Обложка
пщется

Обложка
ищется

Второй серіи II-го семестра №№ 2—3.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

# и

# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 614—615.



## Страхованіе жизни*).

*П. Флорова.*

Вопросы о страхованіи жизни излагаются въ сочиненіяхъ академиковъ В. Я. Буняковскаго и А. А. Маркова. Если къ „Основаніямъ аналитической теоріи вѣроятностей“ В. Я. Буняковскаго, изданнымъ въ 1846 году и къ „Исчисленію вѣроятностей“ А. А. Маркова, изданномъ въ 1908 году**) присоединить „Теорію вѣроятностей“ Волкова (Москва, 1913), то литература вопроса будетъ исчерпана.

Существующее status quo, слѣдовательно, таково, что лицу, желающему ознакомиться съ основаніями страхованія жизни, надо предварительно подняться на высокую ступень математическаго образованія. Между тѣмъ вопросы эти по существу своему элементарны и могутъ

*) Помѣщая настоящую статью, редакція не имѣетъ въ виду поддержать тенденцію г. Флорова о введеніи началъ теоріи вѣроятностей въ курсъ средней школы; статья просто предназначена для лицъ, желающихъ ознакомиться съ этимъ интереснымъ вопросомъ въ строго элементарномъ изложеніи.

**) Третье изданіе въ 1913 г.

быть изложены очень доступно. Такое именно рѣшеніе, во всѣхъ своихъ частяхъ доступное ученикамъ среднихъ школъ, и предлагается въ настоящей статьѣ. Оно основано на леммѣ, относящейся къ вѣроятностямъ жизни одного лица. Эта лемма впервые была опубликована мною въ рефератѣ „Теорія вѣроятностей, какъ учебный предметъ средней школы", доложенномъ 24 іюня 1913 года XIII-му Съѣзду русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ и прочитанному 2 іюля 1913 года на краткосрочныхъ курсахъ для учителей среднихъ учебныхъ заведеній, устроенныхъ при Харьковской Педагогической выставкѣ. Примѣненіе той же самой леммы къ актуарнымъ задачамъ, связаннымъ съ жизнью двухъ лицъ, даетъ простое рѣшеніе полной системѣ задачъ этого рода. Изъ общаго числа восьми такихъ задачъ пять рѣшены въ вышеупомянутыхъ сочиненіяхъ академиковъ. Объ этомъ мною было сообщено 2 января 1914 года II-ому Всероссійскому Съѣзду преподавателей математики въ Москвѣ въ докладѣ подъ названіемъ „Страхованіе пенсій". На этомъ основаніи въ настоящей статьѣ вопроса о пенсіяхъ я не буду касаться.

---

## § 1. Вѣроятность жизни одного лица.

Таблица смертности содержитъ въ себѣ свѣдѣнія о томъ, сколько изъ тысячи одновременно родившихся человѣкъ доживаютъ до одного года, сколько до двухъ, до трехъ и вообще до любого числа лѣтъ въ предѣлахъ человѣческой жизни. Если лицо $A$ имѣетъ возрастъ $a$, то его вѣроятность прожить еще $i$ лѣтъ найдется по таблицѣ смертности такъ: пусть число лицъ, имѣющихъ возрастъ $a$ равно $k$ и число лицъ возраста $a+i$ пусть будетъ $l$, тогда искомая вѣроятность равна

$$P_{a+i}=l/k.$$

Ясно, что вѣроятность лицу $A$ умереть не достигши $a+i$ лѣтъ равна

$$1-P_{a+i}=(k-l)/k.$$

Обозначимъ черезъ $A_{a+i}$ вѣроятность лицу $A$, дожившему до $a$ лѣтъ, умереть въ возрастѣ между $a+i$ и $a+i+1$ годами. Пусть таблица смертности показываетъ, что число лицъ возраста $a+i+1$ равно $m$. Тогда искомая вѣроятность будетъ

$$A_{a+i}=(l-m)/k.$$

## § 2. Уравненіе математическаго ожиданія.

Главныя задачи страхованія жизни заключаются въ обезпеченіи нѣкоторой денежной поддержкой собственной старости лица, страхующаго свою жизнь, и въ возмѣщеніи матеріальнаго ущерба, причиняемаго семейству преждевременной смертью члена этого семейства. Обѣ названныя операціи и многія другія съ ними однородныя производятся за опредѣленную плату особыми товариществами, извѣстными подъ названіемъ страховыхъ обществъ.

При рѣшеніи задачъ на страхованіе жизни страховое общество и страхователь уподобляются двумъ игрокамъ, которые затѣяли между собою безобидную игру. Безобидность характеризуется тѣмъ, что для каждой стороны математическое ожиданіе выгоды должно быть нулемъ. При вычисленіи математическаго ожиданія надо всѣ значенія выгоды умножить на соотвѣтствующія имъ вѣроятности и результаты сложить. Если математическое ожиданіе выгоды страхового общества приравнять нулю, то это и будетъ уравненіе математическаго ожиданія. При вычисленіи частныхъ значеній выгоды придется принимать во вниманіе выдаваемые страховымъ обществомъ платежи и получаемые имъ взносы. Обозначая вообще платежъ черезъ $M$, а взносъ черезъ $x$ надо всякій разъ знать, черезъ сколько лѣтъ уплачивается сумма $M$ и черезъ сколько лѣтъ вносится сумма $x$. Пусть капиталъ страхового общества приноситъ ему $r$ процентовъ. Сумма $M$, которая будетъ уплачена черезъ $i$ лѣтъ, въ настоящее время имѣетъ цѣнность $\frac{M}{(1+r/100)^i}$.

Точно также сумма $x$, вносимая черезъ $i$ лѣтъ, имѣетъ въ настоящее время цѣнность $\frac{x}{(1+r/100)^i}$.

Если введемъ обозначеніе $1+r/100=\omega$, то придемъ къ заключенію, что формулы

$$M/\omega, \quad M/\omega^2, \quad M/\omega^3, \ldots,$$

представляютъ собою современныя стоимости суммъ, уплачиваемыхъ черезъ годъ, два, три и т. д. Подобнымъ образомъ выяснимъ, что формулы

$$x/\omega, \quad x/\omega^2, \ x/\omega^3, \ldots,$$

изображаютъ собою современныя стоимости суммъ, вносимыхъ соотственно черезъ годъ, два, три и т. д.

При составленіи уравненія математическаго ожиданія предполагаютъ, что лицо $A$ въ день заключенія страховой операціи имѣетъ ровно $a$ лѣтъ и что страховое общество производитъ свои платежи не иначе, какъ въ день годовщины страховой операціи.

## § 3. Основная операція страхованія жизни.

Основная операція страхованія жизни можетъ быть предложена въ формѣ слѣдующаго вопроса.

Вычислить, какую сумму должно уплатить страховому обществу лицо, имѣющее $a$ лѣтъ отъ роду, чтобы по достиженіи $a+i$ лѣтъ получить съ общества $M$ рублей.

Обозначимъ искомую сумму черезъ $x$. Пусть вѣроятность дожить до $a+i$ лѣтъ лицу $a$-лѣтняго возраста, опредѣленная по таблицѣ смертности, будетъ равна $P_{a+i}$. Если страхующееся лицо не доживетъ до $a+i$ лѣтъ, вѣроятность чего $1-P_{a+i}$, то общество будетъ свободно отъ всякихъ платежей и получитъ прибыль $x$. Если же кліентъ общества (страхователь) доживетъ до $a+i$ лѣтъ, вѣроятность чего $P_{a+i}$, то общество заплатитъ ему такую сумму, стоимость которой черезъ $i$ лѣтъ послѣ заключенія страховой операціи возрастаетъ до $M$ рублей. Стоимость той же суммы, отнесенная ко дню заключенія страховой операціи равна (§ 2) $M/\omega^i$. Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ прибыль страхового общества будетъ: $x-M/\omega^i$.

Составимъ теперь формулу математическаго ожиданія выгоды общества (§ 2). Для этого ожидаемыя выгоды умножимъ на соотвѣтственныя вѣроятности ихъ полученія и результаты сложимъ. Получится формула:

$$x(1-P_{a+i})+(x-M/\omega^i)P_{a+i}.$$

Для безобидности страховой операціи нужно приравнять нулю математическое ожиданіе выгоды страховаго общества. Уравненіе математическаго ожиданія будетъ:

$$x(1-P_{a+i})+(x-M/\omega^i)P_{a+i}=0.$$

Опредѣливъ отсюда $x$, получимъ:

$$x=M/\omega^i\,P_{a+i}.$$

Эта сумма, вычисленная по правилу бозобидности, носитъ названіе неттопреміи. На практикѣ съ страхователя взыскивается нѣсколько большая сумма (бруттопремія) въ виду того, что страховое общество должно оплачивать изъ своихъ прибылей не только смертельные случаи среди кліентовъ, но и расходы по управленію дѣлами Общества.

## § 4. Вѣроятность жизни одного лица.

Если лицо $A$ доживетъ до $a$ лѣтъ, то оно умретъ или въ возрастѣ между $a$ и $a+1$ годами, или между $a+1$ и $a+2$ годами, или между $a+2$ и $a+3$ годами и т. д. до предѣла человѣческой жизни.

Обозначимъ событіе смерти лица $A$ въ возрастѣ между $a$ и $a+1$ символомъ $A_a$ и тѣмъ же символомъ выразимъ вѣроятность этой смерти. Точно также событіе смерти и вѣроятность смерти лица $A$ въ возрастѣ между $a+1$ и $a+2$ годами назовемъ черезъ $A_{a+1}$. Вообще пусть $A_{a+i}$ будетъ событіе смерти и вѣроятность смерти лица $A$ въ возрастѣ между $a+i$ и $a+i+1$ годами. Тогда по силѣ основного закона вѣроятностей найдемъ:

$$A_a+A_{a+1}+A_{a+2}+A_{a+3}+\cdots=1,$$

гдѣ рядъ продолженъ до предѣла человѣческой жизни.

Пусть $P_{a+i}$ означаетъ вѣроятность тому же лицу $A$ дожить до $a+i$ лѣтъ. Легко понять, что $P_{a+i}$ равняется суммѣ вѣроятностей умереть лицу $A$ между $a+i$ и $a+i+1$ годами или между $a+i+1$ и $a+i+2$ и такъ далѣе до предѣла человѣческой жизни. Кто не желаетъ признать это предложенiе за очевидное, тотъ долженъ представить вышевыведенное равенство въ формѣ

$$A_{a+i}+A_{a+i+1}+\cdots=1-(A_a+A_{a+1}+\cdots+A_{a+i-1}),$$

здѣсь сумма

$$A_a+A_{a+1}+\cdots+A_{a+i-1},$$

выражаетъ собою вѣроятность умереть лицу $A$ въ возрастѣ между $a$ и $a+i$ годами. Слѣдовательно, вѣроятность не умереть ему въ томъ же возрастѣ равна

$$1-(A_a+A_{a+1}+\cdots+A_{a+i-1}).$$

Вѣроятность лицу $A$, имѣющему возрастъ $a$, не умереть между $a$ и $a+i$ годами есть вѣроятность дожить ему до $a+i$ лѣтъ.

Поэтому

$$P_{a+1}=1-(A_a+A_{a+1}+\cdots+A_{a+i-1})$$

и, слѣдовательно,

$$P_{a+i}=A_{a+i}+A_{a+i+1}+\cdots$$

что и требовалось доказать.

Полученное равенство можно прочитать такъ: вѣроятность лицу, прожившему $a$ лѣтъ, прожить еще $i$ лѣтъ равна суммѣ вѣроятностей умереть ему въ возрастѣ между $a+i$ и $a+i+1$ годами или между $a+i+1$ и $a+i+2$ годами и т. д. до предѣла человѣческой жизни.

Если поставимъ въ предыдущую формулу 1, 2, 3,..., на мѣсто $i$, то послѣдовательно получимъ:

$$P_{a+1}=A_{a+1}+A_{a+2}+A_{a+3}+A_{a+4}+\cdots$$

$$P_{a+2}=\qquad A_{a+2}+A_{a+3}+A_{a+4}+\cdots$$

$$P_{a+3}=\qquad\qquad A_{a+3}+A_{a+4}+\cdots$$

Это и есть лемма, относящаяся къ вѣроятностямъ жизни одного лица.

## § 5. Другой выводъ основной формулы страхованія.

Вычислить, какую сумму должно уплатить страховому обществу лицо, имѣющее $a$ лѣтъ отъ роду, чтобы по достиженіи $a+i$ лѣтъ получить съ общества $M$ рублей.

Обозначимъ искомую сумму черезъ $x$.

Страхователь можетъ умереть въ возрастѣ между $a$ и $a+1$, $a+1$ и $a+2$, $a+2$ и $a+3, \cdots$, годами. Событія эти и ихъ вѣроятности выражаются символами:

$$A_a,\quad A_{a+1},\quad A_{a+2},\ldots$$

Если страхователь умретъ, не достигнувъ $a+1$ лѣтъ, т. е. если состоится одно изъ событій:

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \ldots, A_{a+i-1}$$

то страховое общество, получившее $x$ рублей, будетъ свободно отъ платежа. Слѣдовательно, прибыль страхового общества будетъ $x$ рублей при каждомъ изъ перечисленныхъ событій. Если страхователь умретъ въ возрастѣ между $a+1$ и $a+i+1$ годами, то въ годъ смерти онъ получитъ съ общества сумму $M$ рублей, цѣнность которой, отнесенная ко дню страхованія, равна $M/\omega^i$ (§ 2). Слѣдовательно, при событіи $A_{a+1}$ прибыль страхового общества выразится формулой:

$$x - M/\omega^i.$$

Въ составѣ этой прибыли не произойдетъ никакого измѣненія, если страхователь умретъ въ позднѣйшемъ возрастѣ, т. е. если состоится одно изъ событій:

$$A_{a+i+1}, \quad A_{a+i+2}, \quad A_{a+i+3}, \ldots$$

Составимъ теперь математическое ожиданіе прибыли общества: для этого нужно частныя значенія прибыли умножить на ихъ вѣроятности и результаты сложить. Получится:

$$xA_a + xA_{a+1} = xA_{a+2} + \cdots + xA_{a+i-1} +$$

$$+ (x - M/\omega^i)\, A_{a+i} + (x - M/\omega^i)\, A_{a+i+1} + (x - M/\omega^i)\, A_{a+i+2} + \cdots$$

Преобразуемъ эту формулу. Коэффиціентъ при $x$ очевидно равенъ (§ 4):

$$A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \cdots = 1,$$

а коэффиціентъ при $-M/\omega^i$ равенъ (§ 4):

$$A_{a+i} + A_{a+i+1} + A_{a+i+2} + \cdots = P_{a+i}.$$

Поэтому математическое ожиданіе приметъ видъ:

$$x - M/\omega^i\, P_{a+i}.$$

Приравнявъ это по правилу безобидности нулю, получимъ:

$$x = M/\omega^i\, P_{a+i}.$$

## § 6. Страхованіе пожизненнаго дохода.

Вычислить, какую сумму должно уплатить страховому обществу лицо, имѣющее возрастъ $a$ лѣтъ, чтобы по достиженіи возраста $a+i$ лѣтъ ежегодно получать съ общества до своей смерти по $M$ рублей.

Пусть искомая сумма будетъ $x$. Общество приняло на себя обязательство, въ случаѣ продолжающейся жизни страхователя выплачивать ему по $M$ рублей по прошествіи числа лѣтъ $i$, $i+1$, $i+2, \cdots$, до предѣла человѣческой жизни. Стоимости этихъ выдачъ, отнесенныя къ моменту страхованія, соотвѣтственно равны (§ 2):

$$M/\omega^i, \quad M/\omega^{i+1}, \quad M/\omega^{i+2}, \ldots$$

Страхователь можетъ умереть по прожитіи числа лѣтъ $a$, $a+1$, $a+2, \cdots$ Эти событія, равно какъ и ихъ вѣроятности, мы условились обозначать (§ 4) соотвѣтственно черезъ

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \ldots$$

Если страхователь умретъ до достиженіи $a+i$ лѣтъ, т. е. если произойдетъ одно изъ $i$ событій

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \ldots, \; A_{a+i-1},$$

то общество, получившее $x$ рублей, будетъ свободно отъ платежа. Слѣдовательно, общество получитъ прибыль $x$ рублей. Если страхователь умретъ между $a+i$ и $a+i+1$ годами, т. е. если случится событіе $A_{a+i}$, то общество заплатитъ сумму $M/\omega^i$ и, слѣдовательно, его прибыль будетъ $x - M/\omega^i$.

