Обложка
пщется

Обложка
пщется

Второй серіи III-го семестра № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

№ 633.

Свойства квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ треугольника.

Н. Агрономова.

Предположимъ, что на сторонахъ BC, CA, AB треугольника ABC построены квадраты BCC_aB_a, CAA_bC_b, ABB_cA_c такъ, чтобы ихъ площади не покрывали бы площади треугольника ABC. Построимъ далѣе квадраты $BCC_a'B_a'$, $CAA_b'C_b'$, $ABB_c'A_c'$ такъ, чтобы ихъ площади отчасти покрывали бы площадь треугольника ABC. Другими словами, первые три квадрата занимаютъ какъ бы внѣшнее положеніе относительно треугольника ABC, а послѣдніе три внутреннее. Свойства построенныхъ такимъ образомъ квадратовъ были предметомъ многихъ изслѣдованій. Цѣль нашей статьи систематизировать и дополнить эти изслѣдованія.

§ 1. Соединимъ точку A съ точками C_a и B_a. Изъ треугольниковъ ACC_a и ABB_a получимъ:

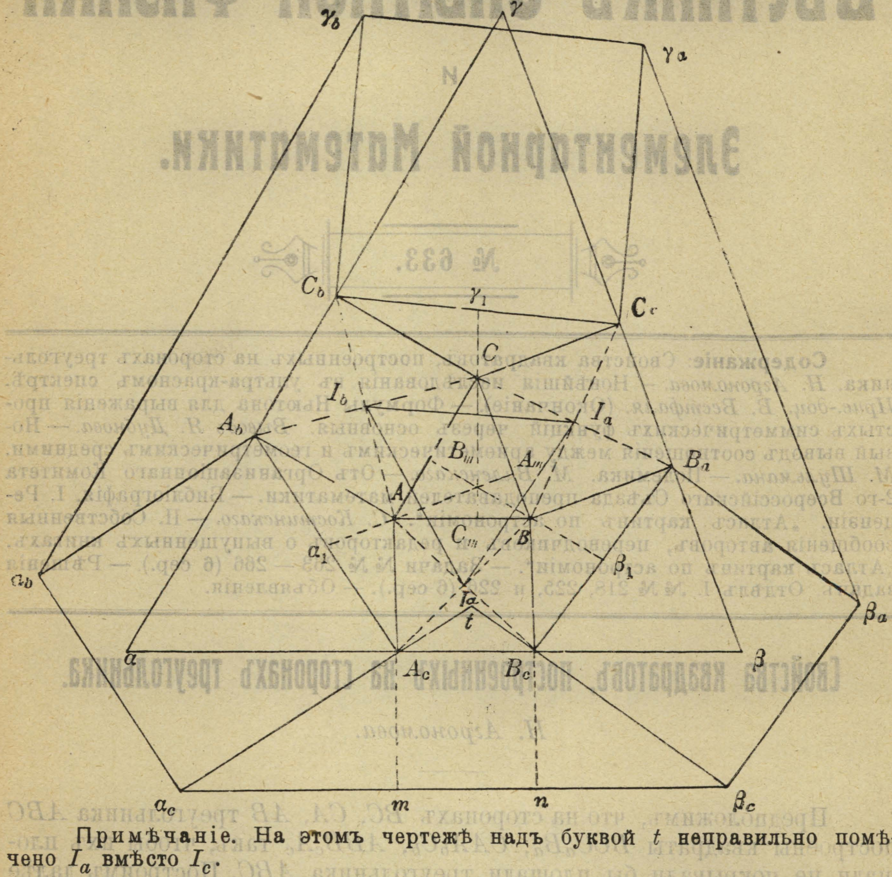
$$AC_a^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(90^\circ + C) = b^2 + a^2 + 2ab\sin C = b^2 + a^2 + 4S, \quad (1)$$

$$AB_a^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(90^\circ + B) = c^2 + a^2 + 2ac\sin B = c^2 + a^2 + 4S, \quad (1')$$

гдѣ S есть площадь треугольника ABC.

По аналогіи заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} BA_b^2 &= c^2 + b^2 + 4S, \\ BC_b^2 &= a^2 + b^2 + 4S. \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} CB_c^2 &= a^2 + c^2 + 4S, \\ CA_c^2 &= b^2 + c^2 + 4S. \end{aligned}\right\} (3)$$



Примѣчаніе. На этомъ чертежѣ надъ буквой t неправильно помѣчено I_a вмѣсто I_c.

Такимъ образомъ, если вершины треугольника ABC соединимъ прямыми съ вершинами квадратовъ, построенныхъ внѣшне на противолежащихъ сторонахъ треугольника, то три изъ полученныхъ прямыхъ будутъ соотвѣтственно равны тремъ остальнымъ прямымъ, т. е.

$$AC_a = BC_b, \quad AB_a = CB_c, \quad BA_b = CA_c.$$

§ 2. Для второй группы квадратовъ, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} BA'_b{}^2 = CA'_c{}^2 &= b^2 + c^2 - 4S, \\ CB'_c{}^2 = AB'_a{}^2 &= c^2 + a^2 - 4S, \\ AC'_c{}^2 = BC'_b{}^2 &= a^2 + b^2 - 4S, \end{aligned}\right\} (4)$$

и соотвѣтствующую теорему относительно попарнаго равенства отрѣзковъ.

§ 3. Опредѣлимъ теперь отрѣзки A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Изъ треугольника A_cA_bA, гдѣ $\angle A_bAA_c = 180° - A$, мы имѣемъ:

$$A_bA_c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - A) = b^2 + c^2 + 2bc\cos A = 2b^2 + 2c^2 - a^2. \quad (5')$$

Равнымъ образомъ

$$B_cB_a^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2, \quad C_aC_b^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \quad (5'')$$

Отсюда мы заключаемъ, что отрѣзки A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b равны $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$, гдѣ m_a, m_b, m_c суть медіаны треугольника ABC.

§ 4. Повторяя тоже вычисленіе для внутреннихъ квадратовъ, мы находимъ, что

$$A_b'A_c' = 2m_a, \quad B_c'B_a' = 2m_b, \quad C_a'C_b' = 2m_c. \quad (6)$$

§ 5. Опредѣлимъ отрѣзки C_bB_c, A_cC_a, B_aA_b. Изъ треугольника C_bAB_c, гдѣ $\angle C_bAB_c = 90° + A$ находимъ, что

$$C_bB_c^2 = (b\sqrt{2})^2 + (c\sqrt{2}) - 2(b\sqrt{2})(c\sqrt{2})\cos(90 + A) =$$
$$= 2(b^2 + c^2 + 2bc\sin A) = 2(b^2 + c^2 + 4S). \quad (7)$$

Равнымъ образомъ:

$$A_cC_a^2 = 2(c^2 + a^2 + 4S), \quad B_aA_b^2 = 2(a^2 + b^2 + 4S). \quad (8)$$

Сравнивая формулы (7) и (8) съ (1), (2), (3) мы приходимъ къ заключенію, что

$$C_bB_c = BA_b\sqrt{2} = CA_c\sqrt{2}; \quad A_cC_a = CB_c\sqrt{2} = AB_a\sqrt{2};$$
$$B_aA_b = AC_a\sqrt{2} = BC_b\sqrt{2}. \quad (9)$$

§ 6. Аналогичныя формулы для внутреннихъ квадратовъ имѣютъ слѣдующій видъ:

$$C_b'B_c'^2 = 2(b^2 + c^2 - 4S), \quad A_c'C_a'^2 = 2(c^2 + a^2 - 4S), \quad B_c'A_b'^2 = 2(a^2 + b^2 - 4S). \quad \mathbf{(10)}$$

§ 7. Обозначимъ черезъ I_a, I_b, I_c центры внѣшнихъ квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ BC, CA, AB. Изъ треугольника AI_bI_c находимъ, что

$$I_bI_c^2 = \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)\cos(90 + A) = \frac{b^2 + c^2 + 4S}{2}. \quad \mathbf{(11)}$$

Равнымъ образомъ:

$$I_cI_a^2 = \frac{c^2 + a^2 + 4S}{2}, \quad I_aI_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4S}{2}. \quad (12)$$

(См. „Математ. Листокъ", 1915. № 3, стр. 26, статья В. Буханцева).

Сопоставляя формулы (7) и (8) съ (11) и (12), мы заключаемъ, что

$$C_bB_c = 2\,.\,I_bI_c,\quad A_cC_a = 2\,.\,I_cI_a,\quad B_aA_b = 2\,.\,I_aI_b. \qquad (13)$$

§ 8. Для внутреннихъ квадратовъ мы имѣемъ слѣдующія формулы:

$$I_b'I_c'^2 = \frac{b^2+c^2-4S}{2} \text{ и т. д.,} \qquad (14)$$

(См. „Матем. Листокъ“, 1915. № 3, стр. 29).

$$C_b'B_c' = 2\,.\,I_b'I_c' \text{ и т. д.} \qquad (15)$$

§ 9. Изъ треугольника AI_aB мы можемъ опредѣлить разстояніе AI_a:

$$AI_a^2 = c^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2c\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos(45^\circ + B) = \frac{b^2+c^2+4S}{2}. \qquad (16)$$

Равнымъ образомъ:

$$BI_b^2 = \frac{c^2+a^2+4S}{2},\quad CI_c^2 = \frac{a^2+b^2+4S}{2}. \qquad (17)$$

Такимъ образомъ, разстояніе вершины треугольника отъ центра внѣшняго квадрата, построеннаго на противоположной сторонѣ, равно разстоянію между центрами двухъ другихъ квадратовъ. (См. „Journal de mathém. élém.“ 1894 г. E. N. Barisien).

§ 10. Для внѣшнихъ квадратовъ, мы имѣемъ:

$$AI_a'^2 = \frac{b^2+c^2-4S}{2},\quad BI_b'^2 = \frac{c^2+a^2-4S}{2},\quad CI_c'^2 = \frac{a^2+b^2-4S}{2}, \qquad (18)$$

и соотвѣтственную теорему.

