замѣтимъ, что для того, чтобы справедливость всѣхъ выводовъ совершенно не нарушилась, нѣтъ необходимости, чтобы символъ

$$=$$

(или эквивалентное ему выраженіе „равняется“) сохранялъ, въ примѣненіи къ цѣлымъ числамъ, обычное значеніе. Въ дѣйствительности необходимо и достаточно только, чтобы этотъ символъ имѣлъ такое значеніе, при которомъ предложеніе (1) является истиннымъ. Такъ, напримѣръ, если бы мы приписали данному символу тотъ смыслъ, который обыкновенно дается символу

$$<,$$

то теорема (T) и ея доказательство оставались бы справедливыми, и не потребовалось бы никакихъ измѣненій. Замѣтимъ также, что то же самое можно сказать относительно выраженія

„цѣлое число“.

Можно было бы приписать этому выраженію смыслъ:

„элементъ нѣкоторой совокупности (E)“,

и это не внесло бы ни малѣйшаго измѣненія въ разсматриваемую теорію.

Всякая математическая теорія, въ которой доказательства теоремы даны полностью, содержитъ въ себѣ какъ, напримѣръ, та теорія, которую мы только-что привели, нѣкоторое число терминовъ (которые могутъ быть выраженіями, заимствованными изъ обычной рѣчи или какими угодно другими символами), которые отличаются слѣдующей особенностью: для того, чтобы теорія оставалась совершенно справедливой, нѣтъ необходимости приписывать этимъ терминамъ, — которые мы будемъ называть техническими терминами теоріи, сохраняя для другихъ терминовъ названіе обычныхъ терминовъ, — нѣкоторый, вполнѣ опредѣленный, исключающій всякій другой, смыслъ; необходимо и достаточно только, чтобы указанные термины были истолкованы такимъ образомъ, чтобы посылки являлись истинными предложеніями.

Такова основная особенность математическихъ теорій, которая составитъ исходную точку нашихъ дальнѣйшихъ разсужденій *).

Очевидно, что всякій терминъ, вводимый въ какую-нибудь теорію при помощи опредѣленія, будетъ техническимъ терминомъ этой теоріи, но самыми основными техническими терминами будутъ тѣ, которые не имѣютъ опредѣленій. Мы будемъ называть ихъ существенными техническими терминами соотвѣтствующей теоріи. Существенные техническіе термины не могутъ быть исключены изъ теоріи по методу, указанному въ § 2, какъ это можно сдѣлать съ техническими терминами, вводимыми при помощи опредѣленій. Далѣе, если мы въ предѣлахъ, налагаемыхъ требованіемъ, чтобы посылки оставались справедливыми, выбрали для существенныхъ техническихъ терминовъ какое-нибудь частное значеніе, то этимъ самымъ мы уже совершенно точно и однозначно опредѣлили смыслъ и тѣхъ техническихъ терминовъ, которые вводятся при помощи опредѣленій.

Въ разсмотрѣнномъ въ началѣ этого параграфа примѣрѣ символъ

$$=$$

и выраженіе

цѣлое число

являются, очевидно, существенными техническими терминами.

Легко выяснить себѣ, a priori, возможность существованія въ математическихъ теоріяхъ техническихъ терминовъ, т. е. терминовъ, смыслъ которыхъ не играетъ роли при доказательствахъ, и понять, далѣе, почему всякая математическая теорія необходимо должна со-

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что эта особенность свойственна не только математической теоріи, но и всякому формальному выводу.

Ред.

держать, кромѣ техническихъ терминовъ, еще и обычные термины: дѣйствительно, изъ разсужденій, изложенныхъ въ главахъ III и IV, слѣдуетъ, что доказательство какой-нибудь теоремы представляетъ собою не что иное, какъ выполненіе, въ извѣстномъ порядкѣ, нѣкоторыхъ операцій, изъ которыхъ каждая принадлежитъ къ одному изъ слѣдующихъ видовъ:

1) Убѣждаются, что какое-нибудь предложеніе выражаетъ часть того, что выражаетъ нѣкоторое другое предложеніе.

2) Убѣждаются, что смыслъ какого-нибудь предложенія тождественъ со смысломъ нѣкоторой совокупности другихъ предложеній.

3) Устанавливаютъ, что какое-нибудь предложеніе представляетъ собою отрицаніе нѣкотораго другого предложенія.

4) Устанавливаютъ тождественность смысла какихъ-нибудь двухъ предложеній.

5) Устанавливаютъ, что какое-нибудь предложеніе является предложеніемъ условнымъ, выдѣляютъ въ такомъ предложеніи условіе и заключеніе и устанавливаютъ неопредѣленныя, которыя оно можетъ содержать.

6) Разсматриваютъ результатъ, получающійся отъ произведенной надъ неопредѣленными какого-нибудь условнаго предложенія субституціи.

Очевидно, что ни одна изъ этихъ операцій не была бы возможна, если бы мы не знали точнаго смысла нѣкоторыхъ терминовъ. Отсюда — необходимость существованія обычныхъ терминовъ.

Съ другой стороны, достаточно обратиться къ примѣрамъ, приводившимся выше въ разныхъ мѣстахъ, чтобы убѣдиться, что могутъ встрѣчаться термины, точнаго значенія которыхъ, при выполненіи любой изъ указанныхъ операцій, не требуется знать. Отсюда — возможность существованія техническихъ терминовъ.

§ 24. Выясненныя въ предыдущемъ параграфѣ особенности математическихъ теорій приводятъ насъ къ принятію слѣдующаго соглашенія:

Если всѣ термины, входящіе въ какое-нибудь предложеніе (P), равно какъ и въ предложенія, составляющія нѣкоторую систему (S), за исключеніемъ тѣхъ терминовъ, которые принадлежатъ къ нѣкоторой совокупности (T), имѣютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ и если при этомъ невозможно приписать терминамъ (T) такой смыслъ, при которомъ предложенія (S) являлись бы истинными, а предложеніе (P) не было бы истиннымъ, то мы будемъ говорить, что, по отношенію къ терминамъ (T), разсматриваемымъ, какъ техническіе термины, предложеніе (P) является слѣдствіемъ предложеній (S).

Принявъ это соглашеніе, мы должны теперь разсмотрѣть, какимъ образомъ можно разрѣшить слѣдующій вопросъ:

V. Является ли данное предложеніе (P), по отношенію къ данной системѣ терминовъ (T), разсматриваемыхъ, какъ техническіе термины, слѣдствіемъ данной системы предложеній (S)?

Если мы приняли, въ качествѣ постулатовъ извѣстной теоріи, въ которой возможно разсматривать термины (T), какъ техническіе термины, систему предложеній (S) или систему, получаемую путемъ присоединенія къ предложеніямъ (S) любого числа другихъ предложеній, несомнѣнно истинныхъ, какое бы значеніе мы ни давали терминамъ (T), и если при этомъ оказывается, что намъ удается соотвѣтственно общимъ указаніямъ, изложеннымъ въ главахъ III и IV, построить доказательство предложенія (P), то мы, очевидно, доказали, что на вопросъ V слѣдуетъ дать утвердительный отвѣтъ. Если бы, напротивъ, мы нашли, что можно дать терминамъ (T) такое значеніе, при которомъ предложенія (S) являются истинными предложеніями, а предложеніе (P) оказывается предложеніемъ ложнымъ, то мы бы этимъ самымъ установили, что въ такомъ случаѣ на вопросъ V слѣдуетъ дать отрицательный отвѣтъ.

Въ разсмотрѣнномъ въ началѣ предыдущаго параграфа примѣрѣ предложеніе (T) является слѣдствіемъ предложенія (1) по отношенію къ символу

$$=$$

и выраженію

цѣлое число,

разсматриваемымъ, какъ техническіе термины. Въ этомъ примѣрѣ мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда система (S) [сводящаяся здѣсь къ единственному предложенію (1)] представляетъ собою достаточную для доказательства предложенія (P) систему посылокъ.

Другого рода примѣромъ является примѣръ, разсмотрѣнный нами въ § 22. Читатель легко убѣдится, что въ этомъ случаѣ предложеніе (P) является слѣдствіемъ предложеній (1) и (2) по отношенію къ термину

„соглашеніе (C)“,

разсматриваемому, какъ техническій терминъ. Но онъ замѣтитъ, что предложенія (1) и (2) не составляютъ достаточной для доказательства предложенія (P) системы посылокъ. Чтобы получить таковую, надо къ предложеніямъ (1) и (2) присоединить нѣкоторыя предложенія, заимствованныя изъ теоріи перестановокъ и остающіяся истинными, какой бы смыслъ мы ни придавали термину

„соглашеніе (C)“.

Чтобы дать примѣръ такого случая, когда на вопросъ V слѣдуетъ отвѣтить отрицательно, разсмотримъ слѣдующія два предложенія:

(A) Если три цѣлыхъ числа a, b, c, удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$a = b \quad \text{и} \quad b = c,$$

то

$$a = c.$$

(B) Если два цѣлыхъ числа x и y удовлетворяютъ соотношенію

$$x = y,$$

то

$$y = x.$$

Легко видѣть, что по отношенію къ символу

$$=,$$

разсматриваемому, какъ техническій терминъ, предложеніе (B) не является слѣдствіемъ предложенія (A).

Дѣйствительно, условимся считать, что символъ

$$=$$

имѣетъ то значеніе, которое обыкновенно дается символу

$$<.$$

Тогда предложеніе (A) будетъ истиннымъ предложеніемъ, предложеніе же (A) окажется ложнымъ, и этого достаточно для того, чтобы мы имѣли основаніе утверждать, что предложеніе (B) не является слѣдствіемъ предложенія (A).