При событіи $A_{a+i+1}$ прибыль общества выразится формулой:

$$x - M/\omega^i - M/\omega^{i+1}.$$

При событіи $A_{a+i+2}$ прибыль общества выразится формулой:

$$x - M/\omega^i - M/\omega^{i+1} - M/\omega^{i+2} \text{ и т. д.}$$

Математическое ожиданіе прибыли общества, равное суммѣ произведеній всевозможныхъ частныхъ ея значеній на соотвѣтственныя вѣроятности, выражается формулой (§ 2):

$$xA_a + xA_{a+1} + xA_{a+2} + \cdots + xA_{a+i-1} +$$
$$+ (x - M/\omega^i)\, A_{a+1} + (x - M/\omega^i - M/\omega^{i+1})\, A_{a+i+1} + \cdots$$

Преобразуемъ эту формулу. Коэффиціентъ при $x$ равенъ (§ 4):

$$A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \cdots = 1.$$

Коэффиціентъ при $-M/\omega^i$ равенъ (§ 4):

$$A_{a+i} + A_{a+i+1} + \cdots = P_{a+1}.$$

Коэффиціентъ при $-M/\omega^{i+1} + 1$ равенъ (§ 4):

$$A_{a+i+1} + A_{a+i+2} + \cdots = P_{a+i+1} \text{ и т. д.}$$

Приравнявъ послѣ этого преобразованія математическое ожиданіе нулю, получимъ:

$$x = M/\omega^i\, P_{a+i} + M/\omega^{i+1}\, P_{\ +i+1} + M/\omega^{i+2}\, P_{+\ } + \cdots.$$

## § 7. Страхованіе наслѣдства.

Вычислить, какую сумму должно уплатить страховому обществу лицо $a$-лѣтняго возраста, чтобы наслѣдники его получили отъ общества $M$ рублей въ первую послѣ его смерти годовщину страховой операціи.

Пусть $x$ означаетъ искомую сумму. Платежи общества обусловлены событіями (§ 4):

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \ldots$$

Общество заплатитъ наслѣдникамъ $M$ рублей или черезъ годъ съ вѣроятностью $A_a$, или черезъ два съ вѣроятностью $A_{a+1}$, или черезъ три съ вѣроятностью $A_{a+2}$, и т. д. Цѣнности этихъ платежей, отнесенныя ко дню страхованія, соотвѣтственно равны:

$$M/\omega, \quad M/\omega^2, \quad M/\omega^3, \ldots$$

Если случится событіе $A_a$, то прибыль общества будетъ $x - M/\omega$. При событіи $A_{a+1}$ прибыль выразится формулой $x - M/\omega^2$. При событіи $A_{a+2}$ прибыль выразится формулой $x - M/\omega^3$ и т. д.

Математическое ожиданіе прибыли будетъ (§ 2):

$$(x - M/\omega)\, A_a + (x - M/\omega^2)\, A_{a+1} + (x - M/\omega^3)\, A_{a+2} + \cdots$$

Приравнявъ это нулю и принявъ во вниманіе, что (§ 4)

$$A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \cdots = 1$$

получимъ:

$$x = M/\omega\, A_a + M/\omega^2\, A_{a+1} + M/\omega^3\, A_{a+2} + \cdots.$$

## § 8. Другой видъ страхованія наслѣдства.

Вычислить, по скольку рублей лицо $a$-лѣтняго возраста должно ежегодно вносить страховому обществу до своей смерти для того, чтобы обезпечить своимъ наслѣдникамъ единовременную премію $M$ рублей, выплачиваемую въ первую послѣ смерти годовщину страховой операціи.

Пусть $x$ рублей будетъ искомый ежегодный взносъ. Взаимоотношенія между страховымъ обществомъ, страхователемъ и его наслѣдниками обусловлены событіями (§ 4):

$$A_a, \quad A_{a+1}, \quad A_{a+2}, \ldots$$

Если состоится событіе $A_a$, то страхователь успѣетъ сдѣлать только одинъ взносъ, стоимость котораго въ моментъ страхованія, есть $x$ рублей; при этомъ наслѣдники получатъ страховую премію въ первую годовщину страховой операціи; ея стоимость, отнесенная ко дню страхованія, равна $M/\omega$.

Поэтому прибыль общества будетъ:

$$x - M/\omega.$$

Если состоится событіе $A_{a+1}$, то прибыль общества выразится формулой:

$$x + x/\omega - M/\omega^2$$

потому что страхователь успѣетъ сдѣлать два взноса, а наслѣдники получатъ премію во вторую годовщину страховой операціи.

Если состоится событіе $A_{a+2}$, то прибыль общества будетъ:

$$x + x/\omega + x/\omega^2 - M/\omega^3 \text{ и т. д.}$$

Чтобы найти математическое ожиданіе прибыли общества надо всѣ частныя ея значенія умножить на соотвѣтственныя вѣроятности и результаты сложить (§ 2). Послѣ сложенія окажется, что коэффиціентъ при $x$ равенъ суммѣ (§ 4):

$$A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \cdots = 1.$$

Коэффиціентъ при $x/\omega$ равенъ суммѣ:

$$A_{a+1} + A_{a+2} + A_{a+3} + \cdots = P_{a+1}.$$

Коэффиціентъ при $x/\omega^2$ равенъ суммѣ:

$$A_{a+2} + A_{a+3} + A_{a+4} + \cdots = P_{a+2} \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, уравненіе математическаго ожиданія будетъ:

$$x + x/\omega\, P_{a+1} + x/\omega^2\, P_{a+2} + \cdots = M/\omega\, A_a + M/\omega^2\, A_{a+1} + M/\omega^3\, A_{a+2} + \cdots$$

Изъ этого уравненія найдется искомая сумма $x$.

---

# Вольтова дуга.

*Проф. Ш. Гюи.* (Переводъ съ французскаго).

---

Во время безсмертныхъ опытовъ братьевъ Монгольфьеръ въ 1783 г., на которыхъ присутствовалъ дворъ Людовика XVI-го, среди общаго энтузіазма одинъ дворянинъ скептически спросилъ Франклина: „Но для чего служатъ эти шары?“ Его знаменитый собесѣдникъ, какъ извѣстно, ограничился замѣчаніемъ: „А для чего служитъ новорожденный?“

Прекрасный отвѣтъ Франклина былъ бы очень часто умѣстнымъ въ исторіи научныхъ открытій. Вѣдь, въ самомъ дѣлѣ, ребенокъ можетъ сдѣлаться человѣкомъ, и нерѣдко замѣчательной личностью въ мірѣ науки и промышленности. Такъ случилось и съ вольтовой дугой.

Въ 1800 г. Гёмфри Дэви (Davy) получилъ преподнесенную ему по подпискѣ электрическую батарею изъ двухъ тысячъ элементовъ. Соединивъ два полюса этой батареи съ двумя угольными стержнями, Дэви замѣтилъ, между концами этихъ стержней, если привести ихъ въ соприкосновеніи другъ съ другомъ и затѣмъ разъединить ихъ, что появляется маленькое пламя; потокъ теплаго воздуха придалъ ему форму дуги, почему Дэви и назвалъ его вольтовой дугой.

Со времени своего открытія вольтова дуга сдѣлалась не только мощнымъ источникомъ свѣта, но и самымъ драгоцѣннымъ подспорьемъ въ электрохиміи и электрометаллургіи. Въ то же время она является въ рукахъ изслѣдователя наиболѣе мощнымъ средствомъ для полученія высокихъ температуръ.

Съ начала послѣдняго десятилѣтія отъ нея ожидаютъ не только экономическаго, но и чуть ли не соціальнаго переворота. Задача использованія атмосфернаго азота, другими словами, фабрикація въ большомъ количествѣ и по дешевой цѣнѣ азотатовъ и, стало быть, цѣлой категоріи химическихъ удобреній была начата прямымъ сожиганіемъ азота кислородомъ воздуха внутри вольтовой дуги.

Независимо отъ тѣхъ грандіозныхъ примѣненій, которыя поглощаютъ естественную энергію (паденія воды) сотнями тысячъ лошадиныхъ силъ, вольтова дуга дала мѣсто цѣлому ряду менѣе важныхъ примѣненій, о которыхъ мы будемъ имѣть случай сказать нѣсколько словъ. Она позволила съ успѣхомъ начать разработку важной задачи безпроволочнаго телефонированія, и при условіяхъ, значительно болѣе благопріятныхъ, чѣмъ при всѣхъ предыдущихъ попыткахъ.

Наука и индустрія не могутъ имѣть болѣе искуснаго и преданнаго слуги.

## I. Описаніе явленія дуги.

Напомнимъ вкратцѣ наблюдаемыя явленія и выберемъ, для большей ясности, дугу между угольными электродами; благодаря многочисленнымъ примѣненіямъ дуга этого рода наиболѣе извѣстна и наиболѣе изучена.

Проектируя на экранъ при помощи линзы угли дуговой лампы постояннаго тока, мы замѣчаемъ, что сама дуга имѣетъ гораздо меньшій блескъ, чѣмъ накаленные концы углей. Кромѣ того, положительный уголь свѣтится сильнѣе отрицательнаго, что указываетъ на его болѣе высокую температуру; въ немъ образуется углубленіе въ видѣ кратера, отрицательный же уголь, самъ собою заостряется.

Віоль (Violle) опредѣлилъ температуру положительнаго угля въ 3500°, а отрицательнаго — въ 2700°; что же касается температуры самой дуги, то она, вообще, выше температуры углей. Слабый свѣтъ дуги объясняется ея газообразной природой и слабой испускательной способностью горячихъ газовъ въ тѣхъ случаяхъ, когда не имѣютъ мѣста явленія люминесценціи, столь характерныя для Гейслеровыхъ трубокъ.

Важно также замѣтить, что свѣтящаяся поверхность положительнаго кратера тѣмъ больше, чѣмъ значительнѣе сила тока; но дѣйствительный блескъ этой поверхности, т. е. количество свѣта, испускаемое каждымъ квадратнымъ миллиметромъ, остается почти что однимъ и тѣмъ же, какова бы ни была сила тока.

Возможно, стало быть, что температура положительнаго кратера не зависитъ отъ силы тока и опредѣлена какимъ-либо физическимъ явленіемъ. По мнѣнію многихъ физиковъ, это температура кипѣнія углерода.

Напомнимъ, наконецъ, что положительный уголь изнашивается гораздо скорѣе отрицательнаго, при чемъ ясно констатируется переносъ матеріи съ положительнаго угля на отрицательный (Blondel).

Таковъ ансамбль явленій, наблюдаемыхъ въ воздухѣ при атмосферномъ давленіи. Зажигая дугу въ пустотѣ, мы наблюдаемъ въ общихъ чертахъ тѣ же самыя явленія, за исключеніемъ дѣйствія кислорода, производящаго горѣніе, и свиста дуги.

## II. Теорія дуги.

Хотя вольтова дуга извѣстна уже свыше ста лѣтъ и примѣненія ея поглощаютъ сотни тысячъ лошадиныхъ силъ, — внутренній ея механизмъ все еще остается таинственнымъ во многихъ отношеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, вольтова дуга представляетъ собой частный случай общаго явленія электрическаго разряда въ газахъ, а изученіе этого явленія представляетъ сложную и тонкую задачу.

Ф л е м и н г ъ (Fleeming) думалъ, что дуга образуется изъ частичекъ углерода, оторванныхъ отъ отрицательнаго угля; заряженныя отрицательно, частички эти служатъ такимъ образомъ для переноса электричества, токъ же, проходящій черезъ дугу, является настоящимъ конвекціоннымъ токомъ.

Эти наэлектризованныя угольныя частицы, ударяясь о положительный уголь, нагрѣваютъ его и вырываютъ въ немъ углубленіе въ формѣ кратера, какъ это сдѣлала бы струя песку. Въ настоящее время это объясненіе, очень простое и заключающее въ себѣ долю истины, не является болѣе достаточнымъ.

Современные физики стараются включить явленіе дуги въ общіе законы электрическаго разряда въ газахъ. Они предлагаютъ объяснять эти явленія диссоціацією матеріи, а т о м и с т и ч е с к о й д и с с о ц і а ц і е й среди примѣровъ подобной диссоціаціи намъ особенно извѣстны радіоактивность и катодные лучи, получающіе съ каждымъ днемъ все большее и большее значеніе при объясненіи физическихъ явленій.

Почти одновременно двумъ очень авторитетнымъ ученымъ, Д ж. Д ж. Т о м с о н у (J. J. Thomson) и Ш т а р к у (Stark), удалось дать теорію функціонированія дуги, удовлетворительную въ своихъ главныхъ частяхъ и вполнѣ согласную съ современными воззрѣніями на механизмъ проводимости электричества въ газахъ. Позволимъ себѣ вкратцѣ резюмировать эту теорію. Но вначалѣ напомнимъ одно существенное положеніе: дуга не можетъ появиться и держаться, если отрицательный уголь или катодъ не накаленъ, при чемъ накаливаніе это можетъ быть произведено либо проходящимъ электрическимъ токомъ, либо какой-либо внѣшней причиной (проскакиваніе электрической искры, искусственное нагрѣваніе и т. д.).

Но послѣднія изслѣдованія о проводимости газовъ показали, что всякое накаленное тѣло испускаетъ отрицательные электроны или корпускулы, количество которыхъ тѣмъ больше, чѣмъ выше температура накаливанія.

Итакъ, стало быть, катодъ съ огромной скоростью выбрасываетъ отрицательные электроны, эту атомную пыль, которая ударяется о находящіяся по сосѣдству молекулы газовъ и паровъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда анодъ (положительный уголь) находится достаточно близко отъ катода, можно допустить, что электроны непосредственно ударяются объ анодъ.

Отъ этихъ ударовъ электроновъ о молекулы происходитъ новая атомическая диссоціація, получившая названіе іонизаціи. Другими словами, нѣкоторое число молекулъ или атомовъ омывающей электроды газообразной атмосферы разбивается этими ударами на части: каждая изъ образовавшихся отъ этой диссоціаціи частицъ становится наэлектризованнымъ центромъ, — электроположительнымъ іономъ (заряженнымъ положительно) или іономъ электроотрицательнымъ (несущимъ равный первому, но отрицательный зарядъ).

Такъ какъ эти іоны оказываются въ электрическомъ полѣ, то они начинаютъ двигаться въ противоположныхъ направленіяхъ, одни къ катоду, другіе къ аноду, толкая и іонизируя на своемъ пути другія молекулы или атомы.

Конечнымъ результатомъ этого процесса является настоящее бомбардированіе положительными іонами катода и отрицательными — анода. Въ частности, этимъ бомбардированіемъ достигается повышеніе температуры катода и поддерживаніе его въ накаленномъ состояніи, необходимомъ для постоянно возобновляющагося испусканія электроновъ; имъ то и обезпечивается устойчивость дуги.

Такова въ общихъ чертахъ новѣйшая теорія вольтовой дуги, если совершенно оставить въ сторонѣ вычисленія и изслѣдованія возникающихъ при этомъ замѣчаній и предположеній относительно деталей явленія.

Если слѣдствія этой теоріи и не могутъ быть въ настоящій моментъ провѣрены количественно, то съ качественной стороны она все же является удовлетворительной. Прежде всего эта теорія основана на іонизаціи среды, что приводитъ къ слѣдующему, очень важному, подтвержденному къ тому же опытомъ, слѣдствію: все то что способствуетъ іонизаціи среды, облегчаетъ существованіе дуги; все то, что мѣшаетъ этой іонизаціи, неизмѣнно стремится потушить дугу. Къ этому вопросу мы еще вернемся, говоря объ устойчивости дуги.

