Обложка
ищется

Обложка
ищется

Второй серіи IV-го семестра № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 643.

Объ аксіомахъ и постулатахъ въ „Началахъ" Евклида.

Проф. И. Ю. Тимченко.

Въ началѣ первой книги Евклидовыхъ „Началъ" послѣ опредѣленій помѣщенъ рядъ предложеній безъ доказательствъ. Предложенія эти въ разныхъ рукописяхъ находятся въ различномъ числѣ и различномъ порядкѣ: тѣ изъ нихъ, которыя представляются подлинными новѣйшимъ критикамъ Евклида, могутъ быть разбиты на двѣ группы по пяти предложеній въ каждой. Предложенія первой группы называются чаще всего требованіями, или постулатами (*αἰτήματα*), второй группы — общими представленіями (*κοιναὶ ἔννοιαι* — communes animi conceptiones*), аксіомами. Вотъ эти предложенія въ переводѣ Петрушевскаго:

---

*) Tannery полагаетъ, что было бы правильнѣе, сказать, напримѣръ, такъ: „*τὰ λαμβανόμενα κατὰ τὰς κοινὰς ἐννοίας*" — „ce qui est admis selon les notions communes" (Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Mémoires scientifiques, t. II, p. 60). Heath (The thirteen books of Euclid's Elements, vol. I, Cambridge 1908, p. 221) указываетъ, однако, на то, что у Аристотеля есть примѣры употребленія слова *ἔννοια* въ смыслѣ представленія не только о предметахъ, но и о фактахъ.

Требованія.

1. Требуется, чтобы можно было отъ всякой точки до всякой другой проводить прямую линію.

2. Опредѣленную прямую продолжать впрямъ непрерывно.

3. Изъ всякаго центра всякимъ разстояніемъ писать кругъ.

4. Всѣ прямые углы взаимно равны.

5. Естьли на двѣ прямыя падаетъ третья прямая и дѣлаетъ углы внутренные и по ту же сторону меньше двухъ прямыхъ; то оныя двѣ прямыя линіи, продолженныя безпредѣльно, взаимно встрѣтятся по ту сторону, по которой углы меньше двухъ прямыхъ.

Общія представленія.

1. Равные тому же, суть и взаимно равны.

2. Естьли къ равнымъ приложены равныя, то и цѣлыя равны.

3. Естьли отъ равныхъ отняты равныя, то и остатки равны.

4. Совмѣщающіяся взаимно, суть взаимно равны.

5. Цѣлое больше своей части.

Нетрудно видѣть, что предложенія той и другой группы рѣзко отличаются другъ отъ друга; первыя относятся къ совершенно опредѣленнымъ геометрическимъ образамъ, вторыя, напротивъ, носятъ, повидимому, характеръ очень общихъ предложеній, относящихся къ какимъ угодно величинамъ. Существуютъ различныя попытки выяснить разницу между постулатами и аксіомами. Часто полагали, что она заключается въ различной степени очевидности тѣхъ и другихъ. Едва ли, однако, древніе, раздѣляя эти начальныя предложенія и обозначая это раздѣленіе различными названіями, руководствовались только степенью ихъ очевидности. Проклъ приводитъ три различныхъ мнѣнія объ основаніяхъ различія между постулатами и аксіомами. На теоріи Прокла обратилъ вниманіе и впервые выяснилъ ихъ значеніе, съ точки зрѣнія современной науки, G. Vailati въ сообщеніи, сдѣланномъ имъ Гейдельбергскому конгрессу математиковъ въ 1904 году*).

Первое значеніе различія между аксіомами и постулатами было, по словамъ Прокла, принято уже Геминомъ**) и состоитъ въ томъ, что различіе это такое же, какъ между теоремами и задачами: задачи относятся къ построенію фигуръ, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ, теоремы высказываютъ свойства фигуръ данныхъ или такихъ, которыя предполагается возможнымъ построить. Подобно этому постулаты утверждаютъ возможность извѣстныхъ построеній, аксіомы высказываютъ нѣкоторыя свойства фигуръ, возможность построенія которыхъ уже постулирована или доказана. Второе значеніе различія приводимое Прокломъ, состоитъ въ слѣдующемъ: аксіомы — это всѣ предложенія, принимаемыя безъ доказательства, которыя, относясь къ общимъ свойствамъ величинъ или количествъ всякаго рода, имѣютъ

---

*) Intorno al significato della diferenza tra gl'assiomi ed i postulati nella geometria greca.— Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904. Leipzig 1905, ss. 575—581.

**) Proclus, ed. Friedlein p. 182,5; cp. ibid. pp. 178—182.

силу и значеніе и внѣ области геометріи. Наоборотъ, постулаты — это тѣ изъ недоказанныхъ предложеній, въ которыхъ приводятся чисто геометрическіе факты, свойства, принадлежащія лишь геометрическимъ образамъ *). Третье мнѣніе о значеніи аксіомъ и постулатовъ, которое Проклъ поддерживаетъ авторитетомъ Аристотеля **), состоитъ въ томъ, что аксіомы — это тѣ основныя предложенія, которыя вѣрны „сами по себѣ“ (*καθ᾽ ἑαυτά*), въ силу значеній встрѣчающихся въ нихъ терминовъ. Постулаты же — предложенія другого рода, которыя будучи очевидными и неопровержимыми не слѣдуютъ, однако, „необходимо“ (*ἐξ ἀνάγκης*) изъ опредѣленій, принятыхъ для встрѣчающихся въ нихъ терминовъ. Ихъ можно отрицать, принимая эти опредѣленія и не впадая при этомъ въ противорѣчіе ***).

Изъ трехъ приведенныхъ у Прокла мнѣній наиболѣе интереснымъ является, несомнѣнно, первое. Развитіе его приводитъ къ важнымъ соображеніямъ о роли задачъ и теоремъ въ системѣ геометріи. Проклъ говоритъ, что въ задачахъ говорится о построеніи фигуръ даннаго рода такимъ образомъ, чтобы онѣ удовлетворяли условіямъ, которымъ онѣ вообще могли бы и не удовлетворять, тогда какъ, наоборотъ, въ теоремахъ говорится объ условіяхъ или свойствахъ тѣхъ же фигуръ, которыми эти фигуры не могутъ не обладать, — конечно, о свойствахъ, отличныхъ отъ тѣхъ, которыя даны въ опредѣленіи. Такимъ образомъ, прибавляетъ Проклъ, тотъ, кто разсматривалъ бы, какъ задачу, предложеніе „вписать прямой уголъ въ полуокружность“, доказалъ бы этимъ, что онъ не знаетъ геометріи, такъ какъ полагалъ бы, что существуютъ углы, вписанные въ полуокружность и не прямые ****). Если вообще въ силу какой-нибудь теоремы геометрическій образъ, удовлетворяющій нѣкоторой группѣ условій, удовлетворяетъ также и другой группѣ условій, то задача, требующая одновременнаго выполненія условій, принадлежащихъ къ обѣимъ группамъ, не отличается отъ задачи, требующей выполненія лишь первой группы условій.

„Назначеніе теоремъ“, говоритъ Vailati, „состоитъ въ приведеніи рѣшенія одной задачи къ рѣшенію другой и въ уменьшеніи, такимъ образомъ, числа задачъ, которыя нужно умѣть рѣшать или предполагать разрѣшимыми. Постулаты были бы тогда тѣми изъ задачъ, которыя посредствомъ никакой теоремы неприводимы къ другимъ задачамъ, болѣе простымъ и элементарнымъ“. Съ такой точки зрѣнія различіе между аксіомами и постулатами совпадаетъ, по мнѣнію Vailati, съ тѣмъ различіемъ, которое логики признаютъ существующимъ между предложеніями общими утвердительными и частными отрицательными (или между предложеніями общими отрицательными:

---

*) Proclus, l. c. p. 182, 6 — 14.

**) Proclus, l. c. p. 182, 14 — 20; ibid. p. 76; cp. Aristotelis Analyticorum posteriorum I, 10; ed. Acad. Borus. p. 76.

***) Ср. комментаріи Симплиція на Евклида въ арабскомъ переводѣ: „Codex Leidensis“ 399,1, Besthorn et Heiberg, Hauniae, 1893, pp. 15, 27; Anaritii in decem libros priores Euclidis Commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis, ed. M. Curtze, Lipsiae, 1899, pp. 29, 30, 36.