Мы предоставимъ читателю самому убѣдиться на примѣрахъ (особенно легко составить себѣ такіе примѣры изъ области ариѳметики) въ необходимости одной оговорки, которая напрашивается сама собою и которую можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Возможно иногда, когда дано предложеніе (P) и система другихъ предложеній (S), сдѣлать среди терминовъ, употребленныхъ для выраженія предложеній (P) и (S), произвольный, въ извѣстныхъ предѣлахъ (которыхъ мы, впрочемъ не будемъ точно указывать), выборъ терминовъ (Т) и спросить себя затѣмъ, не является ли предложеніе (P) слѣдствіемъ системы (S) по отношенію къ терминамъ (Т), разсматриваемымъ, какъ техническіе термины. Въ такомъ случаѣ, отвѣтъ на поставленный вопросъ можетъ зависѣть отъ выбора терминовъ (Т).

§ 25. Изложенное въ предыдущихъ двухъ параграфахъ позволяетъ намъ точно и съ большей полнотою, чѣмъ мы могли это сдѣлать до сихъ поръ, охарактеризовать значеніе математическихъ теорій и извлечь отсюда одно важное указаніе относительно того, какъ составляются эти теоріи.

Предположимъ, что въ какой-нибудь теоріи (T) извѣстная совокупность терминовъ (Т) представляетъ собою совокупность существенныхъ техническихъ терминовъ (§ 23), и допустимъ, далѣе, что мы, путемъ интуиціи или какимъ-нибудь инымъ способомъ, установили слѣдующее обстоятельство: если мы будемъ разсматривать термины (Т), какъ названія нѣкоторыхъ, вполнѣ опредѣленныхъ, объектовъ (C), то всѣ постулаты теоріи дѣлаются истинными предложеніями. Въ такомъ случаѣ, можно будетъ разсматривать теорію (T), какъ теорію объектовъ (C), и, по крайней мѣрѣ, поскольку рѣчь будетъ идти объ этихъ объектахъ, она безусловно не будетъ содержать никакихъ другихъ интуитивныхъ сужденій, кромѣ тѣхъ, которыя устанавливаютъ справедливость постулатовъ (Π), формулировка которыхъ содержитъ названія данныхъ объектовъ. Мы будемъ говорить, что совокупность постулатовъ (Π) представляетъ собою совокупность специфическихъ постулатовъ данной теоріи объектовъ (C); ясно, что всякая теорема изъ этой теоріи объектовъ (C) будетъ по отношенію къ терминамъ (Т), разсматриваемымъ, какъ техническіе термины, слѣдствіемъ специфическихъ постулатовъ.

Изъ вышесказаннаго можно извлечь слѣдующее основное указаніе:

Когда мы хотимъ создать математическую теорію какой-нибудь совокупности объектовъ, мы должны сдѣлать это такимъ образомъ, чтобы названія этихъ объектовъ получили характеръ техническихъ терминовъ.

Когда это условіе выполнено, объекты, названія которыхъ окажутся существенными техническими терминами, будутъ, очевидно, представлять собою основные элементы теоріи, а специфическіе постулаты покажутъ намъ, какъ велико участіе интуиціи въ относящихся къ этимъ основнымъ элементамъ сужденіяхъ.

Если я не ошибаюсь, никто еще не занимался спеціальнымъ изученіемъ и выясненіемъ вопросовъ, которыми мы въ этой главѣ занимались. Однако, изученіе современныхъ трудовъ, относящихся къ основаніямъ той или иной изъ главныхъ вѣтвей математики приводитъ насъ къ заключенію, что приведенныя нами соображенія были, въ болѣе или менѣе ясной формѣ, знакомы авторамъ этихъ трудовъ. Такъ, напримѣръ, въ изслѣдованіяхъ, относящихся къ основаніямъ геометріи, такіе термины, какъ: точка, прямая линія, плоскость и нѣкоторые другіе, играютъ въ дѣйствительности роль существенныхъ техническихъ терминовъ *). Точно такъ же необходимо признать, что такъ называемая совокупность постулатовъ геометріи представля-

*) Это можно съ различныхъ точекъ зрѣнія оспаривать.

Ред.

лась уму авторовъ, въ сущности, не чѣмъ инымъ, какъ совокупностью специфическихъ постулатовъ излагаемой ими теоріи. Это послѣднее обстоятельство станетъ особенно яснымъ, когда мы примемъ во вниманіе, что въ сочиненіяхъ, о которыхъ идетъ рѣчь, совершенно не формулируются посылки ариѳметики, и тѣмъ не менѣе авторы при доказательствахъ широко пользуются ариѳметикой и даже математическимъ анализомъ.

§ 26. Изъ изложеннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что формулированныя въ § 22 условія I и II касаются системы специфическихъ постулатовъ какой-нибудь теоріи и что, слѣдовательно, списокъ существенныхъ техническихъ терминовъ этой теоріи долженъ представлять собой одно изъ данныхъ для рѣшенія вопроса, выполнены ли указанныя въ § 22 условія I и II. Точно такъ же формулированный въ § 22 вопросъ III нужно разсматривать, какъ сокращенную форму приведеннаго въ § 24 вопроса V, и для фактическаго разрѣшенія вопроса о томъ, выполнено ли указанное въ § 22 условіе I или II, требуется раньше всего, чтобы совокупность терминовъ (T) совпадала съ совокупностью существенныхъ техническихъ терминовъ соотвѣтствующей теоріи.

Совершенно естественнымъ выводомъ изъ изложенныхъ выше соображеній являются нѣкоторыя руководящія правила, которыя можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Чтобы убѣдиться въ томъ, что специфическіе постулаты какой-нибудь математической теоріи удовлетворяютъ указанному въ § 22 условію I, другими словами, чтобы установить совмѣстны ли они, надо посмотрѣть, нельзя ли существеннымъ техническимъ терминамъ дать такія значенія, при которыхъ всѣ постулаты стали бы истинными предложеніями. Если намъ удалось найти такія значенія, то мы этимъ самымъ доказали совмѣстность данныхъ постулатовъ. Если, напротивъ, мы установили, что отрицаніе какого-либо изъ постулатовъ является, по отношенію къ существеннымъ техническимъ терминамъ, слѣдствіемъ (§ 24) другихъ постулатовъ, то это значитъ, что мы доказали несовмѣстность данныхъ постулатовъ.

Что касается указаннаго въ томъ же § 22 условія II, касающагося независимости постулатовъ, то къ изслѣдованію этого вопроса слѣдуетъ приступать только послѣ того, какъ предварительно установлена совмѣстность постулатовъ, и тогда можно поступить слѣдующимъ образомъ: мы разсматриваемъ по очереди каждый постулатъ и каждый разъ стараемся найти такія значенія для существенныхъ техническихъ терминовъ, при которыхъ разсматриваемый постулатъ сталъ бы на одинъ моментъ ложнымъ предложеніемъ, а всѣ остальные постулаты оказались бы предложеніями истинными. Если намъ удалось осуществить это по отношенію къ каждому изъ постулатовъ, то мы доказали независимость данныхъ постулатовъ. Если, напротивъ, мы установили, что одинъ изъ постулатовъ является, по отношенію къ существеннымъ техническимъ терминамъ, слѣдствіемъ (§ 24) другихъ постулатовъ, то мы этимъ самымъ доказали, что данные постулаты не являются независимыми.

Фактически вопросъ о томъ, совмѣстны ли специфическіе постулаты какой-нибудь теоріи, не вызываетъ — по крайней мѣрѣ, въ обыкновенныхъ случаяхъ — трудностей, такъ какъ, когда мы приступаемъ къ изложенію какой-нибудь теоріи, то намъ, обыкновенно, извѣстно уже заранѣе, при какихъ значеніяхъ существенныхъ техническихъ терминовъ всѣ постулаты оказываются истинными предложеніями. Напротивъ, разрѣшеніе вопроса о независимости постулатовъ оказывается часто столь труднымъ, что приходится совершенно отказаться отъ этого или же ограничиться частичнымъ разрѣшеніемъ вопроса, а именно — доказать, что нѣкоторая группа постулатовъ независима отъ другихъ, т. е. доказать относительно нѣкоторой группы постулатовъ, что ни одинъ изъ нихъ не является, по отношенію къ существеннымъ техническимъ терминамъ, слѣдствіемъ (§ 24) другихъ постулатовъ. Прибавлю еще, что въ извѣстныхъ случаяхъ данная въ § 22 формулировка II условія независимости постулатовъ можетъ оказаться непригодной по той причинѣ, что формулировка нѣкоторыхъ постулатовъ можетъ заключать уже въ себѣ предположеніе о справедливости нѣкоторыхъ другихъ, формулированныхъ ранѣе, постулатовъ.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы раздѣляемъ постулаты на нѣкоторое число классовъ и устанавливаемъ какимъ-нибудь образомъ такой порядокъ послѣдовательности этихъ классовъ, чтобы можно было затѣмъ (если трудности не слишкомъ велики) поступать слѣдующимъ образомъ: примѣняя вышеуказанный методъ, мы сначала убѣждаемся, что постулаты, принадлежащіе къ первому классу, независимы другъ отъ друга, а затѣмъ разсматриваемъ въ принятомъ порядкѣ другіе классы; при этомъ мы беремъ по очереди каждый постулатъ, принадлежащій къ разсматриваемому въ данный моментъ классу, и ищемъ каждый разъ такихъ значеній для существенныхъ техническихъ терминовъ, при которыхъ данный постулатъ сталъ бы ложнымъ предложеніемъ, а всѣ остальные постулаты, принадлежащіе къ разсматриваемому классу, и всѣ постулаты, принадлежащіе къ предшествующимъ классамъ, оказались бы въ то же время предложеніями истинными.

Когда намъ удается успѣшно осуществить всѣ эти операціи, мы говоримъ, что, *по отношенію къ принятой классификаціи, разсматриваемые постулаты являются независимыми.*

Въ заключеніе мы дадимъ простой примѣръ того случая, когда совмѣстность и независимость какой-нибудь системы постулатовъ можетъ быть легко установлена. Для этого условимся, что символъ

$$=$$

и выраженіе

элементъ совокупности (E)

будутъ представлять собою существенные техническіе термины той теоріи, къ разсмотрѣнію которой мы хотимъ перейти, и примемъ, въ качествѣ специфическихъ постулатовъ этой теоріи, слѣдующія три предложенія:

(A) Если символъ a представляетъ собою элементъ совокупности (E), то

$$a = a.$$

(B) Если символы a и b представляютъ собою два элемента совокупности (E), для которыхъ

$$a = b,$$

то

$$b = a.$$

(C) Если символы a, b и c представляютъ собою три элемента совокупности (E), для которыхъ

$$a = b \quad \text{и} \quad b = c,$$

то

$$a = c.$$

Чтобы установить совмѣстность указанныхъ трехъ постулатовъ, достаточно замѣтить, что они окажутся истинными предложеніями, если мы придадимъ выраженію

элементъ совокупности (E)

тотъ смыслъ, который имѣетъ выраженіе

цѣлое число,

а символу

$$=$$

то значеніе, которое онъ обыкновенно имѣетъ въ ариѳметикѣ.