## III. Дѣйствіе дуги.

Какъ мы уже сказали, механизмъ дуги еще теменъ во многихъ отношеніяхъ; но, къ большому счастью для промышленности, мы можемъ пользоваться дугою, не зная ея механизма. Достаточно лишь знать правила пользованія ею: потребляемыя ею мощность и токъ, необходимое для нея электрическое напряженіе (разность потенціаловъ), выдѣляемую при этомъ теплоту и т. д.; добытое опытомъ знаніе этихъ условій позволяетъ инженерамъ и техникамъ превратить вольтову дугу въ того могучаго помощника, многочисленныя услуги котораго мы и поставили себѣ цѣлью изложить.

Мы обязаны г-жѣ Айртонъ (Ayrton) установленіемъ основного отношенія, связывающаго электрическое напряженіе, силу тока и длину дуги между углями. Обозначивъ черезъ ($e$) электрическое напряженіе, опредѣляемое вольтметромъ, соединяющимъ оба угля, черезъ ($l$) длину дуги, т. е. разстояніе между концами углей, и черезъ ($i$) — силу проходящаго тока, мы получаемъ слѣдующее экспериментальное соотношеніе г-жи Айртонъ:

$$e = A + Bl + \frac{C + Dl}{i}.$$

Здѣсь $A$, $B$, $C$ и $D$ — четыре константы, главнымъ образомъ зависящія отъ природы употребляемыхъ углей и атмосферы, въ которой образуется дуга.

Мы вынуждены оставить въ сторонѣ тѣ подробности и слѣдствія, очень интересныя для спеціалиста, которыя можно получить путемъ алгебраическаго изслѣдованія этой формулы. Мы удовлетворимся графическимъ представленіемъ закона г-жи Айртонъ (фиг. 1), откладывая для различной длины дугъ напряженіе ($e$) между углями на оси ординатъ и силу тока ($i$) на оси абсциссъ.

Мы получаемъ такимъ образомъ рядъ кривыхъ, гиперболъ, представляющихъ въ одной графикѣ всѣ условія функціонированія дуги между углями.

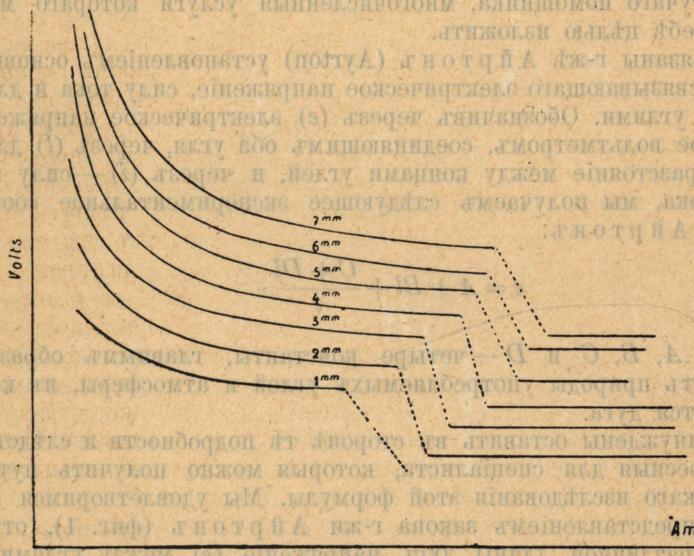
Не касаясь прямолинейной части фигуры, относящейся къ звучащимъ дугамъ (это явленіе наблюдается при короткихъ и интенсивныхъ дугахъ въ кислородной атмосферѣ), мы получимъ изъ этой графики нѣсколько важныхъ заключеній.

1⁰. Короткія и интенсивныя дуги требуютъ для своего функціонированія сравнительно слабаго напряженія. Дуги же длинныя и слабой интенсивности могутъ существовать лишь при условіи пользованія очень высокими напряженіями.

2⁰. Какъ бы ни были сближены угли, какова бы ни была сила тока, образованіе дуги требуетъ нѣкотораго минимальнаго напряженія (представленаго въ формулѣ членомъ $A$).

Въ теченіе долгаго времени физиковъ интриговалъ этотъ предѣльный вольтажъ (разность потенціаловъ), начиная съ котораго становилось возможнымъ образованіе дуги. Для объясненія его ссылались на существованіе какъ бы противодвижущей силы дуги, для преодолѣнія которой нужно это начальное напряженіе; въ настоящее время этому найдено удовлетворительное объясненіе въ тѣхъ новыхъ теоріяхъ, принципы которыхъ мы изложили.

Приведенныя кривыя позволяютъ сдѣлать еще одно наблюденіе, особенно важное въ практическомъ отношеніи, касающееся мощности, поглощаемой дугою главнымъ образомъ въ видѣ тепла




Фиг. 1.

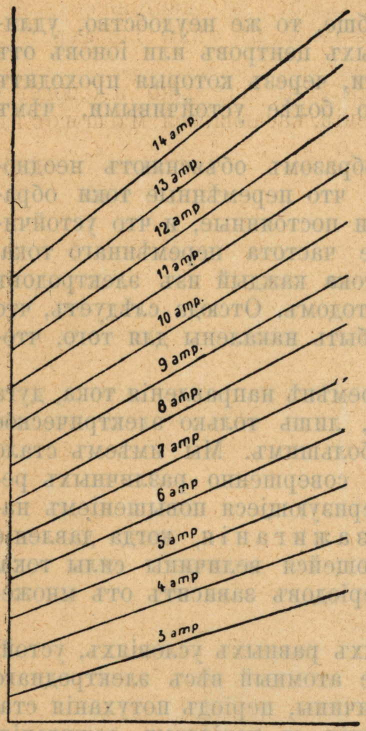
Въ этомъ отношеніи работы той же г-жи Айртонъ показали, что эта мощность можетъ быть выражена прямыми линіями (фиг. 2). Отсюда слѣдуетъ, что для дугъ одинаковаго напряженія мощность увеличивается пропорціонально длинѣ дуги, а для дугъ одинаковой длины она увеличивается пропорціонально силѣ проходящаго тока.

Таковы наиболѣе характерные опытные законы функціонированія дуги постояннаго тока между углями. Тѣ же законы, но съ иными численными константами, приложимы и къ короткимъ дугамъ, образующимся между металлами*).

Знаніе выражаемыхъ этими графиками законовъ, очевидно, очень полезно для практиковъ въ томъ смыслѣ, что они могутъ слу-

*) C. E. Guye et L. Zebrikoff. Arch. Sc. phys. Decembre 1907 et C. R. 1907 de l'Acad. des Sc. Paris.

жить руководящей нитью и указывать направленіе явленій. Не слѣдуетъ, однако, преувеличивать ихъ значеніе; они не позволяютъ, въ большинствѣ случаевъ, производить практическія вычисленія, для которыхъ эти численныя данныя вообще недостаточны. Дуги, на основаніи изслѣдованія которыхъ выведены эти графики, — постояннаго тока, средняго напряженія, образующіяся въ спокойномъ воздухѣ, какъ это дѣлается въ лабораторіяхъ.




Фиг. 2.

**Абсциссы выражаютъ длину дуги, а ординаты поглощаемую мощность въ уатахъ.**

Между тѣмъ тѣ дуги, которыя примѣняются въ промышленности, часто въ тысячу разъ большей мощности, раздуваются и деформируются магнитными полями или энергичными воздушными теченіями; наконецъ, они образуются часто въ атмосферѣ, составъ которой зависитъ отъ тѣхъ самыхъ реакцій, которыя происходятъ въ печи. Легко понять, что тогда іонизація и диффузія іоновъ должны совершаться въ иныхъ условіяхъ, которыя возможно предвидѣть лишь въ общихъ чертахъ. Условія существованія и устойчивости дуги оказываются, стало быть, совершенно иными.

## IV. Устойчивость дуги.

Вольтова дуга является электрическимъ токомъ очень неустойчивой природы. Легчайшее дуновеніе воздуха удлиняетъ дугу и, тѣмъ самымъ, стремится ее потушить; чаще всего это удлиненіе происходитъ даже само собой, благодаря поднятію нагрѣтаго дугою воздуха*). Въ иныхъ случаяхъ воздушное теченіе способствуетъ потуханію дуги, благодаря простому охлажденію катода.

Вообще, все то, что способствуетъ лучшей іонизаціи раздѣляющей электроды газообразной среды, облегчаетъ въ то же время образованіе и существованіе дуги. Вотъ почему присутствіе поблизости нагрѣтыхъ до высокой температуры и испускающихъ электроны тѣлъ создаетъ условія, благопріятныя для устойчивости дуги. То же самое дѣйствіе производятъ прерывистые разряды, простыя и пучковыя искры, ультрафіолетовые и беккерелевы лучи, $x$-лучи, различнаго рода пламя и,

**) Автоматическое удлиненіе дуги даже использовано въ промышленности для устройства разнообразныхъ такъ называемыхъ разрядниковъ (parafoudres à cornes).

вообще, все то, что производитъ іонизацію. Воздушныя теченія, разсѣивая іоны, наоборотъ, уменьшаютъ устойчивость дуги и способствуютъ ея затуханію.

Магнитное поле представляетъ, вообще, то же неудобство, удлиняя и деформируя путь наэлектризованныхъ центровъ или іоновъ отъ катода къ аноду. Наконецъ, короткія дуги, черезъ которыя проходитъ интенсивный токъ, оказываются гораздо болѣе устойчивыми, чѣмъ длинныя дуги слабаго напряженія.

Новыя теоріи іонизаціи равнымъ образомъ объясняютъ неоднократно подтвержденное опытомъ явленіе, что перемѣнные токи образуютъ менѣе устойчивыя дуги, чѣмъ токи постоянные, и что устойчивость дуги тѣмъ больше, чѣмъ больше частота перемѣннаго тока. Дѣйствительно, въ дугахъ перемѣннаго тока каждый изъ электродовъ является попеременно то анодомъ, то катодомъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ оба электрода должны быть накалены для того, чтобы дуга могла существовать.

Съ другой стороны, при каждой перемѣнѣ направленія тока, дуга тухнетъ, чтобы затѣмъ вновь зажечься, лишь только электрическое напряженіе станетъ вновь достаточно большимъ. Мы имѣемъ стало быть, два послѣдовательно мѣняющихся, совершенно различныхъ режима: *Періоды затуханія*, характеризующіеся повышеніемъ напряженія въ электродахъ, и *періоды зажиганія*, когда давленіе зависитъ въ каждый моментъ отъ мѣняющейся величины силы тока. Относительное значеніе этихъ двухъ періодовъ зависитъ отъ множества обстоятельствъ*).

Такимъ образомъ, при всѣхъ прочихъ равныхъ условіяхъ, устойчивость дуги тѣмъ меньше, чѣмъ больше атомный вѣсъ электроднаго вещества. Когда, въ силу какой-либо причины, періодъ потуханія становится достаточно длиннымъ въ сравненіи съ періодомъ зажиганія, охлажденіе электродовъ оказывается настолько значительнымъ, что дуга не можетъ вновь зажечься въ слѣдующій періодъ; въ такомъ случаѣ дуга тухнетъ окончательно. Это быстрое охлажденіе металлическихъ электродовъ въ теченіе долгаго времени заставляло предполагать, что между металлами дуга невозможна. Согласно нашимъ опытамъ, металлы, обладая небольшой теплоемкостью, испытываютъ значительное охлажденіе даже при короткомъ мгновенномъ затуханіи.

Чтобы противодѣйствовать многочисленнымъ причинамъ неустойчивости дуги, въ электрическую цѣпь необходимо включить часто весьма значительный запасъ напряженія между ходомъ въ пустую и ходомъ съ нагрузкой.

Необходимыя — въ каждомъ частномъ случаѣ — для выполненія этого электрическія условія могутъ быть получены изъ самыхъ графикъ дѣйствія дуги. Другими словами, необходимо, чтобы за каждымъ уменьшеніемъ тока, за каждымъ удлиненіемъ дуги слѣдовало

*) Мы ихъ изучили въ частномъ случаѣ, для дугъ слабаго напряженія между металлами, въ сотрудничествѣ съ G. A. Bron'омъ См. Arch des Sc. ph. et nat. 1908 и C. R. 1908 Acad. des Sc. Paris.

въ нѣкоторомъ родѣ автоматически, достаточное (для возстановленія равновѣсія) повышеніе напряженія.

Электрическая установка, слѣдовательно, должно быть такъ устроена, чтобы это дѣйствіе производилось автоматически. Предложенныя для этой цѣли и примѣняющіяся на самомъ дѣлѣ средства многочисленны. Можно выбрать, напримѣръ, динамо съ сильной (электромагнитной) реакціей, присоединивъ къ ней сопротивленіе, а еще лучше — расположить дуги въ рядъ, такъ что каждая дуга будетъ имѣть въ качествѣ вспомогательнаго сопротивленія совокупность сопротивленій всѣхъ другихъ дугъ.

Въ случаѣ перемѣнныхъ токовъ пользуются не только реакціей обмотокъ альтернатора, но и ихъ самоиндукціей; если нужно, то прибавляютъ еще вспомогательную самоиндукцію.

Вообще, присутствіе достаточной самоиндукціи представляетъ всегда (даже и при постоянномъ токѣ) очень важный элементъ, такъ какъ она противодѣйствуетъ всякому рѣзкому измѣненію хода явленія и тѣмъ самымъ способствуетъ устойчивости дуги.

Частныя условія каждой установки помогутъ, конечно, технику выбрать наиболѣе подходящія средства.

# ПРИМѢНЕНІЯ.

## V. Освѣщеніе.

Наиболѣе распространеннымъ и наиболѣе важнымъ изъ примѣненій вольтовой дуги является, безспорно, освѣщеніе; освѣщеніе улицъ, вокзаловъ, общественныхъ мѣстъ, мастерскихъ и заводовъ. Сотнями тысячъ лошадиныхъ силъ исчисляется теперь мощность, требуемая однимъ только этимъ примѣненіемъ. Для этой цѣли употребляются дуги обоего рода, какъ постояннаго, такъ и перемѣннаго тока.

При постоянномъ токѣ, въ дугѣ между углями, свѣтящійся фокусъ образуется раскаленнымъ кратеромъ положительнаго угля; фокусъ этотъ очень малыхъ размѣровъ, вслѣдствіе чего даетъ ясныя и сильныя тѣни; но онъ представляетъ зато мощный источникъ свѣта въ формѣ свѣтящейся точки, очень удобный для проекціонныхъ аппаратовъ. Вольтова дуга перемѣннаго тока имѣетъ перемѣжающійся характеръ.

Какъ мы уже замѣтили, съ каждой перемѣной направленія тока дуга тухнетъ и вновь загорается. Для того, чтобы нашъ глазъ получалъ непрерывное свѣтовое впечатлѣніе, необходимо, чтобы перемѣны направленія тока происходили достаточно быстро (отъ 70 до 100 разъ въ секунду). Такъ какъ, съ другой стороны, каждый изъ углей является попеременно положительнымъ, фокусъ образуется изъ двойной свѣтящейся точки, что дѣлаетъ эту дугу менѣе удобной для питанія проекціонныхъ аппаратовъ, чѣмъ дуга постояннаго тока.

Вольтова дуга является на самомъ дѣлѣ прежде всего прекраснымъ источникомъ свѣта для маяковъ и мощныхъ прожекторовъ. Ея небольшіе размѣры и значительный блескъ позволяютъ сконцентрировать лучи въ почти совершенно параллельный пучокъ, помощью соотвѣтственнаго подбора линзъ и зеркалъ.