****) Proclus, l. c. p. 80, 4; cp. ibid. pp. 79 — 81.

„никакое A не есть B“ и предложеніями частными утвердительными: „нѣкоторое A есть B“), поскольку именно общія предложенія отрицаютъ, частныя же предложенія утверждаютъ существованіе предметовъ, принадлежащихъ одновременно къ двумъ или нѣсколькимъ классамъ. Нужно, однако замѣтить, что при этомъ слѣдуетъ понимать различіе между общими и частными предложеніями въ такомъ смыслѣ, какой придаетъ ему болѣе основное значеніе, чѣмъ то, которое приписывается ему обыкновенно въ традиціонной логикѣ. Слѣдуетъ разсматривать, какъ частныя предложенія, не только тѣ, въ которыхъ подлежащему предшествуетъ слово „нѣкоторый“ (или другое, равносильное ему), но вообще всякое предложеніе, заключающее въ какой-либо формѣ утвержденіе того, что нѣчто существуетъ. Таковы, напримѣръ, предложенія, подлежащему которыхъ предшествуютъ слова „всякій“, „всѣ“, или другія равносильныя, но которыя содержатъ въ видѣ того, что въ грамматикѣ называютъ косвеннымъ дополненіемъ, предлоги, управляющіе именами, которымъ предшествуетъ слово „нѣкоторый“ или другое, равносильное ему *). Какъ примѣръ такихъ предложеній, Vailati приводитъ Архимедовъ постулатъ: „Всякій отрѣзокъ, умноженный на нѣкоторое число, можетъ превзойти всякій другой отрѣзокъ“. Нѣкоторыя предложенія имѣютъ смѣшанный характеръ. Такъ, напримѣръ, предложеніе: „Черезъ двѣ точки проходитъ прямая и только одна“. Предложеніе это представляетъ собою постулатъ въ той своей части, которая утверждаетъ существованіе нѣкоторой прямой, проходящей черезъ двѣ точки, и аксіому въ той части, гдѣ утверждается, что такая прямая только одна. Древніе, однако, не придавали своимъ постулатамъ и аксіомамъ такой формы. Дальнѣйшія разсужденія Vailati относятся къ тѣмъ предложеніямъ, которыя, имѣя видъ предложеній, содержащихъ утвержденіе существованія, не суть, однако, постулаты, а простыя опредѣленія, назначеніе которыхъ ввести какія-нибудь новыя выраженія и объяснить то значеніе, которое имъ хотятъ придать. Предложенія такой формы также не встрѣчаются у греческихъ геометровъ.

Составъ и расположеніе аксіомъ и постулатовъ установлены, главнымъ образомъ, текстуальной критикой „Началъ“. Наиболѣе рѣзкой внутренней критикѣ подвергъ эти предложенія Paul Tannery **).

„Если бы приходилось разсматривать „Начала“ Евклида, какъ дѣйствительно оригинальное произведеніе, то было бы очень трудно допустить подлинность опредѣленій, постулатовъ и аксіомъ, предшествующихъ предложеніямъ I-ой книги. Это, безспорно, начало, не стоящее на высотѣ того, что слѣдуетъ дальше. Насколько порядокъ задачъ и теоремъ книги свидѣтельствуетъ о совершенномъ искусствѣ, равно какъ и о методѣ, мощно задуманной и систематически проводимой въ своемъ, быть можетъ, нѣсколько искусственномъ развитіи, настолько расположеніе предложеній во введеніи представляетъ тамъ,

*) Vailati, l. c., p. 557.

**) „Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide“, Bulletin des sciences mathématiques 1882, Mémoires scientifiques, v. II, pp. 48—63).

гдѣ этого можно было менѣе всего ожидать, отсутствіе связи и странную небрежность“ *).

Таннери полагаетъ, что такъ называемыя аксіомы (notions communes) невозможно приписывать Евклиду; что же касается вопроса о постулатахъ, то онъ считаетъ его темнымъ, но склоняется къ тому мнѣнію, что два послѣдніе постулата могли быть прибавлены къ тремъ первымъ одновременно съ составленіемъ аксіомъ. „Мнѣ кажется“, говоритъ онъ, „что будетъ болѣе сообразно славѣ Евклида допустить, что онъ формулировалъ только три постулата о построеніяхъ“.

Таннери указываетъ на то, что Геронъ признавалъ только три первыя аксіомы**) и нападаетъ на послѣднія двѣ также и потому, что не видитъ связи ихъ съ первыми тремя. Онъ держится при этомъ той точки зрѣнія, что аксіомы суть предложенія общаго характера, не относящіяся исключительно къ области геометрическихъ представленій. „Седьмое предложеніе“ (т. е. аксіома IV), говоритъ онъ, имѣетъ безспорно геометрическій характеръ, который долженъ былъ бы заставить исключить ее изъ числа общихъ положеній... Въ дѣйствительности это опредѣленіе геометрическаго равенства — опредѣленіе болѣе или менѣе достаточное, — тутъ нѣтъ настоящей аксіомы“. V-я аксіома — „замѣна геометрической интуиціи отвлеченіемъ, которое приводится къ тому же, къ болѣе или менѣе недостаточному опредѣленію цѣлаго и части, если отдѣлить его отъ геометріи и считать его дѣйствительно общимъ представленіемъ“.

Я полагаю, что, наоборотъ, именно слѣдуетъ считать всѣ аксіомы предложеніями геометрическаго характера или что таково, по крайней мѣрѣ, было ихъ первоначальное значеніе. Это заставитъ насъ измѣнить взгляды на происхожденіе постулатовъ и аксіомъ и, съ другой стороны, выяснитъ лучше настоящее значеніе и смыслъ этихъ двухъ группъ предложеній.

Для того, чтобы сдѣлать понятнымъ высказанное мною положеніе, необходимо предварительно привести нѣкоторыя сооображенія о составѣ и происхожденіи Евклидовыхъ „Началъ“.

Составляя свои книги, Евклидъ, несомнѣнно, имѣлъ дѣло съ матеріаломъ, уже хорошо разработаннымъ, принявшимъ вполнѣ опредѣленныя формы, съ извѣстнымъ расположеніемъ и группировкой предложеній, съ болѣе или менѣе установившейся терминологіей. Всѣ эти формы сложились постепенно въ связи съ развитіемъ геометрическихъ идей и методовъ ихъ изложенія. Съ другой стороны, несомнѣнно, что развитіе это протекало различными путями, которыя затѣмъ слились въ общемъ руслѣ. Это сліяніе стало происходить еще до Евклида. Гиппократъ Хіосскій, Левъ, ученикъ Неоклида, Θевдій Магнезійскій, по свидѣтельству, приводимому у Прокла***), писали уже „Начала“, пользовавшіяся извѣстностью. Стихіотъ и его предшественники не имѣли, конечно, основаній рѣзко измѣнять установившіяся формы и приспособляли ихъ только къ общему плану своего

*) Tannery l. c. — въ началѣ.

**) Cp. Proclus, l. c. p. 196, 15 sqq.

***) Proclus, l. c. pp. 66, 67.

труда, дѣлая къ нимъ прибавленія, соотвѣтствующія новымъ матеріаламъ и усовершенствованному методу изложенія. Въ статьѣ „О діалектическомъ методѣ древнихъ геометровъ“ *), я указалъ на то, каковъ былъ по существу этотъ методъ и какую роль въ процессѣ его развитія должны были играть постулаты и аксіомы. Они выдѣлялись постепенно при діалектическомъ развитіи различныхъ частей науки и отнюдь не заключали въ себѣ всего того, что можетъ служить основаніемъ для ея формальнаго развитія. Въ силу этого они играли второстепенную роль, были наименѣе полезными частями въ системѣ научныхъ выводовъ и доказательствъ **). Не было поэтому и причины, въ періодъ дѣйствительнаго развитія математической науки, подвергать ихъ значительной переработкѣ, или соединять ихъ въ какую-нибудь систему. Они переходили въ новыя сочиненія изъ старыхъ, сохраняя свою традиціонную форму и группировку. Эта группировка можетъ поэтому лишь свидѣтельствовать о принадлежности ихъ къ различнымъ отдѣламъ науки, или, вѣрнѣе, къ различнымъ путямъ, которымъ слѣдовали идеи этой науки въ своемъ развитіи. Я постараюсь разсмотрѣть вопросъ о постулатахъ и аксіомахъ съ такой именно точки зрѣнія.

Въ „Началахъ„ Евклида слились шесть главныхъ теченій греческой математической мысли, а именно: ученіе о площадяхъ — вѣроятно, самое древнее математическое ученіе, относящееся къ области геометріи, — и примыкающая къ нему, съ одной стороны, элементарная теорія отрѣзковъ и угловъ, съ другой — ученіе объ объемахъ тѣлъ; конструктивная геометрія — геометрія циркуля и линейки, возникшая позже теоріи площадей и сложившаяся, вѣроятно, въ послѣпиѳагорейскую эпоху — въ V и IV вѣкахъ до Р. Хр.; теорія параллельныхъ линій, представляющая сущность того, что теперь принято называть „Евклидовой геометріей“. Эти три теченія мысли относятся спеціально къ геометріи; остальныя три носятъ болѣе общій характеръ: это ученіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ, разработанное, повидимому, въ то же время, что и конструктивная геометрія, теорія чиселъ, восходящая еще къ пиѳагорейцамъ, теорія ирраціональныхъ величинъ, основныя идеи которой приписываются Платономъ, со словъ Ѳеэтета, Ѳеодору Киренскому, жившему въ V в. до Р. Хр. Въ первыхъ четырехъ книгахъ „Началъ“ слились первыя три изъ упомянутыхъ те-

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 618.

**) Евклидъ пользуется формально только первой аксіомой, и то далеко не во всѣхъ случаяхъ. Вмѣсто упоминанія аксіомы о части и цѣломъ онъ выражается, напримѣръ, такимъ образомъ: „треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику DCB, меньшему большій, что нелѣпо“. (Кн. I, предл. 6).

О примѣненіи аксіомъ II и III я упомяну ниже. Четвертая аксіома примѣняется такъ: „Чего ради основаніе BC совмѣстится съ основаніемъ EF, и будетъ равно ему“. (Кн. I, предл. 4).

Постулатъ о параллельныхъ линіяхъ приводится, при ссылкѣ на него, въ сокращенной формѣ: „А прямыя неопредѣленно продолженныя со стороны угловъ кои меньше двухъ прямыхъ, встрѣчаются“. (Кн. I, предл. 29 и 44); въ предложеніи 4-мъ шестой книги нѣтъ уже формальной ссылки на постулатъ.

