

Обложка
щется

Обложка
щется

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 639 — 640.

Содержание: О неразрѣшимости задачъ циркулемъ и линейкой. *И. Александрова.* — Экспедиція Ликской обсерваторіи въ Бровары Черниговской губ. для наблюденія солнечнаго затмения. *В. В. Кэмпбелля и Г. Д. Куртиса.* — О нѣкоторыхъ случаяхъ относительнаго движенія. *Н. С. Васильева.* — Полемика: По поводу замѣтки С. Вавилова „Объ одномъ возможномъ выводѣ изъ опытовъ Майкельсона и другихъ“, помѣщенной въ № 634 „Вѣстника“. *К. Шапошникова.* — Задачи №№ 283 — 286 (6 сер.). — Рѣшенія задачъ. Отдѣлы I. №№ 210, 237 и 239 (6 сер.). — Объявленія.

О неразрѣшимости задачъ циркулемъ и линейкой.

И. Александрова.

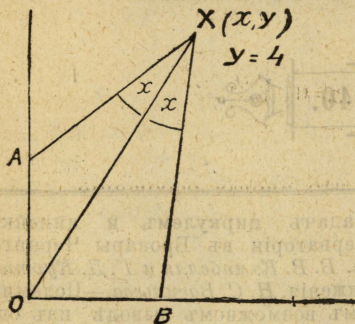
Этотъ вопросъ разработанъ Ю. Петерсономъ, А. Адлеромъ и мною въ сочиненіяхъ, посвященныхъ методамъ геометрическихъ задачъ. По существу дѣла, по разъясненію коренныхъ сторонъ вопроса, упростить что-нибудь очень трудно. Но изложенію нѣкоторыхъ рѣшеній (см. ниже задачи №№ 2 — 4) можно дать нѣсколько иной характеръ, быть можетъ, болѣе доступный. Съ другой стороны, въ означенныхъ сочиненіяхъ недостаточно развита идея, въ силу которой неразрѣшимость одной задачи влечетъ за собой неразрѣшимость цѣлаго ряда задачъ. Въ тѣхъ же трудахъ за недостаткомъ мѣста невыяснены нѣкоторые интересныя, такъ сказать, подводныя теченія, обыкновенно сопровождающія рѣшеніе поставленнаго вопроса. Наконецъ, нѣкоторые примѣры (№№ 1, 4, 5) написаны по поводу того, что ко мнѣ неоднократно обращались съ ними любители построений.

Все сказанное и опредѣляетъ цѣль предлагаемой записки. Она состоитъ въ рядѣ примѣровъ, въ рѣшеніи которыхъ играетъ роль извѣстная теорема: „кубическое уравненіе вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,

въ которомъ a , b и c суть цѣлыя числа и которому не удовлетворяетъ ни одинъ изъ множителей числа c , взятыхъ съ двойнымъ знакомъ каждый, не имѣетъ ни рациональныхъ корней, ни корней, выражающихся въ квадратныхъ радикалахъ“ *).

1. На данной прямой найти точку X , изъ которой два данныхъ отрѣзка видны подъ равными углами.

Пусть данные отрѣзки AO и BO перпендикулярны; возьмемъ ихъ за координатныя оси; пусть $AO = 2$, $BO = 1$ **), $y = 4$ данная прямая и $X(x, y)$ — искомая точка. Уравненія прямыхъ AX , OX и BX будутъ $y - 2 = kx$, $y = k_1x$ и $y = k_2(x - 1)$. По условію получимъ:



Черт. 1.

$$\frac{y-2}{x} - \frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y}{x-1},$$

$$1 + \frac{(y-2)y}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x(x-1)},$$

что при $y = 4$ даетъ

$$\frac{-2x}{x^2 + 8} = \frac{-4}{x^2 - x + 16},$$

или

$$x^3 - 3x^2 + 16x - 16 = 0.$$

Испытывая всѣ дѣлители числа 16 со знакомъ $+$ (со знакомъ минусъ ихъ испытывать, очевидно, бесполезно), мы увидимъ, что они не удовлетворяютъ полученному уравненію. Слѣдовательно, это уравненіе не имѣетъ ни рациональныхъ корней, ни корней, выражающихся квадратными радикалами. Поэтому наша задача, будучи недоступна циркулю и линейкѣ въ частномъ случаѣ, будетъ таковою же и вообще.

Разъ это намъ извѣстно, то легко установить цѣлый рядъ задачъ, неразрѣшимыхъ циркулемъ и линейкой. Стоитъ только обобщить нашу задачу въ томъ или другомъ направленіи. Напримѣръ:

2. На данной прямой найти точку X , связанную съ данными отрѣзками AB и CD равенствомъ $p \cdot \angle AXB = q \cdot \angle CXD$, гдѣ p и q суть произвольныя рациональныя числа.

Пусть искомая точка X найдена циркулемъ и линейкой. Умножаемъ $\angle AXB$ на p , а $\angle CXD$ на q *) и въ полученныхъ углахъ

*) Доказательство можно найти въ „Теоріи геометрическихъ построеній“ А. Адлера, стр. 188 и 189.

**) Выборъ чиселъ, конечно, долженъ быть сдѣланъ послѣ получения уравненія въ его неупрощенномъ видѣ. Иногда въ выборѣ чиселъ могутъ помочь и геометрическія соображенія. Такъ, въ данномъ случаѣ было бы неосторожнымъ предположеніе $AO \perp BO$ и $AO = BO = 1$. Въ самомъ дѣлѣ, задача тогда, очевидно, рѣшается очень просто, и точка X находится въ пересѣченіи данной прямой или съ прямой AB , или съ бисектрисой угла AOB . Соответствующее этому случаю уравненіе имѣетъ рациональные корни.

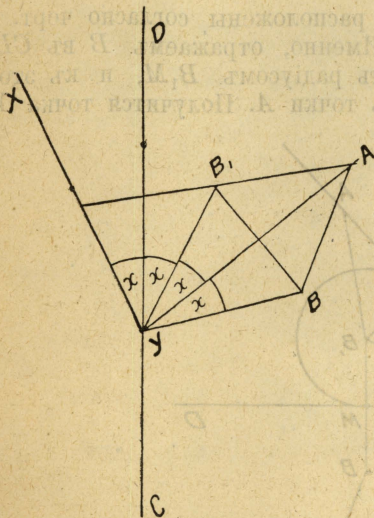
проводимъ произвольно отрезки MN и PQ . Эти операции можно сдѣлать циркулемъ и линейкой. Тогда на данной прямой циркулемъ и линейкой найдена точка X , изъ которой произвольные отрезки MN и PQ видны подъ равными углами, чего не можетъ быть.

Слѣдовательно, наше предположеніе не вѣрно.

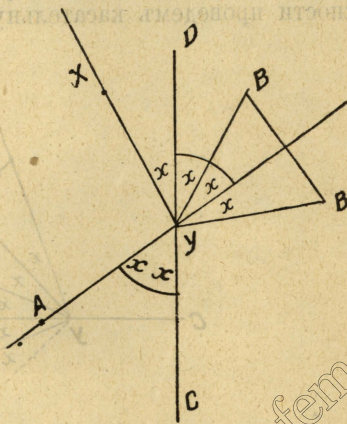
Если вмѣсто соотношенія $p \cdot \angle AXB = q \cdot \angle CXD$ требуется соотношение $\angle AXB \pm \angle CXD = \alpha$, гдѣ α есть данный уголъ, то сдѣлавъ вышеуказанное предположеніе, къ $\angle AXB$ прибавляемъ $\angle BXE = \alpha \mp \angle AXB$. Тогда $\angle BXE = \angle CXD$ и получается то же, что и раньше.

Если искомые углы должны удовлетворять равенству $p \cdot \angle AXB \pm q \cdot \angle CXD = \alpha$, гдѣ p и q — произвольныя рациональныя числа*), то эта обобщенная задача не должна вообще рѣшаться циркулемъ и линейкой.

Необходимо, однако, помнить, что въ обобщенной задачѣ, а равно и въ той задачѣ, которая приводится къ вопросу, неразрѣшимаго циркулемъ и линейкой, могутъ подбираться такія комбинаціи данныхъ, которыя хотя и носятъ общій характеръ, но тѣмъ не менѣе разрѣшаются циркулемъ и линейкой. Причины этого чрезвычайно любопытнаго явленія лежатъ въ томъ, что иногда обобщеніе вопроса даетъ болѣе широкій характеръ тому частному случаю, въ которомъ обобщаемая задача разрѣшима циркулемъ и линейкой. Примѣромъ могутъ служить задачи №№ 3 и 4.



Черт. 2.

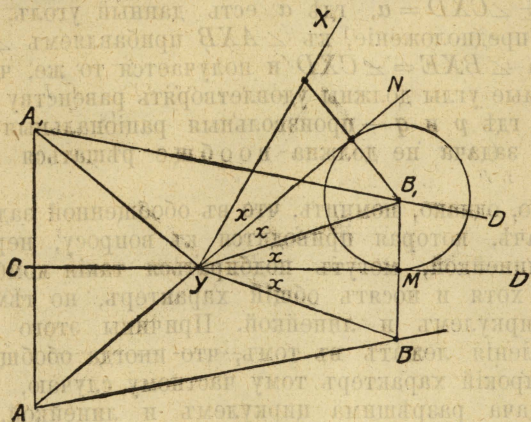


Черт. 3.

3. Даны двѣ точки, A и B , и прямая CD . Построить $\angle BUX$ такъ, чтобы онъ дѣлился прямыми CD и AU въ отношеніи 1:3 и точка Y лежала на CD .

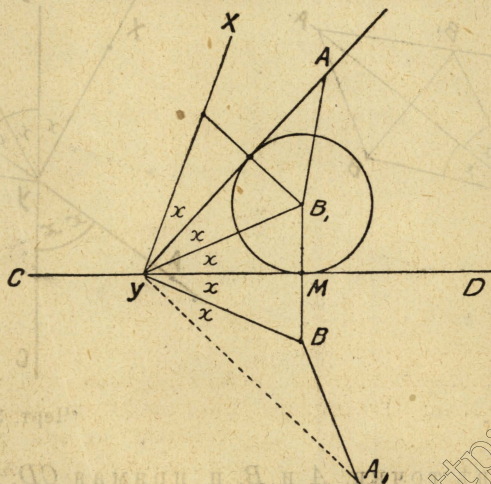
*) Если p и q дробныя числа, то равенство надо освободить отъ дробей.

Если данные и искомыя расположены, какъ указываютъ черт. 2 и 3, то независяще другъ отъ друга отръзки AB и AD (черт. 2) удовлетворяютъ условію $\angle AYD = 2\angle AYB$, и отръзки AC и DB (черт. 3) удовлетворяютъ условію $3\angle AYC = 2\angle DYB$. Поэтому, согласно второй задачѣ, построение вообще не можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой.



Черт. 4.

Однако, если данные и искомыя расположены согласно черт. 4 и 5, то задачу очень легко рѣшить. Именно, отражаемъ B въ CD , изъ центра B_1 описываемъ окружность радиусомъ B_1M , и къ этой окружности проведемъ касательную изъ точки A . Получится точка Y ,



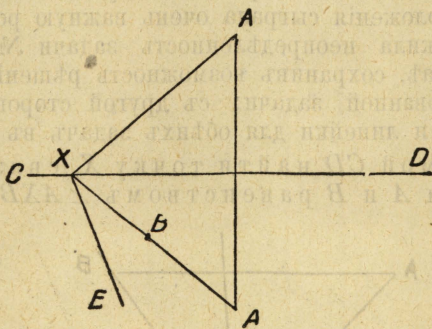
Черт. 9.

и точку X найти уже легко. Между тѣмъ задачи №№ 1 и 2 рѣшены, несомнѣнно, правильно. Въ чемъ же тутъ дѣло?

выполнена циркулемъ и линейкой для угловъ типа $\pi:2^n$ и угловъ, опредѣляемыхъ изъ уравненія $2 \cos \frac{y}{3} = S$, гдѣ S есть произвольное число, подчиненное условію $S^3 - 3S \leq 2^*$) и полученное изъ единицы произвольнымъ построеніемъ циркулемъ и линейкой.

Для угловъ другихъ типовъ трисекція циркулемъ и линейкой невозможны. Трудно предположить, чтобы при всевозможныхъ измѣненіяхъ относительнаго положенія прямой CD и точекъ A и B , въ противорѣчіе съ принципомъ постепенности, получались бы углы только первыхъ двухъ типовъ, и потому данная задача вообще не должна рѣшаться циркулемъ и линейкой, какъ уже мы видѣли въ задачѣ № 2.

Въ данномъ случаѣ этотъ методъ нельзя считать вполне строгимъ; это видно изъ слѣдующаго факта, появленіе котораго объясняется совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ. Когда A и B расположены по обѣ стороны CD , то наша задача легко рѣшается (черт. 7). Отражаемъ A въ CD и полученную точку A_1 соединяемъ съ B . Прямая A_1B встрѣтитъ CD въ точкѣ X . Если къ $\angle AXB$ приложимъ



Черт. 7.

$\angle BXE$, равный $\angle AXD$, то получимъ $\angle AXE$, раздѣленный на 3 равныя части. Измѣняя положеніе точекъ A и B , мы можемъ получить этимъ способомъ произвольное число угловъ, трисекція которыхъ выполняется циркулемъ и линейкой; нужно думать, что эти углы будутъ двухъ типовъ, которые указаны выше. Такихъ способовъ можно указать довольно много. Итакъ, указанный методъ нельзя для данной задачи считать строгимъ — однако, я рѣшился о немъ заговорить по двумъ причинамъ. Во-первыхъ, въ нашемъ трудномъ и очень интересномъ вопросѣ нельзя пренебрегать и не вполне строгимъ методомъ.

*) Дѣло въ томъ, что $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$, откуда полагая $2 \cos \frac{a}{3} = x$ и $2 \cos a = m$, находимъ $x^3 - 3x - m = 0$, гдѣ a есть данный уголъ. Выберемъ m такъ, что $m = 2 \cos a = S^3 - 3S$, тогда S будетъ корнемъ нашего уравненія и слѣд., $2 \cos \frac{a}{3} = S$.

Во вторыхъ, я многократно испытывалъ этотъ методъ и онъ ни разу не далъ невѣрнаго указанія *).

Выше сама собой напрашивалась слѣдующая мысль. Если очень легко получить построениемъ углы, трисекція которыхъ выполняется циркулемъ и линейкой, то спрашивается, нельзя ли получить построениемъ углы, трисекція которыхъ недоступна циркулю и линейкѣ?

Такие углы можно получить, построивъ циркулемъ и линейкой нѣкоторые изъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ $2^{2^r} + 1$ сторонъ — таковы правильные треугольникъ, семнадцатиугольникъ и т. д. Затѣмъ углы этихъ фигуръ можно дѣлить на 2^n равныхъ частей и все будутъ получаться искомые углы.

Но возможенъ ли способъ получения этихъ угловъ, аналогичный предыдущему, т. е., основанный на передвиженіи точекъ даннаго чертежа?

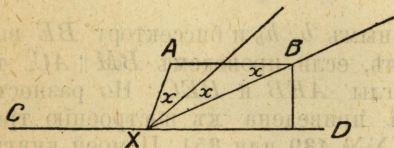
Конечно возможенъ, только для этого нужны другія инструменты, напримѣръ, два прямыхъ угла изъ металла; въ нѣкоторыхъ же подобныхъ случаяхъ достаточно къ циркулю и линейкѣ присоединить бумажную полоску, на которой нанесенъ отрѣзокъ данной длины.

Суть дѣла кратчайшѣ состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть AB (черт. 8) параллельна CD ,

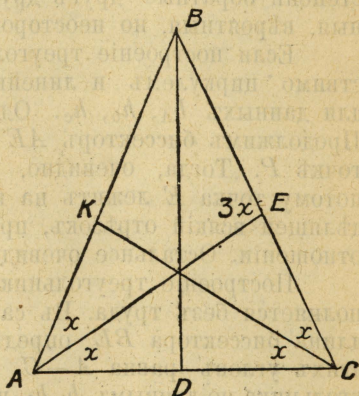
$$\angle DXB = x \text{ и } \angle AXB = 2x.$$

Тогда, полагая $\sin^2 x = y$, получимъ уравненіе вида

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0.$$



Черт. 8.



Черт. 9.

Если это уравненіе имѣетъ дѣйствительный корень, то этотъ корень можно построить, имѣя въ распоряженіи два подвижныхъ прямыхъ угла (Адлеръ, стр. 353, и Александровъ, стр. 166). Построивъ уголъ x , найдемъ искомый $\angle AXD$. Мѣняя же положеніе и длину AB , можно найти, сколько угодно, угловъ того же характера.

5. Построить треугольникъ, зная биссекторы его угловъ.

Пусть два биссектора AE и CK равны (черт. 9), и $\angle CAE = x$.

Тогда $\angle AEB = 3x$ и, определяя AB , получимъ $\frac{BD}{\sin 2x} = \frac{AE \sin 3x}{\sin 4x}$

*) Къ этому замѣчанію автора мы возвратимся въ ближайшемъ номерѣ.