§ 11. Пользуясь выраженіями (11), (12) и (18), мы можемъ получить слѣдующія формулы для площадей S_1 и S_2 треугольниковъ $I_a\,I_b\,I_c$ и $I_a'\,I_b'\,I_c'$:

$$S_1 = \frac{a^2+b^2+c^2+8S}{8},\quad S_2 = \frac{a^2+b^2+c^2-8S}{8}. \qquad (19)$$

(См. „Матем. Листокъ“, 1915, стр. 28 и 29, статья В. Буханцева).

---

*) Эти соотношенія вытекаютъ непосредственно изъ того, что отрѣзокъ I_aI_b соединяетъ середины сторонъ AC_b и AB_c треугольника AB_cC_b и. т. д.

Ред.

Путемъ простыхъ преобразованiи мы отсюда находимъ слѣдующую формулу Баризьена (E. N. Barisien):

$$\frac{S_1^2 - S_2^2}{S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \tag{20}$$

(„Journal mathém. de élém.“ 1914 г., 236 стр.) и формулу

$$S_1 - S_2 = 2S. \tag{21}$$

§ 14. Разсмотримъ четырехугольникъ $I_b I_a I_c A$. Въ немъ, какъ это легко замѣтить,

$$I_b I_a^2 + A I_c^2 = A I_b^2 + I_a I_c^2. \tag{22}$$

Въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ это равенство значенiе входящихъ въ него величинъ, мы получимъ:

$$\frac{a^2 + b^2 + 4S}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 + 4S}{2}. \tag{23}$$

Равенство (22) даетъ намъ право утверждать, что четырехугольникъ $I_b I_c I_a A$ ортодiагональный, т. е. четырехугольникъ съ взаимно перпендикулярнымъ дiагоналями (Д. Ефремовъ, „Новая геометрiя теугольника“ стр. 105). Слѣдовательно, прямая AI_a перпендикулярна къ $I_b I_c$. Другими словами, прямыя AI_a, BI_b, CI_c суть высоты треугольника $I_a I_b I_c$, а, какъ таковыя, прямыя AI_a, BI_b, CI_c пересѣкаются въ одной точкѣ φ („Journal de mathém. élém.“. 1894, 236. E. N. Barisien).

§ 13. Ознакомимся поближе съ точкою φ. Для этого выяснимъ, въ какомъ отношенiи прямая AI_a разсѣкаетъ сторону BC. Допустимъ, что точкой пересѣченiя прямой AI_a съ BC является точка $A_{,}$, а проекцiей I_a на BC служитъ точка $A_{,,}$*). Тогда, обозначая черезъ $A_{,,,}$ основанiе высоты, опущенной на сторону BC, изъ подобiя треугольниковъ $AA_{,}A_{,,,}$ и $A_{,}I_a A_{,,}$ имѣемъ:

$$\frac{a}{2} : h_a = \left(\frac{a}{2} - BA_{,}\right) : (BA_{,} - c\cos B). \tag{24}$$

Отсюда, послѣ упрощенiй:

$$BA_{,} = \frac{a(-b^2 + a^2 + c^2 + 4S)}{2(a^2 + 4S)} \quad \text{и} \quad CA_{,} = \frac{a(-c^2 + a^2 + b^2 + 4S)}{2(a^2 + 4S)} \tag{25}$$

---

*) Точки $A_{,}$ и $A_{,,}$ на чертежѣ не отмѣчены. Для дальнѣйшаго полезно отмѣтить, что $A_{,,}$ есть середина стороны BC и что $CA_{,,} = BA_{,,} = I_a A_{,,}$.

Ред.

т. е.

$$\frac{BA_{\prime}}{CA_{\prime}}=\frac{-b^2+a^2+c^2+4S}{-c^2+a^2+b^2+4S}. \tag{26}$$

По аналогіи

$$\frac{CB_{\prime}}{AB_{\prime}}=\frac{-c^2+b^2+a^2+4S}{-a^2+b^2+c^2+4S}, \tag{26'}$$

$$\frac{AC_{\prime}}{BC_{\prime}}=\frac{-a^2+c^2+b^2+4S}{-b^2+c^2+a^2+4S}. \tag{26''}$$

§ 14. Не лишеннымъ интереса является выводъ формулы площади шестиугольника $AI_bCI_aBI_c$ и слѣдствіе изъ нея.

Имѣемъ:

$$S_6=\text{площ.}\,AI_bCI_aBI_c=\text{площ.}\,ABC+\text{площ.}\,AI_bC+CI_aB+\text{площ.}\,BI_cA=$$

$$=S+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}=\frac{4S+a^2+b^2+c^2}{4}. \tag{27}$$

Сопоставляя эту формулу съ формулой для S_1 (19), мы имѣемъ, что

$$S_1=\frac{S_6+S}{2}, \tag{27}$$

т. е. площадь треугольника $I_aI_bI_c$ есть среднее ариѳметическое между площадью треугольника ABC и площадью шестиугольника $AI_bCI_aBI_c$.

§ 15. Соединимъ A съ C_a и B_a и опредѣлимъ отрѣзки, отсѣкаемые полученными прямыми на BC. Пусть AC_a встрѣчаетъ BC въ a_1, а AB_a въ a_2. Тогда изъ подобія треугольниковъ CC_aa_1 и $Aa_1A_{\prime\prime\prime}$ имѣемъ:

$$\frac{a}{h_a}=\frac{Ca_{\prime}}{b\cos C-Ca_{\prime}}.$$

Отсюда

$$Ca_1=\frac{ab\cos C}{a+h_a}=\frac{a\,(b^2+a^2-c^2)}{2\,(a^2+2S)}. \tag{28}$$

Равнымъ образомъ:

$$Ba_2=\frac{a\,(c^2+a^2-b^2)}{2\,(a^2+2S)}. \tag{29}$$

Слѣдовательно,

$$a_1a_2=\frac{2aS}{a^2+2S}. \tag{30}$$

На другихъ сторонахъ мы получимъ аналогичные отрѣзки b_1b_2, c_1c_2, для нихъ по аналогіи будемъ имѣть:

$$b_1b_2 = \frac{2bS}{b^2+2S}, \quad c_1c_2 = \frac{2cS}{c^2+2S}, \tag{30'}$$

Полагая $a_1a_2 = d_a$, $b_1b_2 = d_b$, $c_1c_2 = d_c$, имѣемъ:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =$$

$$= \frac{a+b+c}{2S} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \tag{30''}$$

гдѣ r — радіусъ вписаннаго круга треугольника ABC.

§ 16. Обозначимъ черезъ α_1, β_1, γ_1 средины отрѣзковъ A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b. Изъ треугольника A_bAA_c легко заключить, примѣняя формулу, опредѣляющую медіаны треугольника, что

$$A\alpha_1 = \frac{a}{2}, \quad B\beta_1 = \frac{b}{2}, \quad C\gamma_1 = \frac{c}{2}, \tag{31}$$

Далѣе изъ треугольника α_1A_bA имѣемъ:

$$\cos \widehat{A_bA\alpha_1} = \frac{+b^2 - c^2 + a^2}{2ac} = \cos C,$$

т. е. уголъ $A_bA\alpha_1 =$ углу C и, слѣдовательно, уголъ между прямыми $A\alpha_1$ и $AC = 90 - C$, т. е. $A\alpha_1$ есть высота треугольника ABC. Такимъ образомъ, прямыя $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ пересѣкаются въ ортоцентрѣ треугольника ABC.

§ 17. Продолжимъ теперь до взаимнаго пересѣченія стороны квадратовъ C_aB_a, C_bB_b, A_cB_c. Получится треугольникъ $\alpha\beta\gamma$, подобный ABC. Безъ особаго затрудненія мы получимъ, что

$$\alpha\beta = \frac{b}{\sin A} + \frac{c\cos A}{\sin A} + c + \frac{c\cos B}{\sin B} + \frac{a}{\sin B} = \frac{c\,(b^2+a^2+c^2+2S)}{2S} \tag{32}$$

и по аналогіи

$$\beta\gamma = \frac{a\,(a^2+b^2+c^2+2S)}{2S}, \tag{33}$$

$$\gamma\alpha = \frac{b\,(a^2+b^2+c^2+2S)}{2S}, \tag{34}$$

Обозначая стороны этого треугольника $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ соотвѣтственно черезъ x, y, z, имѣемъ:

$$\frac{a}{x} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}+1, \quad \frac{b}{y} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}+1, \quad \frac{c}{z} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}+1. \qquad (35)$$

Но извѣстно, что уголъ ω, опредѣляемый равенствомъ,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$$

есть уголъ Брокара (Д. Ефремовъ. „Новая геометрія треугольника", стр. 127). Слѣдовательно,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{\operatorname{tg}\omega+2}{2}. \qquad (36)$$

§ 18. Опредѣлимъ площадь $S_{(6)}$ шестиугольника $A_cA_bC_bC_aB_aB_c$. Имѣемъ,

$$S_{(6)} = \text{площ. } A_cA_bC_aB_aB_c = S + a^2+b^2+c^2 + \frac{bc\sin(180-A)}{2} + \qquad (37)$$

$$+\frac{ca\sin(180-B)}{2} + \frac{ab\sin(180-C)}{2} = 4S + a^2+b^2+c^2.$$

Сопоставляя формулу (37) съ формулой (27), мы приходимъ къ слѣдующему результату: площадь шестиугольника $A_cA_bC_bC_aB_aB_c$ въ четыре раза больше площади шестиугольника $AI_cBI_aCI_b$.