Конструктивные постулаты нигдѣ въ текстѣ „Началъ“ формально не упоминаются.

Четвертый постулатъ примѣняется такъ: „. . . уголъ DBC равенъ углу FBA, ибо каждый есть прямой“. (Кн. I, предл. 47).

ченій мысли; вполнѣ естественно поэтому предположить, что къ этимъ тремъ различнымъ геометрическимъ ученіямъ и относятся спеціально различнаго рода предложенія, приводимыя безъ доказательствъ — аксіомы и постулаты. Первые три постулата явно относятся къ конструктивной геометріи, пятый постулатъ — къ теоріи параллельныхъ линій. Трудно опредѣлить мѣсто четвертаго постулата*); что касается аксіомъ, то я полагаю, что онѣ всѣ пять принадлежали первоначально къ теоріи площадей, самому древнему изъ геометрическихъ ученій.

Въ теоріи пропорцій, изложенной въ V книгѣ „Началъ", находятся предложенія, соотвѣтствующія первой и пятой аксіомѣ: одна изъ нихъ есть одиннадцатая теорема этой книги: „если два отношенія равны одному и тому же третьему, они равны между собой", другое — опредѣленіе первое: „часть есть величина, меньшая большей, если она измѣряетъ большую". То, что можетъ быть доказано для отношеній, должно быть принято, какъ аксіома для площадей или объемовъ. Съ другой стороны, опредѣленіе V книги вполнѣ соотвѣтствуетъ аксіомѣ о части и цѣломъ и придаетъ лишь слову „часть" болѣе узкое техническое значеніе. Съ точки зрѣнія ученія о площадяхъ, вполнѣ ясенъ и смыслъ четвертой аксіомы. Можно сказать вообще, что система аксіомъ опредѣляетъ въ связи съ наглядными геометрическими представленіями о фигурахъ и тѣлахъ, заключающихъ опредѣленныя части пространства, понятія о площади и объемѣ. Аксіома вторая и третья соотвѣтствуютъ опредѣленіямъ того, что въ настоящее время называется „равенствомъ по раздѣленію" (Zerlegungsgleichheit) и „равенствомъ по дополненію" (Ergänzungsgleichheit).

Обороты рѣчи, сопутствующіе примѣненію этихъ аксіомъ при доказательствахъ носятъ нерѣдко характеръ алгебраическихъ пріемовъ — формальныхъ преобразованій равенствъ — и примѣняются къ величинамъ всякаго рода**).

---

*) Четвертый постулатъ примѣняется при доказательствѣ знаменитаго 47 предложенія I-ой книги „Началъ" („Пиѳагоровой теоремы"), наиболѣе важнаго предложенія въ ученіи о площадяхъ. Я полагаю поэтому, что его слѣдовало бы отнести къ „аксіомамъ". Предложеніе о равенствѣ прямыхъ угловъ могло быть перенесено древними уже послѣ составленія „Началъ" въ число требованій въ силу установившихся впослѣдствіи взглядовъ на значеніе постулатовъ и аксіомъ. Такому же перенесенію и по тѣмъ же причинамъ подвергались и другія предложенія.

**) Въ случаяхъ примѣненія аксіомъ II и III Евклидъ обыкновенно выражается такимъ образомъ: „Поелику же цѣлый уголъ ACF по доказанному равенъ углу ABG; и въ нихъ уголъ ACB равенъ углу CBG: посему остальной уголъ ACB равенъ остальному ABC (*λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση*)". (Кн. I, предл. 5).

„...цѣлый внѣшній уголъ ACD равенъ двумъ внутреннымъ противулежащимъ угламъ BAC, ABC" (т. е. $ACD = BAC + ABC$). „Придай обще уголъ ACB (*κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ*); посему углы ACD, ACB равны тремъ угламъ ABC, BCA, CAB". (Кн. I, предл. 32).

„...треугольникъ EAB равенъ треугольнику FDC. Отними обще треугольникъ DGE (*κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ*); посему остальная трапеція $ABGD$ равна остальной трапеціи $EGCF$ (*λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον*) Придай обще треугольникъ GBC (*κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον*); посему цѣлой параллелограммъ $ABCD$ равенъ цѣлому параллело-

Аксіомы, какъ я только-что замѣтилъ, **опредѣляютъ** понятіе о величинѣ или размѣрѣ геометрическаго образа. Они регулируютъ геометрическую интуицію въ области представленій такого рода; съ другой стороны, конструктивные постулаты (постулаты 1 — 3) **ограничиваютъ** средства построенія. Аксіомы относятся, такимъ образомъ, къ области доказательства (apodeixis), конструктивные постулаты — къ области построенія (kataskeue).. Это и сближаетъ аксіомы съ теоремами, постулаты — съ задачами. Пятый постулатъ по природѣ своей занимаетъ среднее положеніе между тѣми и другими; въ немъ говорится о существованіи, при извѣстныхъ условіяхъ, точки встрѣчи двухъ прямыхъ, но условія эти неполныя и не могутъ поэтому опредѣлить эту точку; въ этомъ отношеніи пятый постулатъ напоминаетъ тѣ, особаго рода, предложенія, которыя носили названіе „данныхъ“ и „порисмъ“ въ сочиненіяхъ **Евклида**, посвященныхъ спеціально этимъ предложеніямъ.

Древніе и новые писатели дополняли Евклидовы аксіомы и постулаты другими предложеніями такого же рода, а также измѣняли всю систему аксіомъ и постулатовъ или же замѣняли отдѣльныя предложенія имъ эквивалентными *). Въ новѣйшее время цѣлью такихъ изслѣдованій было построеніе системы предложеній, могущихъ служить для формальнаго обоснованія геометріи **). Такова наиболѣе знаменитая

грамму $EBCF$ (*ὅλον ἄρα ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν*)“. (Кн. I, предл. 35).

Алгебраическій характеръ фразы: „придай (отними обще...; посему цѣлое (остальное) равно цѣлому (остальному) — *κοινὸν προσκείσθω* (*ἀφῃρήσθω*) ...; *ὅλον* (*λοιπὸν*) *ἄρα ὅλῳ* (*λοιπῷ*) *ἴσον ἐστίν*“ — выступаетъ совершенно ясно при сравненіи фразеологіи **Евклида** съ фразеологіей **Діофанта**: „*κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια* — придай обще недостатокъ и отними отъ подобныхъ подобныя“ — говоритъ **Діофантъ**, приступая къ рѣшенію уравненія $400 - 4x = x + 20$; „*λοιποὶ ς* $\bar{\varepsilon}$ *ἴσοι* $\overset{o}{M}\,\overline{\tau\pi}$“, говоритъ онъ далѣе: $5x = 380$ (Arithmet. lib. I, X, Diophanti Alexandrini Opera Omnia, ed. P. **Tannery**, Vol. I, p. 28). Во введеніи въ первую книгу **Ариѳметики** (Def. XI D. A. Op. Omn. p. 14). **Діофантъ** излагаетъ алгориѳмъ рѣшенія уравненія первой степени съ помощью этихъ пріемовъ преобразованія — пріемовъ представляющихъ самую сущность элементарной алгебры: одинъ изъ нихъ — прибавленіе недостатковъ, получилъ у арабовъ названіе **аль-джебръ**, второй — отбрасываніе отъ обѣихъ частей уравненія равныхъ членовъ — **аль-мукâбала** — у средневѣковыхъ латинскихъ писателей „algebra et almucabala“ (ср. the Algebra of **Mohammed ben Musa**. Edited and translated by Fr. **Rosen**. London, 1831, Notes, pp. 178 — 186; G. H. F. **Nesselmann**. Die Algebra der Griechen. Berlin, 1842, ss. 45 — 53; L. **Rodet**. L'Algèbre d'Al-Khârismi et les méthodes indienne et grecque, **Journal Asiatique**, Janvier 1878, Extrait, pp. 38, 39, также Ф. **Кэджори**. „Исторія элем. математики“, изд. 2, стр. 114, 115.

*) Ср. **Heath** the thirteen books of Euclids Elements, vol I, pp. 202—220, 232—240.

**) «Ближайшая задача обоснованія геометріи заключается въ томъ, чтобы:

а) Дать такія опредѣленія объектовъ геометрическаго изслѣдованія, которыя ни въ какой мѣрѣ не были бы соединены съ какой-либо опредѣленной системой представленій, въ частности, не были бы связаны съ тѣми образами, совокупность которыхъ обычно именуется **реальнымъ пространствомъ**.

б) Установить взаимоотношенія между этими объектами рядомъ постулатовъ, присваивающихъ этимъ объектамъ лишь такія свойства, которыя ихъ, изъ этихъ системъ, принадлежащая Гильберту*). Древніе комментаторы Евклида заботились лишь о замѣнѣ основныхъ предложеній другими или о явномъ выраженіи тѣхъ истинъ, которыя, по ихъ мнѣнію, неявно приняты были Евклидомъ при доказательствѣ различныхъ теоремъ. Въ рукописяхъ Евклидовыхъ „Началъ“, кромѣ перечисленныхъ мною пяти аксіомъ встрѣчаются, обыкновенно еще пять:

1. Есть ли къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны.
2. Есть ли отъ неравныхъ отняты равныя, то и остатки неравны.
3. Двукратныя того же суть взаимно равны.
4. Половины того же суть взаимно равны.
5. Двѣ прямыя не заключаютъ пространства.