или $2BD \cos 2x = AE \sin 3x$. Теперь нужно подобрать для отношения $AE:BD$ число, упрощающее уравнение. Если это число равно двумъ, то получимъ $x = 18^\circ$ — въ этомъ случаѣ задача рѣшается циркулемъ и линейкой. Поэтому полагаемъ $AE = 4BD$ и находимъ:

$$\cos 2x = 2 \sin 3x, \quad \text{или} \quad 1 - 2 \sin^2 x = 6 \sin x - 8 \sin^3 x.$$

Если $4 \sin x = y$, то $y^3 - y^2 - 12y + 8 = 0$ — уравненіе, не имѣющее рациональныхъ корней и корней, выраженныхъ квадратными радикалами. Изъ нашего рѣшенія видно, что построеніе треугольника по даннымъ b_A , b_B и h_c , а также по даннымъ b_k , b_B и m_c , невыполнимо циркулемъ и линейкой. То же заключеніе будетъ справедливо, если вмѣсто высотъ взять отрѣзки, встрѣчающіе основаніе подъ даннымъ угломъ, вмѣсто медіанъ — отрѣзки, дѣлящія основаніе въ извѣстномъ отношеніи, и вмѣсто биссекторовъ — отрѣзки, дѣлящія уголъ треугольника въ данномъ отношеніи.

Къ вариантамъ указанныхъ задачъ на построеніе треугольниковъ вообще надо относиться чрезвычайно осторожно, въ особенности, если въ числѣ данныхъ есть биссекторъ. Вотъ два примѣра, до нѣкоторой степени обратные другъ другу, въ которыхъ сдѣланы соблазнительныя, вѣроятныя, но неосторожныя заключенія.

Если построеніе треугольника по даннымъ b_h , b_B и h_c неосуществимо циркулемъ и линейкой, то, казалось бы, это справедливо и для данныхъ b_A , h_b , h_c . Однако, эта задача рѣшается очень просто. Продолжимъ биссекторъ AE до встрѣчи съ BM , параллелью CA , въ точкѣ P . Тогда, очевидно, $PE:EA = BE:CE = BA:AC = h_b:h_c$, и потому точка E лежитъ на извѣстной намъ параллели основанію AC , дѣлящей всякій отрѣзокъ, проведенный между AC и BM въ данномъ отношеніи. Остальное очевидно.

Построеніе треугольника по даннымъ b , h_b и биссектору BE выполняется безъ труда. Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ $BM \parallel AC$, то длина биссектора BE опредѣляетъ углы AEB и BEC . Но разность этихъ угловъ равна $A - C$, и задача приведена къ построенію треугольника по даннымъ b , h_b и $A - C$ (№№ 439 или 351, II моей книги, № 314 — Петерсена).

Однако, стоитъ только немного перемѣнить условіе и вмѣсто биссектора BE задать биссекторъ AM *) и задача при $AB = AM = BD = 1$ приведетъ къ уравненію $\cos 3y = \cos y \cdot \sin 4y$, которое покажетъ неразрѣшимость задачи циркулемъ и линейкой.

*) Эта задача имѣетъ для меня и Тамбовской гимназій историческій интересъ. Въ 1892-мъ году, іюня 2-го, она была задана одному изъ моихъ учениковъ на устномъ экзаменѣ зрѣлости окружнымъ инспекторомъ, впоследствии попечителемъ округа, С. А. Раевскимъ, тѣмъ самымъ, который въ качествѣ предсѣдателя одного изъ просвѣтительныхъ организаций, недавно приобрѣлъ широкую извѣстность.

Експедиція Ликской обсерваторіи въ Бровары Черниговской губерніи для наблюденія солнечнаго затменія.

*В. В. Кэмпбелля и Г. Д. Куртиса *).*

(Переводъ съ англійскаго).

Эта прекрасно снаряженная экспедиція для наблюденія солнечнаго затменія раздѣлила печальную участь нѣсколькихъ другихъ большихъ экспедицій въ Россію, предпринятыхъ для той же цѣли: экспедиціи не удалось вслѣдствіе неблагоприятныхъ метеорологическихъ условій получить какіе либо результаты. Тѣмъ не менѣе описаніе экспедиціоннаго лагеря, снаряженіе и проектированныя наблюденія не безынтересны, и о нихъ стоитъ разсказать.

Врядъ ли требуется выразить нашу благодарность регенту Вильяму Г. Крокеру (H. Crocker), который своимъ даромъ сдѣлалъ возможнымъ осуществленіе экспедиціи; благодаря пожертвованіямъ, главнымъ образомъ, г. Крокера, а также его брата и г-жи Фебы А. Гирцъ (Phoebe Hearzt), Ликская обсерваторія съ того момента, какъ было окончено ея оборудованіе, получила возможность посылать хорошо снаряженные экспедиціи для наблюденія наиболѣе важныхъ полныхъ солнечныхъ затменій, и благодаря этому у нея составилось собраніе такихъ наблюденій, несомнѣнно самое обширное изъ всѣхъ существующихъ. Въ теченіе этого періода въ двадцать шесть лѣтъ Ликская обсерваторія пропустила нѣкоторыя солнечныя затменія, не пытаясь даже послать экспедиціи, такъ какъ заранѣе было извѣстно, что шансовъ на удачу очень мало. Что воздержаніе нашей обсерваторіи диктовалось благоразуміемъ, видно изъ того, что почти во всѣхъ такихъ случаяхъ наблюденія другихъ астрономовъ терпѣли неудачу. То обстоятельство, что настоящая экспедиція не можетъ похвалиться такой же удачей, какая выпала на долю семи изъ числа прежнихъ восьми экспедицій, должно быть отнесено на счетъ „превратностей войны“.

Чрезвычайно трудно получить точныя свѣдѣнія относительно вѣроятныхъ метеорологическихъ условій въ различныхъ возможныхъ мѣстностяхъ вдоль линіи полнаго затменія. Тѣ данныя, которыя были опубликованы, повидимому, не оставляли сомнѣнія, что вѣроятность отсутствія облачности, чѣмъ южнѣе, тѣмъ больше; дѣйствительно, ко-

*) Въ № 635 — 636 мы помѣстили краткій отчетъ проф. А. Орлова — „О наблюденіяхъ полнаго солнечнаго затменія 8/21 августа 1914 г. астрономами Императорскаго Нѣвороссійскаго Университета“. Теперь помѣщаемъ описаніе экспедиціи Ликской обсерваторіи, помѣщенное въ журналъ „Popular Astronomy“. March, 1915.

эfficiентъ облачности убываетъ отъ значенія 6,8 въ Швеціи и Ригѣ до 2,3 въ Крыму, если (баллъ 10 соответствуетъ небу, совершенно покрытому облаками). Для наблюденій, которыя должны были быть произведены посредствомъ спектрографа съ движущейся пластинкой, была въ высшей степени важна возможно большая близость къ центральной линіи. Низменный характеръ мѣстности и другія неблагоприятныя условія вдоль центральной линіи въ Крыму и, съ другой стороны, выгоды близости большого города (при прочихъ равныхъ условіяхъ) побудили выбрать мѣсто, которое находилось бы возможно ближе къ центральной линіи тамъ, гдѣ она проходитъ черезъ маленькій городокъ Бровары, Черниговской губерніи, около двѣнадцати миль къ сѣверо-востоку отъ Кіева. Такимъ образомъ, вслѣдствіе основного требованія относительно положенія на центральной линіи, пришлось, къ великому сожалѣнію, отклонить нѣсколько весьма любезно предложенныхъ мѣстъ. Г. Грефъ съ, камергеръ Императорскаго Двора, со столь характернымъ для русскихъ щедрымъ гостепріимствомъ предложилъ намъ мѣсто въ своемъ имѣніи Ставидлы, около ста миль къ юго-востоку отъ Кіева: участниковъ экспедиціи въ числѣ восьми онъ приглашалъ къ себѣ въ качествѣ своихъ личныхъ гостей, и бралъ на себя труды по перевозкѣ и всѣ другія работы, какія будутъ необходимы. Но слишкомъ большое разстояніе имѣнія г. Грефса отъ центральной линіи (13 км.) побудило насъ, къ нашему величайшему сожалѣнію, отклонить это въ высшей степени заманчивое приглашеніе. По той же причинѣ пришлось отклонить приглашенія, полученные нами по прибытіи въ Кіевъ, отъ кіевского городского головы, предложившаго намъ поселиться въ какомъ-либо изъ его прекрасныхъ имѣній, и предложеніе профессора Фогеля — выбрать мѣсто на обширной усадьбѣ Кіевской обсерваторіи.

Помимо инструментовъ экспедиція взяла съ собой полное лагерное снаряженіе, всевозможные запасы и продовольственные склады, такъ какъ неоднократный опытъ показалъ, что такія большія экспедиціи очень много выигрываютъ и въ отношеніи удобствъ, и въ успѣшности, если онѣ представляютъ собою самостоятельную единицу, не зависящую отъ мѣстныхъ приспособленій и подвоза. Зафрахтованный грузъ, около четырехъ съ половиною тоннъ, былъ отправленъ на пароходѣ Русско-Американской линіи „Царь“ прямо въ Либаву, куда онъ прибылъ 8 іюля. Согласно правилу, котораго мы придерживаемся неизмѣнно, одинъ изъ членовъ экспедиціи сопровождаетъ грузъ по всему его пути, благодаря чему намъ нѣрѣдко удавалось избѣгнуть серьезныхъ проволочекъ и неудобствъ. Эту задачу на этотъ разъ взялъ на себя г. Куртисъ (Curtis). Было рѣшено, что онъ выберетъ подходящее мѣсто къ сѣверо-востоку отъ Кіева возможно ближе къ центральной линіи, гдѣ къ нему позже должны были присоединиться г. Кэмпбеллъ (Campbell) и прочіе члены экспедиціи, направившіеся черезъ Италію и Австрію.

Русское правительство предоставляетъ заграничнымъ астрономическимъ экспедиціямъ беспошлинный ввозъ инструментовъ, подъ условіемъ, что инструменты эти не останутся въ Россіи, бесплатную пе-

ревозку инструментовъ по желѣзной дорогѣ и пассажирскіе билеты за половинную цѣну. Эти таможенные льготы толковались властями въ ограничительномъ смыслѣ, и осмотръ въ Либавѣ оказался болѣе строгимъ, чѣмъ мы рассчитывали; однако, власти были къ намъ весьма любезны и предусмотрительны.

Г-нъ Куртисъ пріѣхалъ въ Кіевъ 11 іюля. Поиски подходящаго мѣста подвигались довольно медленно, такъ какъ время было лѣтнее и почти всѣ официальные лица и ученые, которые могли бы намъ помочь были въ отлучкѣ. Тѣмъ не менѣе въ эти дни и во все время нашего пребыванія намъ оказывали неоцѣнимыя услуги нѣкоторые члены Кіевского Кружка Любителей Астрономіи. Всѣмъ этимъ лицамъ мы должны выразить нашу глубокую благодарность, въ особенности же, талантливому предсѣдателю этого общества Николаю Зенченко и выдающемуся члену его Ивану Ильинскому. Оба они предоставили себя всецѣло въ наше распоряженіе и постоянно были готовы оказывать намъ содѣйствіе и помощь въ тѣ дни, когда мы искали мѣсто для лагеря въ трудныхъ и измѣнчивыхъ условіяхъ военного времени.

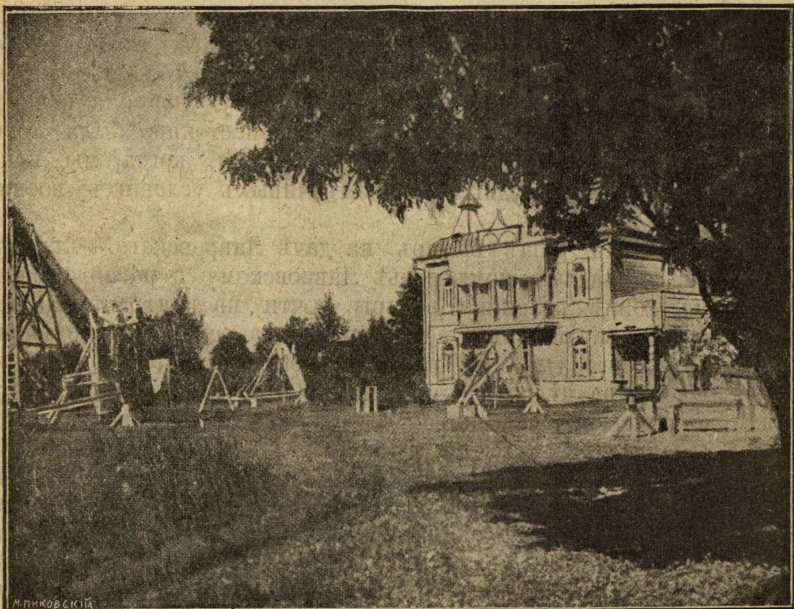
Мы остановили нашъ выборъ на дачѣ Лавровскаго, — живописномъ имѣніи, принадлежащемъ судѣ Лавровскому и расположенномъ въ сѣверномъ концѣ селенія Бровары, почти на центральной линіи, согласно свѣркѣ англійскихъ астрономовъ на основаніи новѣйшихъ наблюденій движенія луны. Въ имѣніи не было обитателей, такъ какъ судья Лавровскій за нѣсколько времени до того переѣхалъ въ другой участокъ; но по весьма счастливой случайности г-жа Лавровская должна была остановиться здѣсь на нѣсколько дней, и въ то время дѣлались приготовленія къ ея пребыванію. Мы очень благодарны ей за любезное разрѣшеніе занять этотъ прекрасный уголокъ и за помощь, оказанную намъ въ нашихъ первыхъ шагахъ, когда мы начали устриваться. Дача занимаетъ 11 акровъ и огорожена со всѣхъ сторонъ; кромѣ превосходнаго двухэтажнаго господскаго дома, здѣсь есть еще сарай и службы, погребъ, оранжерея и даже небольшая наблюдательная башня. За нѣсколько часовъ мы превратили полу-подвальное зимнее отдѣленіе оранжереи въ весьма удобную темную комнату. На дачѣ были различныя фруктовыя и нѣкоторыя другія большія деревья; впереди дома находилась площадка, которая представляла собой идеальное мѣсто для инструментовъ.

Мы взяли съ собой палатки для лагеря, такъ какъ предполагали поставить одну палатку для кухни, другую большую отвести подъ столовую, и одну подъ темную комнату. Но счастливое расположеніе дачи сдѣлало все это излишнимъ, и мы разбили лишь нѣсколько палатокъ для работъ и для младшихъ членовъ экспедиціи, которые предпочитали спать дѣйствительно по лагерному.

Нашъ грузъ мы получили 18 іюля и распаковали. Г. Кэмпбелль и другіе члены прибыли 21 іюля. Экспедиція состояла изъ восьми членовъ: директора Кэмпбелля и д-ра Куртиса, г-жи Кэмпбелль и ея матери — г-жи Елизаветы Томпсонъ, и изъ трехъ сыновей д-ра Кампбелля въ качествѣ добровольныхъ помощниковъ

Уэльса (Wallace), Дугласа (Douglas) и Кеннета (Kenneth) и г-на Шарля Ф. Брѣша (Brush, Jr). Въ теченіе трехъ дней мы привели все въ порядокъ и начали готовиться къ наблюденію затменія.

Съ помощью четырехъ энергичныхъ и дѣятельныхъ молодыхъ американцевъ работа по установкѣ инструментовъ подвигалась очень быстро. И чѣмъ дальше, тѣмъ труднѣе было находить работу для нашихъ ненасытныхъ молодыхъ помощниковъ. Работа шла такъ быстро, что послѣднія двѣ недѣли мы были свободны, и все было готово за



Общій видъ экспедиціи.

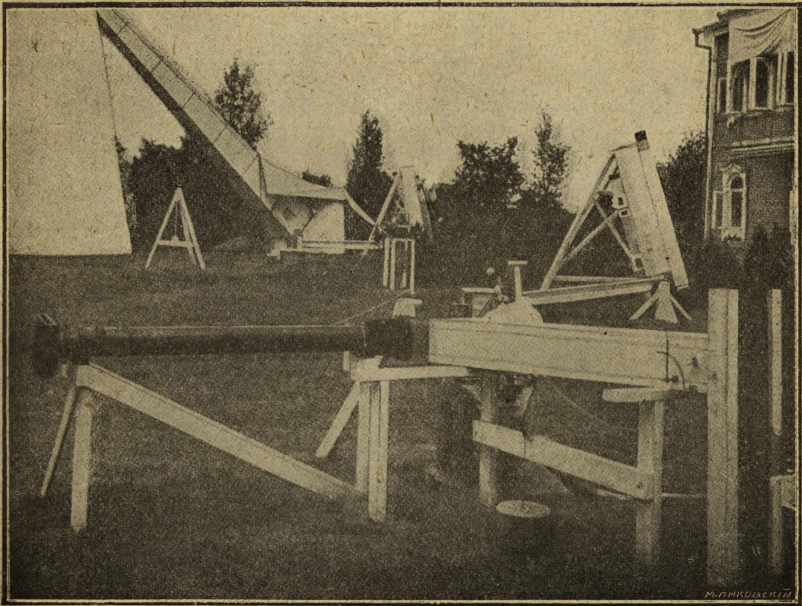
Дача Лавровскаго въ с. Бровары (Черниговской губ.).

десять дней до затменія. Г-жа Кэмпбелль, какъ и въ прежнія затменія, весьма дѣятельно заведывала „министерствомъ внутреннихъ дѣлъ“, обслуживая наши хозяйственные нужды съ помощью обширнаго штата прислуги, и заботилась о томъ, чтобы наша питьевая вода была, какъ слѣдуетъ, прокипячена и въ гигиеническомъ отношеніи безукоризненна. Вообще наша жизнь на дачѣ Лавровскаго была весьма пріятна, и во всѣхъ членахъ экспедиціи оставила по себѣ наилучшую память, если не считать послѣднія и самыя важныя двѣ минуты и четырнадцать секундъ въ день затменія.