Для доказательства независимости нашихъ трехъ постулатовъ надо, соотвѣтственно указанному выше общему правилу, доказать слѣдующія три леммы:

Лемма I. Можно дать техническимъ терминамъ такія значенія, при которыхъ предложеніе (A) оказалось бы ложнымъ предложеніемъ, а каждое изъ предложеній (B) и (C) — истиннымъ предложеніемъ.

Дѣйствительно, будемъ считать, что выраженіе

элементъ совокупности (E)

имѣетъ тотъ же смыслъ, что и выраженіе

цѣлое число,

и, видоизмѣняя обычный смыслъ символа

$$=$$

въ символической фразѣ вида

$$x = y,$$

въ которой x и y представляютъ собою цѣлыя числа, условимся считать, что эта символическая фраза выражаетъ одновременно слѣдующіе два факта:

1) ни одинъ изъ символовъ x и y не представляетъ собою единицы;

2) символы x и y являются символами одного и того же цѣлаго числа.

При этихъ значеніяхъ техническихъ терминовъ каждое изъ предложеній (B) и (C) будетъ истиннымъ предложеніемъ, предложеніе же (A) окажется ложнымъ, такъ какъ для того, чтобы оно оказалось истиннымъ, требуется, чтобы для всякаго цѣлаго числа имѣло мѣсто равенство

$$a = a,$$

между тѣмъ какъ въ дѣйствительности дѣло обстоитъ не такъ: при томъ значеніи, которое мы приписали символу

$$=,$$

равенство

$$1 = 1$$

не имѣетъ мѣста.

Лемма II. Можно дать техническимъ терминамъ такія значенія, при которыхъ предложеніе (B) было бы ложнымъ предложеніемъ, а каждое изъ предложеній (A) и (C) было бы истиннымъ предложеніемъ.

Дѣйствительно, для этого достаточно придавать термину

элементъ совокупности (E)

тотъ смыслъ, который мы ему придавали при доказательствѣ леммы I, и условиться въ то же время, чтобы символъ

$$=$$

имѣлъ тотъ смыслъ, который въ ариѳметикѣ обыкновенно имѣетъ символъ

$$\leqq .$$

Лемма III. Можно дать техническимъ терминамъ такія значенія, при которыхъ предложеніе (C) было бы ложнымъ предложеніемъ, а каждое изъ предложеній (A) и (B) было бы истиннымъ предложеніемъ.

Дѣйствительно, будемъ по прежнему считать, что выраженіе

элементъ совокупности (E)

означаетъ цѣлое число, но дадимъ теперь символу

$$=$$

новое толкованіе, а именно условимся считать, что символическое предложеніе

$$x = y,$$

въ которомъ x и y представляютъ собою цѣлыя числа, выражаетъ, что, говоря языкомъ классической терминологіи, числа x и y или равны или же большее изъ нихъ отличается отъ другого только на единицу. При этомъ соглашеніи предложенія (A) и (B) будутъ, очевидно, истинными предложеніями, предложеніе же (C) не будетъ истиннымъ предложеніемъ, такъ какъ, хотя, въ силу нашего соглашенія, и имѣютъ мѣсто, въ частности, равенства

$$1 = 2 \quad \text{и} \quad 2 = 3,$$

тѣмъ не менѣе, въ силу того же соглашенія, не имѣетъ мѣста равенство

$$1 = 3.$$

Доказавъ наши три леммы, мы доказали вмѣстѣ съ тѣмъ независимость нашихъ трехъ постулатовъ.

Такимъ образомъ, постулаты (A), (B) и (C) являются совмѣстными и независимыми.

Примѣрныя программы и объяснительныя записки, напечатанныя въ „Матеріалахъ по реформѣ средней школы. Петроградъ, 1915“.

(Прил. къ Ж. М. Н. Пр. за 1915 г., кн. XII, стр. 246—283).

Критическій обзоръ.

Директора Кіевскаго учительскаго института К. М. Щербины.

(*Окончаніе* *).

Указанные нами недочеты вовсе не вызываются сущностью дѣла, какими-либо особыми требованіями; они обусловливаются, очевидно, тѣми же причинами, благодаря которымъ и внутренняя сторона программъ вполнѣ отвѣчаетъ ихъ внѣшнему облику, т. е. недостаточно тщательной обработкой.

Обратимся къ фактамъ. Остановимся на нѣкоторыхъ данныхъ, свидѣтельствующихъ объ отсутствіи въ работѣ руководящихъ началъ, о недостаткѣ въ ней внутренней согласованности, серьезной разработки научно-педагогическихъ вопросовъ.

1) Начнемъ съ вопроса объ отношеніи несоизмѣримыхъ значеній величины въ геометріи. Въ объяснительной запискѣ къ программѣ курса геометріи для физико-математической вѣтви читаемъ (стр. 266): „V классъ. Во всѣхъ случаяхъ нахожденія отношенія двухъ величинъ въ этомъ классѣ слѣдуетъ ограничиться случаемъ соизмѣримыхъ величинъ; хотя въ этомъ классѣ въ курсѣ алгебры учащіеся и знакомятся съ основаніями теоріи предѣловъ, но эта статья въ курсѣ алгебры проходится не въ самомъ началѣ года, да и вообще вслѣдствіе относительной трудности этого вопроса для учащихся предпочтительнѣе отнести распространеніе соотвѣтствующей теоріи на случай несоизмѣримыхъ величинъ къ курсу VI класса**)...“ (дальше указывается, какъ это сдѣлать). А въ объяснительной запискѣ къ программѣ для гуманитарно-классическаго отдѣленія, гдѣ математика (на второй ступени) является второстепеннымъ предметомъ (математикѣ здѣсь отводится почти вдвое меньше времени, чѣмъ на физико математической вѣтви), читаемъ: „V классъ... Курсъ геометріи даннаго класса состоитъ, главнымъ образомъ, въ изученіи число-

*) См. „Вѣстникъ“, № 658.

**) Разрядка наша.

выхъ зависимостей между элементами фигуръ. Сначала выясняется самый принципъ измѣренія и устанавливается наличность существованія какъ соизмѣримыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ величинъ*). Самый фактъ несоизмѣримости можетъ быть обнаруженъ какъ геометрическимъ, такъ и алгебраическимъ путемъ, и въ виду важности вопроса желательно, чтобы онъ былъ освѣщенъ съ обѣихъ точекъ зрѣнія. Доказательство пропорціональности отрѣзковъ, дугъ и т. д. для случая несоизмѣримости можно вести такъ...“. Далѣе идутъ вполнѣ основательныя для даннаго случая методическія указанія, которыя, кстати сказать, лишаютъ всякой возможности смягчить отмѣченную шереховатость.

Оказывается, по мнѣнію Комиссіи, что случай объ отношеніи несоизмѣримыхъ величинъ настолько труденъ для учащихся V класса, посвятившихъ себя, главнымъ образомъ, занятіямъ математикой и поступившихъ въ реальное отдѣленіе по физико-математической вѣтви, что предлагается отнести изученіе этого къ курсу VI класса; для учащихся же, посвятившихъ себя, по преимуществу, гуманитарно-классическимъ занятіямъ, тотъ же вопросъ является уже вполнѣ доступнымъ въ V классѣ, и указываются пріемы всесторонняго разсмотрѣнія этого важнаго вопроса. Еще болѣе страннымъ кажется намъ тотъ фактъ, что учащіеся также въ реальномъ отдѣленіи, но по естественно-исторической вѣтви, гдѣ занятія математикой должны ставиться серьезно, будутъ изучать указанный вопросъ уже не въ VI-мъ классѣ, а также въ V классѣ**).

Вотъ какимъ образомъ трактуется въ программахъ вопросъ, который сами составители относятъ къ вопросамъ первостепенной важности.

2) Обратимся къ другому, не менѣе важному, вопросу учебнаго курса — къ теоріи предѣловъ и къ примѣненію ея въ курсѣ геометріи. Передъ нами два отдѣленія: реальное по естественно-исторической вѣтви и гуманитарно-классическое. Для второй ступени, т. е. для четырехъ старшихъ классовъ, въ реальномъ отдѣленіи положено 17 уроковъ математики (и 2 урока черченія), а въ классическомъ — всего только 12 уроковъ; въ общемъ есть стремленіе въ реальномъ отдѣленіи курсъ математики поставить серьезно — далеко серьезнѣе, чѣмъ въ классическомъ. И вотъ въ программѣ VI класса гуманитарно-классическаго отдѣленія читаемъ (стр. 278): „Понятіе о постоянныхъ и перемѣнныхъ количествахъ, о независимыхъ перемѣнныхъ и функціяхъ. Понятіе о безконечно-большомъ и безконечно-маломъ количествѣ. Основныя теоремы о безконечно-малыхъ количествахъ. Понятіе

---

*) Разрядка наша.

**) Объ этомъ можно сдѣлать заключеніе только на основаніи программы геометріи (стр. 255), такъ какъ объяснительной записки не имѣется.

о предѣлѣ. Основныя теоремы о предѣлахъ". А далѣе, въ той же программѣ VI класса говорится: „Приложенiе теорiи предѣловъ къ вычисленiю длины окружности и площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ".

Отдѣлъ о длинѣ окружности и площади круга, обычно изучаемый теперь въ V классѣ, очевидно, перенесенъ въ курсъ VI класса, чтобы примѣнить къ нему теорiю предѣловъ, и такое перенесенiе можно признать вполнѣ прiемлемымъ.