Мощность этихъ прожекторовъ можетъ превзойти 100 милліоновъ свѣчей. Однако, для маяковъ средней силы съ вольтовой дугой конкурируетъ колпачекъ (ауэровскій), накаленный горящими парами нагрѣваемаго керосина. Дѣйствительно, вольтова дуга очень богата голубыми и фіолетовыми лучами, а эти очень короткой волны радіаціи быстро поглощаются туманомъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ хорошую погоду дуговой маякъ можетъ быть много сильнѣе маяка накаливанія и лишь въ туманное время можетъ равняться ему.

Спектральный составъ испускаемаго пучка имѣетъ, стало быть, очень важное значеніе для прожекторовъ. Это обстоятельство побудило фирму „Harlé & C-ie“ замѣнить зеркала изъ посеребреннаго стекла рефлекторами изъ неизмѣняющагося сплава, покрытаго матовой позолотой.

## VI Свѣтовой коэффиціентъ полезнаго дѣйствія дуги.

Угольная вольтова дуга (постояннаго или перемѣннаго тока) не только является однимъ изъ наиболѣе мощныхъ источниковъ свѣта, но представляетъ также одинъ изъ наиболѣе экономныхъ способовъ освѣщенія, даже если принять во вниманіе потери въ окружающихъ дугу разсѣивающихъ свѣтъ глобусахъ, присутствіе которыхъ очень часто необходимо для защиты глаза отъ ослѣпляющаго блеска углей *.

Не надо также забывать, что дуга очень богата фіолетовыми и ультра-фіолетовыми радіаціями, способными производить воспаленія на кожѣ и глазныхъ тканяхъ; эти воспаленія очень напоминаютъ тѣ, которыя получаются при солнечныхъ ожогахъ.

Въ теченіе только послѣднихъ десяти лѣтъ свѣтовой коэффиціентъ полезнаго дѣйствія дуги въ значительной степени возросъ, благодаря употребленію такъ называемыхъ минерализованныхъ углей и дугъ съ пламенемъ.

Въ дугѣ непрерывнаго тока между обыкновенными углями испускаемый свѣтъ, по приблизительному подсчету, распредѣляется такъ: 85% исходитъ отъ положительнаго угля, 10% — отъ отрицательнаго, и лишь 5% падаетъ на долю самой дуги, хотя температура ея вообще, выше температуры углей. Понятно, стало быть, что если ввести въ самую дугу вещества способныя испускать свѣтъ, находясь въ раскаленномъ состояніи, то можно въ значительныхъ размѣрахъ увеличить свѣтовой коэффиціентъ полезнаго дѣйствія дуги.

Кромѣ того, употребленіе такихъ веществъ представляетъ многочисленныя выгоды: ихъ присутствіе дѣлаетъ дугу болѣе устойчивой; становится возможнымъ, стало быть, при той же силѣ тока и напряженіи получать болѣе длинныя дуги (откуда и названіе — дуги съ пламенемъ).

Выбирая, съ другой стороны, соотвѣтственнымъ образомъ вводимыя вещества, можно различнымъ образомъ окрасить пламя дуги: красноватый, напримѣръ, цвѣтъ получается отъ употребленія солей стронція; желтоватый — дается кальціевыми солями; бѣловатый цвѣтъ

*) Въ прозрачныхъ свѣторазсѣивающихъ глобусахъ эта потеря составляетъ 5 - 15%, въ матовыхъ 10 - 35%, а въ алебастровыхъ — 20 — 50%.

получается отъ солей барія. Возможно, кромѣ того, такъ комбинировать смѣси, чтобы испускаемый свѣтъ состоялъ изъ различныхъ цвѣтовъ спектра, и такимъ образомъ производилъ мягкое и пріятное для глаза ощущеніе.

## VII Ртутная дуга (источникъ ультра-фіолетовыхъ лучей.).

Прежде чѣмъ разстаться съ освѣщеніемъ, намъ надо упомянуть о дугѣ, появляющейся между ртутными электродами.

Это одинъ изъ наиболѣе цѣнныхъ источниковъ ультра-фіолетовыхъ лучей, которыми располагаютъ лабораторіи. Его энергія особенно велика, когда дуга появляется въ оболочкѣ изъ литого кварца, почти совершенно прозрачнаго для этой категоріи радіацій. Въ примѣненіи къ освѣщенію, ртутная дуга, не смотря на свой великолѣпный коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, повидимому не будетъ имѣть успѣха, такъ какъ доставляемый ею свѣтъ совершенно лишенъ красныхъ лучей. Благодаря этому получается освѣщеніе мало изящное, утомляющее къ тому же глаза, такъ какъ ихъ обычное равновѣсіе оказывается нарушеннымъ.

Предлагаемыя до сихъ поръ средства для устраненія этого неудобства, въ видѣ употребленія флюоресцирующихъ веществъ, превращающихъ часть зеленыхъ лучей въ лучи красные, повидимому не дали удовлетворительныхъ результатовъ; по крайней мѣрѣ, они не получили широкаго распространенія.

Напротивъ, ртутная дуга дала возможность произвести интересные опыты выпрямленія перемѣнныхъ и многофазныхъ токовъ въ токи постоянные.

Ртутная дуга, имѣя въ качествѣ анода желѣзо или платину, представляетъ изъ себя дѣйствительно, настоящій электрическій клапанъ, позволяющій току проходить только въ одномъ направленіи (отъ желѣза къ ртути). При обратномъ токѣ дуга не можетъ возникнуть; это еще одно изъ слѣдствій современной теоріи дуги.

Это свойство дугъ съ разнородными электродами позволило Гевису (Hewiss) устроить выпрямители тока, которые разрѣшили въ установкахъ, — правда, до сихъ поръ не имѣющихъ большой важности, — очень элегантно, просто и съ большимъ коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія вопросъ о превращеніи перемѣнныхъ токовъ въ постоянные.

Это же самое свойство позволило достичь выпрямленія очень быстро колеблющихся токовъ, производимыхъ конденсаторами, частота которыхъ исчисляется сотнями тысячъ въ секунду.

Здѣсь умѣстно упомянуть также о прерывателяхъ, устроенныхъ на томъ же принципѣ, имѣющихъ то преимущество, что они автоматически размыкаютъ перемѣнный токъ именно въ то самое мгновеніе, когда сила его становится равной нулю, что совершенно уничтожаетъ экстра-токи со всѣми вызываемыми ими разстройствами въ установкахъ.

## VIII. Электрохимія и электрометаллургія.

Электрохимія и электрометаллургія занимаютъ второе мѣсто послѣ освѣщенія въ смыслѣ примѣненія въ нихъ вольтовой дуги. Здѣсь ее утилизируютъ въ электрическихъ печахъ, являющихся нынѣ наиболѣе мощными источниками тепла для промышленныхъ цѣлей, такъ какъ температура дуги можетъ достичь и, вѣроятно, превысить 3500°.

Превосходство этого способа отопленія заключается прежде всего въ возможности сконцентрировать въ очень ограниченномъ пространствѣ значительное количество электрической энергіи, превращающейся въ тепло (при помощи механизма дуги, при томъ въ самомъ мѣстѣ утилизаціи. При такихъ условіяхъ потери тепла благодаря лучеиспусканію и проводимости чрезвычайно уменьшены и коэффиціентъ полезнаго дѣйствія можетъ быть очень высокъ.

Въ настоящее время устраиваютъ электрическія печи громадной мощности, потребляющія подчасъ нѣсколько тысячъ лошадиныхъ силъ *).

Энергія всей громадной гидравлической установки такимъ образомъ можетъ быть превращена въ тепло въ пріемникѣ, емкостью своей достигающаго едва нѣсколько кубическихъ метровъ.

Съ точки зрѣнія ихъ функціонированія, электрическія печи могутъ быть раздѣлены на двѣ категоріи: печи электротермическія и печи электрохимическія. Въ первыхъ печахъ имѣетъ значеніе только дѣйствіе тепла; примѣромъ такихъ печей являются печи для карбида кальція, въ которыхъ почти безразлично можно употреблять постоянный или перемѣнный токъ.

Въ другихъ примѣненіяхъ химіи высокихъ температуръ наряду съ дѣйствіемъ тепла пользуются тѣмъ разлагающимъ дѣйствіемъ, которое оказываетъ электрическій токъ на расплавленныя вещества. Въ такихъ случаяхъ необходимъ постоянный токъ, идущій всегда въ одномъ направленіи.

Производство аллюминія представляетъ въ настоящее время наиболѣе важную изъ промышленныхъ операцій, исполняемыхъ въ электрохимическихъ печахъ съ вольтовой дугой.

Разсмотримъ теперь современное значеніе всѣхъ примѣненій электрическихъ печей съ вольтовой дугой, т. е. наиболѣе распространенныхъ печей. Прежде всего скажемъ о производствѣ такого цѣннаго металла, какъ аллюминій. По послѣднимъ даннымъ инженера Люлена (Lullin), эта промышленность, переживающая теперь кризисъ, обладаетъ въ своей совокупности установками, мощность которыхъ составляетъ въ круглыхъ цифрахъ около 360 000 лошадиныхъ силъ. Ея производительность въ 1907 г. была около 15 000 — 20 000 тоннъ и цѣна на аллюминій — вслѣдствіе бѣшенной конкурренціи — пали до 2 франковъ за килограммъ. При такихъ цѣнахъ аллюминій можетъ даже конкурировать съ мѣдью въ дѣлѣ сооруженія большихъ линій электрической передачи.

---

*) Намъ извѣстна печь для выдѣлки карбида мощностью въ 14 000 лошадиныхъ силъ.

Послѣ аллюминія — производство карбида кальція, предназначаемаго почти исключительно для полученія ацетилена и новаго химическаго удобренія — ціанистаго амида кальція.

Производство карбида кальція въ настоящее время можетъ быть оцѣнено въ 180 000 тоннъ только для Европы, представляя совокупность установокъ, мощность которыхъ навѣрное достигаетъ 200 000 лошадиныхъ силъ.

Упомянемъ также о примѣненіи дуговыхъ печей къ производству цѣлой серіи до сихъ поръ почти неизвѣстныхъ металловъ (хромъ, тунгстенъ, ванадій, молибденъ и т. д.), которые, будучи сплавлены въ соотвѣтственной пропорціи со сталью, доставили конструкторамъ-механикамъ цѣлую гамму качествъ стали, приспособленныхъ къ тому или иному опредѣленному примѣненію.

Употребленіе электрическихъ печей въ металлургіи желѣза и стали не привилось, однако, въ такой степени, какъ вначалѣ объ этомъ думали. Превращеніе электрической энергіи въ тепло обходится еще относительно очень дорого для того, чтобы электрическая печь могла замѣнить доменную или конверторъ Бесселира для всѣхъ разнообразныхъ качествъ стали. Но употребленіе электрическаго нагрѣванія неизбѣжно для полученія стали наивысшаго сорта, безъ которой невозможно обойтись въ многихъ случаяхъ.

Не будетъ преувеличеніемъ утверждать, что вольтова дуга — одинъ изъ главныхъ промышленныхъ факторовъ, содѣйствовавшихъ развитію автомобилей. Благодаря ей, мы увидѣли осуществленнымъ дивное изобрѣтеніе нашей эпохи — легкій двигатель, обезпечивающій управленіе аэростатовъ и подготовлявшій успѣхи авіаторовъ*).

Мощность электрическихъ дуговыхъ печей, занятыхъ въ металлургіи стали, можетъ быть оцѣнена въ 10-15 тысячъ лошадиныхъ силъ.

Напомнимъ также о примѣненіи электрической печи для производства разныхъ твердыхъ тѣлъ, изъ которыхъ нѣкоторые могутъ соперничать съ алмазомъ: искусственный наждакъ, борный уголь, карборундумъ и др.; ежегодное потребленіе послѣдняго продукта простирается до 4000 тоннъ. Наконецъ, драгоцѣнные камни, аппараты изъ литого кремнія, употребленіе котораго уже разрастается въ промышленности и въ лабораторіи.

Но всѣ блестящія примѣненія, упомянутыя нами, всѣ услуги, которыя оказаны вольтовой дугой до сихъ поръ, — все это ничтожно въ сравненіи съ тѣмъ, что еще ожидаютъ отъ этого цѣннаго помощника. Двадцатый вѣкъ требуетъ отъ вольтовой дуги измѣненія экономическихъ условій человѣческой жизни усиленіемъ плодородія почвы, что можно достигнуть рѣшеніемъ великой задачи, рѣшеніемъ, которое будетъ однимъ изъ лучшихъ украшеній эпохи: усвоеніе въ видѣ химическаго удобренія атмосфернаго азота, этого почти неистощимаго резервуара плодородія.

Эта важная задача была предметомъ реферата, два года тому назадъ, на общемъ собраніи нашего Швейцарскаго Естественно-Науч-

***) Такъ какъ всѣ эти изобрѣтенія стали возможными лишь послѣ того, какъ электрическая печь позволила выдѣлывать спеціальные сорта стали.**

наго Общества; я позволю себѣ, въ силу этого, не возвращаться къ ней, несмотря на ея огромный интересъ*).

Я ограничусь только напоминаніемъ, что кислородъ и азотъ воздуха, нагрѣтые до очень высокой температуры вольтовой дуги и затѣмъ внезапно охлажденные, образуютъ окислы азота, что эти окислы могутъ быть поглощены водой и образовать азотную кислоту или же прямо реагировать на соли извести, аммоніака и т. д., давая растворимые, а потому и усвояемые растеніями, нитраты.

Что касается до мощности, примѣняемой теперь въ этомъ производствѣ, то она равна приблизительно 30 000 килоуатамъ; но увѣряютъ, что въ Норвегіи рѣшено устроить новый заводъ въ 125 000 лошадиныхъ силъ.

## IX. Поющая дуга и безпроволочное телефонированіе.

Вольтова дуга, обширныя примѣненія которой въ промышленности мы только что перечислили, при случаѣ можетъ превратиться въ пѣвца или даже разсказчика, конечно, при томъ условіи, что ей въ этомъ немного помогутъ. Съ нею можно производить любопытные опыты, которые обнаруживаютъ всю ловкость и приспособляемость этого цѣннаго помощника. Мы имѣемъ въ виду поющія и говорящія дуги, дугу-телефонъ, дугу-микрофонъ, дугу-фонографъ.

Производимые первоначально съ цѣлью увеселенія, эти опыты однако, дали наилучшее изъ современныхъ рѣшеній задачи телефонированія безъ проводовъ.

Телефонированіе безъ проводовъ основано на опытѣ Дѣделя (Duddell) который мы вкратцѣ напомнимъ. Если между двумя углями дуги, питаемой постояннымъ токомъ, дѣлаютъ отвѣтвленіе, въ составъ коего входитъ конденсаторъ и катушка съ изолированной проволокой, соотвѣтственно выбранной, дуга, бывшая до того молчаливой, вдругъ начинаетъ издавать звуки, высота которыхъ зависитъ отъ выбора катушки и конденсатора.

Говорятъ, что токъ начинаетъ резонировать, т. е. въ отвѣтвленіи появляется и усиливается перемѣнный токъ, присоединяющійся въ дугѣ къ первоначальному питающему ее току.

Производимый дугою звукъ является слѣдствіемъ существованія этого перемѣннаго тока. Быстрыя періодическія колебанія силы этого тока порождаютъ соотвѣтственныя колебанія объема дуги, а эти колебанія въ свою очередь вызываютъ измѣненія давленія, которыя необходимы для произведенія звука.

Чтобы лучше понять происхожденіе этого перемѣннаго тока, я позволю себѣ провести параллель между опытомъ Дѣделя и классической серіей звуковыхъ трубъ. Извѣстно, конечно, что въ звуковыхъ трубахъ происходящее отъ вдуванія теченіе воздуха разбивается о

---

*) См. проф. І. Ценнекъ. „Утилизація атмосфернаго азота при помощи вольтовой дуги“. „Вѣстникъ“ №№ 534 и 535

мундштукъ трубы и что между происходящими при этомъ сложными колебаніями есть нѣкоторыя, которыя усиливаются воздухомъ трубы; происходящій звукъ соотвѣтствуетъ этимъ усиленнымъ колебаніямъ.