Инструменты у насъ были слѣдующіе:

1. 40-футовый телескопъ. Этотъ инструментъ для большихъ снимковъ солнечной короны, былъ монтированъ, какъ въ прежнія зат-

менія, и мы не будемъ его описывать подробно. Съ помощью этого инструмента можно было произвести десять экспозицій продолжительностью отъ мгновенья до 32 секундъ на пластинкахъ въ 14×17 дюймовъ. Этимъ инструментомъ управлялъ Уэльсъ Кэмпбелль съ Георгомъ М. Дэй (Day) въ качествѣ помощника. Насколько намъ удалось узнать, Дэй и его семья были единственными американцами въ Кіевѣ; онъ состоитъ на службѣ въ русскомъ отдѣленіи международнаго общества У. М. С. А. Мы пользуемся случаемъ, чтобы выразить ему нашу благодарность за весьма существенную помощь, которую онъ намъ оказывалъ.

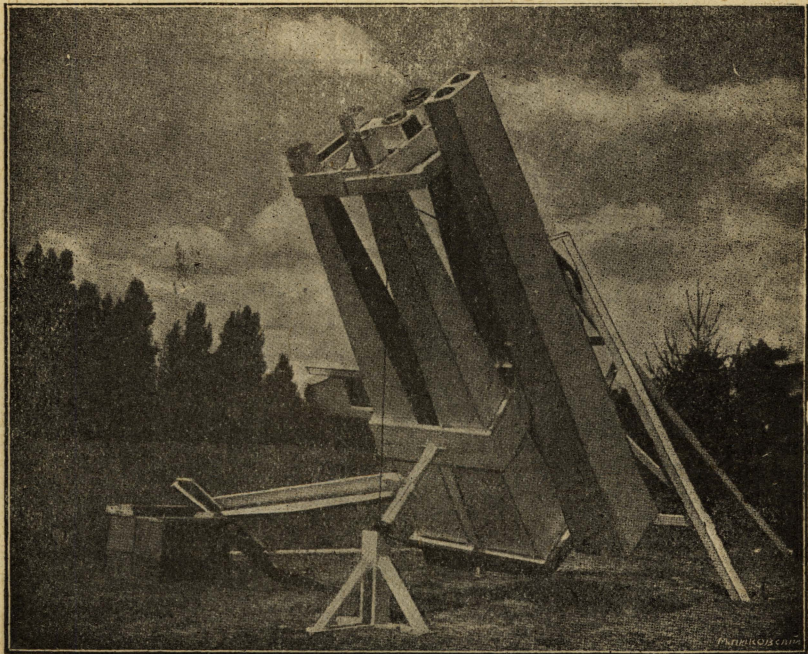


Спектрографъ съ движущейся пластинкой, 40-футовый телескопъ и друг. инструменты.

2. Поляризационные фотометры. Это были тѣ же инструменты, которыми мы пользовались при наблюденіяхъ затмений 1905 и 1908 г., съ тѣмъ лишь отличіемъ, что спереди къ объективамъ были присоединены свѣтовые трубы и діафрагмы для того, чтобы свѣтъ могъ вступать только изъ области непосредственно около солнца. Два такихъ фотометра отражали свѣтъ отъ короны въ камеры съ помощью непосеребрянныхъ стеклянныхъ пластинокъ, помѣщенныхъ подъ угломъ поляризаціи, а фотометры были поставлены подъ угломъ 90° одинъ къ другому. Третья камера была направлена прямо на корону, при чемъ отверстіе чечевицы было закрыто до 0,62 дюймовъ. Отверстія двухъ другихъ имѣли каждое по два дюйма, а фокальныя разстоянія

всѣхъ трехъ были равны почти 50 дюймамъ. Эти поляриграфы и спектрографъ съ одной призмой, о которомъ мы сейчасъ скажемъ, были установлены по сѣверной полярной оси. Осью и инструментами, относящимися къ ней, завѣдывалъ Дугласъ Кэмпбелль, которому помогли г-жа Кэмпбелль, Зенченко и Мерелли.

3. Спектрографъ съ одной призмой. Объективъ съ отверстіемъ въ 1,62 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 12,75 дюймовъ; чечевица коллиматора съ отверстіемъ въ 2 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 32 дюйма; чечевица камеры съ отверстіемъ въ 2,06 дюйма



Экстрафокальные фотометры и типа «Вулканъ».

и фокальнымъ разстояніемъ въ 12,40 дюймовъ, и, наконецъ, призма въ 60° , поставленная на уголъ наименьшаго отклоненія для $H\gamma$.

Назначеніе инструмента — фотографія спектра короны и изученіе распрежденія свѣта въ спектръ короны.

4. Спектрографъ съ тремя призмами для точнаго опредѣленія длины волны зеленой линіи короны. Три призмы въ 60° изъ весьма плотнаго флинтглаза; объективъ съ отверстіемъ въ 2,12 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 20,2 дюйма; чечевица коллиматора съ отверстіемъ въ 2,5 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 20,96 дюйма; чечевица камеръ съ отверстіемъ въ 2,06 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 17,92 дюйма; изогнутая щель съ радіусомъ въ 3,3 дюйма; полное отклоненіе $169^\circ 39'$.

5. Спектрографъ съ рѣшеткой для изученія распредѣленія газа во внутренней коронѣ, образующей зеленое кольцо въ спектрѣ короны. Плоская рѣшетка Майкельсона съ 15 000 линій на одинъ дюймъ и съ разлинованной площадью въ $2,68 \times 3,86$ дюйма примѣнялась здѣсь во второй разъ; тройная чечевица камеры съ отверстіемъ въ 3,25 дюйма и съ фокальнымъ разстояніемъ въ 24 дюйма, вывѣренная на область *D* спектра.

6. Ультра-фіолетовый спектрографъ. Одна стеклянная призма въ 60° для ультра-фіолетовыхъ лучей; тройная стеклянная чечевица для ультра-фіолетовыхъ лучей съ отверстіемъ въ 2,60 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 78,74 дюйма, вывѣренная для длины волны 3500. Назначеніе: записываніе фіолетоваго и ультра-фіолетоваго спектра короны и фотометрія спектра. Эти три послѣднихъ спектрографа были установлены по южной полярной оси и поручены Чарльзу Брѣшу.

7. Спектрографъ съ движущейся пластинкой для спектра. Двѣ призмы въ 60° , дающія отклоненіе $100^\circ 8'$ при *H γ* ; тройная чечевица камеры, вывѣренная на *H γ* , съ отверстіемъ въ 2,12 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 60 дюймовъ. Движеніе пластинки производилось съ помощью регулятора съ клапанами на цилиндрѣ, какъ это дѣлалось при наблюденіи затменій въ 1905 и 1908 г. Экспозицію при этомъ инструментѣ производилъ Кампбеллъ; спектрографъ былъ установленъ почти горизонтально въ такомъ положеніи, чтобы прямая къ краямъ при второмъ и третьемъ контактахъ были параллельны преломляющему углу призмъ; свой свѣтъ онъ получалъ отъ целостата.

8. Телескопъ Флойда (Floyd) съ отверстіемъ въ 5 дюймовъ и фокальнымъ разстояніемъ въ 70 дюймовъ для небольшихъ снимковъ короны былъ установленъ горизонтально и получалъ свой свѣтъ отъ того же целостата, что и спектрографъ съ движущейся пластинкой. Экспозиціи при этомъ инструментѣ производились Линникомъ.

9. Четыре камеры съ чечевицами, отверстія которыхъ равны тремъ дюймамъ, а фокальное разстояніе 11 футамъ 4 дюймамъ. Эти чечевицы и трубы изъ листовой стали, въ которыхъ онѣ были вставлены, примѣнялись въ прежнія затменія при поискахъ интрамеркуріальныхъ планетъ. Мы намѣревались поискать такіе объекты на пластинкахъ, полученныхъ съ помощью этихъ инструментовъ, но эта задача являлась второстепенной по отношенію къ нашей главной цѣли. Одно интересное слѣдствіе теоріи относительности состоитъ въ томъ, что свѣтовой лучъ, проходя черезъ поле тяжести, претерпѣваетъ маленькое отклоненіе; у луча отъ звѣзды, проходящей близко къ краю солнца, полное значеніе этого отклоненія составляетъ дугу въ $0'',93$. Удвоенное отклоненіе — для пары звѣздъ съ противоположныхъ сторонъ солнца на разстояніи 20' отъ края — составило бы три четверти дуговой секунды. (См. статьи въ „Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 23, 219, 272 и 25, 77). Въ настоящее время, повидимому, это — почти единственное физическое наблюденіе, посредствомъ котораго можно было бы провѣрить теорію относительности

и произвести его можно, конечно, только во время полного солнечного затмения. Профессоръ Эйнштейнъ (Einstein), одинъ изъ творцовъ теории относительности, былъ, понятно, въ высокой степени заинтересованъ тѣмъ, чтобы были произведены наблюденія затмения для рѣшенія вопроса о наличности или отсутствіи такого отклоненія свѣта при прохожденіи черезъ сильное поле тяжести. Правда, отклоненіе лучей отъ близлежащихъ звѣздъ, если бы таковое было найдено, усложнялось бы вопросами о величинѣ преломленія, вызваннаго рѣдкой матеріей короны; однако, задача представлялась достаточно важной, чтобы оправдать труды, требовавшіеся для тщательнаго опыта. Трубы были расположены такимъ образомъ, чтобы изображеніе солнца приходилось въ центрѣ каждой изъ четырехъ взятыхъ пластинокъ (размѣры каждой 16×20 дюймовъ). Эти трубки были установлены по оси, рассчитанной по звѣздному, а не по солнечному времени. На Монтъ-Гамильтонѣ были изготовлены для сравненія снимки той области неба, гдѣ предстояло затменіе, съ помощью инструмента, установленнаго точно такимъ же образомъ, какъ при наблюденіи затмения, и съ экспозиціями такой же точно продолжительности, какія должны были быть получены при затменіи. Предполагалось, что путемъ измѣренія звѣздъ, найденныхъ близъ солнца на пластинкахъ со снимками затмения, посредствомъ сравненія ихъ положеній съ положеніями тѣхъ же звѣздъ на заготовленныхъ для сравненія пластинкахъ, можно будетъ обнаружить измѣненія, вызываемыя отклоняющимъ дѣйствіемъ солнца на проходящіе вблизи его свѣтовые лучи.

Такъ какъ Регулъ занималъ весьма благопріятное положеніе, — немного больше, чѣмъ на одинъ градусъ отъ солнца въ моментъ затмения, — то мы установили въ добавленіе къ четыремъ объективамъ пятый такихъ же размѣровъ и съ такимъ же фокальнымъ разстояніемъ, снабдивъ его окуляромъ со скрещенными проволоками и установивъ согласно вычисленію такъ, чтобы Регулъ занималъ на объективѣ центральное положеніе, когда изображеніе солнца будетъ въ центрѣ большихъ пластинокъ. Мы надѣялись, что такимъ способомъ мы будемъ въ состояніи пользоваться Регуломъ, какъ руководящей звѣздой, чтобы обезпечить себѣ совершенную точность въ изображеніяхъ звѣздъ. Эта установка была возложена на г. Куртиса съ помощниками его г. Моргилевскимъ и г. Ильинскимъ.

10. Экстра-фокальные фотометры. Эти послѣдніе были установлены на то же оси, какъ и четыре объектива для повѣрки теории относительности, и состояли изъ двухъ другихъ стеколъ типа „Вулканъ“, поставленныхъ на разстояніи 7 дюймовъ между собой на концѣ трубы съ двойной камерой. Изображенія солнца, получаемыя черезъ оба эти стекла, падали на одну и ту же 14×17 -дюймовую пластинку у нижняго конца. Эти чечевицы (съ отверстіемъ въ 3 дюйма и фокальнымъ разстояніемъ въ 11 футовъ и 4 дюйма) были поставлены на 3 дюйма за фокусомъ экстра-фокально, и одна изъ пары была накрыта такимъ образомъ, чтобы вызвать нѣкоторое уменьшеніе свѣта. Съ помощью образцовыхъ квадратовъ на пластинкѣ и экстра-фокальныхъ изображеній короны и Регула мы надѣялись получить

весьма цѣнные фотометрическіе результаты и данныя относительно плотности вещества, образующаго корону.

11. Съ наблюдательной комнатою 40-футоваго телескопа былъ соединенъ хронографъ, установленный для записи времени второго и третьяго контактовъ. Этотъ хронографъ былъ соединенъ также съ автоматическими контактами на экспозиціонномъ затворѣ спектрографа съ движущейся пластинкой для записи продолжительности экспозиціи съ этимъ инструментомъ.

Сигналы въ предопредѣленные интервалы до момента полного затмѣнія и отсчетъ секундъ для наблюдателей производились Кеннетомъ Кэмпбеллемъ. Въ день затмѣнія въ нашемъ лагерѣ былъ также генераль Никольскій съ сыномъ, имѣвшіе съ собою небольшой телескопъ для зрительныхъ наблюденій короны и выступовъ.

На всѣхъ пластинкахъ для нашихъ разныхъ фотометрическихъ инструментовъ и на выбранныхъ пластинкахъ для 40-футоваго и Флордовскаго телескопа были напечатаны образцовые фотографическіе квадраты отъ амальгацаторовой лампы, при чемъ мы по возможности руководились принципомъ равныхъ экспозицій въ равныя времена на различныхъ разстояніяхъ, вмѣсто экспозицій различной продолжительности на неизмѣнномъ разстояніи.

Уэлсу Кэмпбеллю были поручены метеорологическія наблюденія въ лагерѣ. Посредствомъ наблюденій съ секстантомъ мы опредѣлили широту и время, и, перенеся нашъ хронометръ въ Кіевскую обсерваторію, установили долготу; такимъ образомъ, мы нашли географическія координаты нашего лагеря на дачѣ Лавровскаго:

долгота 2 ч. 3 м. 5 с., 5 къ В. отъ Гринвича;

широта $+50^{\circ} 30' 24''$.

Профессоръ Фогель, директоръ университетской обсерваторіи въ Кіевѣ, любезно сравнилъ показаніе нашего хронометра съ точнымъ Кіевскимъ временемъ.

Вскорѣ послѣ того, какъ мы устроились, стало очевиднымъ, что шансы на успѣхъ 21 (8) августа очень, очень малы. Въ своемъ докладѣ о состояніи погоды во время нашего пребыванія Уэлльсъ Кэмпбелль пишетъ слѣдующее:

„Изъ тридцати пяти дней, проведенныхъ экспедиціей на станціи, только десять могли считаться въ общемъ благопріятными для астрономическихъ наблюденій въ 2 ч. 47 м. пополудни, но и въ эти дни условія были неудовлетворительны. Ни одинъ изъ этихъ тридцати пяти дней не былъ совершенно безоблачнымъ въ тотъ часъ, на который приходилось затмѣніе. Обычно же, если вблизи не было бури, состояніе погоды было слѣдующее: около 10 часовъ до полудня на ясномъ небѣ появлялись кучевыя облака, которыя неизмѣнно нарастали и достигали максимума примѣрно въ 8/10 между двумя и тремя часами пополудни. Затѣмъ облака уменьшились и къ закату исчезали; ночи были безоблачны“.

О совершенно такомъ же положеніи дѣлъ намъ говорятъ отчеты наблюдателей въ Минскѣ, Феодосіи и въ другихъ мѣстахъ по линіи полного солнечнаго затменія, рассматривая же метеорологическія записи за послѣдніе десять лѣтъ, можно убѣдиться, что такія именно условія и являются правиломъ для лѣта на западѣ Россіи. Что этотъ фактъ, имѣющій столь выдающееся и даже роковое значеніе для наблюдателей затменія, — а именно почти точное совпаденіе дневного максимума облачности со временемъ затменія, — не былъ отмѣченъ и сообщенъ наблюдателямъ, подготовлявшимъ экспедицію, является, повидимому, необъяснимымъ упущеніемъ. Мы не преувеличимъ, если скажемъ, что Ликская экспедиція не была бы вовсе послана, если бы этотъ важный фактъ былъ намъ извѣстенъ заранее.

19-го и 29-го господствовала бурная погода, и „хвостъ“ этого циклона, по счастью оставившій ясную погоду въ Швеціи и Ригѣ 21-го, прошелъ надъ нами какъ разъ во время затменія. Солнца во время затменія совершенно не было видно, и невозможно было произвести никакихъ наблюденій. Десять минутъ спустя можно было кое-что видѣть черезъ просвѣтъ въ облакахъ, а часъ спустя небо въ области вокругъ солнца совершенно прояснилось. Въ теченіе пятнадцати минутъ послѣ перваго контакта температура падала неправильно, а затѣмъ стала понижаться равномерно вплоть до двѣнадцати минутъ послѣ конца. Полное паденіе температуры составило $2^{\circ},6$ Ц. Во время затменія скорость паденія не возросла замѣтно. Затменіе было у насъ очень темнымъ, вѣроятно, вслѣдствіе густыхъ облаковъ. У города Минска Джонсъ (Jones) и Давидсонъ (Davidson) получили превосходные результаты, благодаря ясному промежутку на облачномъ небѣ. Въ Крыму же д-ръ Перренъ (Perrin) и профессоръ Ньюэлль (Newall), наоборотъ, имѣли несчастье попасть на облако между двумя ясными областями и не получили никакихъ результатовъ. Однако, неподалеку нѣкоторые небольшіе отряды въ Крыму попали на участки съ яснымъ небомъ вокругъ солнца во время затменія и произвели успѣшныя наблюденія.