§ 19. На сторонахъ A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b мы вновь построимъ квадраты $A_bA_c\alpha_c\alpha_b$, $B_cB_a\beta_a\beta_c$ и $C_aC_b\gamma_a\gamma_b$. Продолживъ до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ t прямыя $A_c\alpha_c$ и $B_c\beta_c$, мы получимъ треугольникъ $t\alpha_c\beta_c$. Легко видѣть, что

$$t\widehat{A_c}B_c = A_b\widehat{A_c}A, \quad t\widehat{B_c}A_c = B\widehat{B_c}B_a, \quad A_c\widehat{t}B_c = 180 - (A_b\widehat{A_c}A + B\widehat{B_c}B_a).$$

Путемъ простѣйшихъ вычисленій мы найдемъ, что

$$tB_c = \frac{c\sin A_b\widehat{A_c}A}{\sin(A_b\widehat{A_c}A + B\widehat{B_c}B_a)}, \quad tA_c = \frac{c\sin B\widehat{B_c}B_a}{\sin(A_b\widehat{A_c}A + B\widehat{B_c}B_a)}. \qquad (38)$$

Однако, изъ треугольниковъ BB_cB_a и AA_cA_b мы находимъ, что

$$\sin A_b\widehat{A_c}A = \frac{S}{cm_a}, \quad \sin B\widehat{B_c}B_a = \frac{S}{cm_b}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, площадь треугольника A_bAA_c равна площади S исходнаго треугольника; съ другой стороны она равна

$$\tfrac{1}{2}\, A_bA_c \,.\, AA_c \sin(A_b\widehat{A_c}A) = m_a c \sin(A_b\widehat{A_c}A).$$

Отсюда и вытекаетъ первое изъ предыдущихъ равенствъ.

Слѣдовательно,

$$\frac{tB_c}{tA_c} = \frac{m_b}{m_a}\,.$$

Но, таково же и отношеніе $B_c\beta_c$ къ $A_c\alpha_c$. Слѣдовательно, прямыя A_cB_c и $\alpha_c\beta_c$ между собой параллельны. (Mathesis, 1894, Neyland).

§ 20. Послѣ этого нетрудно опредѣлить отрѣзокъ $\alpha_c\beta_c$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\alpha_c\beta_c = \alpha_c m + mn + n\beta_c\,,$$

гдѣ m и n суть проекціи точекъ A_c и B_c на $\alpha_c\beta_c$. Слѣдовательно,

$$\alpha_c\beta_c = 2m_a \sin(90^\circ - A_b\widehat{A_c}A) + c + 2m_b \sin(90 - B\widehat{B_c}B_a)$$

или

$$\alpha_c\beta_c = 2m_a \cos A_b\widehat{A_c}A + c + 2m_b \cos B\widehat{B_c}B_a \tag{39}$$

Изъ треугольниковъ AA_bA_c, BB_cB_a мы можемъ опредѣлить входящія сюда cosinus'ы. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\left.\begin{aligned} \cos A_b\widehat{A_c}A &= \frac{c^2 + 4m_a{}^2 - b^2}{4m_a c} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4m_a c}\,, \\ \cos B\widehat{B_c}B_a &= \frac{c^2 + 4m_b{}^2 - a^2}{4m_b c} = \frac{3c^2 + a^2 - b^2}{4m_b c}\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Слѣдовательно, послѣ упрощеній:

$$\alpha_c\beta_c = 4c. \tag{41}$$

Равнымъ образомъ:

$$\beta_a\gamma_a = 4a, \quad \gamma_b\alpha_b = 4b. \tag{42}$$

Такимъ образомъ, отрѣзки $\beta_a\gamma_a$, $\gamma_b\alpha_b$, $\alpha_c\beta_c$ равны учетверенным сторонамъ треугольника ABC. (Mathesis, 1894, Neyland).

§ 21. Опредѣлимъ теперь площади трапецій $\alpha_cA_cB_c\beta_c$, $\beta_aB_aC_a\gamma_a$, $\gamma_bC_bA_b\alpha_b$. Для опредѣленія площади трапеціи $\alpha_cA_cB_c\beta_c$ намъ необходимо знать высоту ея B_cn. Имѣемъ:

$$B_cn = 2m_b \sin B_c\widehat{\beta_c}\alpha_c = 2m_b \sin B\widehat{B_c}B_a = \frac{2S}{c}\,.$$

Слѣдовательно, площадь нашей трапеціи $a_cA_cB_c\beta_c$ равна:

$$\frac{(c+4c)}{2}\cdot\frac{2S}{c}=5S.$$

Такимъ образомъ, площади всѣхъ трапецій $a_cA_cB_c\beta_c$, $\beta_aB_aC_a\gamma_a$, $\gamma_bC_bA_ba_b$ между собой равны и каждая изъ нихъ равна упятеренной площади треугольника ABC. (Mathesis, 1894, Niyland).

§ 22. Основываясь на только что полученной теоремѣ и теоремѣ § 18, мы можемъ доказать, что площадь шестиугольника $a_ba_c\beta_c\beta_a\gamma_a\gamma_b$ равна $19S+4b^2+4c^2+4a^2$.

§ 23. Опредѣлимъ діагонали разсматриваемыхъ трапецій. Имѣемъ:

$$\begin{aligned}\overline{a_cB_c}^2&=4m_a{}^2+c^2-4m_ac\cos(180^\circ-A_b\widehat{A_c}A)=\\&=4m_a{}^2+c^2+4m_ac\cos A_b\widehat{A_c}A=\\&=2b^2+2c^2-a^2+c^2+3c^2+b^2-a^2=6c^2+3b^2-2a^2.\end{aligned}\tag{43}$$

$$\begin{aligned}\overline{B_cA_c}^2&=4m_b{}^2+c^2-4m_bc\cos(180-B_a\widehat{B_c}B)=\\&=4m_b{}^2+c^2+4m_bc\cos B_a\widehat{B_c}B=\\&=2c^2+2a^2-b^2+c^2+3c^2+a^2-b^2=6c^2+3a^2-2b^2.\end{aligned}\tag{44}$$

Получивъ такимъ же образомъ и остальные діагонали, мы сможемъ дать такую теорему: сумма квадратовъ діагоналей всѣхъ трапеціи $a_cA_cB_c\beta_c$, $\beta_aB_aC_a\gamma_a$, $\gamma_bC_bA_ba_b$ равна $14(a^2+b^2+c^2)$.

§ 24. Предположимъ, что стороны AA_c, BB_a, CC_b продолжены до взаимнаго пересѣченія въ точкахъ a_1, β_1, γ_1. Безъ всякаго затрудненія читатель найдетъ, что

$$\left.\begin{aligned}&\beta_1\gamma_1{}^{*)}=\frac{b}{\sin A}+c\operatorname{cotg}B=\frac{c\,(a^2+b^2+c^2)}{4S}.\\&\text{Равнымъ образомъ:}\\&\gamma_1a_1=\frac{c}{\sin B}+a\operatorname{cotg}C=\frac{a\,(b^2+c^2+a^2)}{4S},\\&a_1\beta_1=\frac{a}{\sin C}+b\operatorname{cotg}A=\frac{b\,(c^2+a^2+b^2)}{4S}.\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

---

*) $\beta_1\gamma_1$ проходитъ черезъ A. Точки a_1, β_1, γ_1, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, на чертежѣ не отмѣчены, не слѣдуетъ смѣшивать съ точками, о которыхъ шла рѣчь въ § 16.

Отсюда мы заключаемъ, что треугольникъ, образованный продолженіемъ сторонъ AA_c, BB_a, CC_b, подобенъ треугольнику ABC.

Точно также, продолживъ стороны AA_b, BB_c, CC_a, мы получимъ другой треугольникъ $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ со сторонами:

$$\beta_2\gamma_2=\frac{b\,(a^2+b^2+c^2)}{4S}\,,\quad \gamma_2\alpha_2=\frac{c\,(b^2+c^2+a^2)}{4S}\,,\quad \alpha_2\beta_2=\frac{a(c^2+a^2+b^2)}{4S}\,. \tag{46}$$

Слѣдовательно, треугольникъ, образованный продолженіемъ сторонъ AA_b, BB_c, CC_a, равенъ треугольнику, образованному продолженіемъ сторонъ AA_c, BB_a, CC_b.

Формулы (45) и (14) можно переписать еще такъ:

$$\beta_1\gamma_1=\gamma_2\alpha_2=c\,.\operatorname{cotg}\omega,\quad \gamma_1\alpha_1=\alpha_2\beta_2=a\operatorname{cotg}\omega,\quad \alpha_1\beta_1=\beta_2\gamma_2=\beta\operatorname{cotg}\omega. \tag{47}$$

Новѣйшія изслѣдованія въ ультра-красномъ спектрѣ.

Прив.-доц. В. Вестфаля.

(*Окончаніе* **).

II. Ультра-красная область длинныхъ волнъ.

1. Интерферометрическое измѣреніе длины волны.

Въ ультра-красной области съ длинной волной обычные оптическіе методы измѣренія длины волны въ ихъ обыкновенной формѣ непримѣнимы, съ одной стороны, вслѣдствіе малой напряженности наличныхъ источниковъ излученія, не допускающихъ примѣненія достаточно узкой щели; съ другой стороны, препятствіемъ служитъ невозможность изготовить достаточно прозрачныя призмы и линзы, такъ какъ выше 20 μ всѣ вещества, взятыя для этой цѣли, обнаруживаютъ очень сильное поглощеніе. Даже кварцомъ, который раньше всѣхъ становится снова прозрачнымъ въ толщинѣ, необходимой для линзъ, можно пользоваться вновь, начиная лишь приблизительно съ 70 μ (см. ниже). Поэтому вмѣсто спектрометрическихъ методовъ здѣсь примѣняютъ введенный Рубенсомъ интерферометрическій методъ, основанный на кварцевомъ интерферометрѣ (рис. 2).

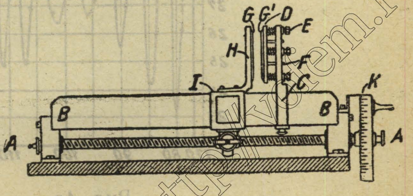


Рис. 2.

**) См. „Вѣстникъ", № 632.

Главная часть этого прибора — двѣ тонкія плоскія пластинки кварца G и G' отдѣляющіяся одна отъ другой воздушнымъ слоемъ перемѣнной толщины, которая можетъ быть измѣрена, такъ какъ одна изъ пластинокъ (G) микрометрически перемѣщается на салазкахъ I дѣлительной машины. Если пропускать черезъ эту систему параллельные мо-

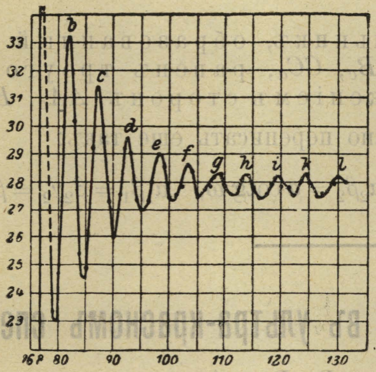


Рис. 3a.