Первыя четыре предложенія включены въ число аксіомъ, очевидно, очень посредственнымъ математикомъ, пятое предложеніе извѣстно было Проклу; онъ говоритъ о томъ, что Геминъ считалъ это предложеніе доказуемымъ**). Проклъ считаетъ невозможнымъ присоединить это предложеніе къ аксіомамъ на томъ основаніи, что оно носитъ спеціально геометрическій характеръ, а не есть общее предложеніе подобно другимъ аксіомамъ. Съ другой стороны, предложеніе это равносильно тому утвержденію, что черезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую; оно дополняетъ, такимъ образомъ, первый конструктивный постулатъ: — „отъ всякой точки до всякой другой можно провести прямую линію и только одну“. Я полагаю, что нѣтъ серьезныхъ основаній исключать это предложеніе изъ числа подлинныхъ аксіомъ***). Основныя предложенія конструктивной геометріи

въ свою очередь, не индивидуализируютъ въ нашемъ представленіи, а напротивъ, могутъ находить осуществленіе въ различныхъ конкретныхъ или абстрактныхъ формахъ.

в) Достигнуть того, чтобы ни одно изъ принятыхъ такимъ образомъ основныхъ положеній не вытекало изъ остальныхъ и не противорѣчило имъ.

г) Построить евклидову геометрію, исходя изъ этихъ основныхъ положеній, опираясь на законы мышленія и пользуясь, помимо этого, лишь такими понятіями, которыя не связаны съ установившейся наукой о пространствѣ и дальнѣйшій анализъ которыхъ принадлежитъ уже логикѣ и психологіи». — 1-ое положеніе къ диссертаціи В. Кагана „Основанія Геометріи“.

Первый томъ замѣчательнаго труда этого математика: „Опытъ обоснованія евклидовой геометріи“, Одесса 1905, содержитъ наиболѣе совершенную попытку построенія системы такой геометріи, на основаніи идей Римана, Гельмгольца и Ли. — Второй томъ представляетъ собою обширный „Историческій очеркъ развитія ученія объ основаніяхъ геометріи“. (Одесса 1907).

*) D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“. 4-te Auflage. Leipzig u. Berlin, 1913.

**) Proclus, l. c. p. 184, 5 — 10; cp. ibid. p. 196, 15 sqq.

***) При доказательствѣ четвертаго предложенія первой книги „Началъ“ Евклидъ говоритъ: „А буде по совмѣсченіи B съ E а C съ F, основаніе BC не совмѣстится съ основаніемъ EF: то двѣ прямыя заключатъ пространство, что невозможно (*δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον*)“; въ предложеніи 3-мъ XI книги —: „ — двѣ прямыя линіи DEB, DFB имѣютъ тѣже концы, и потому заключаютъ пространство; что нелѣпо“; въ предложеніи 7-мъ той же книги —: „... двѣ прямыя EGF, EF заключатъ пространство, что невозможно“. Въ нѣкоторыхъ греческихъ рукописяхъ „Началъ„ и въ средневѣковомъ латинскомъ переводѣ Кампана предложеніе о двухъ прямыхъ, не заключающихъ пространства помѣщено въ числѣ постулатовъ послѣ пятаго; оно включено въ число аксіомъ въ четырехъ спискахъ Евклидовыхъ „Началъ“. Въ должны быть дополнены еще однимъ: „если прямая линія проходитъ черезъ точку, лежащую внутри круга, то она встрѣчаетъ окружность ея въ двухъ точкахъ“. Вмѣстѣ съ другими основными предложеніями конструктивной геометріи это предложеніе опредѣляетъ „Евклидову“ геометрію — геометрію циркуля и линейки — въ отличіе отъ „Гильбертовой“ геометріи, для построеній которой, по словамъ Хальстеда, вполнѣ достаточно простой визитной карточки*).

Къ статьѣ лорда Рэлея: „Объ опредѣленіи положенія источника звука“**).

А. Фрумкина.

Изслѣдованіе лорда Рэлея было дополнено и расширено имъ самимъ, а также Моромъ (Lewis S. More), Майерсомъ и Вильсономъ (Myers and Wilson).

Рэлей построилъ остроумный аппаратъ, который позволяетъ получить звукъ съ постоянной разностью фазъ у обоихъ ушей. Если мы въ цѣпь телефона включимъ катушку съ вертикальной плоскостью витковъ, противъ центра которой находится горизонтальный магнитъ, равномѣрно вращающійся вокругъ вертикальной оси, то въ телефонъ

общемъ предложеніе это, съ небольшими измѣненіями, встрѣчается во всѣхъ главныхъ спискахъ „Началъ“.

Въ арабскомъ Евклидѣ Аль Хадджаджа мы читаемъ слѣдующее: „Симплицій сказалъ: этотъ постулатъ не находится въ древнихъ спискахъ, вѣроятно потому, что предложеніе это очевидно (не нуждается въ объясненіи), и потому говорятъ, что постулатовъ пять“. (Codex Leidensis 399₁, ed. Besthorn et Heiberg, Hauniae 1993, pp. 24, 25; cp. Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gh. Cremonensis, ed. M. Curtze, Lips. 1899, p. 35). Правильнѣе было бы передать замѣчаніе Симплиція такъ: „Въ древнихъ спискахъ это предложеніе не находится въ числѣ постулатовъ и т. д.“; дѣйствительно, далѣе идетъ перечисленіе аксіомъ и въ числѣ ихъ находится и разсматриваемое предложеніе. При этомъ Симплицій замѣчаетъ: „Мы уже сказали раньше, что аксіомы (у Герарда К. — per se nota) по природѣ своей должны быть признаваемы всѣми и имѣть доказательную силу сами по себѣ, безъ всякаго посредства (у Г. К. — absque modo)“, — что соотвѣтствуетъ предшествующему замѣчанію Симплиція о причинѣ исключенія разсматриваемаго предложенія изъ числа постулатовъ и третьему мнѣнію Прокла о различіи между постулатами и аксіомами. Симплицій говоритъ также о томъ, что современные ему геометры доказывали предложеніе о томъ, что двѣ прямыя не заключаютъ пространства и приводитъ самое доказательство; тоже доказательство находимъ мы и у Прокла въ комментаріи къ 4-му предложенію I-ой книги „Началъ“. (Codex Leidensis 399₁, pp. 24 — 27; Anaritii Commentarii, pp. 35, 36; Proclus, ed. Friedlein, pp. 238 — 240).

*) G. B. Halsted. Rational Geometry. A text-book for the science of Space, Second edition, New-York 1907, Preface. Cp. ibid. p. 247, Appendix II. The compasses.

**) См. „Вѣстникъ“ № 634.

будетъ слышенъ чистый звукъ, высота котораго опредѣляется числомъ оборотовъ магнита въ секунду. Въ аппаратѣ Рэлея имѣются двѣ катушки, и каждая соединена съ телефономъ. Одна изъ нихъ можетъ быть повернута вокругъ вертикальной оси. Очевидно, что между электровозбудительными силами, а слѣдовательно и силами токами въ обѣихъ катушкахъ будетъ разность фазъ, равная углу между плоскостями витковъ обѣихъ катушекъ. Если мы теперь приложимъ одинъ телефонъ къ одному уху, а другой къ другому, то мы услышимъ звукъ со стороны того телефона, колебанія котораго опережаютъ колебанія другого (соотвѣтственная катушка должна быть повернута на встрѣчу вращающемуся магниту). Боковая локализація пропадаетъ, когда плоскости витковъ приблизительно параллельны. Если коммутировать токъ

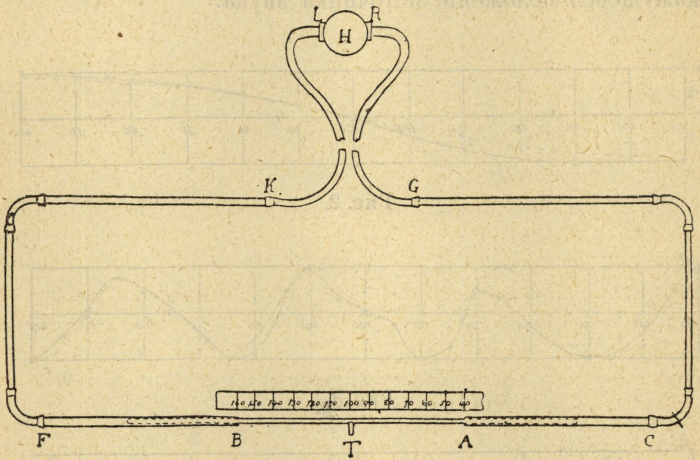

Рис. 1.

въ одной изъ катушекъ, что соотвѣтствуетъ повороту на 180°, то наблюдателю кажется, что источникъ звука переносится съ одной стороны на другую.

Моръ изучилъ вопросъ о боковой локализаціи источника звука, пользуясь совершенно другой и, въ нѣкоторомъ отношеніи, даже болѣе простой аппаратурой. Приборъ Мора имѣлъ слѣдующій видъ (рис. 1). *BA* латунная трубка, 260 *cm.* длиной, которая можетъ свободно двигаться въ латунныхъ же трубкахъ *AC* и *BF*. У *T* находится источникъ звука (камертонъ), надъ *BA* — шкала, раздѣленная на сантиметры. Трубки *BF* и *AC* соединены стеклянными и дальше длинными каучуковыми трубками съ *L* и *R*, гдѣ помѣщаются уши наблюдателя (*H* — его голова). Наблюдатель и источникъ звука находятся въ разныхъ комнатахъ, такъ что звукъ передается только по трубкамъ. Трубки тщательно сравнены, путь отъ *B* до *L* равенъ пути отъ *A* до *R*. Очевидно, что мѣняя положеніе подвижной трубки, мы можемъ получить произвольную разность хода у *L* и *R*; она будетъ равна удвоенному разстоянію отверстія *T* отъ середины шкалы.