Около десяти дней послѣ того, какъ началась жизнь въ нашемъ лагерѣ, въ Россіи была объявлена всеобщая мобилизація. Никогда мы не забудемъ длинной процессіи крестьянскихъ телѣгъ, потянувшейся рано утромъ черезъ дачу; то запасные нашего маленькаго городка отправлялись на сборный пунктъ. Священники со сверкающими иконами и хоругвями давали имъ напутственное благословеніе. Сцены прощанія съ женами и дѣтьми раздирали душу. Эти крестьянки, которыя остались собирать жатву на своихъ маленькихъ надѣлахъ, переживали трагедію, и мы представляли себѣ, что такую же трагедію въ это же самое время несомнѣнно переживаютъ сотни миллионъ людей во всѣхъ концахъ Европы. Затѣмъ быстро последовали одно за другимъ объявленія войнъ, вовлекшихъ Европу въ катастрофу, которая за полгода передъ тѣмъ не могла бы померещиться самой необузданной фантазіи романиста. Хотя Кіевъ представляет собою одинъ изъ главныхъ мобилизационныхъ центровъ, тѣмъ не менѣе военное положеніе не вызвало матеріальныхъ перемѣнъ въ жизни города, и на нашей спокойной дачѣ мы не испытывали никакихъ

серьезныхъ затрудненій, а лишь кое какія мелкія непріятности. Та часть русской мобилизаціи, свидѣтелями которой намъ пришлось быть, импонировала намъ своимъ основательнымъ дѣловымъ характеромъ. Когда мы уѣзжали мѣсяць спустя послѣ объявленія Германіей войны, черезъ Бровары еще проѣзжали ежедневно громаднѣйшіе военные поѣзда, а раньше ихъ было еще больше. Сообщение между Броварами и Кіевомъ сдѣлалось болѣе затруднительнымъ и неправильнымъ. Весь газолинъ былъ забранъ властями, и трамваю, который и до того не отличался особенной надежностью, пришлось перейти на керосинъ; кромѣ того, большой цѣпной Александровскій мостъ черезъ Днѣпръ часто бывалъ запертъ цѣлыми часами, когда проходили войска или безконечныя батареи тяжелой артиллеріи. Когда наши русскіе помощники должны были поѣхать въ лагерь для предварительной репетиціи, мы захотѣли отвезти ихъ къ намъ на автомобилѣ, но всѣ автомобили были забраны для военныхъ цѣлей, и въ силу объявленія военного начальства частнымъ лицамъ запрещалось ѣздить на автомобиляхъ по улицамъ Кіева безъ особаго на то разрѣшенія комманданта. Не обошлось у насъ и безъ осложненій, такъ сказать, „международнаго“ характера, возникшихъ изъ-за нашей кухарки, которой мы очень дорожили. Она родилась въ Берлинѣ, но такъ долго жила въ Россіи, что разучилась говорить по-нѣмецки. Писать она не умѣла ни по-русски, ни по-нѣмецки и, вообще, представляла собой весьма безобидное существо. Но постановленіе, что всѣ германскіе и австрійскіе подданные подлежатъ надзору полиціи или аресту, не допускало никакихъ исключеній. Арестъ этой дѣятельной особы былъ настолько чувствителенъ для нашей домашней жизни, что мы и наши русскіе друзья пустили въ ходъ все наше вліяніе и черезъ четыре дня наша кухарка благополучно вернулась въ лагерь къ нашему всеобщему ликованію. Вообще, власти относились къ намъ съ большимъ вниманіемъ, а маленькія непріятности, которыя намъ пришлось испытать, были вызваны исключительно военнымъ положеніемъ, и при обычныхъ условіяхъ безусловно не имѣли бы мѣста. Германскимъ экспедиціямъ въ Феодосію запретили поставить инструменты; пожилые участники ихъ должны были немедленно выѣхать; д-ра Фрейндлихъ (Freundlich) и Цургелленъ (Zurhellen), посланные Берлинской обсерваторіей вмѣстѣ со своимъ механикомъ Мешо (Méschau), какъ резервисты нѣмецкой арміи, были арестованы и теперь, вѣроятно, содержатся въ качествѣ военно-плѣнныхъ гдѣ-нибудь въ приволжскомъ краѣ *).

У насъ не было совершенно основаній опасаться какихъ-либо дѣйствій со стороны простыхъ и добродушныхъ русскихъ крестьянъ. Тѣмъ не менѣе, губернаторы Кіевскій и Черниговскій и Кіевскій

*) Мы рады, что можемъ здѣсь опровергнуть этотъ слухъ, дошедшій до насъ, когда мы были въ Россіи. Согласно сообщенію въ ноябрьскомъ выпускѣ „Sirius'a“, семь младшихъ членовъ различныхъ нѣмецкихъ экспедицій были задержаны въ Одессѣ; съ ними хорошо обращаются, и они пользуются свободой передвиженія по городу; они только не въ правѣ безъ разрѣшенія мѣнять своей квартиры, но, вообще, къ нимъ относятся отнюдь не какъ къ военно-плѣннымъ. Изъ другого источника мы узнали, что д-ръ Прингсгеймъ (Pringsheim) „арестованъ“ въ Австраліи и содержится на еще болѣе льгот-

митрополитъ выпустили краткія и вразумительныя объявленія на тотъ случай, если бы простой народъ по своему невѣжеству вздумалъ искать связь между войной, солнечнымъ затмѣніемъ и американской экспедиціей. Исправникъ, играющій въ нашемъ уѣздѣ не малую роль, рѣшилъ, что и онъ съ своей стороны долженъ сдѣлать то же самое дать объявленіе. Мы сохранили на память его объявленіе, въ которомъ онъ предлагаетъ въ день затмѣнія держать дѣтей дома и не выпускать скотъ на поле.

Такъ какъ желѣзныя дороги не принимали вовсе частныхъ грузовъ, то мы не знали, какъ намъ поступить съ нашими инструментами. Изъ этого затрудненія мы вышли благодаря любезному содѣйствію генерала Никольскаго, позаботившагося о перевозкѣ нашихъ инструментовъ изъ Кіева по желѣзной дорогѣ въ Пулковскую Обсерваторію, гдѣ ихъ любезно принялъ на храненіе директоръ г. Баклундъ. Хранятся ли еще наши инструменты въ обсерваторіи или они уже отосланы черезъ Владивостокъ и Тихій океанъ, намъ неизвѣстно.

Вопросъ относительно возвращенія домой мы стали обсуждать серьезно еще за двѣ недѣли передъ тѣмъ, какъ мы покинули наблюдательную станцію. Еще при отъѣздѣ изъ Америки экспедиція приобрѣла обратные желѣзнодорожные билеты черезъ Берлинъ, Парижъ и Лондонъ; но теперь эти билеты, понятно, не имѣли силы. Путь на Одессу и Константинополь мы исключили, такъ какъ русскіе со дня на день ожидали объявленія Турціей войны. Прямой путь изъ Кіева въ Петроградъ при случайностяхъ военного времени былъ весьма не надеженъ, и, кромѣ пути черезъ Сибирь, у насъ былъ только одинъ маршрутъ — на Москву, Петроградъ и Финляндію. Мы опасались, что путешествіе будетъ очень продолжительнымъ и, можетъ быть, весьма труднымъ. Изъ Кіева въ Москву шелъ только одинъ пассажирскій поѣздъ въ день, и ни деньгами, ни протекціей нельзя было заручиться мѣстомъ въ этомъ большомъ, медленномъ, биткомъ набитомъ поѣздѣ. Оказалось, однако, что эта часть нашего обратнаго путешествія была единственной дѣйствительно тяжелой; хотя отъ сюрпризовъ мы не могли обезпечить себя до самаго конца пути, но за то, начиная съ Москвы, уже можно было пользоваться комфортомъ. Изъ Москвы мы поѣхали въ Петроградъ, гдѣ мы провели два дня; раньше мы не могли отсюда уѣхать вслѣдствіе передвиженія войскъ и уменьшенія числа поѣздовъ. Мы рѣшили возможно скорѣе отправиться въ Лондонъ, отчасти вслѣдствіе слуховъ, что почти всѣ Атлантическіе

ныхъ условіяхъ. Онъ пользуется свободой передвиженія по всему матеріку, и австралійскіе ученые повысили ему положенное содержаніе въ 450 фунт., чтобы доставить ему полный комфортъ и сдѣлать пріятнымъ это вынужденное пребываніе на чужбинѣ.

Такъ какъ названные нѣмецкіе астрономы — резервисты, то задержаніе ихъ въ Россіи является вполне натуральнымъ. Нужно добавить, что общее распоряженіе о задержаніи всѣхъ германскихъ и австрійскихъ подданныхъ было дано лишь послѣ того, какъ русское общественное мнѣніе было крайне возмущено разсказами о грубомъ и жестокомъ обращеніи съ русскими подданными, застигнутыми войной въ различныхъ нѣмецкихъ и австрійскихъ курортахъ.

пассажирскіе пароходы заняты перевозкой войскъ, но, главнымъ образомъ отъ того, что въ каждой части нашего пути (исключая Швецію и Норвегію) невозможно было получить надежныхъ свѣдѣній о возможности проѣзда черезъ ближайшую слѣдующую линію. Для насъ важно было не останавливаться, а двигаться впередъ. Кромѣ облачнаго неба въ день 21-го августа, мы очень сожалѣли еще о томъ, что не успѣли посѣтить Пулковской обсерваторіи и увидѣть нашихъ добрыхъ друзей въ Стокгольмѣ. Проф. Баклундъ съ супругой и проф. Бѣлопольскій были настолько внимательны, что пріѣхали въ Петроградъ повидаться съ нами и помочь намъ. Намъ очень пріятно выразить нашу признательность проф. Баклунду, оказавшему нашей экспедиціи весьма дружеское вниманіе и содѣйствіе. Мы весьма благодарны также за любезное вниманіе Россійской Императорской Академіи Наукъ.

Изъ Петрограда мы выѣхали вмѣстѣ съ Кордовскими астрономами Перреномъ и Мульвеемъ (Mulvey), которые были въ Θεодосіи, и съ Джонсомъ и Давидсономъ изъ Гринвича, которые были въ Минскѣ. Проѣздомъ черезъ Финляндію мы остановились на полъдня въ финскомъ промышленномъ центрѣ, замѣчательномъ своей чистотой. Отсюда мы поѣхали въ Раумо (Финляндію), гдѣ сѣли на пароходъ, идущій въ Стокгольмъ. На этомъ пути пассажиры дважды должны были по приказанію властей спуститься подъ палубу, когда пароходъ пробирался черезъ укрѣпленные проходы вдоль Шведскаго берега. Младшій членъ нашей экспедиціи съ характерной для американцевъ страстью къ сильнымъ ощущеніямъ, часто выражалъ надежду увидѣть нѣмецкій крейсеръ, — желаніе, котораго отнюдь не раздѣляли наши англійскіе коллеги.

Проведя пріятный день въ Христіаніи, экспедиція отправилась въ Бергенъ и оттуда пароходомъ въ Ньюкестль (въ Англію). Въ этомъ плаваніи спасательныя шлюпки могли понадобиться каждую минуту, но, къ счастью, мы не наткнулись на мину и съ великой радостью достигли англійскаго берега; въ Англіи для посторонняго наблюдателя жизнь текла совершенно нормальнымъ, обычнымъ путемъ. Брѣшъ, быстро проѣхавъ черезъ Англію, успѣлъ какъ разъ захватить пароходъ, на которомъ имъ было пріобрѣтено мѣсто, а Дугласъ и Кеннетъ Кэмпбелль, которые не могли добраться въ Роттердамъ къ своему пароходу, испытали новое приключеніе.

Остальные участники экспедиціи не могли получить мѣсто на пароходъ раньше срока, на который они пріобрѣли билеты въ мартѣ, провели очень пріятно двѣ недѣли въ Лондонѣ, и 30-го сентября прибыли въ Бостонъ, счастливые, что вернулись, наконецъ, въ свою страну.

О нѣкоторыхъ случаяхъ относительнаго движенія.

Н. С. Васильевъ.

Въ настоящей статьѣ я имѣю въ виду остановиться на явленіяхъ относительнаго движенія и относительнаго покоя не только на тѣхъ, о которыхъ мы читаемъ и слышимъ, каковы, напримѣръ, отклоненіе падающихъ тѣлъ къ востоку, отклоненіе артиллерійскихъ снарядовъ вправо въ сѣверномъ полушаріи, въ южномъ полушаріи — влѣво, маятникъ Фуко, равновѣсіе тяжелой точки вблизи земной поверхности и т. д., которыхъ мы не въ состояніи наблюдать безъ особыхъ приспособленій, но и на такихъ, съ которыми намъ приходится встрѣчаться и отъ которыхъ даже иногда терпѣть, каковы: явленія въ случаѣ движенія по палубѣ корабля во время качки, движеніе внутри вагона трамвая при движеніи его на закругленіяхъ, подъемъ и опусканіе въ клѣти въ шахту и т. п.

Касаясь упомянутыхъ явленій, мы будемъ говорить о нихъ и разбираться въ нихъ постольку, поскольку можно будетъ сдѣлать это, не нарушая элементарности изложенія.

§ 1. Зависимость между скоростями движеній абсолютнаго и относительнаго; зависимость между ихъ ускореніями. Движеніе и покой называются абсолютными, если они рассматриваются по отношенію къ неподвижнымъ предметамъ; движеніе и покой носятъ названіе относительныхъ, если они рассматриваются по отношенію къ тѣламъ, которыя сами находятся въ движеніи. Таковы движеніе и покой на поверхности земли, рассматриваемые по отношенію къ ней, движеніе и покой на палубѣ корабля, находящагося въ движеніи. Въ природѣ нѣтъ неподвижныхъ предметовъ, поэтому абсолютный покой и абсолютное движеніе могутъ быть только воображаемы, въ дѣйствительности ихъ не существуетъ; однако, рассматривать ихъ полезно, такъ какъ ихъ законы проще и въ то же время можно установить правила при соблюденіи которыхъ относительныя движенія могутъ быть рассматриваемы, какъ абсолютныя. Правила эти, можно установить, зная въ каждый моментъ въ теченіе того промежутка времени, за который рассматриваемъ движеніе, либо абсолютное движеніе системъ, относительное движеніе которыхъ отыскиваемъ, либо установивъ соотношеніе между скоростями или ускореніями движеній абсолютнаго и относительнаго. Мы въ дальнѣйшемъ будемъ говорить объ относительномъ движеніи точки по отношенію къ неизмѣняемой системѣ (твердому тѣлу), которую будемъ называть системой сравненія; выше упомянутыя правила перехода отъ относительнаго движенія къ абсолютному выведемъ изъ соотношенія между

ускорениями. Соотношение между ускорениями движений абсолютного и относительного носит название теоремы Кориолиса.

Подъ относительными скоростью и ускорениемъ будемъ подразумѣвать скорость и ускорения движения по относительной траекторіи въ въ предположеніи, что эта траекторія сама неподвижна.

Мы начнемъ съ установленія еще второго соотношенія между скоростями движений абсолютного и относительного, такъ какъ намъ придется имъ пользоваться при выводѣ соотношенія между ускорениями.

Пусть движущаяся точка M въ моментъ t занимаетъ положеніе M въ неизмѣняемой системѣ S , по отношенію къ которой рассматри-

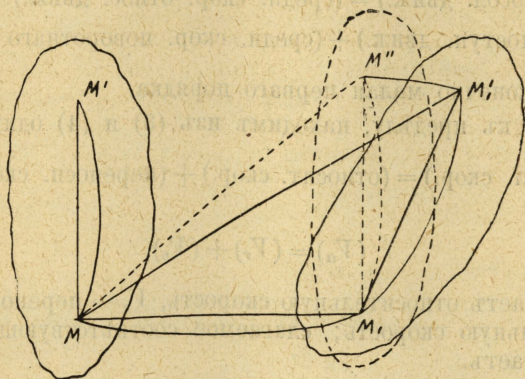


Рис. 1.

ваемъ относительное движение, какъ упомянуто выше, въ моментъ $t + \Delta t$ положеніе M'_1 , Δt бесконечно малое приращеніе времени. Если M' положеніе точки M , если бы система сравненія не перемѣщалась, и M_1 , если бы точка не перемѣщалась въ системѣ, то можно сказать, что хорда перемѣщенія абсолютного движения равна геометрической суммѣ хорды перемѣщенія относительного движения $M_1M'_1$ и хорды перемѣщенія переносного движения MM_1 *), переноснымъ движениемъ называютъ движение точки тѣла S , съ которой движущаяся точка совпадаетъ. Можно сказать, что

$$(MM'_1) = (MM_1) + (M_1M'_1) \quad (1)$$

или

$$(MM'_1) = (MM_1) + (M_1M'') + (M''M'_1), \quad (2)$$

помня, что въ самомъ общемъ случаѣ движение твердаго тѣла соста-

*) Геометрической суммой двухъ векторовъ называютъ діагональ параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ; векторомъ называютъ отрѣзокъ прямой, имѣющій опредѣленные начало, длину, сторону и положеніе въ пространствѣ.

вляется изъ поступательнаго и вращательнаго. Дѣля на Δt всѣ члены равенствъ и (1) и (2) имѣемъ:

$$\left(\frac{MM'_1}{\Delta t}\right) = \left(\frac{MM_1}{\Delta t}\right) + \left(\frac{M_1M'_1}{\Delta t}\right), \quad (3)$$

т. е. средняя скорость абсолютнаго движенія равна средней скорости относительнаго движенія плюсъ средняя скорость переноснаго движенія или

$$\left(\frac{MM'_1}{\Delta t}\right) = \left(\frac{MM_1}{\Delta t}\right) + \left(\frac{M_1M''}{\Delta t}\right) + \left(\frac{M''M'_1}{\Delta t}\right) \quad (4)$$

(средн. скор. абсол. движ.) = (средн. скор. относ. движ.) + (средн. скор. переносн. поступ. движ.) + (средн. скор. поворотнаго движенія),

послѣдняя безконечно малая перваго порядка.