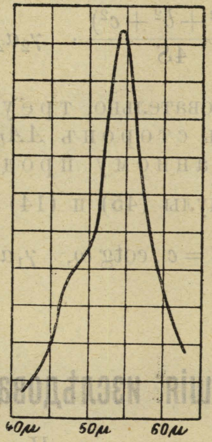


Рис. 3b.

нохроматическіе лучи, то при увеличеніи разстоянія между пластинками напряженность лучей обнаруживаетъ извѣстныя періодическія колебанія вслѣдствіе интерференціи, изъ которыхъ можно вычислить длину волны.

Такъ какъ на практикѣ мы никогда не имѣемъ чисто монохро-

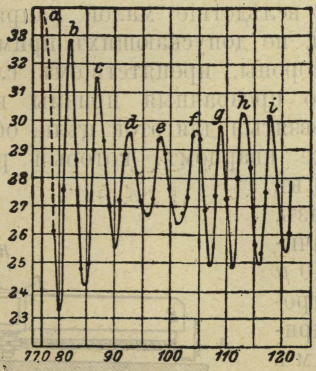


Рис. 4a.

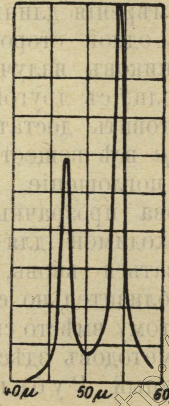


Рис. 4b.

матическихъ лучей, а всегда лишь болѣе или менѣе сложное распредѣленіе энергіи, то вычисленіе истиннаго распредѣленія напряженности по измѣреннымъ кривымъ интерференціи представляетъ собой трудную задачу, которая не можетъ быть строго рѣшена съ помощью современныхъ методовъ. Приближенное вычисленіе можетъ быть выполнено способомъ, который далъ Планкъ (Planck). На рисункахъ 3a и 4a представлены двѣ интерференціонныя кривыя, найденныя по измѣреніямъ Рубенса для сравнительно простого и для сложнаго распредѣленія энергіи (остаточные лучи каменной соли безъ и съ водянымъ паромъ по пути лучей). Рисунки 3b и 4b представляютъ вычисленное отсюда распредѣленіе энергіи.

2. Полученіе спектральныхъ областей съ опредѣленной большой длиной волны.

Для полученія спектральныхъ областей съ большими волнами опредѣленной длины служатъ избирательныя свойства веществъ, а именно избирательное разсѣяніе и поглощеніе, отраженіе и испусканіе. Всѣ эти методы были разработаны Рубенсомъ, отчасти вмѣстѣ съ его сотрудниками.

а) Избирательное разсѣяніе (дисперсія) и поглощеніе, которыя уже раньше были использованы Рубенсомъ и Ашкинасомъ для этой цѣли въ видѣ такъ называемаго метода съ кварцевой призмой, недавно получили существенно усовершенствованное примѣненіе въ методѣ кварцевой линзы Рубенса и Вуда (R. Wood). Показатель преломленія кварца для длинныхъ ультра-красныхъ волнъ больше (равенъ около 2), чѣмъ для короткихъ ультра-красныхъ волнъ и видимыхъ лучей (1,55 — 1,43). Далѣе, область сильнаго поглощенія кварцомъ находится между 4,5 μ и 70 μ. Этой именно области спектра недостаетъ, слѣдовательно, въ лучахъ, прошедшихъ черезъ кварцевую оптическую систему достаточной толщины. Чтобы отдѣлить также область длинныхъ волнъ ($h > 70\ \mu$) отъ области короткихъ волнъ ($h < 4{,}5\ \mu$), располагаютъ приборы, какъ намѣчено на рис. 5. Испускаемые ауэровской горѣлкой A-лучи съ большой длиной волны проходятъ черезъ обманку C и съ помощью кварцевой линзы L_1 собираются въ обманкѣ E въ фокусѣ F; они находятся, такимъ образомъ, внутри конуса, начерченнаго прерывистой линіей. Лучи же съ короткой волной, поскольку они вообще пропускаются линзой, по вы-

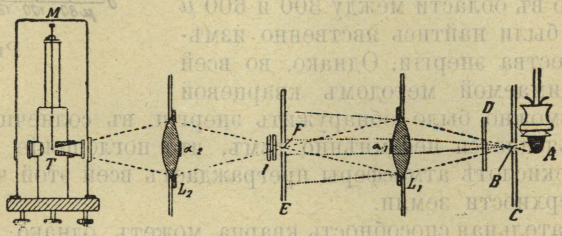


Рис. 5.

ходѣ изъ линзы становятся расходящимися вслѣдствіе меньшей величины соотвѣтствующаго имъ показателя преломленія (пунктирный конусъ), и большей частью, слѣдовательно, попадаютъ въ обманку. Малая часть (внутренній пунктирный конусъ), которая еще могла бы пройти черезъ отверстіе, задерживается тонкимъ листомъ черной бумаги a_1, тогда какъ длинныя волны довольно свободно проходятъ черезъ бумагу. За обманкой E лучи посредствомъ повторенія такого же процесса еще разъ основательно очищаются и поступаютъ для измѣренія въ микрорадіометръ. На рис. 6 представлено въ весьма грубомъ приближеніи распредѣленіе энергіи въ спектральной области, выдѣленной этимъ способомъ изъ лучей ауэровской горѣлки, при различной толщинѣ кварцевого слоя, находящагося по пути лучей. Точное вычисленіе распредѣленія энергіи невозможно вслѣдствіе сложности интерференціонныхъ кривыхъ, лежащихъ въ основѣ этого метода. Максимумъ находится примѣрно около 100 μ.

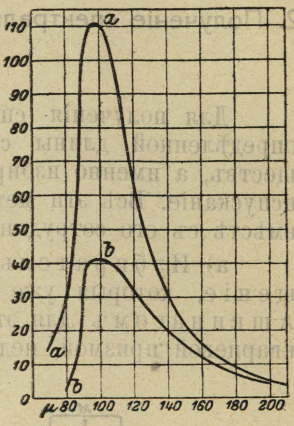


Рис. 6.

Рубенсъ и Шварцшильдъ (Schwarzschild) пытались съ помощью метода съ кварцевой линзой выдѣлить изъ солнечныхъ лучей спектральную область съ очень длинными волнами. Если солнце, какъ они предполагали, не очень отличается отъ „чернаго тѣла", то въ области между 300 и 600 μ еще должны были найтись явственно измѣримыя количества энергіи. Однако, во всей области, обнимаемой методомъ кварцевой линзы, невозможно было обнаружить энергіи въ солнечномъ спектрѣ.

Это объясняется несомнѣнно тѣмъ, что поглощеніе въ водяныхъ парахъ и углекислотѣ атмосферы преграждаетъ всей этой части спектра путь къ поверхности земли.

Поглощательная способность кварца можетъ, однако, по Рубенсу служить для приблизительной оцѣнки длины волны лучей, если длина волны велика, такъ какъ прозрачность кварца непрерывно возрастаетъ съ увеличеніемъ длины волны.

b) Избирательное отраженіе примѣнялось еще въ 1897 г. Рубенсомъ и Никольсомъ (E. F. Nichols) въ извѣстномъ методѣ остаточныхъ лучей для выдѣленія опредѣленныхъ областей съ большой длиной волны. Долгое время ультра-красными лучами съ наибольшей длиной волны считались остаточные лучи сильвина съ длиной волны въ 63,4 μ; но въ настоящее время эта область значительно расширена, благодаря работамъ Рубенса и его сотрудниковъ. Самый принципъ — троекратное и четверократное отраженіе отъ плоскихъ пластинокъ изъ даннаго матеріала — остался безъ измѣненія. При изготовленіи пластинокъ изъ впервые изслѣдуемыхъ веществъ пришлось преодолѣвать отчасти значительныя затрудненія. Интересно, что извѣстная шероховатость пластинокъ не только не вредитъ, но даже полезна, такъ какъ оптически шероховатая пластинка отражаетъ неправильно лучи съ короткой волной, а для болѣе длинныхъ волнъ служитъ еще хорошимъ зеркаломъ*), и такимъ образомъ еще лучше содѣйствуетъ выдѣленію лучей съ большой длиной волны. На слѣдующей таблицѣ сопоставлены всѣ извѣстные въ настоящее время пригодные остаточные лучи. Указываемая длина волны относится къ максимуму напряженности излученія.

Таблица остаточныхъ лучей.

$CaCO_3$,	известковый шпатъ (обыкновенный лучъ)	6,65 μ
	(необыкновенный лучъ)	11,40
$CaSO_4$,	гипсъ	8,678
SiO_2,	кварцъ	8,5; 9,0; 20,75
CaF_2,	плавиковый шпатъ	24—34
$NaCl$,	каменная соль	52,0
KCl,	сильвинъ	63,4
$AgCl$,	. . . .	81,5
KBr,	. . . .	82,6
$PbCl_2$,	. . . .	91,0
$TlCl$,	. . . .	91,5
KJ,	. . . .	94,1
$CaCO_3$,	известковый шпатъ	98,7
$HgCl$,	. . . .	98,8
$AgBr$,	. . . .	112,7
$TlBr$,	. . . .	117,0
TlJ,	. . . .	151,8

Весьма замѣчательно, что сперва большинство найденныхъ остаточныхъ лучей обнаруживали два максимума напряженности, прмѣрно, какъ на рис. 4b. Изслѣдованія Рубенса недавно показали, что углубленія между максимумами происходятъ отъ полосъ поглощенія въ водяныхъ парахъ комнатнаго воздуха. Эти углубленія можно устранить почти вполнѣ (рис. 3b) тщательной просушкой пути лучей, которая, однако, никогда не можетъ быть достигнута полностью. Этимъ способомъ удалось обнаружить рядъ полосъ поглощенія длинныхъ волнъ въ водяномъ парѣ; по теоріи Бьеррума (см. выше стр. 191) ихъ слѣдуетъ, вѣроятно, приписать собственнымъ вращательнымъ колебаніямъ частицы.