Если теорія лорда Рэлея вѣрна, источникъ звука долженъ намъ казаться находящимся спереди или сзади, когда T находится въ серединѣ шкалы (дѣленіе 100). Если теперь перемѣщать T направо, то звукъ у R опередитъ звукъ у L, и наблюдателю покажется, что источникъ звука перемѣщается направо. Это будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока разность хода не достигаетъ четверти волны. При дальнѣйшемъ увеличеніи разности хода будетъ казаться, что источникъ звука движется обратно, и при разности хода въ полъ волны онъ, очевидно, вернется въ плоскость симметріи. При разности хода въ три четверти волны звукъ будетъ слышенъ совершенно слѣва, при разности хода въ одну волну опять въ плоскости симметріи и т. д.

При производствѣ опытовъ ассистентъ измѣнялъ положеніе подвижной трубки то въ одну сторону, то въ другую, а наблюдатель опредѣлялъ кажущееся положеніе источника звука.

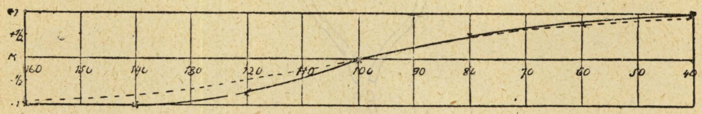

Рис. 2.

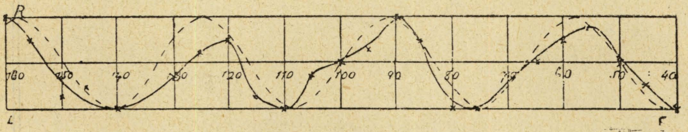

Рис. 3.

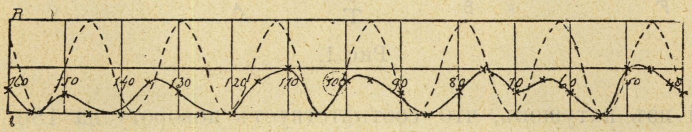

Рис. 4.

Моръ различаетъ случаи, когда кажется, что направленіе звука составляетъ съ плоскостью симметріи уголъ въ 0°, $22^1/_2$°, 45°, $67^1/_2$°, и 90°. Въ первомъ случаѣ мы локализуемъ источникъ звука спереди или сзади, въ послѣднемъ случаѣ справа или слѣва. Если мы еще условимся считать отклоненія вправо положительными, а отклоненія влѣво отрицательными, и примемъ за единицу отклоненіе въ 90°, то мы сможемъ выразить результаты опытовъ графически, какъ это и дѣлаетъ Моръ (рис. 2, 3, 4).

На оси абциссъ нанесены дѣленія шкалы, которыя опредѣляютъ положеніе отверстія T, на оси ординатъ — соотвѣтствующіе углы между кажущимся направленіемъ звука и плоскости симметріи. Сплошная кривая даетъ данныя опыта, пунктирная — теоретическія значенія. n — есть число колебаній въ секунду. Мы видимъ, что для $n = 64$ и для $n=512$ согласованіе опыта съ теоріей очень хорошее, для болѣе высокихъ звуковъ оно становится все хуже, какъ и въ опытахъ лорда Рэлея, и для $n=1024$ звукъ кажется исходящимъ все время слѣва. Оказывается, что для такихъ высокихъ звуковъ наблюдаются индивидуальныя различія; такъ ассистенту Мора казалось при $n=1024$, что звукъ исходитъ все время справа. Во всякомъ случаѣ, опыты Мора показываютъ, въ полномъ согласіи съ опытами лорда Рэлея, что, пока n не превышаетъ 512, наши уши приблизительно вѣрно опредѣляютъ разность фазъ.

Моръ приводитъ еще нѣкоторыя любопытныя наблюденія, подтверждающія ту же теорію. Оказывается, напримѣръ, что лица, совершенно глухія на одно ухо, не могутъ опредѣлить положеніе источника звука. Далѣе, у нѣкоторыхъ животныхъ, напримѣръ, у лошадей уши расположены такъ, что сила звука у обоихъ ушей совершенно одинакова; они, тѣмъ не менѣе, правильно локализуютъ звукъ, что можно истолковать только принимая во вниманіе разность фазъ у обоихъ ушей.

Физіологическаго объясненія этихъ замѣчательныхъ явленій до сихъ поръ не имѣется и врядъ-ли оно можетъ быть дано на почвѣ классической теоріи слуха Гельмгольца.

Видимость отдаленныхъ предметовъ на войнѣ.

(Переводъ съ англійскаго).

Въ виду дальнобойности орудій, примѣняемыхъ въ современной войнѣ, очень большое значеніе пріобрѣтаетъ вопросъ о видимости отдаленныхъ предметовъ. Наблюдателю, стремящемуся установить положеніе и численность непріятеля, приходится неустанно бороться съ другимъ наблюдателемъ, который старается всякими способами скрыть то и другое.

Вообще говоря, предметъ становится неразличимымъ, если своимъ цвѣтомъ и яркостью онъ сливается съ окружающей средой. По этой причинѣ современныя арміи предпочитаютъ для солдатскихъ формъ цвѣта хаки и сѣрый, какъ наилучшимъ образомъ сливающіеся съ окружающимъ фономъ. Однако, степень полезности этихъ цвѣтовъ въ данномъ отношеніи зависитъ отъ природы почвы, по которой движутся войска. Хаки безсомнѣнно трудно различить по песчаннымъ равнинамъ; для травы и листвы лучше брать сѣрый или зеленый цвѣтъ. Изъ всѣхъ цвѣтовъ красный является наиболѣе замѣтнымъ на разстояніе. Онъ не только представляетъ самый яркій контрастъ на фонѣ обыкновенной почвы, но помимо того существуютъ извѣстные физіологическіе факторы, которые усиливаютъ это впечатлѣніе. Хорошо, напримѣръ, извѣстно, что центральная область глаза (которая, главнымъ образомъ, и служитъ для наблюденія отдаленныхъ объектовъ) чрезвычайно чувствительна къ красному концу спектра и соотвѣтственнымъ образомъ нечувствительна къ синей и зеленой части. Указываютъ еще и на другое обстоятельство: такъ какъ хрусталикъ не обладаетъ ахроматизмомъ, то для большинства людей трудно подыскать фокусное разстояніе для синяго и фіолетоваго цвѣта, и объекты съ такимъ цвѣтомъ легко поглощаются окружающимъ фономъ, такъ какъ ихъ очертанія неясны и размыты. Искусный садовникъ, разбивая клумбы, размѣщаетъ синіе и лиловые цвѣты по возможности на переднемъ планѣ, а ярко-красные и оранжевые цвѣты отодвигаетъ, чтобы произвести ими эффектъ издали.

Но, какъ извѣстно, условія, имѣющія мѣсто при полномъ дневномъ свѣтѣ, непримѣнимы при тускломъ свѣтѣ. При слабомъ освѣщеніи глазъ становится въ большей или меньшей мѣрѣ слѣпымъ къ извѣстнымъ цвѣтамъ: онъ чрезвычайно нечувствителенъ къ красному, который представляется ему тускло-чернымъ, а зеленые и синіе объекты представляются глазу сѣрыми. Такимъ образомъ, когда отрядъ солдатъ, одѣтыхъ въ сѣро-зеленое, проходитъ въ сумеречномъ свѣтѣ черезъ зеленое поле, то открыть его чрезвычайно трудно.

Изъ всего этого видно, что выборъ незамѣтной формы для солдатъ представляетъ собою сложную задачу, особенно если принять во вниманіе, что недостаточно еще сдѣлать солдата невидимымъ для непріятеля, но столь же важно, чтобы воинъ былъ видимъ для своихъ. Для достиженія этой цѣли предлагаютъ изготовлять переднюю и тыловую части солдатской формы изъ матерій неодинаковаго цвѣта.

Интересно отмѣтить, что въ настоящую войну развѣдчики въ нѣкоторыхъ случаяхъ принимали спеціальныя мѣры, чтобы приспособить свое платье къ цвѣту окружающаго фона. Такъ, напримѣръ, установлено, что на снѣжныхъ равнинахъ Польши германцы одѣвались иногда въ бѣлое, а турецкіе развѣдчики въ Галлиполи окрашивали свои руки и лица въ зеленый цвѣтъ, чтобы не быть замѣченнымъ въ листвѣ.

Гораздо труднѣе, конечно, приспособиться къ поверхностямъ, каторыя постоянно мѣняютъ свой видъ, какъ небо и море. Но здѣсь на помощь приходитъ другой принципъ, который можно назвать „принципомъ лоскутьевъ“. Онъ основанъ на опытѣ, что можно сдѣлать очертанія объекта трудно различимыми, если покрыть ихъ поверхность полосами и пятнами. Этотъ методъ примѣнялся къ аэропланамъ и гидропланамъ, а также къ фортамъ и временнымъ укрѣпленіямъ разнаго рода. Трубы и кузова военныхъ судовъ окрашиваются въ аспидно-синюю или „боевую сѣрую“ окраску; дѣлаютъ также пестрыя темныя пятна и неправильныя спиральныя темныя линіи по сѣрому. Нѣкоторые опыты, произведенные въ этомъ направленіи въ Соединенныхъ Штатахъ, оказались, какъ говорятъ, весьма удачными; принимая во вниманіе, что современный морской бой ведется съ далекаго разстоянія, можно считать, что скоро удастся сдѣлать дредноуты фактически невидимыми.