Переходя къ предѣлу, находимъ изъ (3) и (4) одинаково, что

$$(\text{абсол. скор.}) = (\text{относит. скор.}) + (\text{переносн. скор.}) \quad (5)$$

или

$$(V_a) = (V_r) + (V_e), \quad (5')$$

гдѣ V_a обозначаетъ относительную скорость, V_e — переносную скорость, V_r — относительную скорость; слагаемое соотвѣтствующее поворотной скорости исчезаетъ.

Теперь переходимъ къ доказательству теоремы Кориолиса, оно выражаетъ для ускореній соотношение аналогичное (5') и высказывается такъ: абсолютное ускореніе точки равно геометрической суммѣ ускореній относительнаго, переноснаго и дополнительнаго, т. е., если ускореніе относительное, переносное и дополнительное изобразить въ видѣ векторовъ, имѣющихъ общее начало, то абсолютное ускореніе является діагональю параллелепипеда, построеннаго на первыхъ трехъ.

Теорему Кориолиса можно записать такъ:

$$(I_a) = (I_r) + (I_e) + (I'), \quad (6)$$

гдѣ I_a — обозначаетъ абсолютное ускореніе, I_r — относительное ускореніе, I_e — переносное ускореніе и I' — дополнительное ускореніе.

Подъ ускореніемъ будемъ понимать по величинѣ и по направленію предѣлъ, къ которому стремится отношеніе приращенія скорости за промежутокъ времени Δt къ этому промежутку при приближеніи его къ нулю. Предполагаемъ, что такой предѣлъ существуетъ.

Планъ разсужденія при доказательствѣ соотношенія (6) будетъ таковъ: 1) доказательство теоремы Кориолиса въ случаѣ, когда система сравненія обладаетъ только поступательнымъ движеніемъ; 2) доказательство теоремы, когда система сравненія обладаетъ вращательнымъ движеніемъ вокругъ опредѣленной оси; 3) доказательство теоремы въ общемъ случаѣ.

§ 2. Случай поступательнаго движенія системы сравненія. Пусть точка во время t занимает положеніе M (см. рис. 2), въ моментъ $t + \Delta t$ она занимает положеніе M'_1 ; соотношение (5') даетъ для момента t

$$(V_a) = (V_r) + (V_e)$$

и для момента $t + \Delta t$

$$(V'_a) = (V'_r) + (V'_e),$$

такъ что приращеніе абсолютной скорости опредѣлится равенствомъ

$$(V_a V'_a) = (V_a K) + (K V'_a)$$

или

$$(V_a V'_a) = (V_e V'_e) + (V_r V'_r). \quad (7)$$

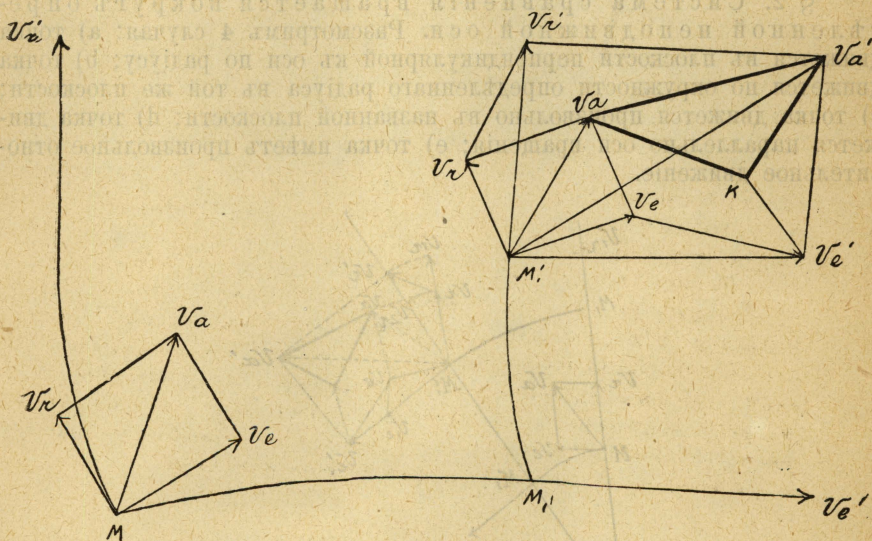


Рис. 2.

Нетрудно замѣтить (см. рис. 2), что $(V_e V'_e)$ есть приращеніе переносной скорости по величинѣ и направленію*), $V_r V'_r$ — приращеніе относительной скорости, $V_a V'_a$ — приращеніе абсолютной скорости. Можно также писать:

$$(V'_a) - (V_a) = (V'_r) - (V_r) + (V'_e) - (V_e).$$

*) Разность двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало, называется векторъ, идущій отъ конца вычитаемаго къ концу уменьшаемаго, что вытекаетъ изъ опредѣленія суммы двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало.

Среднее ускорение опредѣлится равенствомъ:

$$\frac{(V'_a) - (V_a)}{\Delta t} = \frac{(V'_r) - (V_r)}{\Delta t} + \frac{(V'_e) - (V_e)}{\Delta t}.$$

Поэтому можемъ сказать, что среднее абсолютное ускорение равно суммѣ средняго относительнаго ускорения и средняго переноснаго. Переходя къ предѣлу, находимъ:

$$(I_a) = (I_r) + (I_e), \quad (7')$$

гдѣ I_a — обозначеніе абсолютнаго ускоренія, I_r — обозначеніе относительнаго ускоренія, I_e — обозначеніе переноснаго ускоренія. Слѣдовательно, въ случаѣ поступательнаго движенія системы сравненія соотношеніе между ускореніями одинаково съ соотношеніемъ между скоростями, т. е. абсолютное ускореніе равно геометрической суммѣ ускореній относительнаго и переноснаго.

§ 2. Система сравненія вращается вокругъ опредѣленной неподвижной оси. Рассмотримъ 4 случая: а) точка движется въ плоскости перпендикулярной къ оси по радіусу; б) точка движется по окружности опредѣленнаго радіуса въ той же плоскости; в) точка движется произвольно въ названной плоскости; д) точка движется параллельно оси вращенія; е) точка имѣетъ произвольное относительное движеніе.

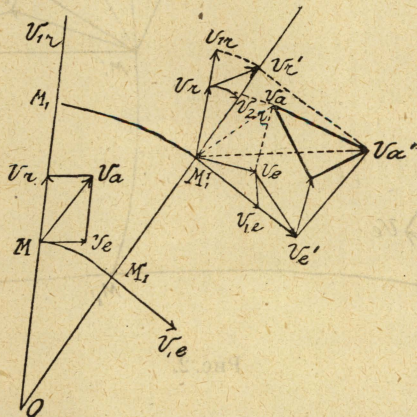


Рис. 3.

Разсмотримъ по порядку эти случаи.

а) Точка движется по радіусу въ плоскости, перпендикулярной къ оси. Опять, какъ и прежде, имѣемъ (см. рис. 3):

$$(V_a) = (V_r) + (V_e), \quad (V'_a) = (V'_r) + (V'_e).$$

Отсюда

$$(V'_a) - (V_a) = (V'_r) - (V_r) + (V'_e) - (V_e).$$

Разность $(V'_r) - (V_r)$, какъ показываетъ рисунокъ, можетъ быть разсматриваема, какъ сумма $(V_r V_{1r})$ и $(V_r V_{2r})$, первое слагаемое есть приращеніе относительной скорости, если бы система сравненія обладала поступательнымъ движеніемъ или была неподвижна, второе вызвано вращеніемъ системы, его называютъ дополнительнымъ; оно равно $V_r \Delta\theta$, если $\Delta\theta$ уголъ поворота системы сравненія. Итакъ, можно написать, что

$$(V'_r) - (V_r) = (V_r V_{1r}) + (V_r \Delta\theta).$$

Также $(V'_e) - (V_e)$ есть сумма приращенія переносной скорости въ точкѣ M , равной $(V_e V_{1e})$ и нѣкотораго дополнительнаго приращенія скорости, вызваннаго смѣщеніемъ движущейся точки по радіусу на Δr и равнаго $\Delta r \left(\frac{d\theta}{dt} + \Delta \frac{d\theta}{dt} \right)$ или $\Delta r (\omega + \Delta\omega)$, гдѣ Δr безконечно малое приращеніе радіуса, а $\frac{d\theta}{dt} + \Delta \frac{d\theta}{dt}$ или $\omega + \Delta\omega$ угловая скорость вращенія въ моментъ $t + \Delta t$, знакъ Δ , поставленный передъ величиной, обозначаетъ безконечно малое приращеніе этой величины. Дополнительное приращеніе скорости, какъ показываетъ рисунокъ, направлено перпендикулярно къ радіусу въ сторону вращенія. Слѣдовательно, можно написать:

$$(V_e V'_e) = (V_e V_{1e}) + [\Delta r (\omega + \Delta\omega)].$$

Поэтому

$$(V'_a) - (V_a) = (V_r V_{1r}) + (V_e V_{1e}) + (V_r \Delta\theta) + [\Delta r (\omega + \Delta\omega)].$$

Для всѣхъ члены на Δt , находимъ:

$$\frac{(V'_a) - (V_a)}{\Delta t} = \frac{(V_r V_{1r})}{\Delta t} + \frac{(V_e V_{1e})}{\Delta t} + \left(V_r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) + \left[\frac{\Delta r}{\Delta t} (\omega + \Delta\omega) \right];$$

переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, находимъ:

$$(I_a) = (I_r) + (I_e) + (2 V_r \omega), \quad (8)$$

если принять во вниманіе, что пред. $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$ и пред. $\frac{\Delta r}{\Delta t} (\omega + \Delta\omega) = \frac{\Delta r}{\Delta t} \omega = V_r \omega$, кромѣ того, что два послѣдніе вектора въ предѣлѣ одинаково направлены по перпендикуляру къ радіусу въ сторону вращенія. Формула (8) можетъ быть такъ высказана словами: абсолютное ускореніе есть геометрическая сумма ускореній относительнаго, переноснаго и дополнительнаго.

б) Точка движется по окружности опредѣленнаго радіуса въ сторону вращенія. Пусть плоскость, въ которой происходитъ движеніе точки M , есть $МOM_1$, O — ось вращенія, которая представляется въ видѣ точки, если смотрѣть сверху, M — начальное положеніе точки въ моментъ t , M'_1 — окончательное положеніе движущейся точки въ моментъ $t + \Delta t$, M' — положеніе движущейся

точки, если бы система сравнения была неподвижной, $\Delta\theta_0$ — угол, на который продвинулась точка въ системѣ по окружности, $\Delta\theta$ — угол, на который повернулась сама система сравнения; V_r , V_e , V_a — относительная, переносная и абсолютная скорости въ моментъ t ; V'_r , V'_e , V'_a — относительная, переносная и абсолютная скорости въ моментъ $t + \Delta t$; рисунокъ показываетъ, что

$$(V_a V'_a) = (V_r V'_r) + (V_e V'_e),$$

такъ какъ

$$(V_{2r} V'_a) = (V_r V'_r), \quad (V_a V_{2r}) = (V_e V'_e).$$

$(V_r V'_r)$ можно представить, какъ сумму $(V_r V_{1r})$ и $(V_{1r} V'_r)$ и также $(V_e V'_e)$, какъ сумму $(V_e V_{1e})$ и $(V_{1e} V'_e)$, при чемъ

$$M'_1 V_{1e} = M'_1 V'_{1e}, \quad M'_1 V_{1r} = M'_1 V'_{1r}.$$

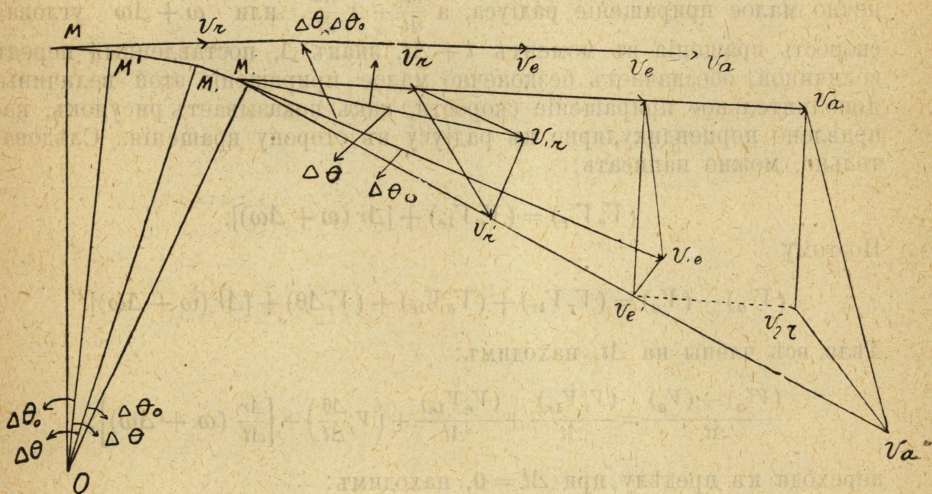


Рис. 4.

Поэтому можно написать:

$$(V_a V'_a) = (V_e V_{1e}) + (V_r V_{1r}) + (V_{1e} V'_e) + (V_{1r} V'_r).$$

Если всѣ члены равенства раздѣлимъ на Δt , получимъ соотношеніе между средними ускореніями

$$\left(\frac{V_a V'_a}{\Delta t}\right) = \left(\frac{V_e V_{1e}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{V_r V_{1r}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{V_{1e} V'_e}{\Delta t}\right) + \left(\frac{V_{1r} V'_r}{\Delta t}\right).$$

Переходимъ къ предѣлу при Δt , равномъ нулю; первая часть даетъ (I_a) , первый членъ второй части равенъ (I_e) , второй — (I_r) ; третій и четвертый представляютъ предѣлы выражений:

$$\text{пред.} \left(V_{1e} \frac{\Delta\theta_0}{\Delta t}\right) \text{ и пред.} \left(V_{1r} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right).$$

Но

$$\text{пред.} \left(V_{1e} \frac{\Delta \theta_0}{\Delta t} \right) = \text{пред.} V_{1e} \cdot \text{пред.} \frac{\Delta \theta_0}{\Delta t} = r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta_0}{dt} = V_r \omega.$$

$$\text{пред.} \left(V_{1r} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \text{пред.} V_{1r} \cdot \text{пред.} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d\theta}{dt} = V_r \omega.$$

Оба послѣднія ускоренія направлены по радіусу къ центру, поэтому будемъ имѣть, какъ и прежде,

$$(I_a) = (I_r) + (I_e) + (2 V_r \omega).$$

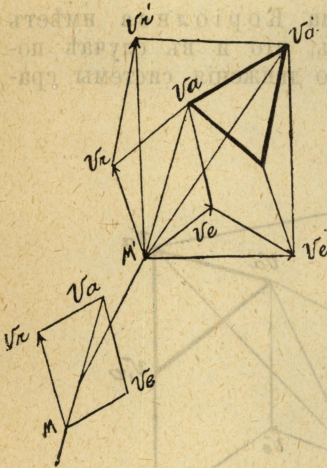


Рис. 5.

с) Точка движется какънибудь въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія. Пусть O — ось вращенія, M — положеніе движущейся точки въ моментъ t , M' — положеніе въ моментъ $t + \Delta t$. Произведя, какъ и раньше, построение приращенія абсолютной скорости, найдемъ:

$$(V_a V'_a) = (V_r V'_r) + (V_e V'_e).$$

Относительное перемѣщеніе точки можно считать составившимся изъ перемѣщенія вдоль радіуса и по перпендикуляру къ нему. Поэтому на основаніи а) и б) можно сказать, что и въ этомъ случаѣ

$$(I_a) = (I_r) + (I_e) + (I'),$$

гдѣ (I') дополнительное ускореніе составитъ какъ геометрическая сумма дополнительныхъ ускореній, соответствующихъ случаямъ а) и б), именно (см. рис. 6):

$$(I') = (2 V'_r \omega) + (2 V''_r \cdot \omega),$$

первое направлено по перпендикуляру къ радіусу въ сторону вращенія, второе — по радіусу къ центру вращенія. Выполнивъ построеніе, приходимъ къ заключенію, что

$$(I') = 2\omega [(V'_r) + (V''_r)] = 2\omega V_r$$

направлено по перпендикуляру къ полной относительной скорости V въ сторону вращенія.

д) Точка движется параллельно оси вращенія. Въ этомъ случаѣ имѣемъ для положеній M и M' , соответствующихъ моментамъ t и $t + \Delta t$, относительныя скорости, параллельныя оси вращенія, переносныя же скорости направлены подъ угломъ. Вращеніе не измѣняетъ относительной скорости, переносная же скорость получаетъ то же приращеніе, которое получила бы точка M въ моментъ

$t + \Delta t$. Данному случаю соответствует рисунок 7-ой, гдѣ обозначенія сохранены тѣ же, что и прежде. Находимъ:

$$(V_a V'_a) = (V_e V'_e) + (V_r V'_r),$$

дополнительнаго приращенія скорости не возникнетъ. Изъ написаннаго уравненія находимъ, что среднее ускореніе равно геометрической суммѣ средняго относительнаго ускоренія и средняго переноснаго и затѣмъ

$$(I_a) = (I_r) + (I_e),$$

т. е. теорема Кориолиса имѣетъ тотъ же видъ, что и въ случаѣ поступательнаго движенія системы сравненія.