Теперь обратимся къ программѣ естественно-исторической вѣтви. Въ учебномъ планѣ геометрiи V класса мы находимъ (стр. 255; см. примѣчанiе на стр. 275): „Длина окружности. Положенiе (?) о вычисленiи числа π. Площади прямолинейныхъ фигуръ и круга". Далѣе въ учебномъ планѣ VI класса: „Круглыя тѣла. Вычисленiе поверхностей и объемовъ". И, наконецъ, учебный планъ геометрiи VII класса изложенъ такъ: „... *B*. Въ естественно-историческомъ отдѣленiи реальной вѣтви (?) и новогуманитарномъ отдѣленiи. Понятiе о перемѣнныхъ величинахъ и предѣлахъ. Приложенiе ученiя о предѣлахъ къ вычисленiю длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ. Повторенiе курса". Въ программѣ болѣе подробно изложено то, что намѣчено въ планѣ, при чемъ программа ученiя о предѣлахъ здѣсь даже нѣсколько уже, чѣмъ въ гуманитарно-классическомъ отдѣленiи (не вводится понятiе о функцiяхъ).

Итакъ, ученики естественно-исторической вѣтви, обладающiе болѣе серьезной математической подготовкой, живѣе интересующiеся математическими вопросами, должны изучать отдѣлъ о перемѣнныхъ величинахъ и ихъ предѣлахъ и примѣнять эти ученiя къ геометрiи почему-то только въ VII классѣ, тогда какъ ученики гуманитарно-классическаго отдѣленiя будутъ изучать тѣ же вопросы въ VI классѣ. Это — болѣе, чѣмъ странно, но въ данномъ случаѣ насъ болѣе удивляетъ другое обстоятельство. Судя по программѣ (объяснительной записки нѣтъ), ученики физико-математической вѣтви въ V классѣ, при изученiи длины окружности и площади круга, и въ VI классѣ, при ознакомленiи съ круглыми тѣлами, не пользуются теорiей предѣловъ, а должны будутъ изучать эти вопросы приблизительно такъ, какъ изучаютъ ихъ въ высшихъ начальныхъ училищахъ, гдѣ курсъ геометрiи носитъ скорѣе практическiй характеръ. Допустимо ли это въ данномъ случаѣ? А параллельно съ этимъ въ одной и той же школѣ, только въ классическомъ отдѣленiи, тотъ же вопросъ менѣе подготовленными учениками изучается болѣе основательно и притомъ въ VI классѣ. Какъ же понимать все это? Какiя руководящiя идеи привели къ такимъ несообразностямъ? Объяснительная записка не поможетъ въ разрѣшенiи нашего недоумѣнiя, потому что ея-то для естественно-исторической вѣтви и для новогуманитарнаго отдѣленiя нѣтъ.

Эта несогласованность программы отнюдь не можетъ быть объяснена тѣмъ, что въ реальномъ отдѣленіи въ VII классѣ прорабатывается довольно серьезный въ научномъ отношеніи курсъ математики и отводится на это значительное количество времени, а въ классическомъ отдѣленіи нѣкоторыя болѣе важныя математическія положенія должны быть внушены учащимся въ теченіе всего курса. Подобныя соображенія отпадаютъ сами собою, если принять во вниманіе, что на новогуманитарномъ отдѣленіи, которое по своему характеру и по количеству времени, отводимаго для математики, мало чѣмъ отличается отъ гуманитарно-классическаго, программа алгебры и геометріи та же, что и для естественно-исторической вѣтви реальнаго отдѣленія, и значительно отличается отъ программы гуманитарно-классическаго отдѣленія.

Послѣднее обстоятельство, въ свою очередь, заслуживаетъ особаго вниманія: оно свидѣтельствуетъ о томъ, что при разработкѣ программъ не были установлены предварительно руководящіе взгляды на существенные вопросы дидактическаго характера, въ данномъ случаѣ на осуществленіе простого положенія, что программы должны отвѣчать тѣмъ особенностямъ, которыя присущи намѣченнымъ отдѣленіямъ школы.

3) Очень важно для характеристики программъ остановить вниніе на томъ, какъ разработанъ вопросъ объ изслѣдованіи уравненій. Здѣсь, кромѣ несогласованности взглядовъ, проводимыхъ въ программахъ (на которыя мы должны смотрѣть, какъ на работу комиссіи, а не отдѣльныхъ лицъ), кромѣ противорѣчій съ дидактической точки зрѣнія, мы встрѣчаемся еще кое съ чѣмъ инымъ.

Въ программѣ для новогуманитарнаго отдѣленія, которая является обязательной и для естественно-исторической вѣтви реальнаго отдѣленія, находимъ (стр. 252): „VII классъ... Изслѣдованіе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Изслѣдованіе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными“. Въ объяснительной запискѣ прибавляется (стр. 254): „изслѣдованіе уравненій проходится въ возможно краткомъ объемѣ и разъясняется на простыхъ примѣрахъ“. Опять-таки въ курсъ VII класса гуманитарно-классическаго отдѣленія включено только „изслѣдованіе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ“ (стр. 279), а въ объяснительной запискѣ къ этой программѣ указывается, что изслѣдованіе уравненій слѣдуетъ изучать въ связи съ ученіемъ о равносильныхъ уравненіяхъ (стр. 283). Обратимся къ программѣ алгебры для физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія (стр. 260): „V классъ. Общія формулы для рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными и ихъ изслѣдованіе“. Объяснительная записка къ послѣдней программѣ подробно останавливается на тѣхъ случахъ, которые подлежатъ разсмотрѣнію при изслѣдованіи системы двухъ уравненій, и ни въ объяснительной запискѣ ни въ программѣ ни слова не говорится объ изслѣдованіи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Итакъ, вопросъ объ изслѣдованіи уравненій въ одномъ случаѣ отнесенъ къ курсу VII класса, а въ другомъ — къ курсу V класса, а, сверхъ того, очень важный вопросъ объ изслѣдованіи уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ почему-то вовсе исключенъ изъ курса математики физико-математической вѣтви. Послѣднее обстоятельство, очевидно, указываетъ на недостатокъ вниманія, удѣленнаго Комиссіей улучшенію нынѣ дѣйствующихъ программъ. Что касается перваго обстоятельства, то оно также является для насъ очень показательнымъ. Комиссія не сочла необходимымъ заняться рѣшеніемъ важнаго въ дидактическомъ отношеніи вопроса, какъ быть съ изслѣдованіемъ уравненій: остановиться ли на этомъ вопросѣ, какъ только учащіеся пріобрѣтутъ достаточныя знанія въ рѣшеніи и составленіи уравненій (т. е. въ V классѣ), чтобы въ теченіе дальнѣйшаго курса болѣе сознательно пользоваться уравненіями при рѣшеніи различнаго рода задачъ, или же, въ силу трудностей этой статьи, требующей отъ учащихся значительнаго математическаго развитія, отнести ее къ концу курса (т. е. къ курсу VII класса).

Ясно, что рѣшать поставленный вопросъ такъ, какъ онъ рѣшенъ въ проектируемыхъ „примѣрныхъ" программахъ нельзя, — тѣмъ болѣе, что практика осудила уже и то и другое рѣшеніе (т. е. отнесеніе статьи объ изслѣдованіи уравненій къ курсу V или VII класса).

Согласно программамъ 1872 г., изученіе отдѣла объ изслѣдованіи уравненій было помѣщено въ курсъ V класса и давало, какъ извѣстно, плачевные результаты, вслѣдствіе чего, по программамъ 1890 г., эта статья всецѣло перенесена была въ курсъ VII класса, а при такихъ условіяхъ она во многихъ отношеніяхъ потеряла свое образовательное и практическое значеніе.

Между тѣмъ тотъ конфликтъ, который возникаетъ между научной послѣдовательностью и дидактическими требованіями, въ данномъ случаѣ, какъ и во многихъ другихъ, легко разрѣшается въ настоящее время слѣдующимъ образомъ.

Въ V классѣ отнюдь не слѣдуетъ изучать статью объ изслѣдованіи уравненій, но въ этомъ же классѣ при рѣшеніи съ помощью уравненій различнаго рода задачъ и въ особенности геометрическихъ, необходимо останавливаться въ отдѣльныхъ случаяхъ на изслѣдованіи рѣшеній, начиная съ простѣйшихъ подходящихъ случаевъ. Это будетъ имѣть образовательное и практическое значеніе и, кромѣ того, будетъ служить какъ бы пропедевтикой къ систематическому прохожденію отдѣла объ изслѣдованіи уравненій, когда учащіеся будутъ подготовлены къ усвоенію этого серьезнаго вопроса въ общемъ видѣ. Такое обобщеніе можетъ быть сдѣлано въ VII классѣ и не потребуетъ для своего выполненія много времени.

Подобныя соображенія примѣнимы и къ такимъ вопросамъ, какъ эквивалентность уравненій, неравенства (которыми приходится пользоваться въ теченіе всего курса), графическое представленіе функцій, приближенныя вычисленія, задачи на такъ называемыя тройныя правила (въ ариѳметикѣ) и др. Но только во всѣхъ указанныхъ случаяхъ, во-первыхъ, необходимо сообразоваться съ особенностями изучаемаго отдѣла, а во-вторыхъ — слѣдуетъ соблюдать крайнюю осторожность и послѣдовательность, соблюдать, такъ сказать, чувство мѣры, чтобы не повредить общему ходу курса и не нарушить научной системы. Разумѣется, подобное проведеніе курса представляетъ для учителя значительныя трудности, — гораздо значительнѣе тѣхъ, какія встрѣчаются при обычномъ шаблонномъ преподаваніи.

Проектируемыя программы въ этомъ отношеніи проникнуты духомъ крайней рутины; только въ программѣ для гуманитарно-классическаго отдѣленія встрѣчается слабое стремленіе къ правильному разрѣшенію указаннаго конфликта, но, къ сожалѣнію, это стремленіе приводитъ къ нарушенію системы *), а иной разъ и къ болѣе серьезнымъ недочетамъ **).