То же самое происходитъ съ электрическими колебаніями въ поющей дугѣ. Постоянный токъ, получаемый отъ динамомашины, играетъ роль воздушнаго теченія; самая дуга дѣйствуетъ, какъ родъ мундштука, порождая сложныя электрическія колебанія; наконецъ, токъ въ катушкѣ и конденсаторѣ аналогиченъ звуковой трубѣ, отъ длины которой зависитъ высота усиленныхъ звуковъ.

Въ результатѣ — и это самое существенное — при помощи дуги соотвѣтственнаго отвѣтвленія можно производить чрезвычайно быстрые перемѣнные токи, которымъ дали названіе незатухающихъ волнъ.

Эти волны могутъ достичь крайней частоты (30 000 — 100 000 въ секунду), и при этихъ условіяхъ онѣ больше не производятъ никакого звука, такъ какъ перейдена высшая граница воспринимаемости звуковыхъ колебаній.

Напротивъ, онѣ способны производить очень энергичныя явленія индукціи, могущія передаваться на большія разстоянія.

Фиг. 3 слѣва въ видѣ простой схемы даетъ понятіе о принципѣ безпроволочнаго телефонированія.

Постоянный токъ, порождаемый динамой $D$, проходитъ черезъ регулирующее сопротивленіе $R$ и питаетъ дугу $A$, возникающую — въ видахъ большей правильности — въ атмосферѣ водорода. Резонирующая цѣпь состоитъ изъ катушки $B$ и конденсатора $C$. Катушка $B$, черезъ которую проходятъ незатухающія волны, посредствомъ индукціи дѣйствуетъ на другую катушку $B'$, связанную съ одной стороны съ мачтою (антенною), съ другой стороны — съ микрофономъ $M$, сообщающимся съ землей.

При помощи этого устройства можно посылать черезъ мачту электромагнитныя волны, періодичность которыхъ регулируется резонирующей цѣпью.

Фиг. a представляетъ схематически очень быстрыя волны (30 000 — 100 000 въ секунду), посылаемыхъ непрерывно отправляющей станціей.

Фиг. b показываетъ, какъ можно періодически измѣнять амплитуду этихъ волнъ, помѣщая, напримѣръ, передъ микрофономъ звучащее тѣло, колебанія котораго дѣйствуютъ также на сопротивленіе цѣпи мачты.

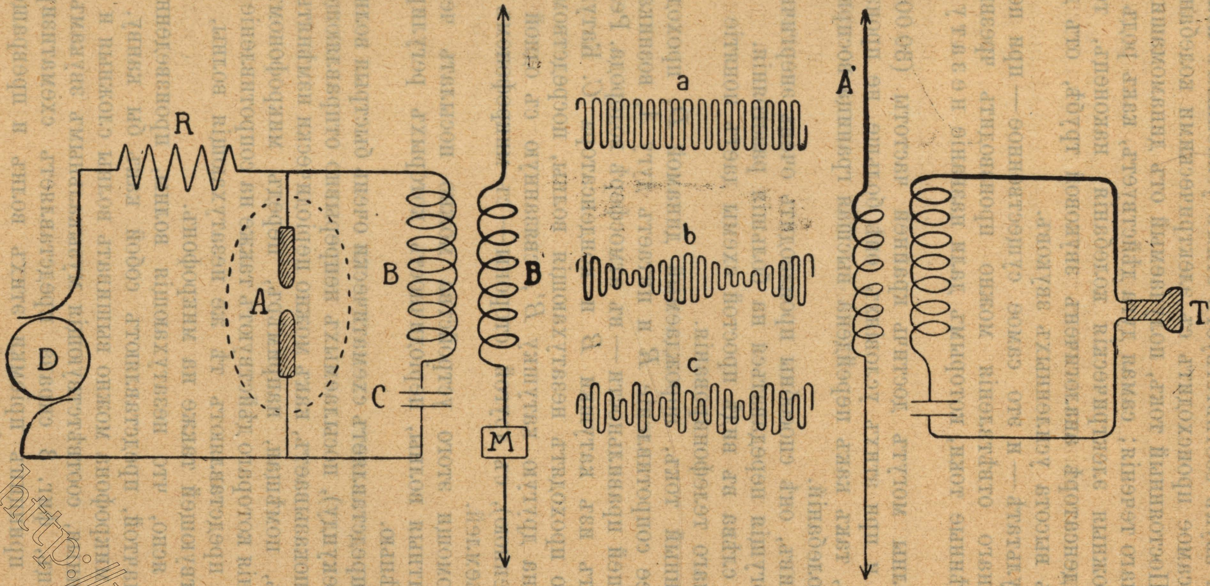
Фиг. c представляютъ тѣ же незатухающія волны, измѣненныя рѣчью, дѣйствующей также на микрофонъ.

Теперь ясно, что незатухающія волны, произведенныя дугой и посланныя мачтой, представляютъ собой какъ бы канву, на которой съ помощью микрофона можно вышивать волны сложныя и значительно болѣе медленныя, соотвѣтствующія музыкальнымъ звукамъ или рѣчи.

Наконецъ, фиг. 3 справа представляетъ схематизированный и упрощенный принципъ пріемки этихъ волнъ и превращеніе ихъ въ звуковыя при посредствѣ телефона.

Незатухающія волны, болѣе или менѣе измѣненныя микрофономъ, улавливаются мачтой на принимающей станціи $A'$, переда-

Схематическій принципъ безпроволочнаго телефона.




Фиг. 3.

Расположеніе пріемника дѣлается въ дѣйствительности болѣе сложнымъ, дабы получить достаточную чувствительность; наша фигура указываетъ лишь принципъ.

ющей ихъ посредствомъ индукціи во вторичную цѣпь, заключающую въ себѣ телефонъ *T*.

Употребляя болѣе сложныя устройства, но основанныя на принципѣ, аналогичномъ изображенной на фиг. 3 схемѣ, Паульсенъ (Poulsen), изобрѣтатель безпроволочнаго телефона, утверждаетъ, что онъ достигъ ясной и точной передачи на разстояніи 300—400 километровъ.

Такіе же результаты были достигнуты другими экспериментаторами съ болѣе или менѣе измѣненными установками.

Какова бы, впрочемъ, ни была точная цѣнность вышеупомянутыхъ результатовъ, теперь можно утверждать, что безпроволочное телефонированіе уже создано, что оно вступаетъ на новый путь, на которомъ оно способно развиться въ недалекомъ будущемъ, и все это благодаря примѣненію маленькаго пламени, открытаго Дэви болѣе сотни лѣтъ тому назадъ.

Когда наблюдаешь прогрессивное развитіе какого-нибудь изобрѣтенія, успѣхи котораго вначалѣ скромны, но значеніе котораго все возрастаетъ, поражаешься, видя, какъ въ этой эволюціи изобрѣтеніе дѣйствуетъ на среду, затѣмъ отчасти измѣненная среда дѣйствуетъ въ свою очередь на самое изобрѣтеніе, совершенствуя его и находя новыя и важныя примѣненія.

Это обоюдное взаимодѣйствіе и составляетъ дѣйствительную эволюцію, употребляя терминъ, который такъ дорогъ біологамъ. Но наблюдать эту эволюцію тѣмъ болѣе любопытно и тѣмъ болѣе интересно, что ея быстрота позволитъ намъ, быть можетъ, даже лучше, чѣмъ въ біологіи, раздѣлить причины и дѣйствія.

Вольтова дуга вначалѣ была только скромнымъ маленькимъ пламенемъ; затѣмъ она дѣлается способомъ освѣщенія, т. е. средствомъ увеличить время и интенсивность человѣческой дѣятельности. Въ свою очередь промышленность въ своемъ развитіи требуетъ отъ вольтовой дуги новыхъ услугъ; полученіе высокихъ температуръ содѣйствовало отчасти измѣненію методовъ металлургіи.

Теперь новыя экономическія условія, слѣдствія всеобщаго промышленнаго прогресса и въ частности металлургіи, требуютъ отъ вольтовой дуги, чтобы она увеличила богатства почвы при помощи усвоенія азота изъ атмосферы, и закрѣпила еще сильнѣе безпроволочнымъ телефонированіемъ узы солидарности, которыя все болѣе и болѣе связываютъ между собою цивилизованные народы.

Таково резюме научной и промышленной карьеры вольтовой дуги.

# СЪѢЗДЫ.

## Чествованіе памяти Непера въ Эдинбургѣ.

300 лѣтъ тому назадъ изъ типографіи Андрея Гарта въ Эдинбургѣ вышелъ маленькій томикъ in quarto подъ заглавіемъ Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, Ejusque usus in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi et expedicissimi explicatio. Authore ac Inventore Ioanne Nepero, Barone Merchistonii et c. Scoto. Это сочиненіе содержитъ 57 страницъ объяснительнаго текста и 90 страницъ таблицъ, первыхъ таблицъ логариѳмовъ.

Нынѣ, въ юбилейный годъ, Эдинбургское Королевское Общество обратилось съ предложеніемъ принять участіе въ чествованіи памяти Непера (John Neper), и въ Эдинбургъ со всѣхъ концовъ свѣта съѣхались математики, астрономы, физики, инженеры.

Оффиціально торжества должны были начаться въ пятницу 11/24 іюля, Royal Society еще раньше открыло свои гостепріимные двери для пріѣзжихъ, а 10/23 въ университетѣ начало дѣйствовать бюро съѣзда и открылась выставка. Выставка была открыта для членовъ съѣзда въ продолженіе всѣхъ 4-хъ дней юбилейнаго празднованія, а потомъ еще одинъ день для публики. Она представляла совершенно исключительный интересъ, и ниже о ней будетъ сказано особо.

Открытіе съѣзда происходило въ залѣ University Union, т. е. студенческаго дома. Рядомъ съ предсѣдателемъ лордомъ Провостомъ (Provost) города Эдинбурга заняли мѣсто лордъ Мультонъ (Moulton) и нѣкоторые изъ делегатовъ, въ томъ числѣ проф. В. А. Стекловъ, представлявшій Императорскую Академію Наукъ и Петроградскій университетъ, проф. Андуайе (Andoyer,) делегатъ парижскаго университета, проф. Д'Окань (d'Ocagne), делегатъ парижской политехнической школы, проф. Баушингеръ (Bauschinger). Засѣданіе началось чтеніемъ привѣтственныхъ телеграммъ, послѣ чего предсѣдатель въ нѣсколькихъ словахъ отмѣтилъ интересныя особенности біографіи лорда Мультона который долженъ былъ прочитать адресъ. Онъ соединяетъ обязанности члена высшаго аппелляціоннаго суда съ карьерой ученаго, онъ извѣстенъ какъ лекторъ Кэмбриджскаго университета, какъ издатель „Calculus of Finite Differences“ Boole'я и своими работами по физикѣ. Встрѣченный шумными аплодисментами лордъ Мультонъ произноситъ свою рѣчь, въ которой даетъ общую характери! стику Непера и его открытія; онъ заканчиваетъ указаніемъ на то, что истекшіе три вѣка по существу ничего не прибавили къ тому, что оставилъ намъ геній Непера.

Послѣ этого д-ръ Натъ (Knott), секретарь съѣзда (онъ же секретарь Royal Society), прочиталъ списокъ делегатовъ ученыхъ обществъ и университетовъ, командированныхъ на Конгрессъ. Называемыя лица вставали со своихъ мѣстъ, привѣтствуемые апплодисментами. Четверо изъ делегатовъ: Андуайе, Д'Окань, Баушингеръ и Д. Е. Смитъ

(D. E. Smith) краткими рѣчами привѣтствовали Конгрессъ. Послѣ благодарности лорду Мультону, высказанной проф. Гейки (Geikie), предсѣдателемъ Royal Society, и его отвѣта засѣданіе закрылось.

Вечеромъ члены Конгресса были приглашены на торжественный пріемъ лордомъ Провостомъ, магистратомъ и совѣтомъ города Эдинбурга. Этотъ пріемъ не представлялъ бы интереса, если бы не сопровождавшая его совершенно необычная для насъ обстановка: лордъ Провостъ, въ красной мантіи, отдѣланной горностаемъ, и его супруга занимали центральное мѣсто на эстрадѣ, по обѣ стороны стояли члены магистрата тоже въ красныхъ мантіяхъ и стража въ историческихъ костюмахъ съ алебардами. Представляющіеся по одиночкѣ должны были входить на эстраду и подавать свою карточку одному изъ должностныхъ лицъ, который громко называлъ фамилію представляющагося. лэди и лордъ подавали руку, и представляющійся, сойдя съ эстрады занималъ мѣсто. Послѣ представленія состоялся концертъ, но публика отнеслась довольно безучастно къ артистамъ, и онъ прошелъ при почти пустомъ залѣ.

Въ 9 часовъ 30 минутъ утра слѣдующаго дня было назначено первое дѣловое засѣданіе Конгресса. Не очень большая университетская аудиторія была почти совсѣмъ полна. Предсѣдательское мѣсто занялъ проф. Гобсонъ (E. W. Hobson) изъ Cambridge'а. Рядъ докладчиковъ Глэймеръ (J. W. L. Glaisher), Гибсонъ (G. A. Gibson), Д. Е. Смитъ, Кэджори (F. Cajori) всѣ выступали съ докладами историческаго содержанія, съ той или иной стороны освѣщающими значеніе въ исторіи математики творенія Непера. Небольшое сообщеніе, касающееся исторіи появленія логариѳмовъ въ Турціи, сдѣлалъ лейтенантъ турецкаго флота Сали Мурадъ (Salih Mourad). Дорожа временемъ для осмотра выставки, я не могъ быть на послѣднемъ докладѣ проф. Зомервилля (Somerville).

Въ 4 часа состоялась Garden Party въ Мерчистонскій замокъ, фамильное владѣніе Неперовъ. Время постройки замка точно неизвѣстно, но его относятъ къ 1-ой половинѣ XV-го столѣтія. Въ настоящее время Merchiston совершенно слился съ Эдинбургомъ, и въ непосредственной близости отъ замка находятся дома; но еще на гравюрѣ, относящейся къ 1790 году, мы видимъ одинокое зданіе, окруженное полями. Въ замкѣ помѣщается школа Merchiston Academy, директоръ и преподаватели которой собственно и пригласили членовъ Конгресса посѣтить замокъ. Гости имѣли возможность осмотрѣть комнату Непера и полюбоваться прекраснымъ видомъ со стѣнъ замка. Послѣ угощенія, сервированнаго воспитанниками школы въ саду, и исполненія музыкальной программы, въ которую входили нѣкоторые характерные шотландскія пьесы на національныхъ инструментахъ (pipe) съ турецкимъ барабаномъ, сыгранные военнымъ оркестромъ школы, была снята общая группа гостей.

День закончился собраніемъ въ Студенческомъ домѣ, гдѣ съ удивительнымъ радушіемъ гостей встрѣчали м-ръ и м-съ Натъ, а также м-ръ и м-съ Бёрджессъ (Burgess). Разнообразная музыкально-вокальная программа была завершена традиціоннымъ въ Шотландіи общимъ кругомъ съ пѣніемъ.

Въ воскресенье никакихъ засѣданій не было, но въ 3 часа 30 минутъ было торжественное богослуженіе въ St. Giles Cathedral, старѣйшей приходской церкви Эдинбурга. Службу совершалъ д-ръ Фишеръ (Fisher) священникъ церкви St. Cuthbert, гдѣ покоятся останки Непера. Проповѣдь, посвященная Неперу, особаго интереса не представляла.

Понедѣльникъ 14/27 іюля былъ послѣднимъ днемъ Конгресса. Утреннее и дневное засѣданія были посвящены вопросамъ, связаннымъ съ построеніемъ и вычисленіемъ таблицъ. Предсѣдательствовалъ д-ръ Д. Е. Смитъ. Первый докладъ проф. Баушингера касался вопроса о табулированіи коэффиціентовъ при разложеніи по шаровымъ функціямъ. Послѣ него каѳедру занялъ проф Андуайе и въ блестящемъ докладѣ, полномъ тонкаго остроумія, изложилъ ходъ своихъ работъ по вычисленію таблицъ „Nouvelles Tables Trigonometriques Fondamentales", вышедшихъ изъ печати въ 1911 году, и приготовляемыхъ нынѣ къ печати таблицъ натуральныхъ синусовъ съ 15-ю знаками*).