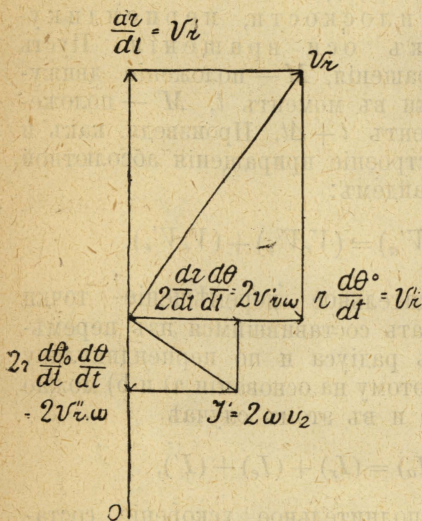


Рис. 6.

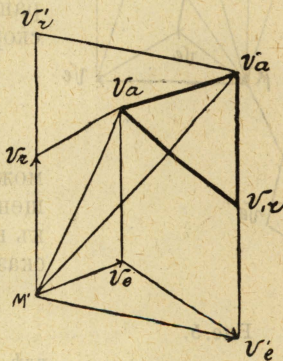


Рис. 7.

е) Точка имѣетъ произвольное движеніе по отношенію къ системѣ сравненія, которая вращается вокругъ опредѣленной оси. Разсмотримъ точку въ положеніяхъ M и M' , соответствующихъ моментамъ t и $t + \Delta t$, мы можемъ, относительное перемѣщеніе разложить по тремъ направленіямъ: 1) параллельному оси вращенія; 2) перпендикулярному къ оси вращенія; 3) перпендикулярному къ этимъ двумъ направленіямъ.

Теорема Кориолиса будетъ имѣть то же самое выраженіе, что и раньше. Дополнительное ускореніе будетъ вызываться составляющей относительнаго перемѣщенія, перпендикулярной къ оси вращенія. Поэтому въ выраженіе дополнительнаго ускоренія войдетъ только проекція относительной скорости на плоскость перпендикулярную къ оси вращенія и она будетъ имѣть видъ:

$$(I') = 2\omega V_r \sin(\omega, V_r),$$

направлено оно перпендикулярно къ V_r и ω въ сторону вращения; иначе говоря, проводимъ черезъ движущуюся точку направление, параллельное оси вращения и относительную скорость V_r , тогда ускореніе перпендикулярно къ этимъ двумъ направлениямъ и направлено въ ту сторону, куда увлекается конецъ V_r вращеніемъ вокругъ оси, проходящей черезъ M .

§ 4. Доказательство теоремы Кориолиса въ общемъ случаѣ. Замѣтимъ, что въ каждый моментъ движеніе системы сравненія можетъ быть составлено изъ поступательнаго движенія одинаковаго съ движеніемъ какой-нибудь точки тѣла и вращательнаго вокругъ оси, проходящей черезъ эту точку.

Убѣдиться въ этомъ можно слѣдующимъ разсужденіемъ. Переходъ изъ одного положенія въ другое можетъ быть достигнутъ поступательнымъ движеніемъ, одинаковымъ съ движеніемъ нѣкоторой точки и вращеніемъ вокругъ оси, проходящей черезъ эту точку. Этотъ переходъ можно разбить на рядъ такихъ же переходовъ, число которыхъ можно неограниченно увеличивать.

Этому общему случаю соответствуетъ такой же рисунокъ, что и раньше. Имѣемъ:

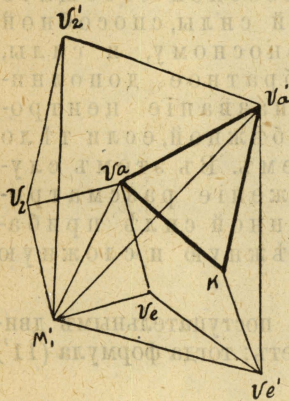


Рис. 8.

$$(V_a V'_a) = (V_r V'_r) + (V_e V'_e). \quad (7)$$

Моментамъ t и $t + \Delta t$ будутъ соответствовать различныя направленія осей вращения, если мы будемъ считать, что система движется поступательно такъ, какъ нѣкоторая точка ея O и вращается вокругъ оси, проходящей черезъ O . Но моменту $t + \Delta t$ будутъ соответствовать

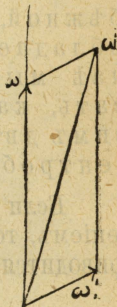


Рис. 9.

ось и вращеніе, безконечно мало разнящіяся отъ оси и вращения, соответствующихъ моменту t . Можно сказать, что вращеніе ω' , соответствующее моменту $t + \Delta t$, есть геометрическая сумма вращеній ω и безконечно малаго вращенія ω'_1 . Поэтому въ членахъ второй части уравненія (7) выдѣлятся члены, дающіе дополнительное приращеніе скорости, обусловленное вращеніемъ системы сравненія. Поэтому дополнительное ускореніе составитъ изъ двухъ членовъ, соответствующихъ вращеніямъ ω и ω'_1 . Дополнительное соответствующее ω имѣетъ видъ: $2\omega V_r \sin(V_r, \omega)$, дополнительное ускореніе соответствующее угловой скорости ω'_1 при $\Delta t = 0$ обращается въ нуль. Поэтому и въ этомъ случаѣ остается въ силѣ соотношеніе

$$(I_a) = (I_r) + (I_e) + [2\omega V_r \sin(V_r, \omega)], \quad (9)$$

гдѣ I' перпендикулярно къ ω и V_r и направлено въ сторону вращенія, если ω провести черезъ M^*).

§ 5. Слѣдствіе изъ теоремы Кориолиса. Инерціонныя силы. Изъ равенства (9) вытекаетъ соотношеніе:

$$(I_r) = (I_a) - (I_e) - (I'). \quad (10)$$

Умножая всѣ члены равенства (10) на массу движущейся точки, находимъ новое соотношеніе

$$(mI_r) = (mI_a) - (mI_e) - (mI') \quad (11)$$

или

$$(mI_r) = (mI_a) + (-mI_e) + (-mI'), \quad (11')$$

т. е. сила способная сообщить относительное ускореніе складывается изъ данной силы, способной сообщить абсолютное ускореніе, воображаемой силы, способной сообщить ускореніе, обратное переносному, и силы, способной сообщить ускореніе, обратное дополнительному; предпоследняя носитъ названіе центробѣжной, послѣдняя—сложной центробѣжной, если тѣло обладаетъ вращательнымъ движеніемъ. Въ этомъ случаѣ мы можемъ относительное движеніе разсматривать, какъ абсолютное, если къ данной силѣ прибавимъ двѣ фиктивные силы—центробѣжную и сложную центробѣжную.

Если система сравненія обладаетъ только поступательнымъ движеніемъ, то дополнительное ускореніе I' отпадаетъ; тогда формула (11') приводится къ

$$(mI_r) = (mI_a) + (-mI_e), \quad (11'')$$

т. е. въ случаѣ поступательнаго движенія системы сравненія сила, способная сообщить относительное ускореніе, складывается изъ данной силы, способной сообщить абсолютное ускореніе, и воображаемой силы, способной сообщить ускореніе, обратное переносному.

Замѣтимъ, что относительное движеніе можетъ быть свободнымъ и несвободнымъ, такъ напримѣръ, если тяжелая точка брошена наклонно къ горизонту вблизи поверхности земли, мы говоримъ о свободномъ относительномъ движеніи; если точка движется, напримѣръ, по поверхности земли, мы говоримъ о несвободномъ относительномъ движеніи, въ этомъ случаѣ мы будемъ считать, что движеніе земли оказываетъ вліяніе на движеніе точки, но обратное дѣйствіе, хотя и существуетъ, не можетъ замѣтнымъ образомъ измѣнить движенія земли.

*) Обращаемъ вниманіе читателя на элементарное доказательство теоремы Кориолиса въ статьѣ проф. Н. Шиллера „Элементарная теорія относительнаго движенія“. Кіевъ, 1895.

§ 6. Примѣръ относительнаго покоя. Примѣромъ относительнаго покоя можетъ служить покой относительно опускающейся или поднимающейся въ шахтѣ клѣти. Уравненіе (11') въ данномъ случаѣ даетъ:

$$O = (mI_a) + (-mI_e) + R, \quad (12)$$

т. е. имѣемъ равновѣсіе между вѣсомъ точки массы m и силы обратной той, которая сообщаетъ клѣти поступательное движеніе, отнесенной къ массѣ разсматриваемой матеріальной точки, кромѣ того реакціи пола клѣти.

При началѣ опусканія клѣти человѣкъ, находящійся въ ней, будетъ чувствовать, что его вѣсъ уменьшился; при замедленіи на днѣ шахты будетъ обратное явленіе, ему будетъ казаться, что вѣсъ его увеличивается на силу, способную сообщить его тѣлу ускореніе, обратное ускоренію клѣти. Такъ какъ таковы же условія при подъемѣ со дна шахты, то наблюдателю будетъ казаться при опусканіи на дно, что онъ поднимается. Когда при подъемѣ клѣть достигаетъ верха и начинаетъ замедлять движеніе, наблюдателю должно казаться, что онъ опускается.

Таковы же должны быть явленія при качкѣ корабля, если наблюдатель находится на оси вращенія и слѣдовательно испытываетъ только поднятіе и опусканіе вверхъ и внизъ. Переходы отъ опусканія къ поднятію и наоборотъ должны быть особенно чувствительны, ибо въ эти моменты переносное ускореніе испытываетъ наибольшее измѣненіе, а поэтому и сила обратная переносной и добавляющаяся къ силѣ тяжести достигаетъ наибольшаго значенія.

Если бы клѣть оборвалась, то относительный вѣсъ человѣка, находящагося въ ней оказался бы равнымъ нулю.

Можно вычислить увеличеніе и уменьшеніе относительнаго вѣса при паденіи и подъемѣ клѣти.

Разсмотримъ еще такой примѣръ. Сколько встряхиваній въ минуту должна дѣлать телѣга, чтобы вдушій на ней подбрасывался въ воздухъ. Полагаемъ, что телѣга совершаетъ въ вертикальномъ направленіи простое гармоническое колебаніе съ амплитудой въ 10 см.

Въ этомъ случаѣ наибольшее значеніе переноснаго ускоренія должно быть больше g , ускоренія силы тяжести. Для простого гармоническаго движенія имѣемъ:

$$x = a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right),$$

гдѣ $2a$ — амплитуда колебанія, T — періодъ, x — разстояніе колеблющейся точки отъ средняго положенія. Ускореніе этого движенія равно второй производной x

$$x'' = -a \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right).$$

Наибольшее числовое значеніе ускоренія $a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$. Слѣдовательно,

$$a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 > g.$$

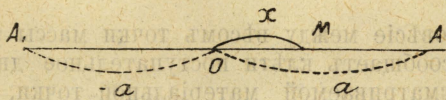


Рис. 10.

Если n — число встряхиваній въ минуту, то $nT = 60$ и

$$5\left(\frac{2\pi \cdot n}{60}\right)^2 > 981.$$

Отсюда

$$n > 133.$$

Число встряхиваній въ минуту должно быть больше 133, въ секунду больше 2.

§ 7. Обстоятельства передвиженія въ вагонѣ трамвая. Если вагонъ движется прямолинейно и равномерно, то $I_e = 0$ и $I' = 0$, поэтому наблюдатель чувствуетъ себя такъ же, какъ въ неподвижномъ вагонѣ; на покачиваніе на рессорахъ мы пока не будемъ обращать вниманія, оно соотвѣтствуетъ качкѣ на кораблѣ, о чемъ рѣчь будетъ впереди. Но вотъ вагонъ ускоряетъ ходъ или вдругъ замедляетъ, возникаетъ относительное ускореніе, обусловленное силой обратной переносной; когда система сравненія движется поступательно ее будемъ называть силой обратной поступательной. При увеличеніи скорости движенія вагона она тянетъ назадъ, при замедленіи — впередъ, такъ какъ эта сила равна $-(mI_e)$, если разсматривается относительное движеніе матеріальной точки массы m . Если имѣемъ тѣло массы M , то она равна $-(MI_e)$ и приложена къ центру тяжести, въ чемъ нетрудно убѣдиться.

Разсмотримъ движеніе вагона на поворотѣ. Какъ видно изъ рисунка 11, кромѣ силъ данныхъ, силы тяжести и реакціи пола возникаютъ три силы. $-(mI_e)$ даетъ происхожденіе двумъ силамъ. Каждая точка вагона обладаетъ двумя составляющими ускоренія вращательной, такъ какъ вагонъ начинаетъ вращаться вокругъ оси ω , и центростремительной, ибо каждая точка движется по окружности. Поэтому сила $-(mI_e)$ соотвѣтствуетъ двумъ воображаемымъ силамъ центробѣжной, равной $m\omega^2 r$, гдѣ m — масса точки, r — разстояніе ея отъ оси вращенія и ω — угловая скорость, и силѣ, обратной той, которая можетъ сообщить вращательное ускореніе, ее будемъ называть силой обратной вращательной, она равна для массы m на разстояніе отъ оси вращенія r выраженію $-mr\omega'$, гдѣ ω' — угловое ускореніе, и направлена по касательной къ траекторіи точки въ сторону обратную движенію; она становится равной нулю, лишь только установится

равномѣрное вращеніе; слѣдовательно, она дѣйствуетъ только при началѣ и концѣ закругленія. Кромѣ того возникаетъ третья сила, называемая сложной центробѣжной, она равна по величинѣ $2mV\omega$ и направлена отъ оси вращенія либо къ ней, смотря по направленію относительной скорости. При условіяхъ, указанныхъ на рисункѣ, она направлена отъ оси вращенія. Эти три силы складываются. При движеніи вагона на закругленіи дѣйствуютъ только двѣ; когда вагонъ переходитъ отъ закругленія на прямолинейный путь, опять дѣйствуютъ всѣ три силы, сила обратная вращательной направлена впередъ.

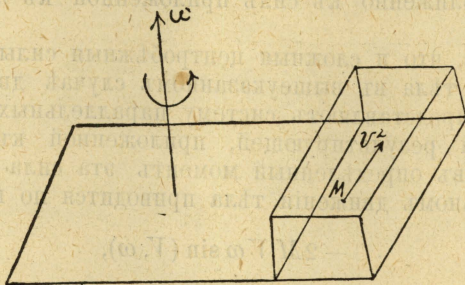


Рис. 11.

Отсюда понятно, почему передвигаясь въ вагонѣ во время движенія его на поворотѣ рискуемъ упасть, въ это время мы подвергаемся валющей и опрокидывающей силѣ, такъ сказать, вдвойнѣ или втройнѣ.

Движеніе вагона не бываетъ вообще равномѣрнымъ; покачиваніе на рессорахъ не всегда столь мало, чтобы не быть замѣтнымъ. Поэтому наблюдатель, стоящій въ вагонѣ будетъ постоянно чувствовать дѣйствіе силъ то толкающихъ впередъ, то тянущихъ назадъ — слѣдствіе замедленія и ускоренія движенія вагона, будетъ также чувствовать толканіе вправо и влево — слѣдствіе дѣйствія силы обратной вращательной, возникающей вслѣдствіе покачиванія вагона вокругъ оси, направленной на длинѣ вагона.

Замѣтимъ, что мы раньше говорили о движеніи точки, теперь говоримъ о движеніи тѣла. Конечно, эти два случая различны. Однако можно показать, что въ томъ случаѣ, когда твердое тѣло вращается вокругъ оси и когда прямая, параллельная оси вращенія и проведенная черезъ центръ тяжести тѣла, является главной осью инерціи*), центробѣжныя силы приводятся къ одной силѣ, приложенной къ центру тяжести, имѣющей направленіе отъ оси вращенія, перпендикулярной къ ней и равной

$$M \omega^2 d,$$

гдѣ M — масса тѣла, ω — угловая скорость и d — разстояніе центра тяжести отъ оси вращенія.

*) Объ осяхъ инерціи въ твердомъ тѣлѣ см. мою статью, напечатанную въ №№ 542 — 543 „Вѣстника“.

Мы не будем останавливаться на доказательствах этого предположения, а отметим частный случай, когда размеры тела малы сравнительно с расстоянием от оси вращения; тогда, полагая расстояния различных точек от оси вращения равными и параллельными, видим, что центробежные силы представляют систему параллельных сил, пропорциональных массам соответствующих частиц тела; такая система сил подобна системе сил тяжести и приводится к одной равнодействующей, проходящей через центр тяжести и равной $M\omega^2 d$. Также в этом случае и сила обратная вращательной приводится приблизительно к силе приложенной к центру тяжести и равной $-M d \omega'$.

Прибавим, что и сложные центробежные силы для различных точек твердого тела в вышеуказанном случае движения, как нетрудно видеть, представляют систему параллельных сил, приводящихся к одной результирующей, приложенной к центру тяжести тела. Так что в определенный момент эта сила при поступательном относительном движении тела приводится по величине к силе

$$-2M V \omega \sin(V, \omega),$$

где M — масса тела, V — относительная скорость, ω — угловая скорость вращения системы сравнения.

Поэтому, говоря о действии сил центробежной и сложной центробежной на тело, мы будем подразумевать действие их на его центр тяжести.