4) Наконецъ, позволяемъ себѣ остановиться еще на одномъ существенномъ вопросѣ дидактическаго характера — вопросѣ о повтореніи вообще и о заключительныхъ повторительныхъ курсахъ въ связи съ дополненіями и обобщеніями въ частности.

Можно не соглашаться, но можно понять ту точку зрѣнія, на которой стоятъ обыкновенно отрицающіе необходимость въ математикѣ какихъ-либо повтореній ***), но насъ приводитъ въ недоумѣніе то отношеніе къ указанному вопросу, какое мы встрѣчаемъ въ проектируемыхъ программахъ.

Обращаясь къ программамъ новогуманитарнаго отдѣленія и обѣихъ вѣтвей реальнаго отдѣленія, мы видимъ, что особая привилегія

---

*) Въ программѣ алгебры IV класса изученіе алгебраическихъ дѣйствій протекаетъ параллельно (?) съ рѣшеніемъ уравненій (стр. 280); въ программѣ V класса — квадратныя уравненія, ирраціональныя числа и дѣйствія надъ радикалами (стр. 277): матеріалъ распредѣленъ крайне нераціонально.

**) См. объяснительную записку къ программѣ IV класса по геометріи (стр. 280, 281), гдѣ требуется, чтобы „истины, самоочевидныя для учащихся, сообщались безъ доказательства, со ссылкою на данныя нашего наблюденія (таковы истины: всѣ прямые углы равны между собою, изъ данной точки на прямую можно опустить только одинъ перпендикуляръ)". Такія истины въ началѣ курса, дѣйствительно, можно давать безъ доказательства, но ссылаться при этомъ въ систематическомъ курсѣ на данныя наблюденія — это значитъ внушать ложныя идеи относительно способа построенія умозрительной системы. На стр. 252 въ объяснительной запискѣ къ программѣ VI класса читаемъ: „можно ограничиться только изложеніемъ доказательствъ и не требовать отъ учащихся запоминанія (?) его". Какъ далеко все это отъ требованій современной дидактики!

***) Примѣромъ такихъ взглядовъ могутъ служить соображенія, высказанныя на съѣздѣ директоровъ и представителей попечительныхъ совѣтовъ коммерческихъ училищъ въ январѣ 1902 г. „Матеріалы по коммерческому образованію". Выпускъ II. СПб., 1902. Ч. 1-ая, стр. 76.

выпала на долю геометрiи: въ VII классѣ вездѣ полагается повторенiе курса геометрiи (хотя о дополненiяхъ и обобщенiяхъ по этому предмету ничего не упоминается): по другимъ отдѣламъ математики повторенiе не считается обязательнымъ, такъ какъ дополненiя къ ариѳметикѣ и алгебрѣ (стр. 267) въ курсѣ VII класса физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленiя не могутъ считаться повторенiемъ: эти дополненiя заключаютъ въ себѣ только новый матерiалъ*).

Совершенно иначе обстоитъ дѣло въ гуманитарно-классическомъ отдѣленiи: тамъ въ VII классѣ считается необходимымъ повторенiе, дополненiе и систематизацiя основъ курса математики; и въ другихъ случаяхъ на повторенiе тамъ обращено вниманiе: такъ, напримѣръ, „курсъ алгебры IV класса начинается съ дополненiя и расширенiя тѣхъ познанiй о дѣйствiяхъ надъ одночленами и многочленами, которыя были усвоены учащимися на первой ступени“ (стр. 279).

Опять, слѣдовательно, мы видимъ полную несогласованность, отсутствiе опредѣленнаго взгляда тамъ, гдѣ этого отнюдь не должно быть.

Несомнѣнно, что повторенiе, какъ дидактическая мѣра, имѣетъ психологическiя основанiя, но только повторенiе не должно состоять въ повторномъ усвоенiи пройденнаго курса, какъ это, очевидно, предлагается проектируемой примѣрной программой, когда говорится о повторенiи курса геометрiи, потому что ни о какихъ обобщенiяхъ или дополненiяхъ въ связи съ повторенiемъ здѣсь не упоминается.

Въ такомъ видѣ требованiе программы является нецѣлесообразнымъ. Повторенiе курса должно быть связано съ систематизацiей, дополненiями и обобщенiями. Съ этой точки зрѣнiя намъ кажется существеннымъ пробѣломъ программъ отсутствiе упоминанiя о томъ, что курсъ каждаго класса долженъ начинаться съ повторенiя въ указанномъ смыслѣ основныхъ вопросовъ, проработанныхъ въ предшествующемъ классѣ. Еще болѣе важнымъ представляется намъ повторительный курсъ математики заключительнаго характера. Вѣдь многiе вопросы, въ силу дидактическихъ требованiй, въ низшихъ классахъ излагаются не въ томъ законченномъ видѣ, въ какомъ долженъ

*) Въ объяснительной запискѣ къ программѣ математики VII класса физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленiя читаемъ (стр. 269): „Относительно программы отдѣла I-го замѣтимъ, что въ нее не вошелъ обзоръ первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствiй надъ цѣлыми и дробными числами и законовъ этихъ дѣйствiй, съ которыхъ обыкновенно начинается курсъ теоретической ариѳметики. Это сдѣлано отчасти для сбереженiя времени, отчасти потому, что ученики могутъ освоиться съ этими законами попутно на урокахъ ариѳметики и алгебры въ младшихъ классахъ (!)“. Эта выписка указываетъ на отсутствiе, такъ сказать, педагогической перспективы. Не менѣе характерными являются и дальнѣйшiя слова объяснительной записки: „Преподавателю предоставляется, однако, право начинать курсъ VII класса съ изложенiя систематическаго свода упомянутаго обзора, если позволитъ время“.

ихъ представлять себѣ юноша, завершающій свое среднее образованіе; не подлежитъ сомнѣнію, что курсъ ариѳметики первыхъ трехъ классовъ нуждается въ освѣщеніи и въ тѣхъ обобщеніяхъ, какія недоступны, само собою разумѣется, ученику III класса. Вообще, повторительные курсы въ выпускномъ классѣ должны представлять одну изъ самыхъ важныхъ работъ: здѣсь, такъ сказать, возводится крыша надъ тѣмъ зданіемъ, которое строилось въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ; только здѣсь возможно говорить, напримѣръ, о построеніи научной системы, о математическихъ опредѣленіяхъ, объ аксіомахъ, о методахъ доказательствъ, о значеніи постулата Евклида, о развитіи понятія о числѣ и т. п., т. е. о тѣхъ вопросахъ, которые только были намѣчены въ предыдущихъ классахъ,

Указанная нами заключительная работа, обобщающая данный предметъ, — можно сказать, философская часть каждаго предмета, — не только желательна, не только своевременна, вполнѣ отвѣчая запросамъ учащихся, но и необходима: такія обобщенія являются тѣмъ, что должно оживотворить и обратить въ стройную систему предметъ, излагавшійся въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ.

Итакъ, отличительной чертой всей разсматриваемой работы является недостатокъ стройности, планомѣрности, руководящихъ началъ. Этимъ прежде всего разбираемыя программы отличаются отъ программъ, нынѣ дѣйствующихъ. Но есть и другое существенное различіе между ними съ практической точки зрѣнія.

По количеству матеріала, предлагаемаго для проработки, новыя программы, сравнительно, мало чѣмъ отличаются отъ старыхъ (т. е. отъ программъ гимназій и реальныхъ училищъ): между тѣмъ количество времени, отводимое для математики въ проектируемой школѣ, значительно сокращено, а именно: въ гимназіи для математики въ настоящее время въ IV — VIII классахъ назначено 19 часовъ, тогда какъ въ гуманитарно-классическомъ отдѣленіи соотвѣтственно (для второй ступени) всего 12 часовъ, въ ново-гуманитарномъ — 15 часовъ и даже въ реальномъ отдѣленіи по естественно-исторической вѣтви, гдѣ въ курсъ введены еще и основанія аналитической геометріи и анализа, — всего только 17 часовъ. Чѣмъ же руководствовалась Комиссія, допуская указанное сокращеніе времени и вмѣстѣ съ тѣмъ почти не сокращая учебнаго матеріала. Какихъ-либо новыхъ пріемовъ преподаванія, которые облегчали бы серьезное усвоеніе учебнаго курса ни въ объяснительныхъ запискахъ ни въ программахъ нельзя найти; и, слѣдовательно, весь предложенный матеріалъ будетъ разрабатываться такъ же, какъ онъ разрабатывался до сихъ поръ, — тѣмъ болѣе, что исполнителями программъ являются прежніе преподаватели.

Мы не настаиваемъ особенно на сокращенiи матерiала (хотя намъ кажется, что въ курсѣ алгебры можно было бы сдѣлать нѣкоторыя сокращенiя), но необходимо, чтобы между количествомъ матерiала и количествомъ времени, необходимаго для его проработки, установлено было соотвѣтствiе, а этого-то въ новыхъ программахъ и нѣтъ. Примѣромъ такого несоотвѣтствiя можетъ служить, между прочимъ, программа курса алгебры въ VII классѣ ново-гуманитарнаго отдѣленiя и естественно-исторической вѣтви реальнаго отдѣленiя (стр. 252), а также программа всего курса математики въ гуманитарно-классическомъ отдѣленiи (стр. 278), особенно въ VI его классѣ.