Андуайе смѣнилъ на каѳедрѣ еще болѣе блестящій лекторъ проф. Д'Оканъ. Онъ началъ съ извиненія, что вслѣдствіе недоразумѣнія онъ подготовилъ только докладъ для Mathmatical Colloquium, который долженъ былъ состояться послѣ Неперовскихъ торжествъ, и потому принужденъ говорить экспромтомъ. Онъ, по его выраженію, съимпровизировалъ два маленькихъ доклада, одинъ, относящійся къ исторіи счетной машины, а другой—къ исторіи номографіи. Указавъ на то, что въ основѣ номографическаго счисленія лежитъ идея таблицы съ 2-мя ходами, онъ охарактеризовалъ эволюцію номографіи. Онъ съ удовольствіемъ отмѣтилъ, что, хотя фактическимъ основаніемъ номографіи надо считать Arithmetiqne linéaire Pouchet, вышедшую въ 1795 году, однако, еще раньше, въ 1791 году въ Лондонѣ вышла книга „Margetts, Longitude Tables and Horary Tables", гдѣ уже ясно видна идея номограммы.

Утреннее засѣданіе закончилось докладомъ миссъ Е. Джифордъ (E. Gifford), издавшей въ текущемъ году таблицу натуральныхъ синусовъ съ 8-ью знаками черезъ секунду дуги**). Докладъ касался способа вычисленія таблицы.

Засѣданіе возобновилось послѣ перерыва подъ предсѣдательствомъ сначала проф. Глэймера, а потомъ маіора Макъ-Магона (MacMahon). Особый интересъ представлялъ докладъ д-ра Мильна (Milne), сопровождавшійся демонстраціями при помощи проекціоннаго фонаря. Докладчикъ подробно разбиралъ вопросы, относящіеся къ способу размѣщенія таблицъ, характеру шрифта, цвѣту бумаги и т. п. Предсѣдатель въ заключительномъ словѣ отмѣтилъ важность этихъ кажущихся на первый взглядъ мелкими вопросовъ.

Конгрессъ закончился прощальнымъ пріемомъ въ Roya Society, гдѣ члены были представлены президенту общества проф. Гейки и его супругѣ.

---

*) Тѣ и другія таблицы вычисляются при новомъ, десятичномъ дѣленіи окружности.

**) „Natural Sines", Manchester, 1914.

Выше я упоминалъ о выставкѣ, организованной при Конгрессѣ. Ея кратковременность отчасти искупалась прекрасно составленнымъ и изданнымъ путеводителемъ: „Handbook of the Exibition“, который имѣетъ цѣнность значительно большую, чѣмъ простой путеводитель: онъ можетъ служить справочной книгой для всякаго, имѣющаго дѣло со счетными машинами и вообще приборами для численныхъ вычисленій. Самый планъ книги очень характеренъ и интересенъ; по каждому отдѣлу сначала дается руководящая статья, а затѣмъ слѣдуетъ перечисленіе выставленныхъ приборовъ или моделей. Во многихъ случаяхъ даются особыя объясненія для отдѣльныхъ экспонатовъ. Нѣкоторыя изъ статей, правда, написаны не спеціально для этой книги, а перепечатаны изъ другихъ мѣстъ. Для удобства можно разбить весь матеріалъ на четыре отдѣла:

1) Отдѣлъ ретроспективный и реликвій, относящихся къ Неперу. 2) Отдѣлъ математическихъ таблицъ. 3) Приборы, служащіе для вычисленія. 4) Математическіе модели.

Кромѣ предметовъ, относящихся непосредственно къ Неперу, къ первому отдѣлу можно отнести коллекціи различныхъ изданій его сочиненій, его перваго сочиненія толкованія откровенія св. Іоанна, появившагося въ свѣтъ въ 1593 г., и четырехъ математическихъ сочиненій. Кромѣ „Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio“ Неперъ въ годъ своей смерти, въ 1617 г., выпустилъ книгу „Rabdologiae, sen Numerationis per Virgulas libri duo“, въ которой описывается изобрѣтенный имъ особый видъ передвижной таблицы умноженія, служащей для облегченія умноженія многозначныхъ чиселъ; это такъ называемыя Неперовскія „счетныя палочки или косточки“. Уже послѣ смерти Непера въ 1619 г. его сынъ отъ второго брака Робертъ Неперъ при содѣйствіи Бригга (Brigg) выпустилъ въ свѣтъ сочиненіе своего отца „Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio“, содержащее описаніе метода построенія таблицъ. Изъ предисловія къ этому сочиненію видно, что оно было написано раньше опубликованія „Descriptio“. Наконецъ, послѣднее математическое сочиненіе Непера „De arte Logistica“, появилось только въ 1839 г. Подлинникъ этого сочиненія погибъ при пожарѣ, и издано оно было по копіи сдѣланной Робертомъ Неперомъ. Всѣ эти сочиненія можно было видѣть въ нѣсколькихъ изданіяхъ. Здѣсь же были выставлены старинныя „счетныя палочки“, математическіе и астрономическіе инструменты, фотографіи старинныхъ (XVII и XVIII вѣка) счетныхъ машинъ, хранящихся въ Science Museum въ Лондонѣ, портреты и т. п.

Во второмъ отдѣлѣ были собраны всевозможныя таблицы, начиная съ математическихъ таблицъ, предшествовавшихъ изданію логариѳмовъ, и кончая послѣдними годами. Здѣсь же былъ выставленъ экземпляръ „Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen“ швейцарца Іоста Бурджи, (Joost'a Bürgi) изданныя въ 1620 г. и представляющія таблицы антилогариѳмовъ; онѣ — единственный соперникъ таблицъ Непера, такъ какъ изданы независимо, но, конечно, пріоритетъ остается за Неперомъ.

Третій отдѣлъ былъ самый обширный, отчасти оттого, что тутъ приняли участіе фирмы, изготовляющія счетныя машины и математическіе инструменты. Въ краткомъ очеркѣ невозможно перечислить все разнообразіе механизмовъ, изобрѣтенныхъ для выполненія ариѳметическихъ дѣйствій, начиная съ японскихъ счетовъ Soroban (очень похожихъ по принципу на русскіе счеты, которые, кстати сказать, кажется, совершенно неизвѣстны на западѣ) и кончая послѣдними моделями ариѳмометровъ, приводимыхъ въ дѣйствіе маленькимъ электрическимъ двигателемъ. За этимъ слѣдовали витрины съ всевозможными счетными линейками и другими приборами, построенными на томъ же принципѣ; далѣе шелъ отдѣлъ планиметровъ и интеграторовъ съ подотдѣломъ „примѣненіе приборовъ для механическаго интегрированія въ корабельной архитектурѣ", организованнымъ при содѣйствіи инженернаго отдѣленія Глазговскаго университета. Неизмѣнное вниманіе публики привлекала къ себѣ машина для предсказанія приливовъ, сконструированная Е. Робертсомъ (E. Roberts) и работавшая почти непрерывно. Число слагающихъ, которыя могутъ быть синтезированы этой машиной, равно 40, а время, потребное для вычерчиванія кривой приливовъ на цѣлый годъ, равно всего 2 часамъ.

Въ отдѣлѣ математическихъ моделей главнымъ экспонентомъ былъ Эдинбургскій университетъ, но кое что было прислано и изъ другихъ городовъ. На ряду съ математическими моделями работы Брилля (Brill) и М. Шилинга (M. Schilling) были и очень интересныя оригинальныя модели, напримѣръ, выставленная D. Gibb'омъ коллекція механизмовъ для черченія коническихъ сѣченій.

Съ Неперовскимъ съѣздомъ хронологически былъ связанъ въ этомъ году Эдинбургскій Математическій Colloquium, организуемый Эдинбургскимъ Математическимъ Обществомъ. Программа нынѣшняго года состояла изъ 4-хъ серій лекцій, именно, проф. Д'Оканя „О номографіи и въ особенности о ея приложеніи къ рѣшенію сферическихъ треугольниковъ", Ричмонда (H. W. Richmond) подъ заглавіемъ „Безконечность въ геометріи", Е. Кинингомъ (E. Cunningham) — „Критическій обзоръ современныхъ электрическихъ теорій" и, наконецъ, проф. Эдинбургскаго университета Виттекера (E. T. Whittaker) подъ заглавіемъ „Рѣшеніе алгебраическихъ и трансцендентныхъ уравненій въ математической лабораторіи". Эти послѣднія лекціи были интересны тѣмъ, что происходили въ помѣщеніи вновь учрежденной при университетѣ Математической Лабораторіи. Организація занятій въ лабораторіи меня очень интересовала, и я предполагалъ распросить объ этомъ самого проф. Виттекера, который любезно пригласилъ меня къ себѣ, но событія заставили меня спѣшно покинуть Эдинбургъ и нарушили мои планы. Только по внѣшней обстановкѣ я могъ судить о той широтѣ, съ которой тамъ проводятся въ жизнь новыя теченія въ преподаваніи.

День окончанія Эдинбургскаго праздника науки совпалъ съ громовымъ ударомъ грозы, разразившейся надъ Европой. Покидая гостепріимную Шотландію въ тревожную минуту, нельзя было не оцѣнить исключительную сердечность и отзывчивость нашихъ хозяевъ.

*К. М.*

# Новая формула предѣла $L$ григоріанской Пасхи и неправильность формулы Гаусса.

*Д-ра прикладной математики Х. І. Гохмана.*

Формула (16) (см. „Вѣстникъ“ № 608) для $L$ составлена въ предположеніи, что запаздываніе еврейскаго календаря по отношеніи къ григоріанскому совершается непрерывно на 0,004 322 дня въ годъ. На самомъ же дѣлѣ запаздываніе происходитъ прерывно: въ еврейскомъ календарѣ каждые 19 лѣтъ (метоновъ циклъ), а въ григоріанскомъ календарѣ опереженіе происходитъ каждые сто лѣтъ, за исключеніемъ високоснаго столѣтія. Поэтому иногда получается ошибка въ 1 день. Слѣдующая формула принимаетъ все это во вниманіе и, потому, она совершенно точна и имѣетъ вѣчную силу. Получается она весьма легко изъ формулы (10) еврейской Пасхи (см. „Вѣстникъ“ № 607). По смыслу своему преобразованіе, произведенное Алоизіемъ Лиліемъ, состоитъ въ томъ, что онъ принялъ день еврейской Пасхи (15-ое нисона) 1-го вѣка за предѣлъ григоріанской Пасхи. Въ І-омъ вѣкѣ еврейская Пасха праздновалась по формулѣ $49-a$ (таблица 9) стараго стиля. Но еврейскій календарь опережаетъ юліанскій на 1 день каждые 315 лѣтъ. Слѣдовательно, въ юліанскомъ календарѣ дата еврейской Пасхи выражается формулой $49-a-E(A/315)$, гдѣ $A$ есть № даннаго года. Чтобы теперь получить григоріанскую дату еврейской Пасхи надо перевести юліанскую дату на григоріанскую, и мы получимъ предѣлъ:

$$20<L=49-a-E(A/315)+g-30T<50.$$

Но $g=S-E(S/4)-2$ (формула 5). Слѣдовательно,

$$20<L=47+S-E(S/4)-E(A/315)-30T-a<50, \qquad (1)$$

или проще

$$20<L=47+R\{[S-E(S/4)-E(A/315)]:30\}-a-30T<50,$$

если $S-E(S/4)-E(A/315)>29$.

Это и есть новая чрезвычайно простая формула предѣла. Все остальное остается безъ измѣненія. Величина

$$v=S-E(S/4)-E(A/315) \text{ или } v=R\{[S-E(S/4)-E(A/315)]:30\} \qquad (2)$$

и есть запозданіе еврейскаго календаря, т. е. поправка, которую Кинкелинъ назвалъ Sonnen-und Mondgleichung, но которая дана имъ (т. е. Гауссомъ*) въ невѣрномъ изложеніи. Ошибка Гаусса двоякаго рода.

1) Онъ допускаетъ, что запаздываніе $v$ постоянно для всего столѣтія, такъ какъ его число $m=E\left(\dfrac{13+8S}{25}\right)$ есть функція только отъ $S$. На са-

*) Кинкелинъ только доказываетъ данныя Гауссомъ формулы.

момъ же дѣлѣ она должна быть функціей отъ года $A$, какъ наша функція $v$. Если $E(A/315)$ одинаково для начала и конца вѣка, то $m$ постоянно. Но часто бываютъ столѣтія, когда значеніе $E(A/315)$ въ нѣкоторомъ году среди вѣка становится на единицу больше его значенія въ началѣ вѣка; новое значеніе сохраняется отъ этого года до конца вѣка: $m$ претерпѣваетъ перерывъ. Легко опредѣлить годъ перерыва. Пусть начальный годъ столѣтія $A_1 = 315q + R$; годъ перерыва $A_2 = 315(q+1)$, откуда $A_2 = A_1 - R + 315$. Напримѣръ, для начала 19-го вѣка имѣемъ: $1800 = 315 . 5 + 225$. Годъ перерыва $A_2 = 1800 - 225 + 315 = 1890$. Для начала столѣтія $E(A_1/315) = E(1800/315) = 5$; для конца столѣтія $E(1899/315) = 6$. Функція $v$ для начала столѣтія есть $v_1 = 18 - 4 - 5 = 9$. Для конца столѣтія $v_2 = 18 - 4 - 6 = 8$. Перерывъ происходитъ въ 1890 году. Поэтому при составленіи вѣковой таблицы надо удостовѣриться, сохраняется ли для всего вѣка значеніе $E(A/315)$. Если оно не сохраняется, то надо найти годъ перерыва. До этого года составляется таблица полагая $v = v_1$; начиная съ года перерыва предѣлъ уменьшается на единицу и $v_2 = v_1 - 1$, Стало быть, начиная съ года перерыва до конца вѣка формула Гаусса невѣрна. Непонятно, какъ могъ Гауссъ не замѣтить этого обстоятельства. По объясненію Кинкелина, Гауссъ принялъ, что еврейскій календарь опережаетъ юліанскій (Mondgleichung) на 1 день каждые 310 лѣтъ. Стало быть, разсуждаетъ Кинкелинъ, за 2480 лѣтъ опереженіе $= 8$ дней. Эти 8 дней онъ распредѣлилъ между 8-ью группами столѣтій, начиная съ 1800 г. Первыя семь группъ содержатъ по три столѣтія (1800, 1900, 2000); (2100, 2200, 2300) и т. д. Послѣдняя группа содержитъ 4 столѣтія: 3900, 4000, 4100, 4200. Затѣмъ эта группировка повторяется въ томъ же порядкѣ до безконечности. Для каждой послѣдующей группы $m$ увеличивается на 1. Это дѣйствительно оправдывается выраженіями для $m$ для первыхъ 380 столѣтій. Но онъ не обратилъ вниманія на прерывность выраженія $E(A/310)$ среди вѣка.

2) Помимо того, что опереженіе еврейскаго календаря на одинъ день происходитъ не черезъ каждые 310 лѣтъ, а черезъ 315 лѣтъ, Гауссъ не принялъ во вниманіе разницы въ 20 лѣтъ. Даже при допущеніи, что опереженіе происходитъ каждые 310 лѣтъ, формула для $m$ невѣрна, потому что опереженіе на 8 дней происходитъ каждые 2480 лѣтъ $(310 . 8 = 2480)$, сдѣланная же группировка даетъ опереженіе въ 8 дней только въ 2500 лѣтъ. Лишніе 20 лѣтъ даютъ цѣлый день опереженія черезъ каждые $(310/20) . 2500 = 38750$ лѣтъ. Слѣдовательно, формула Гаусса вѣрна (не считая перерыва) только до 38750 года. Послѣ этого предѣлъ Пасхи по Гауссу невѣренъ на одинъ день въ теченіе 38750 лѣтъ. Затѣмъ на 2 дня въ теченіе слѣдующихъ 38750 лѣтъ и т. д., т. е. каждые 38750 лѣтъ увеличиваютъ ошибку на одинъ день. Черезъ 387500 лѣтъ ошибка будетъ въ 10 дней. Такая же ошибка, только съ обратнымъ знакомъ, получится, если возьмемъ вѣрное число 315, такъ какъ $315 . 8 - 2500 = 2500 - 310 . 8$.