Чтобы замаскировать аэродромы и другіе подобные объекты, съ успѣхомъ прибѣгаютъ къ соединенію лоскутнаго принципа съ поддѣлкой подъ окружающій фонъ. Напримѣръ, почти невозможно распознать аэродромъ сверху, если грунтъ кругомъ очищенъ, трава выщипана промежутками, такъ что остаются голыя пятна, а самъ аэродромъ окрашенъ подъ бурые и зеленые лоскутья. Другой примѣръ описываетъ корреспондентъ „Times'a“, о цвѣтѣ мѣшковъ съ пескомъ. Оказывается, что нѣмцы кладутъ темные мѣшки въ перемежку съ болѣе свѣтлыми. Офицеръ съ фронта пишетъ: „... это было первое, что я замѣтилъ въ нѣмецкихъ траншеяхъ. Благодаря такой „лоскутной“ уловкѣ невозможно было выслѣдить, гдѣ ихъ бойницы, тогда какъ наши требуютъ много времени, пока ихъ выстроишь, и затѣмъ оказываются легко замѣтными“.

Подобнаго рода приспособленія, которыя въ теченіе долгой кампаніи сохраняетъ множество жизней, заслуживаетъ, конечно, самаго серьезнаго вниманія. Есть еще одинъ способъ маскировать объекты, правда трудно осуществимый, но за то, вѣроятно, если его удастся осуществить, онъ явится самымъ совершеннымъ: этотъ способъ состоитъ въ примѣненіи зеркалъ или полузеркальныхъ поверхностей, отражающихъ окружающій фонъ и такимъ образомъ автоматически его имитирующихъ. Это средство пригодно въ любой средѣ.

Наиболѣе интереснымъ примѣромъ примѣненія этото метода могутъ служить новѣйшіе цеппелины; какъ разсказываютъ, они покрыты свѣтлымъ алюминіевымъ порошкомъ, отражающимъ небо, благодаря чему очень трудно открыть это воздушное судно на большой высотѣ. Особенныя трудности представляетъ маскировка высоко-летящаго аэроплана, такъ какъ силуэтъ остова явственно выдѣляется на свѣтломъ фонѣ неба, и противъ этого не помогаетъ никакая окраска. Быть можетъ контрастъ можно будетъ значительно смягчить при помощи отражающихъ зеркалъ въ соединеніи съ другими описанными приспособленіями. Если удастся достигнуть невидимости въ добавокъ къ безшумному мотору, то аэропланъ можетъ стать гораздо болѣе опаснымъ орудіемъ для нападенія, чѣмъ въ настоящее время.

Проблемы въ родѣ затронутыхъ нами здѣсь заслуживаютъ, какъ намъ кажется, тщательнаго научнаго изученія. Методы маскировки могутъ сохранить жизнь очень многимъ воинамъ. Сверхъ того, полезность всевозможныхъ судовъ, употребляемыхъ для развѣдочныхъ цѣлей, будь то аэропланы, моторы или подводныя лодки, въ значительной степени зависитъ отъ того, насколько ихъ трудно обнаружить. Было бы поэтому вполнѣ цѣлесообразно предпринять рядъ изслѣдованій, которыя обѣщали бы въ будущемъ практическое разрѣшеніе проблемы невидимости.

J. S. D.

Замѣтка объ ариѳметической прогрессіи.

Н. Агрономова.

Предлагаемая замѣтка имѣетъ своей цѣлью указать нѣсколько интересныхъ числовыхъ соотношеній, которые могутъ быть выведены изъ извѣстной формулы:

$$S = \frac{(a+b)n}{2},$$

Ими можно воспользоваться какъ для оживленія курса, такъ и для развитія въ ученикахъ математической наблюдательности.

§ 1. Легко замѣтить, что

$$1+2+3+\cdots+10 = \frac{10\,.\,11}{2} = 55,$$

$$1+2+3+\cdots+100 = \frac{100\,.\,101}{2} = 5050,$$

$$1+2+3+\cdots+1000 = \frac{100\,.\,1001}{2} = 500500.$$

Изъ этихъ примѣровъ можно заключить, что вообще

$$1+2+\cdots+10^n = \underbrace{500\cdots0}\ \underbrace{500\cdots0}. \qquad (1)$$

Провѣримъ наше наблюденіе. Лѣвая часть равенства равна

$$\frac{10^n(10^n+1)}{2}$$

а правая $5\,.\,10^{n-1}+5\,.\,10^{2n-1}$, такъ какъ пятерки занимаютъ n-ое и $2n$-ое мѣсто справа. Такъ какъ

$$\frac{10^n(10^n+1)}{2} = 5\,.\,10^{n-1}+5\,.\,10^{2n-1}$$

то само собой разумѣется, что равенство (1) справедливо.

§ 2. Не трудно вычислить, что

$$1+2+3+\cdots+6 = \frac{6\,.\,7}{2} = 21,$$

$$1+2+3+\cdots+66 = \frac{66\,.\,67}{2} = 2211,$$

$$1+2+3+\cdots+666 = \frac{666\,.\,667}{2} = 222111.$$

Имѣемъ ли мы право утверждать, что вообще

$$1+2+3+\cdots+\underbrace{66\cdots6}_{n}=\underbrace{222\cdots2}_{n}\ \underbrace{111\cdots1}_{n}. \tag{2}$$

Такъ какъ $66\cdots6=6(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)=\frac{6(10^n-1)}{9}$, то лѣвая часть равенства (2) равна

$$\frac{1}{2}\frac{6(10^n-1)}{9}\left[\frac{6(10^n-1)}{9}+1\right]=\frac{1}{27}(10^n-1)(6.10^n+3)=$$

$$\frac{1}{9}(10^n-1)(2.10^n+1).$$

Съ другой стороны правая часть равенства (2) равна

$$2(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^n)+10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1.$$

или

$$2.10^n(10^{n-1}+\cdots+1)+10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1=$$

$$=(2.10^n+1)(10^{n-1}+\cdots+1)=\frac{(2.10^n+1)(10^n-1)}{9}.$$

Такимъ образомъ обѣ части оказались равными $\frac{1}{9}(10^n-1)(2.10^n+1)$. Слѣдовательно, равенство (2) всегда имѣетъ мѣсто.

§ 3. Замѣчая, что

$$1+2+3=6,\quad 1+2+\cdots33=561,\quad 1+2+\cdots+333=55611,$$

попробуемъ провѣрить, что вообще

$$1+2+3+\cdots+\underbrace{33\cdots3}_{n}=\underbrace{55\cdots5}_{n-1}\ 6\underbrace{11\cdots1}_{n-1}. \tag{3}$$

Лѣвая часть равна

$$\frac{(10^n-1)(10^n+2)}{18}.$$

Значеніе правой части получается послѣ слѣдующихъ вычисленій:

$$5(10^{2n-2}+10^{2n-3}+\cdots+10^n)+6.10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1=$$

$$=5\,\frac{10^n(10^{n-1}-1)}{9}+6.10^{n-1}+\frac{10^{n-1}-1}{9}=$$

$$=\frac{5.10^{2n-1}-5.10^n+54.10^{n-1}+10^{n-1}-1}{9}=$$

$$=\frac{10^{2n}-10^{n+1}+108.10^{n-1}+2.10^{n-1}-2}{18}=\frac{10^{2n}-10^{n+1}+11.10^n-2}{18}=$$

$$=\frac{10^{2n}+10^n-2}{18}=\frac{(10^n-1)(10^n+2)}{18}.$$

Такъ какъ правая и лѣвая части оказались равными, то справедливымъ является и равенство (3).

§ 4. Опредѣлить суммы однозначныхъ, двузначныхъ, трехзначныхъ, четырехзначныхъ и т. д. чиселъ. Получимъ:

$$1+2+\cdots+9=45,\quad 10+11+\cdots+99=4905,$$

$$100+101+\cdots+999=494550,\quad 1000+1001+\cdots+9999=4949550,$$

$$10000+10001+\cdots+99999=4949955000.$$

Провѣримъ справедливость формулы:

$$\underbrace{10\cdots0}_{n}+100\cdots1+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{n}=494\,\underbrace{99\cdots9}_{n-3}\,55\,\underbrace{0\cdots0}_{n-2}. \qquad (4)$$

Лѣвая часть равна

$$\frac{(10^{n-1}+10^n-1)\,9\,.\,10^{n-1}}{2}.$$

Правую часть можно послѣдовательно переписать такъ:

$$4\,.\,10^{2n-1}+9\,.\,10^{2n-2}+4\,.\,10^{2n-3}+9\,(10^{2n-4}+10^{2n-5}+\cdots+10^n)+$$
$$+5\,.\,10^{n-1}+5\,.\,10^{n-2}$$

или

$$4\,.\,10^{2n-1}+9\,.\,10^{2n-2}+4\,.\,10^{2n-3}+9\,.\,10^n\,\frac{10^{n-3}-1}{9}+5\,.\,10^{n-1}+5\,.\,10^{n-2}=$$

$$=4\,.\,10^{2n-1}+9\,.\,10^{2n-2}+4\,.\,10^{2n-3}+10^{2n-3}-10^n+5\,.\,10^{n-1}+5\,.\,10^{n-2}=$$

$$=\frac{8\,.\,10^{2n-1}+18\,.\,10^{2n-2}+8\,.\,10^{2n-3}+2\,.\,10^{2n-3}-2\,.\,10^n+10^n+10^{n-1}}{2}=$$

$$=\frac{8\,.\,10^{2n-1}+18\,.\,10^{2n-2}+10^{2n-2}-10^n+10^{n-1}}{2}=$$

$$\frac{9\,.\,10^{2n-1}+9\,.\,10^{2n-2}-10^n+10^{n-2}}{2}=\frac{(10^{n-1}+10^n-1)\,9\,.\,10^{n-2}}{2}.$$

Такимъ образомъ равенство (4) оказывается вѣрнымъ.