Есть и нѣчто общее въ программахъ, нынѣ дѣйствующихъ, и въ программахъ, выработанныхъ Комиссiей 1915 года. Новыя программы не сдѣлали почти ни одного шага впередъ по пути къ освобожденiю преподаванiя математики отъ многовѣковой рутины; въ нихъ почти нѣтъ попытокъ влить новую струю въ преподаванiе такъ называемой элементарной математики, ввести тѣ идеи, которыя болѣе всего сближаютъ математику съ жизнью. При составленiи новыхъ программъ, очевидно, не воспользовались всѣмъ тѣмъ, что сдѣлано въ указанномъ направленiи за послѣднiя два десятилѣтiя у насъ и въ Западной Европѣ. Вѣдь введенiе понятiя о функцiи только лишь въ курсѣ VI-го класса (физико-математической вѣтви) или VII класса (новогуманитарнаго отдѣленiя), равно какъ введенiе основанiй аналитической геометрiи и анализа въ курсъ реальнаго отдѣленiя, еще не является рѣшенiемъ указаннаго вопроса: основанiя аналитической геометрiи и анализа введены въ курсъ реальныхъ училищъ уже въ 1906 г.*), да они вводились въ курсъ средней школы и гораздо раньше, но эти отдѣлы мало имѣли и имѣютъ органической связи съ курсомъ математики предшествующихъ классовъ, — они какъ бы искусственно присоединены къ предшествующему курсу математики. Необходимо переработать и программу остальныхъ классовъ такъ, чтобы она болѣе отвѣчала взглядамъ, какiе уже установились на характеръ преподаванiя такъ называемой элементарной математики. Конечно, это нужно дѣлать съ крайней осторожностью и постепенностью, не забывая закона преемственности, нарушенiе котораго особенно чувствительно въ педагогическомъ дѣлѣ, но дѣлать это необходимо. Въ настоящее время мы знакомимъ учениковъ нашей средней школы только съ тѣмъ, что создали греки въ области геометрiи и, главнымъ образомъ, индусы и арабы — въ области ариѳметики и алгебры, а все то, что добыто въ области математики, начиная съ XVII-го вѣка и до настоящаго времени, всѣ тѣ методы, которые повели къ величайшимъ открытiямъ

*) Въ объяснительной запискѣ къ программѣ математики VII класса физико-математической вѣтви говорится (стр. 270): „Программа по основанiямъ аналитической геометрiи и анализа представляетъ собою сокращенiе нынѣ дѣйствующей программы тѣхъ же предметовъ въ реальныхъ училищахъ“.

въ области механики, физики, астрономіи и другихъ наукъ, однимъ словомъ, все то, чѣмъ гордится современная культура, остается неизвѣстнымъ, покрытымъ мракомъ таинственности для всякаго, получившаго, хотя бы и высшее, но не спеціально математическое образованіе.

На это могутъ возразить, что всѣ указанные вопросы очень интересны, но слишкомъ спеціальны и по своей трудности мало доступны пониманію ученика средней школы. Но подобныя возраженія опровергаются фактами. Что вопросы эти не узко-спеціальные, слѣдуетъ изъ того, что они тѣсно связаны съ выдающимися теченіями философской мысли, съ выдающимися моментами въ исторіи культуры. Что это — вопросы, доступные для учениковъ средней школы, говоритъ многолѣтній опытъ кадетскихъ корпусовъ, десятилѣтній опытъ реальныхъ училищъ; наконецъ, за-границей аналитическая геометрія давно уже введена даже въ курсъ строго-классическихъ гимназій въ Германіи, не говоря уже о среднихъ школахъ Франціи и Швейцаріи.

И вотъ, здѣсь снова возникаетъ передъ нами вопросъ. Если основанія аналитической геометріи и анализа являются не случайной прибавкой къ курсу математики средней школы, то почему же въ такомъ случаѣ лишены этого блага учащіеся новогуманитарнаго и гуманитарно-классическаго отдѣленій, почему они должны лишиться навсегда знаній обще-образовательнаго, философскаго характера? Скорѣе можно было бы не знакомить съ основаніями аналитической геометріи и анализа учащихся въ реальномъ отдѣленіи: въ будущемъ почти всѣ они встрѣтятся съ болѣе серьезнымъ изложеніемъ тѣхъ же вопросовъ въ высшей школѣ, тогда какъ учащіеся остальныхъ двухъ отдѣленій могутъ познакомиться съ этими важными и жизненными вопросами только въ исключительныхъ случаяхъ.

Объяснительныя записки къ разбираемымъ программамъ не даютъ отвѣта ни на одинъ изъ вопросовъ, которые въ большомъ количествѣ возникаютъ при ознакомленіи съ программами. Въ нихъ нельзя найти объясненій, почему учебный матеріалъ расположенъ такъ, а не иначе, почему одни вопросы введены въ программу, а другіе опущены; въ нихъ нѣтъ и общихъ руководящихъ указаній, очень мало методологическихъ, дидактическихъ и методическихъ замѣчаній. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ объяснительныхъ записокъ вовсе нѣтъ (къ программамъ геометріи и тригонометріи ново-гуманитарнаго отдѣленія), въ другихъ случаяхъ объяснительныя записки, правда, есть, но ихъ можно было бы безъ ущерба для дѣла опустить. Особенно отличается безсодержательностью объяснительная записка къ программѣ геометріи для физико-математической вѣтви (стр. 266): кромѣ неудачныхъ соображеній относительно несоизмѣримыхъ величинъ (о чемъ мы уже упоминали раньше), почти всѣ замѣчанія объяснительной записки касаются рѣшенія задачъ въ геометріи, какъ будто бы другихъ вопросовъ въ геометріи не имѣется. Однимъ словомъ, не только въ программахъ, но и въ объяснительныхъ запискахъ мало глубины, мало живыхъ мыслей.

Мы дали общую характеристику программъ Комиссіи 1915 г., а попутно съ этимъ коснулись разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, затронутыхъ программами, по большей части, общаго характера; ясно, какое отношеніе можно найти въ разбираемыхъ программахъ и къ другимъ вопросамъ, о которыхъ мы еще не упоминали, а особенно къ тѣмъ, для рѣшенія которыхъ требуется педагогическая подготовка. Мы имѣемъ въ виду: 1) предварительную подготовку по математикѣ поступающихъ въ школу, 2) пропедевтическій курсъ дробей, 3) пропедевтическій курсъ геометріи и отношеніе его къ систематическому курсу, 4) переходъ отъ ариѳметики къ алгебрѣ, 5) расширеніе понятія о числѣ, 6) ученіе о пропорціяхъ, 7) метрическую систему мѣръ и др.

Конечно, на всѣ эти вопросы мы не находимъ удовлетворительныхъ отвѣтовъ въ новыхъ программахъ, и намъ кажется излишнимъ останавливаться на ихъ детальномъ разсмотрѣніи. Сдѣлаемъ нѣсколько бѣглыхъ замѣчаній по поводу нѣкоторыхъ изъ нихъ.

1) Въ работахъ нѣтъ надлежащихъ указаній относительно требованій, которымъ должны удовлетворять поступающіе въ среднюю школу. Одного общаго упоминанія о томъ, что къ поступающимъ въ школу предъявляются „приблизительно" тѣ же требованія, что и въ настоящее время, далеко недостаточно. Вообще этому вопросу не удѣляютъ должнаго вниманія, забывая, что, благодаря нераціональной дошкольной подготовкѣ по математикѣ, школа получаетъ часто искалѣченныхъ дѣтей, потерявшихъ вѣру въ свои силы, и школа оказывается несостоятельной въ исправленіи предыдущихъ промаховъ; первоначальная дошкольная подготовка — это фундаментъ, а безъ прочнаго фундамента хорошаго зданія возвести нельзя*).

2) Опущенъ безъ всякихъ мотивовъ пропедевтическій курсъ дробей изъ курса I класса. Быть можетъ, ознакомленіе съ этимъ курсомъ имѣлось въ виду отнести къ подготовительнымъ занятіямъ до поступленія въ I классъ, что было бы вполнѣ раціонально, — хотя это послѣднее не исключало бы необходимости, по дидактическимъ соображеніямъ, ввести послѣдній концентръ пропедевтическаго курса дробей

---

*) Надлежащія указанія по поводу требованій при поступленіи въ школу даны, между прочимъ, въ „Проектѣ учебнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій", выработанномъ Кіевскимъ Физико-математическимъ Обществомъ въ 1907 г. Этотъ „Проектъ" напечатанъ въ приложеніи къ № 5 „Циркуляра по Кіевскому Учебному Округу" за 1907 г. и въ нашемъ обзорѣ трудовъ по улучшенію программъ математики („Математика въ русской средней школѣ", стр. 129 — 144).

и въ курсъ I класса. Ни въ программѣ ни въ объяснительной запискѣ никакихъ упоминаній по этому поводу мы не встрѣчаемъ*).

3) Вводя въ курсъ средней школы свѣдѣнія изъ наглядной геометріи, мы должны руководствоваться слѣдующими соображеніями. Пространственныя соотношенія, съ которыми слѣдуетъ знакомить дѣтей, принадлежатъ къ простѣйшимъ обыденнымъ понятіямъ, съ которыми приходится сталкиваться ребенку на каждомъ шагу (прямая линія, окружность, уголъ, шаръ и т. п.) наряду съ понятіемъ о числѣ. Свѣдѣнія изъ наглядной геометріи должны быть предметомъ начальнаго обученія на ряду со счетомъ и роднымъ языкомъ; и дѣйствительно, почти вездѣ въ Западной Европѣ, при первоначальномъ обученіи, въ томъ или другомъ видѣ, знакомятъ съ этимъ предметомъ. Въ среднемъ учебномъ заведеніи этотъ курсъ необходимъ не только потому, что помогаетъ выработкѣ основныхъ геометрическихъ понятій, а также потому, что безъ знанія этого курса не можетъ быть сознательнаго изученія въ младшихъ классахъ географіи, естествовѣдѣнія. Раскройте любой учебникъ по географіи для I класса, и вы сейчасъ же встрѣтитесь съ такими понятіями, какъ окружность, кругъ, шаръ, поперечникъ, уголъ, параллельныя линіи, поверхность и т. п. Отсюда выводъ, что выработка основныхъ геометрическихъ понятій и ознакомленіе съ простѣйшими пространственными соотношеніями въ извѣстной системѣ должны начаться еще до поступленія въ I классъ и продолжаться въ I и во II классахъ, а быть можетъ — и въ III-мъ; но долго останавливаться на курсѣ наглядной геометріи — это значитъ затруднять переходъ къ курсу систематическому. И вотъ, съ этой точки зрѣнія очень важно соблюсти извѣстную мѣру въ количествѣ матеріала для курса наглядной геометріи, необходимо извѣстнымъ образомъ расположить этотъ матеріалъ и не забывать о своевременномъ переходѣ къ систематическому курсу геометріи. Мало значенія имѣетъ въ этомъ случаѣ, будутъ ли уроки наглядной геометріи самостоятельными или же они войдутъ въ циклъ уроковъ ариѳметики.