Итакъ, до 38750 года формула Гаусса невѣрна каждые 3 столѣтія отъ года перерыва до конца столѣтія. Начиная же съ 38750 года она совсѣмъ не годится, и ея погрѣшность возрастаетъ неограниченно. Наша же формула абсолютно вѣрна на вѣчныя времена, если не считать допущенной чрезвычайно малой погрѣшности. Въ дѣйствительности надо взять $E(A/314{,}76)$; но въ виду очень малой погрѣшности мы взяли $E(A/315)$. Но погрѣшность въ

*) Kinkelin, „Schlömilch Zeitschrift für Mathematik", 1870 г.

одинъ день настанетъ черезъ милліонъ лѣтъ, и до того времени можемъ взять болѣе простое выраженіе $E(A/315)$. До 2900 года можно даже взять $E(A/315)=E(S/3)$, ибо равенство $E[(A/315)=E[(100S+r):300]=E(S/3)$ гдѣ $r<100$, вѣрно до 2900 года, въ чемъ легко убѣдиться непосредственно.

Въ своемъ рукописномъ трудѣ я доказалъ также, что всѣ формулы Гаусса получаются изъ нашихъ формулъ, если не считать его ошибки въ выраженіи для $m$ — стало быть обѣ системы формулъ тожественны до 38750 года. Въ виду чрезвычайной простоты нашихъ формулъ въ сравненіи съ Гауссовыми и невѣрности послѣднихъ онѣ должны быть изъяты изъ употребленія и замѣнены нашими новыми формулами.

Примѣчаніе. Формула предѣла православной церкви получается изъ новой формулы для григоріанской Пасхи положеніемъ $v=\text{const}=0$; $+30t=-30T$.

Покажемъ на примѣрѣ преимущество нашихъ формулъ передъ Гауссовыми, не считая невѣрности послѣднихъ во многихъ случаяхъ и ихъ непригодность послѣ 3875 года. Формула (1) для $L$ даетъ приближенную григоріанскую дату еврейской Пасхи, если отбросить ограниченіе $20<L<50$ и, стало быть, отбросить членъ $(-30T)$, такъ какъ еврейская Пасха пе имѣетъ этого ограниченія. Тогда формула (1) превращается въ

$$L=\pi_e=47+S-E(S/4)-E(A/315) \tag{3}$$

тожественную съ формулой (10). Такъ, изъ формулы (10) и таблицы (9) для 20-го вѣка получается григоріанская дата еврейской Пасхи если взять $43+13-a$, гдѣ 13 есть $g$ для 20-го вѣка, получимъ $56-a$; то же самое даетъ формула (3). Благодаря этому простому соотношенію между обѣими пасхаліями мы можемъ рѣшить слѣдующую обратную задачу.

Опредѣлить для даннаго вѣка всѣ годы совпаденія григоріанской Пасхи съ еврейской. Эту задачу мы рѣшимъ въ общемъ видѣ и на примѣрѣ. Изъ того обстоятельства, что предѣлъ григоріанской Пасхи совпадаетъ съ еврейской, слѣдуетъ, что, вообще, обѣ Пасхи не могутъ совпасть. Но въ обѣихъ пасхаліяхъ есть исключительные случаи, о которыхъ уже было упомянуто. Именно, еврейская Пасха иногда откладывается на одинъ или два дня. Если еврейская Пасха откладывается съ субботы на воскресенье, то обѣ Пасхи совпадаютъ, такъ какъ предѣлъ приходится на канунъ еврейской Пасхи въ субботу. Къ сожалѣнію, мы не можемъ указать эти случаи, такъ какъ мы не изложили теоріи еврейскаго календаря. Изъ этой теоріи слѣдуетъ, напримѣръ, что въ 1903 году еврейская Пасха была перенесена съ субботы на воскресенье. Наша приближенная формула (3) даетъ для 1903 года дату $56-14=42$ марта $=11$ апрѣля [ибо $a=R(4.11/30)=14$], на самомъ же дѣлѣ въ силу астрономической отсрочки (см. пунктъ 2 глава II) еврейская Пасха была 12 апрѣля, когда по нашимъ формуламъ была также григоріанская Пасха.

Въ справедливости совпаденія можно убѣдиться хотя бы, напримѣръ, изъ показаній энциклопедическаго словаря Брокгауза т. 44, стр. 951 и 953. На стр. 951 показано, что въ 1903 г. еврейская Пасха приходится на 12 апрѣля нов. стиля, а на стр. 953 сказано, что григоріанская Пасха приходится на 12 апрѣля. Случаи совпаденія обѣихъ пасохъ для года исключительныхъ случаевъ григоріанскаго календаря мы можемъ рѣшать въ общемъ видѣ, такъ какъ эти случаи нами указаны. Именно, предѣлъ $L$ уменьшается на 1, если

$L=47+v-a=50$, т. е. при $a=v-3$, также если $a_2=v-2$ въ одно время съ $a_1=v-3$ (т. е. если въ данномъ вѣкѣ есть одновременно $a_1=v-3$, $a_2=v-2$). Совпаденіе будетъ, если въ силу уменьшенія предѣлъ придется на субботу. Изъ формулы $a=v-3$ мы опредѣляемъ годъ цикла $\varrho=R\,(A/19)$, затѣмъ изъ условія, что предѣлъ приходится на субботу мы опредѣляемъ годъ солнечнаго круга $r=R\,(A/2S)$. Дѣлается это такъ. Поставивъ значеніе $L=49$ (или 48) въ формулу (4) (см. № 607 „Вѣстника") для григоріанскаго календаря $N=49=7\partial+0-(K_g+3)$ (ибо для субботы $H=0$, а примѣта марта григоріанскаго календаря $=3$), мы получаемъ $K_g=7\partial-52>-1$ и $<7$. Необходимо полагать $7\partial=56$, откуда $K_g=4$. Затѣмъ изъ формулы (7) (см. № 607 „Вѣстника") получаемъ $K=K_g+K_s-7\partial=4+K_s-7\partial>-1$ и $<7$. $K_s$ извѣстна, стало быть извѣстна и $K$, и по $K$ мы опредѣляемъ $r$ изъ таблицы:

| Для $K=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | — | 4 | 5 | 6 |
| | 7 | — | 8 | 9 | 10 | 11 | — |
| $r=$ | 12 | 13 | 14 | 15 | — | 16 | 17 |
| | 18 | 19 | — | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | — | 24 | 25 | 26 | 27 | — | 28 |

которую мы беремъ изъ таблицы для Пасхи въ №№ 607 и 608 „Вѣстника", вмѣсто того, чтобы рѣшить неопредѣленное уравненіе $K=R\left[\dfrac{r+E(r/4)}{7}\right]$.

Зная $\varrho$ и $r$, мы получаемъ годъ $A=56\,(r-\varrho)+r+532z$. Для предѣла $L=48$ получается $K_g=5$. Итакъ, вопросъ рѣшенъ въ самомъ общемъ видѣ.

Примѣръ. Опредѣлить годъ совпаденія обѣихъ пасохъ въ 20-мъ вѣкѣ. Для этого вѣка $v=19-4-6=9$. Слѣдовательно, первый исключительный случай соотвѣтствуетъ величинѣ $a_1=6$, откуда $\varrho=R\,(A/19)=5$. Для 20-го вѣка $K_s=1$, слѣдовательно, $K=5$ $(\partial=0)$; по табличкѣ $r=4$, 10, 21 и 27. Выберемъ $r=21$, тогда $A=56\,(21-5)+21+532z=$ $=917+532z$. Беря $z=2$, мы получаемъ $A=1981$.

Изъ этого примѣра видно, какъ легко рѣшаются обратныя задачи. Формулы же Гаусса абсолютно не даютъ возможности рѣшенія подобныхъ задачъ, и не только потому, что онѣ очень сложны, но главнымъ образомъ, потому, что въ нихъ нѣтъ связи между григоріанской Пасхой и еврейской.

Примѣчаніе. Вслѣдствіе запаздыванія еврейскаго календаря совпаденіе не всегда возможно, даже тогда, когда еврейская Пасха откладывается съ субботы на воскресенье. Именно, если $47+v-a>49$, т. е. если $a<v-3$, при чемъ подъ $v$ надо разумѣть полное его значеніе $v=S-E\,(S/4)-E\,(A/315)$ а не остатокъ его отъ дѣленія на 30. Для каждаго вѣка можно опредѣлить тѣ годы цикла, когда совпаденія невозможны. Такъ для 20-го вѣка $v=9$, $v-3=6$. Совпаденіе невозможно для годовъ, для которыхъ $a<6$ именно для годовъ цикла: 10, 2, 13, соотвѣтствующихъ $a=1$, 3, 4.

Что же касается 5-го года цикла для котораго $a=6$, то это исключительный годъ, какъ мы видѣли выше.

Съ теченіемъ времени случаи совпаденія уменьшаются, такъ какъ $v$ возрастаетъ. Совпаденія совсѣмъ прекратятся начиная съ $v=32$, ибо наибольшее значеніе для $a$ есть $a=29$. При $v=32$ и $a=29$ получается $47+v-a=50$. Искомый вѣкъ прекращенія получается изъ приближеннаго уравненія $S-E\,(S/4)-E\,(S/3)=32$ и $47-a+v=50$, именно $S=76$, т. е. съ 7700 года совпаденіе совершенно прекратится.

Болѣе подробное изслѣдованіе соотношеній между обѣими пасхами изложено въ моемъ рукописномъ трудѣ.

# Замѣтка о числовой функціи $\varphi(A)$.

*А. М. Фельдмана.*

Дано нѣкоторое цѣлое и положительное число $A$. Напишемъ всѣ цѣлыя и положительныя числа простыя относительно $A$ и не превосходящія его. Число этихъ чиселъ условились обозначать символомъ $\varphi(A)$ и называть числовой функціей.

Эйлеромъ была указана формула (и ея выводъ), дающая возможность по разложенію числа $A$ на простые множители опредѣлить его числовую функцію $\varphi(A)$, а именно, если

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots l^{\lambda},$$

гдѣ $a, b, \ldots, d$ суть простые дѣлители числа $A$, то

$$\varphi(A) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1)\ldots(l-1). \qquad \text{(I)}$$

Цѣль настоящей замѣтки дать простой выводъ этой формулы, который, какъ мы увидимъ ниже, дастъ возможность доказать справедливость указанной формулы (I) индуктивно относительно числа простыхъ дѣлителей числа $A$.

Этотъ выводъ покоится на 3-хъ простыхъ предложеніяхъ. Первое изъ этихъ предложеній есть общеизвѣстная теорема изъ теоріи чиселъ, доказательство которой, однако, настолько элементарно и просто, что мы считаемъ достаточнымъ, не лишая элементарности изложенія, привести здѣсь лишь формулировку ея:

Лемма. Дѣлимое и дѣлитель суть взаимно простыя числа въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда дѣлитель и остатокъ отъ дѣленія суть числа взаимно простыя.

Теорема I: Если число $a$ есть простой дѣлитель числа $p$, то $\varphi(pa) = \varphi(p) \cdot a$.

Доказательство. Для того, чтобы знать, сколько чиселъ, не превосходящихъ числа $pa$ и взаимно простыхъ съ нимъ, достаточно выписать ихъ изъ ряда чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, pa, \qquad \text{(II)}$$

и сосчитать.

Если какое-либо число $M$ взаимно простое съ числомъ $pa$, то оно взаимно простое и съ числомъ $p$. Справедливо и обратное утвержденіе — если число $M$ взаимно простое съ числомъ $p$, то оно взаимно простое и съ числомъ $pa$, ибо число $a$ есть простой дѣлитель числа $p$.

А потому для опредѣленія числа чиселъ ряда (II), простыхъ относительно числа $pa$, достаточно найти число чиселъ того же ряда, простыхъ относительно числа $p$, для чего мы разбиваемъ рядъ чиселъ (II) на $a$ группъ по $p$ чиселъ въ каждой группѣ, расположенныхъ въ видѣ слѣдующей таблицы изъ $a$ горизонталей и $p$ вертикалей:

$$1, \qquad 2, \qquad 3, \ldots, \; p, \qquad (1)$$

$$p+1, \qquad p+2, \qquad p+3, \ldots, \; 2p, \qquad (2)$$

$$2p+1, \qquad 2p+2, \qquad 2p+3, \ldots, \; 3p, \qquad (3)$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a-1)p+1, \; (a-1)p+2, \; (a-1)p+3, \ldots, \; ap. \qquad (a)$$

Разсматривая эту таблицу, легко замѣтить, что всѣ числа *одной и той же вертикали* (кромѣ послѣдней, состоящей изъ чиселъ кратныхъ $p$) при дѣленіи на число $p$ даютъ въ остаткѣ число, находящееся въ *той же вертикали* и въ 1-ой горизонтали. А потому, согласно вышеупомянутой леммѣ, среди чиселъ каждой группы (горизонтали) имѣется *одинаковое число* чиселъ простыхъ относительно числа $p$. Число же послѣднихъ въ группѣ (1) мы условились символически обозначать черезъ $\varphi(p)$, слѣдовательно, среди чиселъ всѣхъ $a$ группъ, или, что все равно, среди чиселъ ряда (II) имѣется $\varphi(p) \,.\, a$ чиселъ простыхъ относительно числа $p$. Чиселъ же въ ряду (II) простыхъ относительно числа $pa$, какъ было указано выше, столько, сколько ихъ въ томъ же ряду простыхъ относительно числа $p$, а потому

$$\varphi(pa) = \varphi(p) \,.\, a$$

*Теорема II: Если число* $p$*—взаимно простое съ простымъ числомъ* $a$, *то* $\varphi(pa) = \varphi(p) \,.\, (a-1)$.

*Доказательство.* Если какое-либо число $M$ взаимно простое съ числомъ $pa$, то оно взаимно простое и съ числомъ $p$. Обратное утвержденіе было бы, конечно, ни на чемъ не основано. Но справедливо слѣдующее утвержденіе— если число $M$ простое относительно чиселъ $p$ и $a$, то оно простое и относительно числа $pa$.

А потому для опредѣленія числа чиселъ ряда (II), простыхъ относительно числа $pa$, достаточно выписать изъ этого ряда всѣ числа простыя относительно чиселъ $p$ и $a$ и сосчитать.

Какъ мы уже видѣли при доказательствѣ предыдущей теоремы, среди чиселъ ряда (II) имѣется $\varphi(p) \,.\, a$ чиселъ простыхъ относительно числа $p$. Пусть это будутъ числа

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots, \; a_{\varphi(p)a}. \qquad (III)$$

Чтобы узнать, сколько въ этомъ ряду чиселъ простыхъ относительно числа $a$, достаточно изъ числа $\varphi(p) \,.\, a$ вычесть число чиселъ *этого же ряда* кратныхъ простого числа $a$.

Среди чиселъ ряда (II) имѣются слѣдующія $p$ чиселъ кратныхъ $a$:

$$a, \; 2a, \; 3a, \ldots, \; (p-1)\,a, \; pa. \qquad (IV)$$

Легко доказать, что всѣ эти $p$ чиселъ при дѣленіи на $p$ даютъ $p$ различныхъ остатковъ. Дѣйствительно, если бы два числа этого ряда $ma$ и $na$

$(m > n)$ при дѣленіи на $p$ давали бы въ остаткѣ одно и то же число $r$, то мы имѣли бы

$$ma = p \cdot q + r \text{ и } na = pq_1 + r,$$

откуда

$$(m - n) \cdot a = p \cdot (q - q_1).$$

Это равенство показываетъ, что произведеніе $(m-n)a$ кратно числа $p$. Такимъ образомъ, наше предположеніе привело насъ къ абсурду, ибо число $a$ простое относительно числа $p$, число же $m - n$ меньше числа $p$ (ибо $m \leqslant p$ и $n < p$).