Нахожденіе длины волны остаточныхъ лучей опредѣленныхъ веществъ въ послѣднее время получило большое значеніе вслѣдствіе

---

*) См. Naturwissenschaften 1914, вып. 20, стр. 499.

того, что эти мѣста съ максимальной отражательной способностью находятся очень близко отъ собственныхъ колебаній въ молекулахъ; знать эти колебанія очень важно для современныхъ теорій удѣльныхъ теплотъ, установленныхъ Маделунгомъ (Madelung), Эйнштейномъ (Einstein), Нернстомъ (Nernst) и Линдеманномъ (Lindemann), Борномъ (Born) и фонъ Карманомъ (Kármán), Дебюе (Debye*).

с) Наконецъ, избирательное испусканіе длинныхъ волнъ было открыто Рубенсомъ и О. ф. Бэйеромъ (O. v. Baeyer) въ излученіи ртутно-кварцевой лампы. Правда, эта испускательная способность охватываетъ довольно большую область спектра, но обнаруживаетъ два явственныхъ максимума при 218 μ и 343 μ. Распредѣленіе энергіи этихъ лучей, выдѣляемыхъ съ помощью кварцевыхъ линзъ (см. выше), представлено на рис. 7. Между всѣми извѣстными намъ ультра-красными лучами это — лучи съ наибольшей длиной волны. Отъ наиболѣе короткихъ электрическихъ волнъ (2 *мм.*, О. ф. Бэйеръ) они отличаются всего лишь приблизительно на $2^1/_2$ октавы.

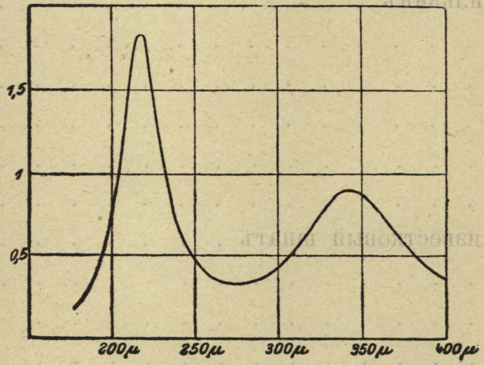


Рис. 7.

3. Аналогія между ультра-красными лучами съ большой длиной волны и электрическими волнами.

Открытіе излученія съ волнами большой длины, испускаемаго кварцо-ртутной лампой является шагомъ къ достиженію цѣли — установить связь между оптическимъ спектромъ и спектромъ, полученнымъ чисто электрическимъ путемъ (электрическія волны) такъ, чтобы излученіе съ опредѣленной длиной волны могло быть получено, съ одной стороны, какъ тепловое и свѣтовое, а съ другой стороны — чисто электрическимъ путемъ. Излученія, полученныя этими двумя способами, должны были бы обнаружить одинаковыя свойства, что по-

*) Ср. A. Reis, Naturwissenschaften, 1914, вып. 9.

служило бы вѣнцомъ электромагнитной теоріи свѣта и ея нагляднымъ доказательствомъ. Но, хотя этого послѣдняго камня еще недостаетъ, зданіе электромагнитной теоріи является прочной частью физической науки. Доказательствами ея мы въ немалой степени обязаны изслѣдованіямъ ультра-красныхъ лучей. Сравнительно давно уже извѣстно, что зависимость $n^2 = E$ (n — показатель преломленія, E — статическая діэлектрическая постоянная), требуемая теоріей для безконечно длинвыхъ волнъ, удовлетворяется, вообще, все лучше и лучше съ возрастаніемъ длины волны ультра-красныхъ лучей.

Новѣйшія изслѣдованія Дю-Буа (H. Du-Bois) и Рубенса, являющіяся улучшеннымъ и расширеннымъ повтореніемъ ихъ прежнихъ работъ, увеличили число этихъ доказательствъ. Они показываютъ, что металлическая рѣшетка дѣйствуетъ на длинныя ультра-красныя волны совершенно такимъ же образомъ, какъ на электрическія волны при тѣхъ же условіяхъ. Эти опыты вполнѣ аналогичны работамъ Г. Герца о поляризаціи электрическихъ волнъ черезъ проволочную рѣшетку. Такъ, напримѣръ, посредствомъ тонкой рѣшетки, проволоки которой находятся на разстояніи 50 μ одна отъ другой, удается полная прямолинейная поляризація волнъ въ 100 μ, и при томъ въ такомъ же направленіи, какъ для электрическихъ волнъ.

Тѣ же изслѣдователи показали, что ауэровская сѣтка, состоящая только изъ тонкихъ вертикальныхъ нитей, испускаетъ частично поляризованные лучи съ длинными волнами, соотвѣтственно преобладанію слагающей электрическаго вектора въ направленіи нити.

Къ полному согласію съ электромагнитной теоріей свѣта привели также новѣйшіе опыты Гагена (E. Hagen) и Рубенса объ отражательной и испускательной способности металловъ для ультра-красныхъ длинныхъ волнъ. По теоріи длинныя волны должны удовлетворять соотношенію

$$E = 100 - R = 36{,}5 \sqrt{\frac{W}{h}} - 6{,}67 \frac{W}{h} + \cdots$$

(E — испускательная способность въ процентахъ сравнительно съ чернымъ тѣломъ, R — отражательная способность въ процентахъ, W — удѣльное сопротивленіе, отнесенное къ проволокѣ длиною въ 1 *м.* и съ поперечнымъ сѣченіемъ въ 1 *кв. мм.*, h — длина волны). Въ этомъ уравненіи выпущены малые члены высшихъ порядковъ. Названные изслѣдователи показали, что при 8,8 μ зависимость испускательной и отражательной способности различныхъ металловъ отъ температуры соотвѣтствуетъ, правда, температурному коэффиціенту сопротивленія, но, вообще, значенія испускательной способности приблизительно на 20% меньше, чѣмъ это требуется предыдущимъ уравненіемъ; зато при 26 μ абсолютныя значенія испускательной и отражательной способностей металловъ между 100° и 500° тоже выражаются вѣрно формулой.

Мы изложили здѣсь только наиболѣе важные результаты большого множества работъ, произведенныхъ за послѣдніе годы въ области ультракраснаго спектра. Въ заключенiе упомянемъ еще, что новѣйшее и наиболѣе надежное въ настоящее время опредѣленiе константы въ законѣ излученiя Планка, произведенное недавно Варбургомъ (E. Warburg) и его сотрудниками (эту постоянную обозначаютъ въ большинствѣ случаевъ черезъ C_2) основано на чрезвычайно тщательныхъ измѣренiяхъ энергiи волнъ, принадлежащихъ большей частью къ ультра-красной области съ наиболѣе короткой длиной волны.

Формулы Ньютона для выраженiя простыхъ симметрическихъ функцiй черезъ основныя.

Выводъ Я. Дубнова.

Нѣсколько лѣтъ тому назадъ мой ученикъ Я. Дубновъ сообщилъ мнѣ придуманный имъ выводъ такъ называемыхъ формулъ Ньютона, связывающихъ простыя симметрическiя функцiи нѣсколькихъ перемѣнныхъ съ основными.

Выводъ этотъ, на мой взглядъ, значительно проще всѣхъ извѣстныхъ мнѣ доказательствъ этихъ соотношенiй, такъ что при изложенiи ихъ въ курсѣ высшей алгебры я давно уже систематически пользуюсь прiемомъ г. Дубнова.

Я давно уже получилъ отъ г. Дубнова разрѣшенiе ихъ опубликовать, но форма изложенiя, въ какой я ее получилъ отъ г. Дубнова, отличалась чрезмѣрной сжатостью, и я лишь теперь имѣлъ возможность обработать выводъ такимъ образомъ, чтобы онъ могъ найти себѣ мѣсто на страницахъ „Вѣстника". Постараюсь этотъ выводъ изложить настолько элементарно, чтобы онъ былъ доступенъ каждому читателю „Вѣстника".

В. Каганъ.

1. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ будутъ n перемѣнныхъ. Простыми симметрическими функцiями этихъ перемѣнныхъ называются суммы одинаковыхъ степеней ихъ:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_i &= x_1^i + x_2^i + x_3^i + \cdots + x_n^i.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Число ихъ неограниченно велико.

Подъ основными симметрическими функціями разумѣютъ сумму перемѣнныхъ, сумму ихъ произведеній по двѣ, по три и т. д.

Основныхъ симметрическихъ функцій при n перемѣнныхъ есть n; послѣдняя изъ нихъ есть произведеніе перемѣнныхъ.

Мы будемъ обозначать основныя симметрическія функціи нашихъ перемѣнныхъ черезъ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, такъ что

$$
\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\
p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \\
p_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n &= x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Еще Ньютонъ показалъ, что простыя симметрическія функціи выражаются раціонально черезъ основныя и далъ рекуррентныя формулы, съ помощью которыхъ это сведеніе осуществляется. Здѣсь мы имѣемъ въ виду, какъ уже сказано, изложить простой выводъ этихъ соотношеній.

2. Введемъ слѣдующее обозначеніе: подъ символомъ $p_i^{(h)}$ будемъ разумѣть совокупность тѣхъ членовъ функцій p_i, которые содержатъ x_h. Чтобы отчетливо разъяснить значеніе этого символа, играющаго въ нашемъ изложеніи коренную роль, пояснимъ его на примѣрѣ. Положимъ, что перемѣнныхъ четыре; тогда третья основная функція состоитъ изъ четырехъ членовъ:

$$
p_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4. \tag{3}
$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$
\begin{aligned}
p_3^{(1)} &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4, \\
p_3^{(2)} &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4, \\
p_3^{(3)} &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4, \\
p_4^{(4)} &= x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Эти функціи $p_i^{(h)}$ обладаютъ двумя замѣчательными свойствами, въ которыхъ, въ сущности, и коренятся соотношенія Ньютона.