Легко видѣть, что программа свѣдѣній по наглядной геометріи, предлагаемая Комиссіей 1915 г., не удовлетворяетъ вышеуказаннымъ требованіямъ**).

---

*) Удовлетворительное, на нашъ взглядъ, рѣшеніе этого вопроса предложено Кіевскимъ Физико-математическимъ Обществомъ въ его „Проектѣ учебнаго плана" („Математика въ русской средней школѣ", стр. 136 — 138).

**) Примѣромъ желательнаго построенія этого курса можетъ служить курсъ, намѣченный въ „Проектѣ" Кіевскаго Физико-математическаго Общества („Математика въ русской средней школѣ", стр. 137, 138, 139 и 140).

Подведемъ итоги всему, сказанному нами.

1) Программы, выработанныя Комиссіей 1915 г., представляютъ еще совершенно сырой матеріалъ: онѣ недостаточно согласованы между собою ни съ научной ни съ дидактической стороны, въ нихъ нѣтъ единства, нѣтъ стройности; въ нихъ много противорѣчій дидактическихъ, методическихъ и отчасти методологическихъ.

2) Проектируемыя программы почти ничего не сдѣлали въ смыслѣ обновленія, оживленія преподаванія такъ называемой элементарной математики, въ смыслѣ освобожденія преподаванія отъ рутины. Отдѣлы такъ называемой высшей математики, введенные въ курсъ средней школы еще съ 1906 г., попрежнему входятъ только въ курсъ реальнаго отдѣленія школы и не имѣютъ органической связи со всѣмъ курсомъ математики средней школы. Вообще мало принято во вниманіе то, что сдѣлано по поводу улучшенія программъ съ того времени, когда начали думать о замѣнѣ программъ 1890 г. новыми.

3) Количество учебнаго матеріала, предлагаемаго программами, по большей части, далеко не соотвѣтствуетъ количеству времени, которое необходимо для серьезной его проработки. Нѣтъ прямыхъ указаній относительно того, что можно сократить въ курсѣ, а между тѣмъ нѣкоторые вопросы расширены (напримѣръ, въ ново-гуманитарномъ отдѣленіи ученіе о предѣлахъ, рѣшеніе задачъ на построеніе), а другіе вновь введены (напримѣръ, ученіе о показательной функціи, графическое представленіе функцій въ VI, VII классахъ).

4) Программы во многихъ случаяхъ не удовлетворяютъ основнымъ дидактическимъ и методическимъ требованіямъ.

5) Программы съ объяснительными къ нимъ записками иногда навязываютъ преподавателю тотъ или иной способъ разработки учебнаго матеріала и нерѣдко въ тѣхъ именно случаяхъ, когда этого вовсе не нужно, и, наоборотъ, не даютъ часто необходимыхъ указаній, когда въ этомъ есть надобность.

6) Объяснительныя записки блѣдны и, по большей части, малосодержательны; иной разъ онѣ и вовсе отсутствуютъ. Въ нихъ нѣтъ общихъ руководящихъ указаній и очень мало соображеній дидактическаго и методическаго характера.

7) Съ внѣшней стороны программы такъ построены, что ими бываетъ подчасъ трудно пользоваться.

8) Въ „примѣрныхъ“ программахъ встрѣчаются со стороны языка серьезные недочеты, а со стороны корректуры — крупныя опечатки.

Чтобы нашъ обзоръ не былъ одностороннимъ, мы должны коснуться и положительныхъ сторонъ разбираемыхъ программъ.

1) Нѣкоторыя отдѣльныя программы, безъ отношенія ихъ къ другимъ, имѣютъ значительныя достоинства, а именно: программы алгебры и тригонометріи для физико-математической вѣтви реальнаго отдѣленія (стр. 260 — 264, 257 — 259).

2) Въ частности, ученіе о предѣлахъ и объ ирраціональныхъ числахъ поставлено въ общемъ серьезнѣе, чѣмъ въ нынѣ дѣйствующихъ программахъ.

3) Большей, сравнительно, стройностью отличаются программы для гуманитарно-классическаго отдѣленія; онѣ больше остальныхъ программъ удовлетворяютъ дидактическимъ требованіямъ, но, къ сожалѣнію, обладаютъ значительными недочетами методологическаго характера и по объему не соотвѣтствуютъ отводимому для ихъ выполненія времени.

4) Вездѣ въ программахъ и въ объяснительныхъ запискахъ подчеркивается необходимость избѣгать сложныхъ данныхъ (напримѣръ, въ составныхъ именованныхъ числахъ), сложныхъ задачъ, сложныхъ примѣровъ (въ ариѳметикѣ — при рѣшеніи задачъ „на правила"; въ алгебрѣ — при дѣленіи многочлена на многочленъ, при разложеніи на множителей, въ дробяхъ, при рѣшеніи уравненій, въ дѣйствіяхъ съ радикалами и въ другихъ случаяхъ; въ геометріи — при рѣшеніи задачъ на построеніе.

5) Сдѣлана попытка, — хотя, къ сожалѣнію, и неудачная, — ввести въ курсъ средней школы нѣкоторыя свѣдѣнія изъ наглядной геометріи.

6) Насколько можно судить по программамъ (прямыхъ указаній нѣтъ), сокращены и исключены нѣкоторыя статьи въ курсѣ ариѳметики, алгебры и геометріи, только загромождающія курсъ.

Понятно, что только тѣ сокращенія можно считать пріемлемыми, которыя являются общепризнанными *): въ ариѳметикѣ — такъ называемое обращеніе періодической дроби въ обыкновенную, правило учета векселей и цѣпное правило (но не правило смѣшенія **): въ алгебрѣ — извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ, извлеченіе кубическаго корня изъ чиселъ; въ геометріи — условія равенства трегранныхъ угловъ, равенство и подобіе призмъ и пирамидъ.

7) Обращено вниманіе, хотя далеко несвоевременно (съ этимъ вопросомъ нужно знакомить значительно раньше), на степень погрѣш-

*) См. нашъ обзоръ: „Математика въ русской средней школѣ", а также „Проектъ учебнаго плана по математикѣ для мужскихъ гимназій", выработанный Кіевскимъ Физико-математическимъ Обществомъ („Математика въ русской средней школѣ", стр. 133).

**) Соображенія по этому поводу высказаны нами въ обзорѣ „Математика въ русской средней школѣ", стр. 18 — 19, 90.

ности при вычисленіяхъ и указана необходимость соблюдать въ этомъ отношеніи извѣстную осторожность.

И все-таки, несмотря на указанныя достоинства, разсмотрѣнныя нами программы не только не могутъ быть непосредственно примѣнены къ дѣлу, но онѣ по своему характеру таковы, что, очевидно, не могутъ быть исправлены или видоизмѣнены къ лучшему: новыя программы должны быть выработаны на совершенно иныхъ началахъ. Прежде всего, долженъ быть соблюденъ принципъ преемственности въ выработкѣ программъ: необходимо болѣе внимательно отнестись ко всему тому, что сдѣлано у насъ и за-границей по вопросу объ улучшеніи программъ математики; далѣе, необходимо установить тѣ или иныя точки зрѣнія на основные вопросы спеціально научнаго, общедидактическаго, методическаго и методологическаго характера, и только послѣ такой предварительной работы можно приступать къ составленію программъ, при чемъ въ объяснительныхъ запискахъ обязательно должны быть указаны тѣ руководящія начала, которыя легли въ основаніе всей работы.

Подобная работа уже продѣлана у насъ многими извѣстными педагогами и цѣлыми учрежденіями: Комиссіей при Московскомъ Учебномъ Округѣ въ 1899 г., Комиссіей преподавателей математики кіевскихъ среднихъ учебныхъ заведеній въ 1899 г., Комиссіей Н. П. Боголѣпова, представителями коммерческихъ училищъ при участіи выдающихся педагоговъ-математиковъ, на съѣздѣ дѣятелей по техническому и профессіональному образованію въ 1903 — 1904 г., Кіевскимъ Физико-математическимъ Обществомъ, Кружкомъ варшавскихъ преподавателей математики и многими другими.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

П. Енько, директоръ Императорскаго училища глухонѣмыхъ. *Методика начальнаго счета по лабораторному методу.* Часть I — „Практика обученія". Стр. 130. Ц. 60 к. Часть II. — „Теоретическія основанія". Стр. 47. Ц. 30 к. Петроградъ, 1915.

Основныя идеи лабораторнаго метода преподаванія пользуются большимъ вниманіемъ со стороны педагоговъ, но результаты примѣненія ихъ къ обученію языкамъ и элементарной математикѣ далеко не оправдываютъ теоретическихъ соображеній. Причины этого лежатъ въ несоотвѣтствіи метода съ цѣлями, поставленными обученію. Цѣли лабораторнаго метода прямо противоположны цѣлямъ, поставленнымъ нашей школѣ. Лабораторный, домашній естественный, практическій методъ обученія преслѣдуетъ и практическую цѣль — обученіе, доставленіе умѣній; школа же наша имѣетъ цѣлью формальное развитіе умственныхъ способностей, въ ней господствуетъ искусственное школьное, словесное, теоретическое направленіе. При первомъ направленіи учащіеся учатся, подъ руководствомъ учителя, дѣлать дѣло, пока не выучатся; теорія стоитъ на второмъ планѣ, ей учатся только настолько, насколько это необходимо для облегченія усвоенія пріемовъ дѣла. При второмъ направленіи обученія учащіеся, во-первыхъ, изучаютъ теорію дѣла, практикой же занимаются лишь постольку, поскольку это необходимо для усвоенія теоріи.