§ 8. Движение по палубе корабля во время качки. Рассмотрим сначала случай боковой качки. Пусть наблюдатель движется по палубе корабля. Во время боковой качки происходит периодическое вращение вокруг оси, проходящей внутри корабля от носа к корме и наоборот, т. е. получаются условия, представленные на чертеже (см. рис. 12), вращение происходит попеременно то в одну сторону, то в другую. Если наблюдатель идет от кормы к носу, то $I' = 0$, следовательно, действуют только сила тяжести, реакция палубы и сила $-(mI_e)$.

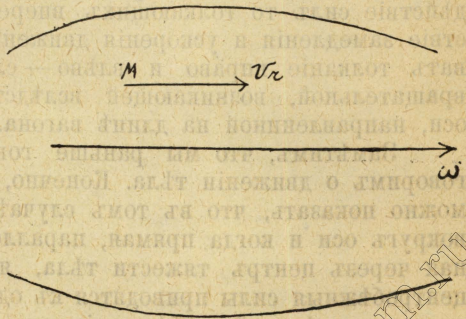


Рис. 12.

Последняя складывается из силы центробежной, равной $m\omega^2 r$ для точки массы m на расстоянии от оси вращения r и при угловой скорости ω , и силы, которая способна сообщить ускорение обратное вращательному, если угловая скорость не постоянна, а это бывает при изменении направления вращения. Так будет потому, что точки твердого тела, находящегося в движении вообще обладают ускорением, которое может быть получено из трех составляющих: поступательного ускорения, вращательного

и центростремительного. Такъ какъ мы полагаемъ, что корабль движется равномерно поступательно, то первая составляющая ускорения выпадаетъ, она оказывала бы свое дѣйствіе, если бы движеніе было неравномернымъ. Центробѣжная сила направлена отъ оси вращенія; сила, способная сообщить движеніе обратное вращательному, ее мы называемъ обратной вращательной, направлена перпендикулярно къ оси вращенія въ сторону обратную вращательному ускоренію, она равна, какъ было показано раньше $m\omega'$, гдѣ ω' — угловое ускореніе. Она измѣняетъ направленіе въ то же время какъ измѣняетъ направленіе угловое ускореніе. Эта сила будетъ бросать гуляющаго то вправо то влѣво и очень чувствительна, если поставить себѣ задачей идти только по прямой линіи, напримѣръ, по опредѣленной дощечкѣ палубы. Она направлена вправо, если корабль начинаетъ вращать влѣво и наоборотъ; пока корабль вращается равномерно равна нулю.

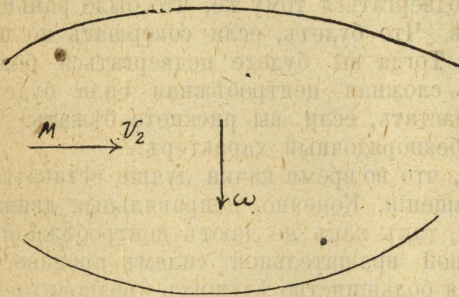


Рис. 13.

Если качка продольная, то имѣемъ условія, представленныя на рис. 13. Въ этомъ случаѣ, кромѣ силы тяжести и реакціи палубы, дѣйствуютъ фиктивные силы $-(mI_e)$ и сложная центробѣжная $-(mI')$; первая, какъ и раньше состоитъ изъ двухъ, одной направленной отъ оси вращенія, центробѣжной, и второй обратной вращательной, направленной перпендикулярно къ оси вращенія либо вверхъ, либо

внизъ. Она дѣйствуетъ при измѣненіи направленія вращенія. Сложная центробѣжная сила перпендикулярна къ V_z и ω , по величинѣ она равна $2mV_z\omega$ и направлена въ сторону, обратную той, куда происходитъ вращеніе конца относительной скорости при вращеніи ω около оси, проходящей черезъ разсматриваемую точку. Такъ, если вы идете къ носу и въ то же время носъ опускается, то сила $-(mI')$ направлена вверхъ, въ то же время центробѣжная сила направлена отъ оси вращенія, сила обратная вращательной равна нулю, если угловая скорость постоянна. Когда угловая скорость приближается къ нулю при опусканіи, она направлена внизъ; когда угловая скорость приближается къ нулю при подниманіи, она направлена вверхъ. Допустимъ, что угловая скорость постоянна до измѣненія направленія вращенія; все происходитъ такъ, какъ если бы кто поднималъ васъ, чтобы лишить точки опоры и въ то же время опрокидываетъ. Когда носъ начинаетъ подниматься, возникаетъ сила обратная вращательной, она увеличиваетъ вашъ вѣсъ до тѣхъ поръ пока не установится постоянная угловая скорость, когда эта сила прекращаетъ дѣйствіе. Если носъ поднимается, а вы направлены все же къ нему, тогда вамъ легче, сложная центробѣжная сила прижимаетъ васъ къ палубѣ, увеличиваетъ вашъ вѣсъ, центробѣжная сила попрежнему валитъ васъ, вы чувствуете себя тверже. Если вы останавливаетесь, сложная центро-

бѣжная сила прекращаетъ свое дѣйствіе; васъ валить сильнѣе, если носъ продолжаетъ подниматься. Если носъ достигаетъ наивысшаго положенія, то центробѣжная сила также прекращаетъ свое дѣйствіе; въ это время начинаетъ дѣйствовать сила, обратная вращательной, она поднимаетъ васъ вверхъ, сильнѣе всего въ этотъ моментъ, палуба опускается, вы чувствуете себя не очень пріятно.

Но вотъ вы пошли обратно, а носъ опускается съ постоянной скоростью, сложная центробѣжная сила прижимаетъ васъ къ палубѣ, увеличиваетъ вашъ вѣсъ, центробѣжная сила валить васъ назадъ, но она убываетъ, такъ какъ вы приближаетесь къ оси вращенія; кромѣ того вы можете парализовать ее наклонившись впередъ; конечно, вамъ труднѣе идти, вы идете въ гору, но за то вы чувствуете почву подъ ногами. Приблизившись къ оси вращенія, вы чувствуете себя въ наибольшей безопасности даже если будетъ измѣняться направленіе вращенія и начнетъ дѣйствовать сила обратная вращательной. Продолжая прогулку къ кормѣ, вы будете подвергаться тому же, что было раньше, но только въ обратномъ порядкѣ. Что будетъ, если совершать по палубѣ неправильныя движенія? Тогда вы будете подвергаться большому риску упасть, такъ какъ сложная центробѣжная сила будетъ предательски измѣняться и возрастать, если вы рискнете бѣжать. То же будетъ, если качка имѣетъ беспорядочный характеръ.

Изъ сказаннаго вытекаетъ, что во время качки лучше оставаться въ покоѣ и поближе къ оси вращенія. Конечно, неправильныя движенія парализуютъ дѣйствіе качки, такъ какъ не даютъ центробѣжной и сложной центробѣжной и обратной вращательной силамъ произвести полное свое дѣйствіе, но кажется большинство ѣдущихъ предпочитаетъ лежать или сидѣть неподвижно; такимъ способомъ мы избавляемся отъ дѣйствія сложной центробѣжной силы, что представляетъ нѣкоторый выигрышъ для самочувствія. О вліяніи подниманія и опусканія сказано раньше. Когда качка не велика, то такъ называемая мертвая зыбь должна оказывать большее вліяніе, чѣмъ беспорядочное волненіе.

Если качки нѣтъ, и пароходъ движется прямолинейно и равномерно, силы обратная поступательной, обратная вращательной, центробѣжная и сложная центробѣжная равны нулю, въ этомъ случаѣ мы чувствуемъ себя, какъ на сушѣ. Но вотъ корабль ускоряетъ ходъ или вдругъ замедляетъ, возникаетъ относительное ускореніе, обусловленное силой ($-mI_e$), при обратномъ поступательномъ ускореніи она тянетъ назадъ, при замедленіи впередъ.

Замѣтимъ, что наиболѣе чувствительными являются силы обратная поступательной и обратная вращательной; при поступательномъ движеніи, напримѣръ, вагона возможны толчки, остановки, измѣненія направленія движенія, которые вызываютъ значительныя измѣненія скоростей; то же надо сказать и о силѣ обратной вращательной, при измѣненіи направленія вращенія, напримѣръ, во время качки на кораблѣ, угловое ускореніе ω можетъ достигать значительныхъ размѣровъ.

§ 9. Примѣръ покоя по отношенію къ поверхности земли. Опредѣлить вліяніе центробѣжной силы, зависящей отъ вращенія земли, на ускореніе силы тя-

жести. Рассмотрим теперь рядъ примѣровъ, въ которыхъ системой сравненія будетъ служить земля. Положимъ, что земля состоитъ изъ однородныхъ концентрическихъ слоевъ, тогда она притягиваетъ материальную точку, находящуюся вблизи ея поверхности, къ центру. Пусть материальная точка M на широтѣ φ подвѣшена на нити и находится въ покоѣ по отношенію къ поверхности земли. Теорема Кориолиса для этого случая даетъ:

$$O = (mI_a) + (-mI_e) + (T),$$

гдѣ T — натяженіе нити. Сравнивая это условіе съ условіемъ абсолютнаго равновѣсія нити

$$(F) + (T) = 0,$$

приходимъ къ заключенію, что наблюдаемый вѣсъ есть сила, равная натяженію T , и обратно направленная, опредѣляемая формулой:

$$(p) = (mI_a) - (mI_e) \quad (13)$$

или

$$(p) = (mg) = (mG) + (m\omega^2 r),$$

гдѣ G — ускореніе вслѣдствіе притяженія точки землей.

Изъ треугольника gMG имѣемъ (рис. 14):

$$(mg)^2 = m^2 G^2 + m^2 \omega^4 r^2 - 2m^2 G \omega^2 r \cos \varphi$$

или, если пренебречь членами, содержащими ω^4 и r замѣнить его значеніемъ $R \cos \varphi$,

$$p = mg = mG \left(1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \varphi}{G} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\left(1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \varphi}{G} \right)^{\frac{1}{2}}$ разложить по Биному Ньютона и ограничиваться вторыми степенями ω , которое равно $\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0,0000729$, то находимъ, что

$$p = mG \left(1 - \frac{\omega^2 R \cos^2 \varphi}{G} \right) = mG - m\omega^2 R \cos^2 \varphi, \quad (13')$$

т. е. приходимъ къ формулѣ, которая опредѣляетъ влияние центробѣжной силы, развивающейся при вращеніи земли, на ускореніе силы тяжести — уменьшеніе силы тяжести пропорціонально квадрату косинуса широты.

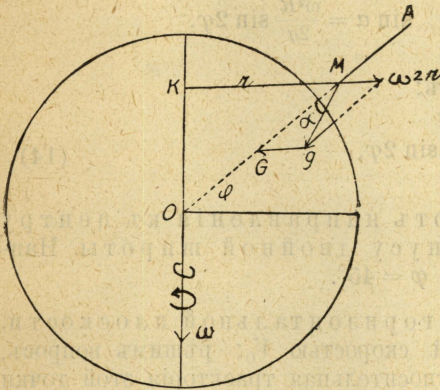


Рис. 14.

Формула (13') показываетъ, что съ увеличеніемъ ω вѣсь тѣла уменьшается; вычисливъ $\frac{\omega^2 R \cos^2 \varphi}{G}$ для экватора, т. е. при $\varphi = 0$, увидимъ, что это выраженіе равно $\frac{1}{17^2}$, т. е. на экваторѣ тѣло не имѣло бы вѣса, если бы земля вращалась въ 17 разъ быстрее.

Изъ треугольника $G M g$ имѣемъ:

$$\frac{\omega^2 r}{\sin \alpha} = \frac{g}{\sin \varphi}, \quad \text{отсюда} \quad \sin \alpha = \frac{\omega^2 R}{2g} \sin 2\varphi.$$

Такъ какъ α мало, то можно писать:

$$\alpha = \frac{\omega^2 R}{2g} \sin 2\varphi, \quad (14)$$

т. е. отклоненіе вертикали отъ направленія къ центру земли пропорціонально синусу двойной широты. Наибольшее значеніе α получаетъ при $\varphi = 45^\circ$.

§ 10. Движеніе точки по горизонтальной плоскости. Пусть точка брошена съ начальной скоростью V_0 ; рѣшимъ вопросъ, прямолинейна или криволинейна относительная траекторія этой точки

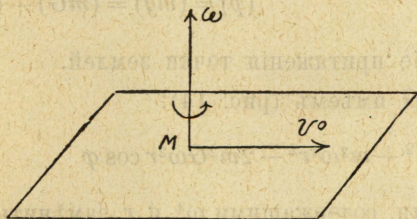


Рис. 15.

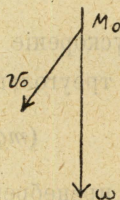


Рис. 16.

и если криволинейна, то куда обращена вогнутостью. Нашего соотношенія $(\vec{I}_r) = (I_a) + (-I_e) + (-I')$ для этого достаточно. Равенство (13) показываетъ, что $(I_a) - (I_e)$ сложится въ ускореніе силы тяжести, направленное по вертикали внизъ, сила обуславливающая ускореніе $(-I')$, какъ и само это ускореніе, направлено перпендикулярно къ ω и V_0 и при томъ въ сторону, обратную вращенію конца V_0 ; движущаяся точка будетъ поэтому отклоняться вправо. Это разсужденіе приложимо ко всякой точкѣ, брошенной въ горизонтальной плоскости въ сѣверномъ полушаріи.

Въ южномъ полушаріи направленіе отклоненія будетъ обратное. Если построить угловую скорость ω и скорость V_0 при началѣ движенія при начальномъ положеніи движущейся точки, то конецъ скорости поворачивается по направленію, указанному стрѣлкой; $(-I')$ напра-

влено обратно, поэтому въ южномъ полушаріи брошенные горизонтально тѣла отклоняются влѣво, если смотрѣть по направленію движенія.

Отсюда вытекаетъ, что, напримѣръ, давленіе на правый рельсъ при движеніи поѣзда въ сѣверномъ полушаріи больше, чѣмъ въ южномъ, въ южномъ полушаріи наоборотъ. Правый берегъ въ рѣкѣ въ сѣверномъ полушаріи подмывается болѣе, чѣмъ южный. Также объясняются многія другія явленія, подходящія подъ этотъ случай.

§ 11. Свободное паденіе тяжелой точки вблизи земной поверхности.

Пусть вблизи земной поверхности брошена тяжелая точка M_0 безъ начальной скорости. Будетъ ли она двигаться по вертикали? Земля вращается съ запада на востокъ, поэтому относительное движеніе можно разсматривать, какъ абсолютное, если къ притяженію земли прибавить силы центробѣжную и сложную центробѣжную. Если бы земля состояла изъ однородныхъ концентрическихъ слоевъ, то притяженіе было бы направлено къ центру, будемъ это предполагать.

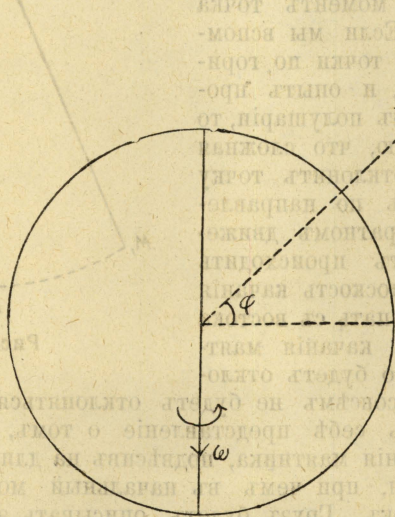


Рис. 17.

Притяженіе вмѣстѣ съ центробѣжной силой даютъ то, что мы называемъ вѣсомъ; эта сила направлена по вертикали внизъ. Пока точка въ покоѣ, дѣйствуетъ только эта сила. Поэтому по крайней мѣрѣ въ началѣ движенія точка движется по вертикали. Пусть въ какой-нибудь моментъ, близкій къ начальному, она имѣетъ скорость V_0 ; если широта мѣста φ и угловая скорость вращенія земли ω , сложная центробѣжная сила $2m\omega V_0 \sin \varphi$ и направлена къ востоку, къ V_0 прибавится составляющая, направленная къ востоку, а вслѣдствіе этого возникаетъ сложная центробѣжная сила, направленная къ югу. Первая пропорціональна 1-ой степени ω , вторая пропорціональна ω^2 . Приходимъ

къ заключенію, что при свободномъ паденіи тяжелой точки она отклонится отъ вертикали къ востоку и къ югу, первое отклоненіе больше второго.

Если точка брошена вертикально вверхъ, то вслѣдствіе измѣнившихся условій отклоненіе произойдетъ къ западу и сѣверу, первое больше второго.

§ 12. Маятникъ Фуко. Пусть вблизи земной поверхности колеблется тяжелая точка M , подвѣшенная въ O . Чтобы не было толчка въ бокъ въ начальный моментъ, мы отведемъ точку изъ положенія равновѣсія, привяжемъ нитью къ неподвижному предмету и послѣ того, какъ все придетъ въ состояніе покоя, пережжемъ нить, точка M начнетъ качаться.

Если нить OM_0 достаточно длинна, уголъ отклоненія будетъ малымъ; часть шаровой поверхности, по которой будетъ происходить движеніе, будетъ мало отличаться отъ плоскости. Пусть въ нѣкоторый моментъ точка имѣетъ скорость V . Если мы вспомнимъ случай движенія точки по горизонтальной плоскости, и опытъ производимъ въ сѣверномъ полушаріи, то придемъ къ заключенію, что сложная центробѣжная сила отклонитъ точку вправо, если смотрѣть по направленію движенія, при обратномъ движеніи отклоненіе будетъ происходить также вправо, т. е. плоскость качанія маятника будетъ отступать съ востока на западъ. Плоскость качанія маятника наиболѣе быстро будетъ отклоняться на полюсахъ, совсѣмъ не будетъ отклоняться на экваторѣ.