3. Первое свойство. Какъ сказано выше $p_i^{(h)}$ есть совокупность тѣхъ членовъ функціи p_i, которое содержитъ x_h. Поэтому совокупность тѣхъ членовъ основной функціи p_i, которые x_h не содержатъ, выражается разностью $p_i - p_i^{(h)}$. Теперь возьмемъ выраженіе $p_i^{(h)}$ и вынесемъ въ немъ x_h за скобку. Въ скобкахъ останется очевидно, сумма произведеній перемѣнныхъ по $i-1$ и при томъ всѣхъ тѣхъ произведеній, которыя множитель x_h не содержатъ. Какъ сказано выше, эта сумма равна $p_{i-1}-p_{i-1}^{(h)}$. Вмѣстѣ съ тѣмъ это несложное разсужденіе приводитъ къ соотношенію:

$$p_i^{(h)}=x_h\left(p_{i-1}-p_{i-1}^{(h)}\right). \qquad (5)$$

Это и есть первое свойство, о которомъ мы упоминали выше.

4. Второе свойство. Оно выражается слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$p_i^{(1)}+p_i^{(2)}+p_i^{(3)}+\cdots+p_i^{(h)}=ip_i. \qquad (6)$$

Чтобы это соотношеніе доказать, замѣтимъ прежде всего, что въ лѣвую часть его входятъ исключительно члены, представляющіе произведенія перемѣнныхъ по i, иными словами, въ лѣвую часть равенства входятъ только такіе члены, которые образуютъ функцію p_i. Возьмемъ одинъ изъ такихъ членовъ $x_a x_b x_c \ldots x_h$ и посчитаемъ сколько разъ онъ входитъ въ составъ лѣвой части равенства (6). Ясно, что онъ входитъ въ составъ каждой изъ группъ $p_i^{(a)}$, $p_i^{(b)}$, $p_i^{(c)}, \ldots, p_i^{(h)}$, т. е. въ составъ i группъ. Ни въ какую же другую онъ не входитъ. Въ самомъ дѣлѣ: въ составъ группы $p_i^{(k)}$ входятъ только такіе члены, которые содержатъ x_k; если же k отлично отъ $a, b, c, \ldots, h$, то членъ $x_a x_b x_c \ldots x_h$, множителя x_k не содержитъ, и потому въ составъ группы $p_i^{(k)}$ не входятъ. Итакъ, лѣвая часть равенства (6) содержитъ только такіе члены, которые входятъ въ составъ p_i и при томъ по i разъ каждый. Равенство (6) этимъ установлено.

5. Теперь перейдемъ къ выводу формулъ Ньютона.

Легко видѣть, что $p_1^{(h)}=x_h$. Полагая затѣмъ въ равенствѣ (5) последовательно $i=2, 3, \ldots, h$ будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l|l}
p_1^{(h)}=x_h, & x_h^{i-1}, \\
p_2^{(h)}=x_h(p_1-p_1^{(h)}), & -x_h^{i-2}, \\
p_3^{(h)}=x_h(p_2-p_2^{(h)}), & x_h^{i-3}, \\
p_4^{(h)}=x_h(p_3-p_3^{(h)}), & -x_h^{i-4}, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
p_{i-2}^{(h)}=x_h(p_{i-3}-p_{i-3}^{(h)}), & (-1)^{i-3}x_h^2, \\
p_{i-1}^{(h)}=x_h(p_{i-2}-p_{i-2}^{(h)}), & (-1)^{i-2}x_h, \\
p_i^{(h)}=x_h(p_{i-1}-p_{i-1}^{(h)}). & (-1)^{i-1}.
\end{array}$$

Умноживъ эти равенства послѣдовательно на множителей, приписанныхъ съ правой стороны, сложивъ ихъ почленно и отбросивъ общіе члены, получимъ:

$$(-1)^{i-1}p_i^{(h)}=x_h^i-p_1x_h^{i-1}+p_2x_h^{i-2}+\cdots+(-1)^{i-2}p_{i-2}x_h^2+(-1)^{i-1}p_{i-1}x_h,$$

или иначе,

$$x_h^i-p_1x_h^{i-1}+p_2x_h^{i-2}-\cdots+(-1)^{i-2}p_{i-2}x_h^2+(-1)^{i-1}p_{i-1}x_h+(-1)^i p_i^{(h)}=0. \qquad \textbf{(8)}$$

Если положимъ въ этомъ равенствѣ послѣдовательно $h=1$, 2, $3, \ldots, n$, то получимъ:

$$x_1^i - p_1 x_1^{i-1} + p_2 x_1^{i-2} - \cdots + (-1)^{i-2} p_{i-2} x_1^2 + (-1)^{i-1} p_{i-1} x_1 + (-1)^i p_i^{(1)} = 0,$$

$$x_2^i - p_1 x_2^{i-1} + p_2 x_2^{i-2} - \cdots + (-1)^{i-2} p_{i-2} x_2^2 + (-1)^{i-1} p_{i-1} x_2 + (-1)^i p_i^{(2)} = 0,$$

. . . .

$$x_n^i - p_1 x_n^{i-1} + p_2 x_n^{i-2} - \cdots + (-1)^{i-2} p_{i-2} x_n^2 + (-1)^{i-1} p_{i-1} x_n + (-1)^i p_i^{(n)} = 0.$$

Складывая эти равенства почленно и принимая во вниманіе, что сумма послѣднихъ членовъ въ силу соотношенія (6) равна ip_i, получимъ:

$$s_i - p_1 s_{i-1} + p_2 s_{i-2} - \cdots + (-1)^{i-1} p_{i-1} s_1 + (-1)^i i p_i = 0. \qquad (9)$$

Полагая здѣсь i равнымъ 1, 2, 3, ..., n, мы получимъ формулу Ньютона:

$$s_1 - p_1 = 0,$$

$$s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0,$$

$$s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0.$$

. . . . (10)

$$s_n - p_1 s_{n-1} + P_2 s_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} p_{n-1} s_1 + (-1)^n n p_n = 0.$$

Первое изъ этихъ уравненій констатируетъ что $s_1 = p_1$ и, слѣдовательно, ничего не прибавляетъ къ тому, что мы уже знаемъ изъ опредѣленія простыхъ и основныхъ симметрическихъ функцій. Замѣняя во второй s_1 черезъ p_1, мы выразимъ s_2 черезъ основныя функціи. Далѣе третье уравненіе намъ дастъ возможность выразить s_3 черезъ основныя функціи и т. д.

6. Однако, система (9) содержитъ только n уравненій. Такъ какъ точкой отправленія служила для насъ функція p_i, т. е. i-ая основная функція, то по существу дѣла i не можетъ превосходить n. Формулы (9) обрываются такимъ образомъ на n-ой простой функціи. Если, однако, мы въ уравненіи (8) положимъ i равнымъ n и замѣтимъ, что $p_n^{(n)} = p_n$ (ибо p_n состоитъ только изъ одного члена) то мы получимъ:

$$x_h^n - p_1 x_h^{n-1} + p_2 x_h^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-2} p_{n-2} x_n^2 + (-1)^{n-1} p_{n-1} x_h + (-1)^n p_n = 0. \qquad (11)$$

Каждая перемѣннная x_h удовлетворяетъ, такимъ образомъ, уравненію (11) что, обыкновенно, устанавливается очень просто инымъ путемъ. Умножая обѣ части равенства (11) на x_h^k, получимъ:

$$x_h^{n+k} - p_1 x_h^{n+(k-1)} + p_2 x_h^{n+k-2} - \cdots + (-1)^{n-1} p_{n-1} x_h^{k+1} + (-1)^n p_n x_h^k = 0.$$

Полагая въ этомъ послѣднемъ уравненіи послѣдовательно $h=1$, $2, 3, \ldots, n$ и складывая полученныя равенства почленно, получимъ:

$$s_{n+1}-p_1 s_{n+k-1}+p_2 s_{n+k-2}+\cdots+(-1)^{n-1} p_{n-1} s_{k+1}+(-1)^n p_n s_k=0.$$

Такъ какъ k здѣсь остается произвольнымъ, то мы получаемъ неограниченный рядъ уравненій, дающій возможность послѣдовательно выражать всѣ простыя функціи черезъ основныя. Изложенный переходъ отъ соотношеній (10) къ уравненіямъ (12) практикуется вездѣ и приведенъ нами для читателей, незнакомыхъ съ формулами Ньютона. Я. С. Дубнову принадлежитъ изложенный выше выводъ соотношеній (10).

Новый выводъ соотношенія между ариѳметическимъ и геометрическимъ средними.

М. Шульмана.

Нужно доказать теорему: среднее геометрическое нѣсколькихъ положительныхъ чиселъ, которыя не всѣ равны между собой, меньше ихъ ариѳметическаго средняго:

Прежде чѣмъ приступить къ доказательству теоремы, докажемъ одно предложеніе.

Лемма. Если a и b суть положительныя числа и $a>1$, а $b<1$, то $ab+1<a+b$.

Пусть $a=1+\alpha$, $b=1-\beta$; α и β положительныя числа. Тогда

$$ab+1=(1+\alpha)(1-\beta)+1=1+\alpha-\beta+1-\alpha\beta=a+b-\alpha\beta<a+b.$$

Доказательство теоремы. Сначала докажемъ теорему для частнаго случая, когда среднее геометрическое данныхъ чиселъ равно 1.

Пусть даны числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которыхъ среднее геометрическое равно 1, т. е. $\sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}=1$.

Докажемъ, что $1<\dfrac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{n}$ или

$$n<q_1+q_2+\cdots+q_n. \tag{1}$$

Примѣнимъ методъ полной индукціи: предполагая соотношеніе (1) справедливымъ для n чиселъ, докажемъ, что оно справедливо и для $(n+1)$ чиселъ.

Пусть даны $(n+1)$ положительныхъ чиселъ: $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$, такихъ, что $\sqrt[n+1]{q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \cdot q_{n+1}} = 1$.