Какой изъ типовъ обученія лучше, съ точки зрѣнія, „вообще“ я касаться не буду. Дѣло не въ этомъ! Дѣло въ томъ, что для народа, для не менѣе, чѣмъ 999 изъ тысячи учащихся, нужны практически полезныя знанія, а не теоретическія, имъ нужно не знаніе математики, а умѣніе считать и производить расчеты; дѣло въ томъ, что 999 изъ тысячи не могутъ тратить десять, пятнадцать и болѣе лѣтъ на ученье; дѣло въ томъ, что 999 изъ тысячи должны начинать работать для заработка съ пятнадцати лѣтъ и часто много ранѣе; дѣло въ томъ, что эти 999 изъ тысячи, по молодости, не могутъ еще разсуждать логически, не могутъ усваивать словесныя разсужденія, изъ которыхъ построена теорія. Вотъ по этимъ чисто практическимъ соображеніямъ, при начальномъ обученіи вообще, въ начальныхъ школахъ, въ частности, во всѣхъ ремесленныхъ и техническихъ школахъ, цѣлью должно ставить обученіе, доставленіе знаній и умѣній, а не формальное развитіе умственныхъ способностей, и обученіе должно вести по естественному, лабораторному способу. Учениковъ должно учить тѣмъ самымъ пріемамъ, которые примѣняютъ взрослые при практическихъ расчетахъ, учить ихъ производить практическіе расчеты, имѣющіе значеніе въ обыденной жизни, въ быту земледѣльцевъ, ремесленниковъ и мелкихъ купцовъ; должно учить ихъ производить эти расчеты самыми простыми способами, производить ихъ приблизительно, не обращать вниманія на доли, не имѣющія практическаго значенія, — однимъ словомъ, развивать у нихъ практическую сметку. При обученіи должно переходить отъ частнаго, конкретнаго, нагляднаго, осязаемаго къ общему, отвлеченному. Ученики должны считать предметы, мѣрять ихъ, взвѣшивать, изучать въ натурѣ результаты дѣйствій; отвлеченныя же понятія должно насаждать въ нихъ лишь по полномъ усвоеніи практической стороны дѣла: *въ этой послѣдовательности заключается сущность лабораторнаго метода обученія*.

Въ такомъ направленіи обученія нуждаются, въ особенности, школы для недоразвитыхъ людей, для отсталыхъ вообще, для глухонѣмыхъ въ частности. Школы для глухонѣмыхъ — это микроскопы, въ которыхъ, въ увеличенномъ видѣ, видны какъ достоинства, такъ и недостатки принятыхъ методовъ обученія. Нужно только умѣть смотрѣть въ нихъ.

Понятно, что и лабораторный методъ развился въ одномъ изъ нихъ, — именно въ Императорскомъ училищѣ глухонѣмыхъ. Пятнадцать лѣтъ назадъ, въ 1901 году, учащіеся послѣ девяти лѣтъ ученія не умѣли дѣлить многозначнаго числа на двузначное, не могли на экзаменѣ рѣшать задачъ, кромѣ тѣхъ самыхъ, которыя уже были разучены въ классѣ (рѣшеніе задачъ по типамъ, возведенное въ перлъ созданія). Въ одной изъ школъ для глухонѣмыхъ на выпускномъ экзаменѣ ученикъ написалъ вторую половину рѣшенія довольно сложной задачи и только послѣ напоминанія учителя вспомнилъ и написалъ первую! Теперь у насъ, при отсутствіи особо неблагопріятныхъ условій, ученики считаютъ хорошо, къ окончанію курса рѣшаютъ задачи на простое тройное правило, вычисляютъ проценты и учитываютъ векселя. И мы еще боремся съ крайне неблагопріятными условіями — съ отсутствіемъ подготовленныхъ учителей, ихъ нѣтъ и негдѣ подготовлять!

Что въ школахъ для нормальныхъ дѣтей должно получить соотвѣтственные результаты, показываетъ опытъ этихъ школъ въ другой области, именно въ области обученія грамотѣ. Учениковъ городскихъ школъ до послѣдняго времени учили грамотѣ практически, не заставляли изучать сложныхъ грамматическихъ правилъ, и они, какъ показало министерское изслѣдованіе, писали грамотнѣе, чѣмъ ученики среднихъ и высшихъ школъ, учившіеся грамматикѣ по школьному, словесному способу.

Опытъ и только опытъ покажетъ достоинства и недостатки лабораторнаго метода вообще и предлагаемаго руководства въ частности. Опытъ и только опытъ можетъ показать предѣлы примѣнимости лабораторнаго метода, въ точности укажетъ возрасты, классы и школы, въ которыхъ должно предпочитать лабораторный методъ и въ которыхъ должно преобладать изученіе теоріи словеснымъ путемъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 335 (6 сер.). Въ данную окружность вписать треугольникъ ABC, зная отношенія $AD:DC$ и $AE:EB$ отрѣзковъ, опредѣляемыхъ на сторонахъ AC и AB высотами BD и CE.

И. Александровъ (Москва).

№ 336 (6 сер.). Найти вещественные корни уравненія

$$\sqrt{y^2+(x-z+4)^2}+\sqrt{3u^3-5zu}+\sqrt{v^2-4v+13}+$$
$$+\sqrt{(u^2-y-5)^2+(x-2z+5)^2}=z+2,$$

въ которомъ всѣ радикалы имѣютъ, по условію, ариѳметическія значенія.

X. (Петроградъ).

№ 337 (6 сер.). **Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе**

$$(1+2+3+\cdots+x)(1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+x^3)=y^4.$$

Е. Рѣзницкій (Вязьма).

№ 338 (6 сер.). **Рѣшить систему уравненій**

$$x^2(x+6y)+3y^2(4x+3y)=65\,,$$
$$x+3y=5.$$

Г. Боевъ (Саратовъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 270 (6 сер.). *Доказать равенство*

$$\frac{ab+bc+ca}{6(l+m+n)}=R,$$

гдѣ a, b, c — *стороны,* R — *радіусъ круга вписаннаго, а* l, m, n — *разстоянія центра тяжести отъ сторонъ нѣкотораго треугольника.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires).*

Центръ тяжести G треугольника лежитъ въ точкѣ встрѣчи медіанъ, а потому площади треугольниковъ AGB, AGC и BGC равны между собою. Поэтому, обозначая площадь треугольника ABC через S, получимъ:

$$\frac{al}{2}=\frac{bm}{2}=\frac{cn}{2}=\frac{S}{3},\quad \text{откуда}\quad l=\frac{2S}{3}\cdot\frac{1}{a},\quad m=\frac{2S}{3}\cdot\frac{1}{b},\quad n=\frac{2S}{3}\cdot\frac{1}{c}.$$

Слѣдовательно, принимая во вниманіе формулу $\dfrac{abc}{4S}=R$, имѣемъ:

$$\frac{ab+bc+ca}{6(l+m+n)}=(ab+bc+ca):\left[6\cdot\frac{2S}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=$$
$$=(ab+bc+ca):4S\,\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{abc}{4S}=R.$$

И. Богдановъ (с. Лутковское, Приморской области); *Н. К-новъ* (Петроградъ); *В. Поповъ* (Валки, Харьк. губ.); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *А. Кисловъ* (Москва); *Г. Боевъ* (Саратовъ); *В. Ревзинъ* (Сумы).

№ 280 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{x^2+22x-7}{x+3}-8\sqrt{x-1}=0.$$

Полагая $\sqrt{x-1}=y$, находимъ, что (1) $x=y^2+1$, и преобразовываемъ данное уравненіе къ виду

$$\frac{(y^2+1)^2+22(y^2+1)-7}{y^2+4}-8y=0,$$

откуда, послѣ обычныхъ преобразованій, получаемъ уравненіе:

$$y^4-8y^3+24y^2-32y+16=0,$$

или же $(y-2)^4=0$. Рѣшивъ это уравненіе, находимъ, что $y=2$, откуда [см. (1)] $x=5$.

В. Поповъ (Валки, Харьк. губ.); *Л. Трофимовъ* (Иркутскъ); *Д. Полѣевъ* (Одесса); *П. Волохинъ* (Ялта); *А. Кисловъ* (Москва).

№ 294 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=24.$$

(Заимств. изъ «*Supplemento al Periodico di Matematica*»).

Непосредственной подстановкой можно убѣдиться, что данное уравненіе имѣетъ корни 4 и (-1). Поэтому, представивъ данное уравненіе послѣ обычныхъ преобразованій въ видѣ

$$(1)\quad x^4-6x^3+11x^2-6x-24=0,$$

мы можемъ привести его рѣшеніе къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій, раздѣливъ лѣвую часть на произведеніе $(x-4)[x-(-1)]$, т. е. на многочленъ x^2-3x-4. Выполнивъ это преобразованіе, разлагаемъ уравненіе (2) на два квадратныхъ уравненія

$$x^2-3x-4=0 \quad \text{и} \quad x^2-3x+6=0,$$

первое изъ которыхъ даетъ уже извѣстные корни $x_1=4$, $x_2=-1$, а второе даетъ по разрѣшеніи мнимые корни

$$x_{3,4}=\frac{3\pm i\sqrt{15}}{2}, \quad \text{гдѣ } i=\sqrt{-1}.$$

Н. Доброгаевъ (Тульчинъ); *N. N.* (Тифлисъ); *Г. Боевъ* (Саратовъ); *Л. Трофимовъ* (Иркутскъ); *С. Адамовичъ* (Подосинки).

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса. Екатерининская, 58.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

ВТОРОЙ СЕРІИ V-го СЕМЕСТРА

№№ 649—660.

ОДЕССА.
Типографія „Техникъ", Екатерининская 58.
1916.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“

ЗА ПЯТЫЙ СЕМЕСТРЪ II-ОЙ СЕРІИ.

№№ 649—660.

От ъ редакціи.

Статьи.

Стр.

Изъ записной книжки преподавателя.

Письма въ редакцію.

Сообщенія.

Научная хроника.

Полемика.

Библіографія.

I. Рецензіи.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Задачи.

Шестой серіи.

Рѣшенія задачъ.

Отдѣлъ I. Шестой серіи.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

Поправки.

Обложка
ищется

Обложка
ищется