Изъ формулы (4) слѣдуетъ во-первыхъ, что сумма всѣхъ n-значныхъ чиселъ есть $2n$-значное число; во-вторыхъ, что сумма цифръ суммы всѣхъ n-значныхъ чиселъ дѣлится на 9 и на n.

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen", краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Я. И. Перельманъ. *Занимательная физика.* Парадоксы, головоломки, задачи, опыты, замысловатые вопросы и разсказы изъ области физики. Книга вторая. Съ 120 рисунками. Изданіе П. П. Сойкина. Петроградъ, 1916. Ц. 1 р. 25 к.

Изъ предисловія:

Эта книга представляетъ собой самостоятельный сборникъ, не являющійся продолженіемъ первой книги «Занимательной Физики»; она названа «второю» лишь потому, что написана позднѣе первой. Успѣхъ перваго сборника побудилъ автора обработать остальной накопившійся у него матеріалъ, и такимъ образомъ, составилась эта в т о р а я — или, вѣрнѣе, другая — книга, обнимающая тѣ же отдѣлы школьной физики.

Настоящая книга «Занимательной физики», какъ и первая, предназначается для чтенія, а не для изученія. Ея цѣль — не столько сообщить читателю новыя знанія, сколько помочь ему «узнать то, что онъ знаетъ», т. е. углубить и оживить уже имѣющіяся у него основныя свѣдѣнія по физикѣ, научить сознательно распоряжаться ими и побудить къ разностороннему ихъ примѣненію. Достигается это разсмотрѣніемъ пестраго ряда головоломокъ, замысловатыхъ вопросовъ, занимательныхъ задачъ, забавныхъ парадоксовъ, неожиданныхъ сопоставленій изъ области физики, относящихся къ кругу повседневныхъ явленій или почерпаемыхъ изъ популярныхъ произведеній общей и научно-фантастической беллетристики. Матеріаломъ послѣдняго рода составитель пользовался особенно широко, считая его наиболѣе соотвѣтствующимъ цѣлямъ сборника: привлечены отрывки изъ общеизвѣстныхъ романовъ Жюля Верна, Уэльса, Курда, Лассвица и др.

Составитель старался, насколько умѣлъ, придать изложенію внѣшне-интересную форму, сообщить привлекательность предмету, не останавливаясь иногда и передъ тѣмъ, чтобы черпать интересъ со стороны. Онъ руководился тою психологическою аксіомою, что и н т е р е с ъ къ предмету повышаетъ в н и м а н і е, вниманіе облегчаетъ п о н и м а н і е и, слѣдовательно, способствуетъ болѣе сознательному у с в о е н і ю.

Вопреки обычаю, установившемуся для подобнаго рода сборниковъ, въ «Занимательной физикѣ» весьма мало отводится описанію забавныхъ и эффектныхъ физическихъ о п ы т о в ъ. У насъ имѣется уже достаточно сборниковъ подобныхъ опытовъ изъ области физики; кромѣ того, образовательное значеніе такого рода матеріала не всегда безспорно. Не говоря уже о томъ, что опыты обычно удаются лишь наиболѣе предпріимчивымъ и терпѣливымъ читателямъ, оставляя у остальныхъ чувство разочарованія и досады по поводу испорченныхъ вещей — центръ вниманія невольно переносится при этомъ на работу рукъ, а не на дѣятельность ума; въ результатѣ нерѣдко создается почва для насажденія непродуманнаго, чисто формальнаго отношенія къ физическому о б ъ я с н е н і ю. Между тѣмъ, главная цѣль «Занимательной физики» — возбудить дѣятельность научнаго воображенія, пріучить читателя мыслить въ духѣ физической науки и создать въ его памяти многочисленныя ассоціаціи физическихъ знаній съ самыми разнородными явленіями жизни, со всѣмъ тѣмъ, съ чѣмъ онъ обычно входитъ въ соприкосновеніе.

Я. И. Перельманъ. *Межпланетныя путешествія.* Полеты въ міровое пространство и достиженіе небесныхъ свѣтилъ. Съ 12 рис. Изданіе П. П. Сойкина. Петроградъ, 1915. Ц. 60 к.

Изъ предисловія:

Мысль о полетахъ въ глубины вселенной и достиженіи иныхъ міровъ авторъ не считаетъ праздной мечтой. Она полна высокаго интереса для науки и для жизни. Было время, когда признавалось невозможнымъ переплыть океанъ; нынѣшняя всеобщая вѣра въ недосягаемость небесныхъ свѣтилъ столь же безосновательна, какъ и убѣжденіе нашихъ предковъ въ недостижимости антиподовъ. Правильный путь къ разрѣшенію проблемы заатмосфернаго летанія и межпланетныхъ путешествій уже намѣченъ; къ чести русской науки, онъ предуказанъ человѣчеству русскимъ ученымъ (К. Э. Ціолковскимъ). Практическое же разрѣшеніе этой грандіозной задачи, невыполнимое сейчасъ, можетъ осуществиться не въ столь далекомъ будущемъ.

Этой маленькой экскурсіей въ область космической физики авторъ надѣется также до нѣкоторой степени разсѣять существующее въ публикѣ предубѣжденіе противъ небесной механики и физики, какъ знаній слишкомъ отвлеченныхъ, неспособныхъ будто бы дать пищу живому уму. Наука, которая открываетъ возможность успѣшно соперничать въ полетѣ воображенія съ фантазіей остроумнѣйшихъ романистовъ, провѣрять и исправлять ихъ смѣлые замыслы — такая наука должна перестать казаться сухой и скучной.

Чтеніе этой книги не требуетъ никакихъ спеціальныхъ познаній. Матеріалъ, предназначаемый для болѣе свѣдущихъ читателей, отнесенъ въ отдѣлъ «прибавленій».

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 291 (6 сер.). Пять точекъ A, B, C, D и E расположены на окружности такъ, что разстояніе между каждыми двумя послѣдовательными точками равно радіусу; произвольный діаметръ пересѣкаетъ прямыя AC и CE соотвѣтственно въ точкахъ M и N. Доказать, что прямыя BM и DN пересѣкаются на окружности.

Ю. Рабиновичъ (Казань).

№ 292 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$(1+2+3+\cdots+x)(1^2+2^2+3^2+\cdots+x^2)=y^2.$$

R.

№ 293 (6 сер.). Раздѣлить данный треугольникъ прямой, параллельной одной изъ его сторонъ, на двѣ части такъ, чтобы объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія каждой части вокругъ сѣкущей прямой, были равны.

(Заимств.)

№ 294 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=24.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 235 (6 сер.). *Доказать, что изъ равенства*

$$u+v=1$$

вытекаетъ равенство

$$u^m(1+C^1_m v+C^2_{m+1}v^2+\cdots+C^{m-1}_{2m-2}v^{m-1})+$$

$$+v^m(1+C^1_m u+C^2_{2m+1}u^2+\cdots+C^{m-1}_{2m-2}u^{m-1})=1,$$

гдѣ C^q_p *обозначаетъ вообще число сочетаній изъ* p *элементовъ по* q.

При $m=1$ данное для доказательства равенство теряетъ, строго говоря, смыслъ. Однако, условившись въ этомъ случаѣ удержать лишь члены u^m и v^m, находимъ, что разсматриваемое тожество обращается въ равенство $u+v=1$, которое по условію правильно. Преобразуя первую часть разсматриваемаго равенства при $m=2$ при помощи равенства $u+v=1$, находимъ, что

$$u^2(1+2v)+v^2(1+2u)=u^2+2uv(u+v)+v^2=u^2+2uv+v^2=(u+v)^2=1,$$

откуда слѣдуетъ, что данное для доказательства предложеніе вѣрно при $m=2$. Теперь допустимъ, что наше предложеніе вѣрно при нѣкоторомъ опредѣленномъ цѣломъ положительномъ m, удовлетворяющемъ неравенству $m\geqq 2$. Такъ какъ (1) $u+v=1$, то $u=1-v$, $v=1-u$, а потому (2) $u^{m+1}=u^m(1-v)$, (3) $v^{m+1}=v^m(1-u)$. Поэтому пользуясь равенствомъ (2) и раскрывая скобки, находимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, что

$$u^{m+1}(1+C^1_{m+1}v+C^2_{m+2}v^2+\cdots+C^k_{m+k}v^k+\cdots+C^{m-1}_{2m-1}v^{m-1}+C^m_{2m}v^m)=$$

$$=u^m(1+C^1_{m+1}v+C^2_{m+2}v^2+\cdots+C^k_{m+k}v^k+\cdots+C^{m-1}_{2m-1}v^{m-1}+C^m_{2m}v^m)(1-v)=$$

$$=u^m\left[1+(C^1_{m+1}-1)v+(C^2_{m+2}-C^1_{m+1})v^2+\cdots+(C^k_{m+k}-C^{k-1}_{m+k-1})v^k+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(C^{m-1}_{2m-1}-C^{m-2}_{2m-2})v^{m-1}\right]+u^m v^m(C^m_{2m}-C^{m-1}_{2m-1}-C^m_{2m}v).$$