Возьмемъ n чиселъ:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, (q_n \cdot q_{n+1}),$$

они удовлетворяютъ поставленному выше условію относительно средняго геометрическаго. Поэтому имѣемъ, согласно нашему предположенію:

$$n < q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} + q_n \cdot q_{n+1}.$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по 1:

$$n + 1 < q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} + q_n \cdot q_{n+1} + 1. \qquad (2)$$

Среди нашихъ чиселъ есть и большія и меньшія единицы; мы имѣемъ поэтому право считать одно изъ чиселъ q_n и q_{n+1} больше, а другое — меньше 1.

На основаніи леммы:

$$q_n \cdot q_{n+1} + 1 < q_n + q_{n+1}.$$

Теперь ясно, что замѣнивъ неравенство (2) неравенствомъ:

$$n + 1 < q_1 + q_2 + \cdots q_n + q_{n+1} \qquad (3)$$

мы его усилили.

Легко убѣдиться, что $2 < a + \frac{1}{a}$, если a есть положительное число отличное отъ 1; т. е. теорема вѣрна для $n = 2$; по доказанному она вѣрна для $n = 3$, а если для 3-хъ, то и для 4-хъ и т. д.

Освободимся теперь отъ условія, чтобы среднее геометрическое равнялось 1.

Пусть даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Среднее геометрическое обозначимъ черезъ r. Тогда $a_1 = rq_1$, $a_2 = rq_2, \ldots, a_n = rq_n$.

$$r = \sqrt[n]{rq_1 \cdot rq_2 \ldots rq_n} = r\sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \ldots q_n};$$

отсюда $\sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \ldots q_n} = 1$; по доказанному: $n < q_1 + q_2 + \cdots + q_n$. Умножимъ обѣ части на r и раздѣлимъ на n.

$$r < \frac{rq_1 + rq_2 + \cdots + rq_n}{n}$$

или

$$r < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Теорема доказана.

ПОЛЕМИКА.

По поводу замѣтки г. А. Охитовича, помѣщенной въ № 631 „Вѣстника“, считаю нелишнимъ указать, что приведенныя имъ 3 теоремы имѣются въ извѣстномъ сочиненіи E. Lucas. „Théorie des nombres“ стр. 341, exemple IV; годъ изданія — 1891.

М. Виленскій.

Отъ Организаціоннаго Комитета 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

Въ настоящее время законченъ печатаніемъ сборникъ: „Доклады, читанные на 2-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики въ Москвѣ“. Эта книга (21 печатный листъ) представляетъ собраніе докладовъ, читанныхъ на 2-мъ Съѣздѣ (съ 26 декабря 1913 г. — 3 января 1914 г.) и доставленныхъ ихъ авторами Организаціонному Комитету Съѣзда.

Цѣна — для членовъ Съѣзда 1 руб., для постороннихъ лицъ 2 руб. съ пересылкой.

Означенную книгу можно выписывать изъ редакціи журнала „Математическое Образованіе“. Москва, Маросейка, Козьмодемьянскій, 9.

БИБЛІОГРАФІЯ.

I. Рецензіи.

Атласъ картинъ по астрономіи. Съ объяснительнымъ текстомъ. Составили К. Л. Баевъ и А. Н. Высотскій. Москва, 1914. Изд. т-ва И. Д. Сытина. 20 стр. текста и 36 таблицъ. 21 × 27 *см.* Цѣна въ переплетѣ 2 руб. 50 к.

Искренно привѣтствуя появленіе въ свѣтъ очень хорошо выполненнаго изданія гг. Баева и Высотскаго: „Атласъ картинъ по Астрономіи“, являющагося первымъ, въ этомъ родѣ, изданіемъ въ Россіи, позволяю себѣ сдѣлать, по поводу него, нѣкоторыя замѣчанія.

1) Очень хорошо, что авторы взяли свой матеріалъ (небесныя фотографіи) изъ первыхъ рукъ — преимущественно изъ Америки; но они могли бы гораздо шире воспользоваться имѣющимся уже на лицо большимъ собраніемъ астрофотограммъ на русскихъ обсерваторіяхъ, и отнюдь не въ ущербъ дѣлу.

2) Подборъ рисунковъ въ „Атласѣ“ могъ бы быть разнообразнѣе и, такъ сказать, педагогичнѣе, слѣдовало бы прибавить рисунки нѣкоторыхъ основныхъ астрономическихъ инструментовъ, видъ типичной обсерваторіи и т. п. Почему-то не дано фотографій такихъ извѣстныхъ небесныхъ объектовъ, какъ

звѣздныя скопленія въ Персеѣ, кольцеобразная туманность въ Лирѣ и т. д.; за то, безъ ущерба можно было выпустить нѣкоторыя таблицы (напримѣръ, XII, XXI, XXVI и т. д.).

3) Въ описаніи рисунковъ необходимо было дать, для звѣздныхъ снимковъ, указанія на ихъ угловой масштабъ на небѣ, а также — на яркость самой слабой, еще видной звѣзды (хотя бы грубо приближенно). Иначе, читатели, мало знакомые съ небомъ, могутъ впасть въ сильное заблужденіе относительно сравнительной величины и яркости тѣхъ, или другихъ небесныхъ объектовъ.

Ограничиваясь этими замѣчаніями и оставляя въ сторонѣ мелочи, пожелаемъ самаго широкаго распространенія этому полезному изданію.

С. Костинскій.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

Атласъ картинъ по астрономіи. Съ объяснительнымъ текстомъ. Составили К. Л. Баевъ и А. Н. Высотскій. Москва, 1914. Изд. т-ва И. Д. Сытина. 20 стр. текста и 36 таблицъ. 21 × 27 *см.* Цѣна въ переплетѣ 2 руб. 50 к.

Несомнѣнно, что при чтеніи популярныхъ сочиненій по астрономіи крайне важно имѣть передъ глазами хорошія изображенія небесныхъ объектовъ, въ особенности въ настоящее время, когда примѣненіе фотографіи къ астрономіи позволяетъ получать интересные и богатые деталями снимки солнца, луны, кометъ, туманностей и пр. Между тѣмъ хорошія иллюстраціи можно встрѣтить только въ довольно дорогихъ изданіяхъ, къ тому же изданныхъ заграницей, тогда какъ въ русскихъ книгахъ по астрономіи, а тѣмъ болѣе въ учебникахъ космографіи, число иллюстрацій обыкновенно очень невелико и самое исполненіе картинъ мало удовлетворительное.

Настоящее изданіе имѣетъ цѣлью дать преподавателямъ космографіи и любителямъ астрономіи недорогое по цѣнѣ, но достаточно полное собраніе репродукцій большого формата главнымъ образомъ съ оригинальныхъ астрономическихъ фотографій; нѣкоторое количество рисунковъ добавлено для полноты, такъ какъ не всѣ небесные объекты удаются даже и въ настоящее время сфотографировать настолько хорошо, чтобы получить наглядную иллюстрацію. Значительное большинство фотографій получено на обсерваторіи Іеркса (въ Америкѣ); изъ рисунковъ два — спектръ солнца и видъ планеты Марсъ — исполнены въ краскахъ.

Текстъ „Атласа“ имѣетъ цѣлью дать краткое объясненіе къ таблицамъ и не претендуетъ на полноту въ описаніи того или другого объекта. Содержаніе таблицъ вкратцѣ слѣдующее.

Таблицы: I — V. Солнце, солнечныя пятна и протуберанцы. VI и VII. Солнечная корона. VIII. Спектръ Солнца и Юпитера. IX — XIII. Луна. XIV—XV. Планеты. XVI. Малая планета и метеоръ. XVII — XIX. Кометы. XX — XXII. Звѣздныя скопленія. XXIII — XXX. Туманности. XXXI — XXXII. Спектры звѣздъ. XXXIII — XXXVI. Млечный Путь.

Авторы.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 263 (6 сер.). Доказать, что числовая величина выраженія $x^{2^n} - y^{2^n}$, гдѣ x и y — цѣлыя, а n — цѣлое положительное число, дѣлится на 2^{n+2} въ томъ случаѣ, если она дѣлится на 2.

Шнайдерманъ (Витебскъ).

№ 264 (6 сер.). Доказать равенство

$$\varphi(abc) = \frac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c)\,d_1 d_2 d_3 \varphi(d)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,\varphi(d_3)\,d},$$

гдѣ a, b, c — любыя цѣлыя положительныя числа, гдѣ d_1, d_2, d_3, d суть соотвѣтственно общіе наибольшіе дѣлители паръ чиселъ b и c, c и a, a и b и всѣхъ трехъ чиселъ a, b, c, а $\varphi(n)$ есть вообще число чиселъ, не большихъ n и взаимно простыхъ съ n.

Н. С. (Одесса).

№ 265 (6 сер.). Найти общій видъ ирраціональныхъ чиселъ x, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что число $\frac{1}{x}$, если его записать въ видѣ безконечной десятичной дроби, изображается, начиная съ первой значащей цифры, тѣми же цифрами и въ томъ же порядкѣ, какъ и число x.

R.