Можно составить себѣ представленіе о томъ, какъ поворачивается плоскость качанія маятника, подвѣсивъ на длинной нити грузъ, заставивъ его качаться, при чемъ въ начальный моментъ сообщить слабый толчекъ въ бокъ. Грузъ будетъ описывать эллипсъ, большая ось котораго поворачивается въ сторону движенія. Въ маятникѣ Фуко происходитъ аналогичное движеніе, но эллипсъ поворачивается въ сторону, обратную движенію маятника.

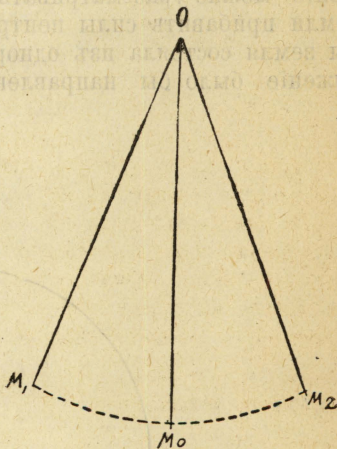


Рис. 18.

ПОЛЕМИКА.

По поводу замѣтки С. Вавилова „Объ одномъ возможномъ выводѣ изъ опытовъ Майкельсона и другихъ“, помѣщенной въ № 634 „Вѣстника“.

К. Шапошникова.

Въ недавно опубликованной замѣткѣ г. Вавилова утверждается, что извѣстный опытъ Майкельсона, служащій главной базой принципа относительности, доказываетъ только то, что абсолютная скорость земли въ неподвижномъ эфирѣ чрезвычайно мала. Въ виду этого, по мнѣнію г. Вавилова, результаты опыта Майкельсона вполне понятны и очевидны сами по себѣ и не требуютъ введенія новыхъ гипотезъ, будь то гипотеза Фитцджеральда-Лоренца о сжатіи тѣлъ при движеніи или гипотеза Эйнштейна, формулируемая принципомъ относительности. Ходъ разсужденій Вавилова слѣдующій: мы знаемъ, что по отношенію къ солнцу земля движется со скоростью 30 км. въ секунду, но не знаемъ абсолютной скорости земли въ неподвижномъ эфирѣ, такъ какъ видимый нами міръ можетъ имѣть свою скорость, которая складываясь съ относительной скоростью земли, даетъ для насъ неизвѣстную величину. Если, такимъ образомъ, мы обозначимъ черезъ u_r скорость земли по отношенію къ солнцу, черезъ u_a скорость солнца по отношенію къ неподвижному эфиру, то абсолютная скорость земли представится въ видѣ геометрической суммы: $\widehat{u} = \widehat{u}_r + \widehat{u}_a$. По мнѣнію г. Вавилова опытъ Майкельсона доказываетъ только, что

$$\widehat{u} = \widehat{u}_r + \widehat{u}_a = 0 \quad (1)$$

Посмотримъ, какое возраженіе можетъ быть приведено противъ послѣдняго вывода.

Пусть въ данный моментъ времени абсолютная скорость земли дѣйствительно равна нулю, т. е. дѣйствительно $\widehat{u} = \widehat{u}_r + \widehat{u}_a = 0$. Ровно черезъ полъ года, когда земля по своей орбитѣ будетъ двигаться въ противоположную сторону ея абсолютная скорость будетъ равна $\widehat{u} = -\widehat{u}_r + \widehat{u}_a$, что согласно съ равенствомъ (1) даетъ:

$$\widehat{u} = 2\widehat{u}_a. \quad (2)$$

Ясно, что при условіи равенства (1) абсолютная скорость земли должна въ продолженіе года непрерывно мѣняться отъ нуля до $2\widehat{u}_a$. Опыты Майкельсона и Морлея подобнаго измѣненія скорости не отмѣтили, хотя и были повторены въ различныя времена года. Въ приборѣ Майкельсона ни разу не были получены тѣ смѣщенія полосъ интерференціи, которыя ожидалось по абсолютной теоріи. Если смѣщеніе полосъ не получается въ данный моментъ, то это можетъ быть объяснено совпаденіемъ: $u_r + u_a = 0$. Но уже черезъ полъ года и ранѣе при повтореніи опыта съ тѣмъ же отрицательнымъ результатомъ.

придется это объяснение отбросить и принять u_a за величину незначительную, потому что только этимъ послѣднимъ ($u_a = 0$) могутъ быть объяснены однообразные результаты опытовъ Майкельсона и Морлея. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ выводу какъ разъ противоположному тому, который дѣлаетъ г. Вавиловъ. За абсолютную скорость земли по отношенію къ эѳиру можно и должно принять ея относительную скорость внутри солнечной системы.

Мысль, высказанная г. Вавиловымъ, не представляетъ изъ себя чего-нибудь новаго въ литературѣ. Съ такимъ, именно, возраженіемъ противъ принципа относительности выступилъ Будде*) въ своемъ докладѣ, читанномъ въ Карлсруэ. Лауе**) опровергъ это мнѣніе Будде, приблизительно, тѣми же соображеніями, которыя приведены мною здѣсь.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 283 (6 сер.) Дано, что периметры правильныхъ n и $n+1$ угольниковъ равны. Вычислить отношеніе площадей этихъ многоугольниковъ и найти предѣлъ этого отношенія при возрастаніи n до безконечности.

И. Коровинъ (Петроградъ).

№ 284 (6 сер.). Доказать, тождество

$$P_{2n} = P_1 P_2 \dots P_{2n-1} C_2^1 C_4^2 C_8^4 \dots C_{2^n}^{2^{n-1}},$$

гдѣ n — нѣкоторое цѣлое положительное число и гдѣ P_m обозначаетъ вообще число перестановокъ изъ m элементовъ, а C_m^k — число сочетаній изъ m элементовъ по k .

Н. С. (Одесса).

№ 285 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2^{5x+1} - 2^{4x+2} - 2^{4x} + 2^{3x+2} + 2^{3x+1} + 2^{2x+2} - 2^{2x+1} - 2^{x+2} - 1 = 0.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

*) E. Budd e. „Phys. Zeitschr.“ 12, 979, 1911.

**) M. Laue. „Phys. Zeitschr.“ 13, 501, 1912, см. часть III.

№ 286 (6 сер.). Доказать, что трехчлен второй степени $ax^2 + bx + c$ съ вещественными коэффициентами, не принимающий ни при какомъ вещественномъ x значенія, равнаго значенію производной этого трехчлена при томъ же значеніи x , не можетъ имѣть вещественныхъ корней.

R.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 210 (6 сер.). Доказать, что частное

$$(1 + 2^a + 3^a + \dots + n^a) : (1 + 2 + 3 + \dots + n),$$

гдѣ a и n — цѣлыя положительныя числа, выражается цѣлымъ относительно n многочленомъ. Найти высшій членъ этого многочлена.

Предложенныя для доказательства утвержденія вытекаютъ непосредственно изъ рекуррентной формулы, служащей для вычисленія суммъ одинаковыхъ степеней ряда чиселъ $1, 2, \dots, n$. Напомнимъ одинъ изъ способовъ полученія вышеупомянутой формулы. Полагая вообще

$$1 + 2^a + 3^a + \dots + n^a = s_a,$$

запишемъ рядъ тождествъ

$$2^a = (1+1)^a, \quad 3^a = (2+1)^a, \dots, \quad n^a = [(n-1)+1]^a, \quad (n+1)^a = (n+1)^a$$

въ видѣ

$$2^a = 1^a + C_a^1 \cdot 1^{a-1} + C_a^2 \cdot 1^{a-2} + \dots + C_a^{a-1} \cdot 1 + 1,$$

$$3^a = 2^a + C_a^1 \cdot 2^{a-1} + C_a^2 \cdot 2^{a-2} + \dots + C_a^{a-1} \cdot 2 + 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^a = n^a + C_a^1 \cdot n^{a-1} + C_a^2 \cdot n^{a-2} + \dots + C_a^{a-1} \cdot n + 1,$$

гдѣ C_a^p обозначаетъ вообще число сочетаній изъ n по p . Сложимъ эти равенства и вычтемъ отъ обѣихъ частей сумму $2^a + 3^a + \dots + n^a$. Тогда получимъ, что

$$(n+1)^a = C_a^1 s_{a-1} + C_a^2 s_{a-2} + \dots + C_a^{a-1} s_1 + (n+1),$$

откуда

$$C_a^1 s_{a-1} = (n+1)^a - (n+1) - C_a^2 s_{a-2} - C_a^3 s_{a-3} - \dots - C_a^{a-1} s_1,$$

или мѣняя a на $a+1$

$$(1) \quad (a+1) s_a = [(n+1)^{a+1} - (n+1)] - C_{a+1}^2 s_{a-1} - C_{a+1}^3 s_{a-2} - \dots - C_{a+1}^{a-1} s_2 - C_{a+1}^a s_1.$$

Формула суммы членов арифметической прогрессии дает возможность заключить, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Итакъ

$$(2) \quad s_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

а затѣмъ формула (1) даетъ возможность при $a=2$ вычислить s_2 , такъ какъ s_1 уже извѣстно, затѣмъ, при $a=3$, вычислить s_3 съ помощью s_1 и s_2 и т. д., при чемъ s_1 выражается полиномомъ второй, а s_2 — полиномомъ третьей степени, относительно n , а именно

$$(3) \quad s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

вообще же индуктивнымъ путемъ легко доказать, что s_a есть полиномъ $(a+1)$ -ой степени относительно n . Дѣйствительно, это утверждение вѣрно при $a=1$ и $a=2$. Если же допустить, что оно вѣрно для суммъ s_1, s_2, \dots, s_a то въ правой части формулы (1) всѣ члены кромѣ высшаго члена n^{a+1} разложения $(n+1)^{a+1}$, содержатъ n въ степени, не большей a , а потому n^{a+1} есть высшій членъ правой части формулы (1). Итакъ, произведение $(a+1)s_a$ есть многочленъ $(a+1)$ -ой степени относительно n съ коэффициентомъ 1 при высшемъ членѣ, откуда, дѣля равенство (1) на $a+1$, выводимъ, что s_a есть также многочленъ $(a+1)$ -ой степени относительно n съ коэффициентомъ $\frac{1}{a+1}$.

Такимъ образомъ

$$(4) \quad s_a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + c_1 n^a + c_2 n^{a-1} + \dots + c_a n + c_{a+1},$$

гдѣ — при данномъ a , c_1, c_2, \dots, c_{a+1} суть нѣкоторыя вполне опредѣленные числа. Теперь докажемъ, что многочленъ, которымъ выражается s_a , т. е. правая часть формулы (4), дѣлится на многочленъ s_1 , т. е. $[(\text{см. 2})]$ на многочленъ $\frac{n(n+1)}{2}$. Дѣйствительно, выражение $(n+1)^a - 1$ дѣлится на разность $(n+1) - 1$, т. е. на n , а потому, обозначая цѣлый многочленъ, полученный отъ дѣленія выраженія $(n+1)^a - 1$ на n , черезъ $f(n)$, имѣемъ

$$(n+1)^{a+1} - (n+1) = (n+1)[(n+1)^a - 1] = n(n+1)f(n) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2f(n),$$

откуда, обозначая многочленъ $2f(n)$ черезъ $q(n)$, находимъ что

$$(n+1)^{a+1} - (n+1) = s_1 q(n).$$

Поэтому формулу (1) можно записать въ видѣ

$$(a+1)s_a = [q(n) - C_{a+1}^a]s_1 - C_{a+1}^{a-1}s_2 - \dots - C_{a+1}^2s_{a-2} - C_{a+1}^2s_{a-1},$$

или

$$(5) \quad s_a = \frac{q(n) - C_{a+1}^a}{a+1} \cdot s_1 - \frac{C_{a+1}^{a-1}}{a+1}s_2 - \dots - \frac{C_{a+1}^2}{a+1}s_{a-2} - \frac{C_{a+1}^2}{a+1}s_{a-1}.$$

Изъ формулы (5) можно заключить, что частное $s_a : s_1$ выражается цѣлымъ относительно n многочленомъ. Дѣйствительно, $s_1 : s_1 = 1 = n^0$, [см. (3), (2)] $s_2 : s_1 = \frac{2n+1}{6} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$. Если теперь допустить, что каждый изъ многочле-

новъ s_1, s_2, \dots, s_{a-1} дѣлится на s_1 , то изъ формулы (5) слѣдуетъ, что и многочленъ s_a дѣлится на s_1 . Такимъ образомъ частное $s_a : s_1$ при любомъ цѣломъ положительномъ a выражается цѣлымъ относительно n многочленомъ. Для нахождения коэффициента высшаго члена частного $s_a : s_1$ многочленовъ s_a и s_1 достаточно раздѣлить коэффициентъ $\frac{1}{a+1}$ высшаго члена многочлена s_a [см. (4)] на коэффициентъ $\frac{1}{2}$ высшаго члена многочлена s_1 , равнаго $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, и въ результатѣ получается $\frac{2}{a+1}$.

А. Иткинъ (Петроградъ); В. Ревзинъ (Сумы); Н. С. (Одесса).

№ 237 (6 сер.). Доказать, что многочленъ

$$x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)$$

дѣлится на $(x-a)^2$.

Называя данный многочленъ черезъ $f(x)$ и применяя известную формулу дѣлимости, имѣемъ

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1},$$

т. е.

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} - na^{n-1}.$$

Называя многочленъ, находящийся въ правой части послѣдняго равенства черезъ $\varphi(x)$, находимъ, что $\varphi(a) = na^{n-1} - na^{n-1} = 0$. Поэтому $\varphi(x)$ дѣлится на $x-a$. Называя цѣлый многочленъ, получаемый отъ дѣленія $\varphi(x)$ на $x-a$ черезъ $q(x)$, находимъ, что

$$f(x) : (x-a) = \varphi(x), \quad \varphi(x) : (x-a) = q(x), \quad \text{откуда} \quad f(x) = (x-a)^2 q(x).$$

Итакъ многочленъ $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^2$. Задача рѣшается просто при помощи известнаго предложенія высшей алгебры о кратныхъ корняхъ. Дифференцируя многочленъ $f(x)$, имѣемъ $f'(x) = nx^{n-1} - na^{n-1}$. Такъ какъ

$$f(a) = a^n - a^n - na^{n-1}(a-a) = 0, \quad f'(a) = na^{n-1} - na^{n-1} = 0,$$

то a есть двукратный корень многочлена $f(x)$, а потому $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^2$.

В. Шидловскій (Рига); Н. Н. (Тифлисъ); И. Брюхановъ (Петроградъ); П. Воложинъ (Ялта); М. Виленскій (Одесса); Флавианъ Д. (дѣйствующая армія); А. Кисловъ (Москва); М. Бабинъ (Петроградъ); Н. Гольдбургъ (Вильна); Н. Николаевъ (Москва); Л. Гейлеръ (Харьковъ).

№ 239 (6 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$1 \cdot 3x + 3 \cdot 5x^2 + \dots + (2k-1)(2k+1)x^k + \dots$$

Называя черезъ s_n сумму n членовъ даннаго ряда, имѣемъ

$$s_n = (4 \cdot 1^2 - 1)x + (4 \cdot 2^2 - 1)x^2 + \dots + (4 \cdot n^2 - 1)x^n,$$

или

$$(1) \quad s_n = 4(1^2x + 2^2x^2 + \dots + n^2x^n) - (x + x^2 + \dots + x^n).$$

Полагая

$$(2) \quad y = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n,$$

умножимъ равенство (2) на x и вычтемъ результатъ изъ равенства (2). Тогда получимъ

$$(3) \quad y(1-x) = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots + (2n-1)x^n - n^2x^{n+1}.$$

Умноживъ равенство (3) на x , получимъ

$$(4) \quad yx(1-x) = x^2 + 3x^3 + \dots + (2n-3)x^n + (2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}.$$

Наконецъ, вычитая изъ равенства (3) равенство (4), находимъ послѣдовательно, что

$$y(1-x)^2 = x + 2(x^2 + x^3 + \dots + x^n) - (n^2 + 2n-1)x^{n+1} + n^2x^{n+2},$$

$$(5) \quad y(1-x)^2 = x + \frac{2(x^2 - x^{n+1})}{1-x} - (n^2 + 2n-1)x^{n+1} + n^2x^{n+2},$$

откуда послѣ ряда обычныхъ преобразований получимъ

$$y = \frac{x + x^2 - (n^2 + 2n + 1)x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Подставляя это выраженіе для y въ равенство (1) и суммируя въ правой части прогрессию $x + x^2 + \dots + x^n$, находимъ послѣ ряда обычныхъ преобразований, что

$$(6) \quad s_n = \frac{3x + 6x^2 - x^3 - (4n^2 + 6n + 3)x^{n+1} + (8n^2 + 8n - 6)x^{n+2} - (4n^2 - 1)x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Опредѣляя y изъ формулы (5) мы предполагали, что $x \neq 1$, а потому формула (6) теряетъ силу, если $x = 1$. Въ этомъ случаѣ [см. (1)]

$$s_n = 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n),$$

откуда, применяя извѣстныя формулы, а именно

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

получимъ послѣ обычныхъ преобразований, что, при $x = 1$, $s_n = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$.

Эта формула можетъ быть найдена также изъ формулы (6), какъ такъ называемое истинное значеніе правой ея части при $x = 1$.

М. Виленскій. (Одесса); Л. Гейлеръ (Харьковъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ.

Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“—Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
щется

Обложка
щется