Послѣднее выраженіе, съ помощью извѣстнаго въ теоріи соединеній равенства

$$(4) \quad C_{m+k}^{k} = C_{m+k-1}^{k-1} + C_{m+k-1}^{k}$$

(которое остается вѣрнымъ и при $k=1$, если положить $C_m^0 = 1$), можно замѣнить равнымъ ему тожественно выраженіемъ

$$u^m (1 + C_m^1 v + C_{m+1}^2 v^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} v^{m-1}) + (C_{2m-1}^m - C_{2m}^m v) u^m v^m.$$

Итакъ, при наличности равенства (1),

$$(5) \quad \begin{aligned} & u^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 v + C_{m+2}^2 v^2 + \cdots + C_{2m}^m v^m) = \\ & = u^m (1 + C_m^1 v + C_{m+1}^2 v^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} v^{m-1}) + (C_{2m-1}^m - C_{2m}^m v) u^m v^m. \end{aligned}$$

Совершенно аналогичнымъ образомъ, съ помощью формулы (3), можно вывести равенство

$$(6) \quad \begin{aligned} & v^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 u + C_{m+2}^2 u^2 + \cdots + C_{2m}^m u^m) = \\ & = v^m (1 + C_m^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} u^{m-1}) + (C_{2m-1}^m - C_{2m}^m u) u^m v^m. \end{aligned}$$

Сложивъ равенства (5) и (6) и принимая во вниманіе равенство (1), получимъ

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 v + C_{m+2}^2 v^2 + \cdots + C_{2m}^m v^m) + \\ & \qquad + v^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m}^m u^m) = \\ & = u^m (1 + C_m^1 v + C_{m+1}^2 v^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} v^{m-1}) + \\ & \qquad + v^m (1 + C_m^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} u^{m-1}) + (2C_{2m-1}^m - C_{2m}^m) u^m v^m. \end{aligned} \right.$$

Но при $k=m$ формула (4) даетъ намъ, что $C_{2m}^m = C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-1}^{m-1} = 2C_{2m-1}^m$, такъ какъ, на основаніи формулы $C_p^q = C_p^{p-q}$ при $p = 2m-1$, $C_{2m-1}^{m-1} = C_{2m-1}^m$. Поэтому $2C_{m-1}^m - C_{2m}^m = 0$, и формула (7) даетъ намъ, что

$$\begin{aligned} & u^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 v + C_{m+2}^2 v^2 + \cdots + C_{2m}^m v^m) + \\ & \qquad + v^{m+1} (1 + C_{m+1}^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m}^m u^m) = \\ & = u^m (1 + C_m^1 v + C_{m+1}^2 v^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} v^{m-1}) + \\ & \qquad + v^m (1 + C_m^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} u^{m-1}) = 1, \end{aligned}$$

такъ какъ по допущенію наше предложеніе вѣрно при разсматриваемомъ значеніи m. Итакъ, если наше предложеніе вѣрно при нѣкоторомъ данномъ m, то вѣрно равенство

$$u^{m+1}(1+C_{m+1}^{1}v+\cdots+C_{2m}^{m}v^{m})+v^{m+1}(1+C_{m+1}^{1}u+\cdots+C_{2m}^{m}u^{m})=1,$$

а это значитъ что разсматриваемое предложеніе вѣрно при увеличеніи значенія m на единицу. Такимъ образомъ наше предложеніе установлено индуктивно для любого цѣлаго положительнаго m.

М. Виленскій (Одесса); *Н. С.* (Одесса).

№ 240 (6 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе*

$$xy-10(x+y)=1.$$

Рѣшая уравненіе относительно y, имѣемъ:

$$y=\frac{10x+1}{x-10}, \quad \text{или} \quad (1) \quad y=10+\frac{101}{x-10},$$

откуда слѣдуетъ, что $x-10$ есть дѣлитель простого числа 101. Такимъ образомъ должно быть справедливо одно изъ равенствъ

$$x-10=\pm 1, \quad x-10=\pm 101.$$

Опредѣляя x изъ каждаго изъ этихъ равенствъ и подставляя полученныя значенія x въ равенство (1), находимъ, что всѣ цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія выражаются формулами

$$x_1=11,\ \ y_1=111;\ \ x_2=9,\ \ y_2=-91;\ \ x_3=11,\ \ y_3=111;\ \ x_4=-91,\ \ y_4=9.$$

X. (Саратовъ); *М. Виленскій* (Одесса); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *N. N.* (Тифлисъ); *А. Гейлеръ* (Харьковъ); *В. Егоршинъ* (Алатырь, Симбирской губ.).

№ 242 (6 сер.). *Пусть первое изъ чиселъ* A, B, C *изображается по десятичной системѣ счисленія* 2m *цифрами, каждая изъ которыхъ равна* 4, *второе* — m + 1 *цифрами, каждая изъ которыхъ равна* 2, *третье* — m *цифрами, каждая изъ которыхъ равна* 8. *Доказать, что число* A + B + C + 7 *есть точный квадратъ.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Записавъ каждое изъ чиселъ A, B, C по десятичной системѣ, находимъ согласно съ условіемъ, что

$$A+B+C+7=4(1+10+10^2+\cdots+10^{2m-1})+2(1+10+10^2+\cdots+10^{m})+$$

$$+8(1+10+10^2+\cdots+10^{m-1})+7=$$

$$=\frac{4(10^{2m}-1)}{9}+\frac{2(10^{m+1}-1)}{9}+\frac{8(10^{m}-1)}{9}+7=$$

$$=\frac{4.10^{2m}+2.10^{m+1}+8.10^{m}-4-2-8+63}{9}=$$

$$=\frac{4.10^{2m}+20.10^{m}+8.10^{m}+49}{9}=\frac{4.10^{2m}+28.10^{m}+49}{9}=\left(\frac{2.10^{m}+7}{3}\right)^2$$

Итакъ $A+B+C+7$ есть квадратъ раціональнаго числа $\dfrac{2.10^{m}+7}{3}$, а потому и квадратъ цѣлаго числа, т. е. точный квадратъ. Такимъ образомъ $\frac{2 \cdot 10^m + 7}{3}$ есть навѣрно цѣлое число, которое легко получить въ окончательной формѣ. Дѣйствительно, дѣля на 3 число $2 \cdot 10^m + 7$, т. е. число, записанное слѣва на право двойкой, $m - 1$ нулями и семеркой, находимъ, что искомое частное есть $\overbrace{66\ldots6}^{m-1}9$, т. е. число, записанное слѣва направо, $m - 1$ шестерками и девяткой на концѣ.

И. Быкъ (Кіевъ); *И Брюхановъ* (Петроградъ); *М. Виленскій* (Одесса); *П. Волохинъ* (Ялта); *А. Иткинъ* (Петроградъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *Л. Гейлеръ* (Харьковъ).

№ 244 (6 сер.). *Пользуясь соотношеніемъ, предложеннымъ для доказательства въ задачѣ* **№ 235** (см. № 625 «Вѣстника») *доказать слѣдующее тожество:*

$$\frac{1}{(x-a)^m(x-b)^m} = \frac{1}{(a-b)^m}\left[\frac{1}{(x-a)^m} + \frac{C_m^1}{(x-a)^{m-1}(b-a)} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{m+1}^2}{(x-a)^{m-2}(b-a)^2} + \cdots + \frac{C_{m+k-1}^k}{(x-a)^{m-k}(b-a)^k} + \cdots + \frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-a)(b-a)^{m+1}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(b-a)^m} \cdot \left[\frac{1}{(x-b)^m} + \frac{C_m^1}{(x-b)^{m-1}(a-b)} + \frac{C_{m+1}^2}{(x-b)^{m-2}(a-b)^2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{C_{m+k-1}^k}{(x-b)^{m-k}(a-b)^k} + \cdots + \frac{C_{2m-2}^{m-1}}{(x-b)(a-b)^{m-1}}\right].$$

Тожество $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$ можно записать въ видѣ

$$\frac{x-b}{a-b} + \frac{x-a}{b-a} = 1,$$

или, полагая (1) $\frac{x-b}{a-b} = u$, (2) $\frac{x-a}{b-a} = v$, въ видѣ $u + v = 1$. Поэтому, согласно съ текстомъ задачи № 235, (см. выше, стр. 165),

$$1 = u^m\left(1 + C_m^1 v + C_{m+1}^2 v^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-2} v^{m-1}\right) +$$

$$+ v^m\left(1 + C_m^1 u + C_{m+1}^2 u^2 + \cdots + C_{2m-2}^{m-1} u^{m-1}\right).$$

Подставляя въ это тожество значенія u и v изъ равенствъ (1) и (2) и дѣля обѣ части на $(x-a)^m(x-b)^m$ приходимъ къ тожеству, предложенному для доказательства.

М. Виленскій (Одесса); *М. Горнштейнъ* (Бердянскъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
пщется

Обложка
пщется