№ 266 (6 сер.). Рѣшить систему уравненій.

$$3x^2 + 6yz + 3(y+z) = k^2 - 1,$$

$$3y^2 + 6zx + 3(z+x) = k^2 - 1,$$

$$3z^2 + 6xy + 3(x+y) = k^2 - 1.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 218 (6сер.). *Найти общій видъ многочленовъ* f (x) *четвертой степени, удовлетворяющихъ тожеству*

$$f(x) = f(1 - x).$$

Рѣшить уравненіе $f(x) = 0$, *гдѣ* $f(x)$ *есть данный полиномъ указаннаго свойства.*

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Искомый полиномъ $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ удовлетворяетъ по условію тожеству

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = A(1-x)^4 + B(1-x)^3 + C(1-x)^2 + D(1-x) + E.$$

Приравнивая въ обѣихъ частяхъ этого тожества коэффиціенты при x^4, x^3, x^2, x и свободные члены, получимъ пять линейныхъ уравненій относительно коэффиціентовъ A, B, C, D, E, при чемъ первое изъ этихъ уравненій приводится къ тожеству $A = A$; остальныя же четыре уравненія даютъ возможность опредѣлить общій видъ коэффиціентовъ B, C, D, E въ зависимости отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ третье изъ указанныхъ выше уравненій приводится также къ тожеству въ силу второго уравненія. Для оправданія высказанныхъ нами утвержденій надо подробно привести намѣченный выше путь рѣшенія. Но можно рѣшить задачу иначе. Прежде всего докажемъ, что тожеству $f(x) = f(1-x)$ могутъ удовлетворять лишь полиномы $f(x)$ четной степени. Дѣйствительно, если бы разсматриваемый полиномъ $f(x)$ имѣлъ видъ $Ax^{2k+1} + Bx^{2k} + \cdots + L$, гдѣ k — цѣлое неотрицательное число, то, приравнивая въ обѣихъ частяхъ тожества

$$Ax^{2k+1} + Bx^{2k} + \cdots + L = A(1-x)^{2k+1} + B(1-x)^{2k} + \cdots + L$$

коэффиціенты при x^{2k+1}, мы имѣли бы $A = -A$, откуда $A = 0$. Замѣтимъ теперь, что каждый изъ многочленовъ $x(1-x)$ и $x^2(1-x)^2$ удовлетворяетъ разсматриваемому тожеству, какъ это легко провѣрить непосредственной подстановкой $1-x$ вмѣсто x. Раздѣливъ искомый многочленъ $f(x)$ четвертой степени на многочленъ также четвертой степени $x^2(1-x)^2$, получимъ въ частномъ постоянный коэффиціентъ a и въ остаткѣ многочленъ $g(x)$, степень котораго не выше третьей. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ тожеству

$$(1) \quad f(x) = ax^2(1-x)^2 + g(x),$$

откуда, мѣняя x на $1-x$, имѣемъ тожественно

$$f(x) = ax^2(1-x)^2 + g(x) = ax^2(1-x)^2 + g(1-x) = f(1-x),$$

а потому многочленъ $g(x)$ также удовлетворяетъ тожеству

$$(2) \quad g(x) = g(1-x).$$

Слѣдовательно, многочленъ $g(x)$, будучи вообще не выше третьей степени, долженъ быть, какъ показано выше, многочленомъ четной степени, т. е. $g(x)$

есть многочленъ не выше второй степени, удовлетворяющій тожеству (2). Поэтому раздѣливъ многочленъ $g(x)$ на многочленъ второй степени $x(1-x)$, получимъ въ частномъ число b и въ остаткѣ многочленъ $h(x)$ не выше первой степени, откуда послѣ повѣрки дѣленія на основаніи тожества (2) приходимъ къ ряду тожествъ

$$g(x)=bx(1-x)+h(x)=bx(1-x)+h(1-x),$$

а потому многочленъ $h(x)$ удовлетворяетъ тожеству $h(x)=h(1-x)$ и вслѣдствіе этого тожества, какъ полиномъ степени не выше первой, приводится къ постоянному числу c. Итакъ $g(x)=bx(1-x)+c$, откуда [см. (1)]

$$(3)\quad f(x)=ax^2(1-x)^2+bx(1-x)+c,$$

или

$$f(x)=ax^4-2ax^3+(a-b)x^2+bx+c.$$

Такимъ образомъ, искомый многочленъ четвертой степени долженъ выражаться формулой (3), гдѣ a, b и c суть постоянные коэффиціенты; наоборотъ, при произвольныхъ значеніяхъ этихъ коэффиціентовъ многочленъ $f(x)$ удовлетворяетъ, какъ это легко провѣрить, тожеству $f(x)=f(1-x)$. Слѣдовательно при произвольныхъ значеніяхъ a, b, c формула (3) даетъ общее рѣшеніе вопроса. Для рѣшенія уравненія вида

$$(4)\quad ax^2(1-x)^2+bx(1-x)+c=0$$

достаточно положить (5) $x(1-x)=y$. Тогда уравненіе (4) приводится къ квадратному уравненію (6) $ay^2+by+c=0$. Пусть α и β корни уравненія (6). Тогда равенство (5) даетъ намъ два квадратныхъ уравненія $x^2-x+\alpha=0$ и $x^2-x+\beta=0$, изъ которыхъ находимъ четыре корня

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\alpha}}{2}\quad \text{и}\quad x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\beta}}{2}$$

уравненія (4)

Замѣчаніе. Разсуждая надъ любымъ полиномомъ четной степени, удовлетворяющимъ тожеству $f(x)=f(1-x)$ такъ же, какъ мы разсуждали надъ полиномомъ четвертой степени, можно показать, что выраженіе

$$a_0x^n(1-x)^n+a_1x^{n-1}(1-x)^{n-1}+a_2x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x(1-x)+a_n,$$

гдѣ n — любое цѣлое неотрицательное число, а $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — любыя числа, есть общій видъ полинома, удовлетворяющаго тожеству $f(x)=f(1-x)$.

Н. Михальскій (Екатеринославъ); *П. Волохинъ* (Ялта); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *И. Зюзинъ* (с. Архангель-ское); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 225 (6 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$5(\lg_y x+\lg_x y)=26,\quad xy=64.$$

Полагая $\lg_y x=z$, находимъ, что $y^z=x$, $x^{\frac{1}{z}}=y$, $\lg_x y=\frac{1}{z}$. Поэтому первое изъ предложенныхъ для рѣшенія уравненій можно записать въ видѣ

$5\left(z+\frac{1}{z}\right)=26$, $5z^2-26z+5=0$, откуда $z_1=5$, $z_2=\frac{1}{5}\cdot$ Итакъ $\lg_y x=5$ или $\lg_y x=\frac{1}{5}$, откуда

$$(1)\quad x=y^5 \quad \text{или} \quad (2)\quad x=y^{\frac{1}{5}}.$$

Подставляя значенiе x изъ каждаго изъ уравненiй (1), (2) во второе изъ данныхъ уравненiй, получимъ, что или $y^6=64$ или $y^{\frac{6}{5}}=64$, откуда, принимая во вниманiе лишь вещественныя значенiя логариөмовъ и, въ силу этого условiя, лишь положительныя значенiя чиселъ, находимъ два значенiя y, а именно $y_1=2$, $y_2=32$, которымъ [см. (1), (2)] соотвѣтствуютъ значенiя $x_1=32$, $x_2=2$ другого неизвѣстнаго. Итакъ рѣшенiя данной системы суть $x=2$, $y=32$ или $x=32$, $y=2$.

N. N. (Тифлисъ); *В. Кованько* (Вышнiй Волочокъ); *М. Бабинъ* (Петроградъ); *И. Зюзинъ* (с. Архангельское); *А. Иткинъ* (Петроградъ).

№ 226 (**6 сер.**). *Пусть* $\varphi(\mathfrak{n})$ *обозначаетъ вообще число чиселъ, взаимно простыхъ съ цѣлымъ положительнымъ числомъ* $\mathfrak{n}$ *и не превосходящихъ n. Доказать тожество*

$$\varphi(\mathfrak{ab})=\frac{\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b})\,\mathfrak{d}}{\varphi(\mathfrak{d})}$$

гдѣ $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *любыя цѣлыя положительныя числа, а* $\mathfrak{d}$ — *ихъ общiй наибольшiй дѣлитель.*

Если въ разложенiе составного числа M входятъ простыя числа s_1, $s_2, \ldots, s_\nu$ и притомъ только эти простыя числа, то, какъ извѣстно,

$$\varphi(M)=M\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{s_\nu}\right),$$

или же (1) $\varphi(M)=MS$, если положить

$$\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{s_\nu}\right)=S.$$

Формула (1) сохраняетъ свою силу и въ томъ случаѣ, когда M есть степень простого числа s_1 или когда $M=1$, если условиться положить въ первомъ случаѣ $S=1-\frac{1}{s_1}$, а во второмъ $S=1$. Пусть вообще $p_1, p_2, \ldots, p_m$ суть всѣ простыя числа, входящiя вообще въ разложенiе общаго наибольшаго дѣлителя d чиселъ a и b, и пусть вообще въ разложенiе числа a, кромѣ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_m$, входятъ еще новыя простыя числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а въ разложенiе числа b, кромѣ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_m$, входятъ еще новыя простыя числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Ясно, что среди простыхъ чиселъ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ нѣтъ ни одного, равнаго одному изъ простыхъ чиселъ $r_1, r_2, \ldots, r_k$, такъ какъ иначе общiй наибольшiй дѣлитель d чиселъ a и b содержалъ бы еще хоть одно простое число, кромѣ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Поэтому произведенiе ab содержитъ въ своемъ разложенiи неравныя между собою простыя числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$, а всѣ неравныя между собою простыя числа, входящія въ разложенія чиселъ a и b, суть соотвѣтственно p_1, $p_2, \ldots, p_m$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Поэтому, полагая

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)=P,\quad \left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)=Q,$$

$$\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\left(1-\frac{1}{r_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}\right)=R,$$

имѣемъ (2) $\varphi(d)=dP$,

$$\varphi(ab)=ab\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\left(1-\frac{1}{r_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}\right),$$

или (3) $\varphi(ab)=abPQR$, $\varphi(a)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$,

или (4) $\varphi(a)=aPQ$, и точно такъ же (5) $\varphi(b)=bPR$; наконецъ, перемноживъ равенства (4) и (5) и раздѣливъ результатъ на равенство (2), получимъ

$$\frac{\varphi(a)\,\varphi(b)}{\varphi(d)}=\frac{abP^2QR}{dP}=\frac{abPQR}{d},\quad \text{откуда}\quad \frac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,d}{\varphi(d)}=abPQR,$$

или [см. (2)]

$$(6)\qquad \frac{\varphi(a)\,\varphi(b)\,d}{\varphi(d)}=\varphi(ab).$$

Формула (6) остается вѣрной и въ тѣхъ случаяхъ, когда a и b суть числа, взаимно простыя, или когда исчезаетъ та или другая (или обѣ) изъ группъ простыхъ чиселъ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ или $r_1, r_2, \ldots, r_k$; въ этихъ случаяхъ, сохраняя по существу тотъ же методъ доказательства, достаточно положить [см. (1)] соотвѣтственно $P=1$, $Q=1$ или $R=1$.

М. Быкъ (Кіевъ); *В. Шидловскій* (Рига); *М. Бабинъ* (Петрградъ).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
ищется