Итакъ, числа ряда (IV) при дѣленіи на число $p$ даютъ въ остаткѣ слѣдующія $p$ чиселъ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-2,\ p-1, \tag{V}$$

среди которыхъ имѣется $\varphi(p)$ чиселъ простыхъ относительно числа $p$ (присутствующее здѣсь лишнее число 0 и отсутствующее число $p$ — суть числа кратныя $p$). Слѣдовательно, согласно вышеупомянутой леммѣ, столько же чиселъ простыхъ относительно $p$ и въ ряду чиселъ (IV).

Такимъ образомъ, среди чиселъ ряда (III) имѣется $\varphi(p)$ чиселъ кратныхъ $a$, а потому въ томъ же ряду, а слѣдовательно и въ ряду чиселъ (II) имѣется $\varphi(p) \cdot a - \varphi(p) = \varphi(p) \cdot (a-1)$ чиселъ простыхъ относительно чиселъ $p$ и $a$.

Чиселъ же простыхъ относительно чиселъ $p \cdot a$, въ ряду (II), какъ было уже указано столько, сколько ихъ въ томъ же ряду простыхъ относительно чиселъ $p$ и $a$, а потому $\varphi(pa) = \varphi(p) \cdot (a-1)$.

Приступимъ теперь къ выводу формулы Эйлера. Пусть

$$A = a^\alpha b^\beta \ldots m^\mu n^\nu$$

есть разложеніе числа $A$ на простые множители.

Всѣ числа меньшія простого числа $a$ суть простыя относительно него, ибо могутъ имѣть съ нимъ только одного общаго множителя — 1 (число же $a$ кратно самому себѣ), а потому $\varphi(a) = a - 1$.

Примѣняя все время теорему (II), мы будемъ имѣть:

$$\varphi(ab \ldots mn) = \varphi(ab \ldots m) \cdot (n-1) = \varphi(ab \ldots)(m-1)(n-1) = \ldots$$

$$\ldots = \varphi(a)(b-1) \ldots (m-1)(n-1) = (a-1)(b-1) \ldots (m-1)(n-1).$$

Послѣдовательное же умноженіе числа $ab \ldots mn$ на простые множители числа $a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots m^{\mu-1} n^{\nu-1}$ повлечетъ за собою, согласно теоремѣ (I), послѣдовательное умноженіе числа $\varphi(ab \ldots mn)$ на тѣ же множители, а потому

$$\varphi(A) = \varphi(ab \ldots mn) \cdot a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots m^{\mu-1} n^{\nu-1} =$$

$$= a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots m^{\mu-1} n^{\nu-1} (a-1)(b-1) \ldots (m-1)(n-1).$$

Пользуясь вышеупомянутыми теоремами (I и II), легко теперь доказать справедливость формулы (I) индуктивно относительно числа простыхъ дѣлителей числа $A$, или, что все равно, относительно суммы показателей при простыхъ множителяхъ въ разложенiи числа $A$.

Легко убѣдиться въ справедливости этой формулы для одного простого числа. Дѣйствительно, если $A = a$, то

$$\varphi(A) = \varphi(a) = a - 1 = a^{1-1}(a - 1).$$

Допустимъ теперь справедливость формулы (I) для всякаго числа, имѣющаго $n$ простыхъ множителей, и докажемъ справедливость формулы (I) для всякаго числа, имѣющаго $n + 1$ простыхъ множителей.

Пусть

$$A = a^\alpha b^\beta \ldots n^\nu$$

есть разложенiе числа $A$ на простые множители, при чемъ

$$\alpha + \beta + \cdots + \nu = n + 1.$$

Тогда, выдѣливъ любой простой множитель изъ числа $A$, напримѣръ $a$, мы будемъ имѣть:

$$\varphi(A) = \varphi(a^{\alpha-1} b^\beta \ldots n^\nu . a).$$

I-ый случай — если $\alpha = 1$, т. е. простое число однажды встрѣчается множителемъ въ числѣ $A$, то $a^{\alpha-1} = a^0 = 1$, въ этомъ случаѣ, согласно теоремѣ (II),

$$\varphi(A) = \varphi(b^\beta \ldots n^\nu) . (a - 1).$$

Но

$$\beta + \cdots + \nu = n + 1 - \alpha = n + 1 - 1 = n,$$

а потому, по предположенiю, имѣемъ:

$$\varphi(b^\beta \ldots n^\nu) = b^{\beta-1} \ldots n^{\nu-1}(b - 1) \ldots (n - 1),$$

слѣдовательно, и

$$\varphi(A) = b^{\beta-1} \ldots n^{\nu-1}(b - 1) \ldots (n - 1) . (a - 1) =$$

$$= a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots n^{\nu-1}(a - 1)(b - 1) \ldots (n - 1),$$

т. е. формула вѣрна и для числа $A$, имѣющаго $n + 1$ простыхъ дѣлителей.

II-ой случай — если $\alpha > 1$, т. е. простое число $a$ встрѣчается множителемъ въ числѣ въ $A$ нѣсколько разъ; тогда, согласно теоремѣ (I), имѣемъ:

$$\varphi(A) = \varphi(a^{\alpha-1} b^\beta \ldots n^\nu . a) = \varphi(a^{\alpha-1} b^\beta \ldots n^\nu) . a.$$

Но

$$(\alpha - 1) + \beta + \cdots + \nu = n + 1 - 1 = n,$$

а потому, согласно предположенію, имѣемъ:

$$\varphi(a^{\alpha-1}b^{\beta}\ldots n^{\nu}) = a^{\alpha-2}b^{\beta-1}\ldots n^{\nu-1}(a-1)(b-1)\ldots(n-1),$$

слѣдовательно, и

$$\varphi(A) = a^{\alpha-2}b^{\beta-1}\ldots n^{\nu-1}(a-1)(b-1)\ldots(n-1)\,.\,a =$$
$$= a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots n^{\nu-1}(a-1)(b-1)\ldots(n-1),$$

т. е. формула вѣрна и для числа $A$, имѣющаго $n+1$ простыхъ дѣлителей.

Если число $A$ содержитъ только одинъ простой множитель, то формула вѣрна — въ этомъ мы уже убѣдились — слѣдовательно, формула (I) вѣрна и для числа $A$, имѣющаго два, три, ... и, наконецъ, $n$ простыхъ множителей.

---

Зная формулу Эйлера, не трудно уже доказать и слѣдующую теорему, являющуюся обобщеніемъ теоремы (II).

Теорема III. Если $A$ и $B$ суть числа взаимно простыя, то

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\,.\,\varphi(B).$$

Дѣйствительно, если числа

$$A = a^{\alpha}b^{\beta}\ldots l^{\lambda} \quad \text{и} \quad B = m^{\mu}n^{\nu}\ldots r^{\varrho}$$

суть числа взаимно простыя, то это значитъ, что ни одно изъ чиселъ ряда

$$a,\ b,\ \ldots,\ l$$

не равно ни одному изъ чиселъ ряда

$$n,\ m,\ \ldots,\ r,$$

а потому

$$\varphi(AB) = \varphi(a^{\alpha}b^{\beta}\ldots l^{\lambda}m^{\mu}n^{\nu}\ldots r^{\varrho}) = a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots$$
$$l^{\lambda-1}m^{\mu-1}n^{\nu-1}\ldots r^{\varrho-1}(a-1)(b-1)\ldots(l-1)(m-1)(n-1)\ldots(r-1) =$$
$$[a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)\ldots(l-1)]\,.\,[m^{\mu-1}n^{\nu-1}\ldots r^{\varrho-1}(m-1)(n-1)\ldots(r-1)] =$$
$$= \varphi(A)\,.\,\varphi(B).$$

# НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

**Солнечное излученіе.** Какъ извѣстно, солнечные лучи служатъ источникомъ всей жизни на землѣ. Температура земли довольно чувствительна къ колебаніямъ въ солнечномъ лучеиспусканіи: когда солнечное лучеиспусканіе увеличивается въ полтора раза, то при прочихъ равныхъ условіяхъ средняя температура земли повышается отъ $+15^\circ$ до $+45^\circ$. Поразительно, что, несмотря на столь важное значеніе солнечнаго лучеиспусканія, оно до послѣднихъ лѣтъ опредѣлялось лишь весьма неточно, — съ приближеніемъ до 50%. Трудно, однако, измѣрить съ точностью солнечное лучеиспусканіе въ какомъ-нибудь мѣстѣ даже въ самомъ нижнемъ слоѣ атмосферы. Между всѣми такъ называемыми „пиргеліометрами“, служащими для этой цѣли, вполнѣ удовлетворяетъ своему назначенію, повидимому, только инструментъ, изобрѣтенный Аббо (Abbot). Онъ основанъ на слѣдующемъ принципѣ. Солнечные лучи проникаютъ сквозь маленькое отверстіе въ полое тѣло, которое внутри себя поглощаетъ всѣ попадающіе въ него лучи. Это тѣло омывается текущей водой, которая при стаціонарномъ состояніи уноситъ съ собой ровно такое же количество теплоты, какое доставляется въ тѣло солнечными лучами. Измѣривъ разность температуръ вытекающей воды и притекающей и количество воды, которое протекаетъ въ одну минуту, мы найдемъ величину лучеиспусканія за одну минуту. Этимъ способомъ достигается точность до 1%.

Но собственная цѣль заключается въ измѣреніи солнечнаго лучеиспусканія не на поверхности земли, но за предѣлами земной атмосферы. Это послѣднее количество излученія называется „солнечной постоянной“ и составляетъ тотъ опредѣленный фондъ, который земля получаетъ отъ солнца на всѣ свои расходы. Та часть этого капитала, которая поглощается въ атмосферѣ, входитъ уже въ расписаніе теплового бюджета земли. Измѣрить излученіе, достигающее земли, во многихъ отношеніяхъ менѣе трудно, чѣмъ точно вычислить потерю, испытываемую солнечнымъ излученіемъ при прохожденіи черезъ земную атмосферу, и отсюда вывести заключеніе объ излученіи внѣ земной атмосферы. Для этой цѣли пользуются методомъ, основаннымъ на слѣдующемъ принципѣ: чѣмъ ниже солнце надъ горизонтомъ, тѣмъ болѣе длинный путь должны пройти солнечные лучи сквозь земную атмосферу, и въ тѣмъ большей степени они поглощаются воздухомъ. Измѣряя солнечное излученіе при различной высотѣ солнца, мы найдемъ мѣру поглощенія въ воздухѣ, и такимъ способомъ выполнимъ вычисленіе для того случая, когда атмосфера совершенно исключается. Такъ какъ лучи различной длины волны поглощаются воздухомъ въ весьма неодинаковой степени, то необходимо произвести это изслѣдованіе отдѣльно для лучей каждаго рода. Для этой цѣли нужно образовать спектръ солнца и съ помощью болометра измѣрить его интенсивность для всѣхъ длинъ волны между $0{,}4\,\mu$ и $4\,\mu$ при различной высотѣ солнца. Такъ какъ поглощеніе лучей въ воздухѣ мѣняется со дня на день, то это изслѣдованіе необходимо производить заново каждый день, когда измѣряютъ солнечное излученіе.

Тогда какъ прежде поглощеніе лучей въ атмосферѣ вычислялось лишь приблизительно и на основаніи сомнительныхъ гипотезъ Аббо примѣнилъ описанный методъ съ полной строгостью. Онъ производилъ, наблюденія въ Вашингтонѣ на уровнѣ моря, на горѣ Монтъ-Вилсонъ (Mont-Wilson) на высотѣ 1750 *м.*

надъ уровнемъ моря и на горѣ Монтъ-Уитней (Mont-Witney) на высотѣ 4420 *м.*; вездѣ онъ получалъ совпадающія значенія солнечнаго излученія внѣ земной атмосферы, — такъ называемыя солнечныя константы. Хотя въ Вашингтонѣ нагрѣваніе воды пиргеліометромъ было на $10\%$ съ лишнимъ меньше, чѣмъ въ Монтъ-Уитней, однако, если принимать въ расчетъ наблюдавшееся поглощеніе въ атмосферѣ, то значенія солнечныхъ постоянныхъ вполнѣ совпадаютъ. Солнечное излученія внѣ атмосферы за одну минуту составляетъ, въ среднемъ, 1,93 граммъ-калорій на 1 *кв. см.* Такимъ образомъ, впервые удалось точно установить число, которое является, можетъ быть, самымъ важнымъ въ жизненной экономіи земли.

Измѣренія А б б о привели, кромѣ того, еще къ одному любопытному результату. Солнечная постоянная оказывается не вполнѣ постоянной! Результаты колеблются примѣрно на $7\%$. Это можно было бы приписать погрѣшностямъ опыта, но въ Вашингтонѣ и Калифорніи обнаружились параллельныя колебанія. Для большей увѣренности А б б о два лѣта производилъ наблюденія въ Алжирѣ, и одновременно съ тѣмъ продолжались наблюденія въ Калифорніи. Эти наблюденія показали, что дни съ наибольшими или наименьшими значеніями солнечной постоянной въ Алжирѣ совпадаютъ съ такими же днями въ Калифорніи. Очень важно было бы имѣть больше данныхъ по столь важному вопросу; но и теперь уже почти не подлежитъ сомнѣнію, что притокъ энергіи, который земля получаетъ отъ солнца, колеблется приблизительно на $7\%$, и притомъ, повидимому, довольно капризнымъ образомъ, въ зависимости отъ эруптивной дѣятельности солнца. Здѣсь мы имѣемъ новый факторъ, который на ряду со столь многими другими оказываетъ вліяніе на состояніе погоды на землѣ.

# БИБЛІОГРАФІЯ.

## II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла, извѣстнаго въ германской литературѣ подъ названіемъ „Selbstanzeigen“, краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

**Н. С. Дрентельнъ.** *Физика въ общедоступномъ изложеніи.* Пособіе для обученія и самообразованія. Книга содержитъ основныя свѣдѣнія изъ физики, изложенныя въ связи съ повседневными явленіями и безъ помощи математическихъ формулъ; надлежащее мѣсто отведено обобщающимъ началамъ и современнымъ открытіямъ. Второе (измѣненное и дополненное) изданіе. Со многими вопросами для упражненія и 539 рисунками. XVI + 711 стр. Изд. т-ва И. Д. Сытина, 1914 г. Ц. 2 р. 50 к.

Во второмъ изданіи, сохранившемъ всѣ характерныя особенности перваго сдѣланы мѣстами существенныя измѣненія, имѣвшія цѣлью строже выдержать общій элементарный тонъ книги и пополнить нѣкоторые явные недочеты.

Важнѣйшія изъ измѣненій — слѣдующія. Выпущена большая часть VII главы перваго изданія, а именно о „механическомъ взаимодѣйствіи тѣлъ и о силахъ“, такъ какъ углубленіе въ понятіе о „силѣ“ заводитъ слишкомъ далеко въ область собственно механики; вмѣсто этого нѣсколькими примѣрами расширена характеристика „взаимности притяженія тѣлъ“ (§ 116). Изъ гл. XXXV перваго изданія выпущены свѣдѣнія о колебательномъ и волнообразномъ движеніи вообще, какъ требующія болѣе обстоятельнаго изложенія и надлежащихъ математическихъ пріемовъ; все самое необходимое включено въ XXI главу: „Сравненіе нѣкоторыхъ явленій свѣта и звука Эѳирныя волны“.

Свѣдѣнія о всеобщемъ тяготѣніи, кромѣ упомянутаго выше добавленія, расширены элементарнымъ разборомъ вопроса о движеніи луны вокругъ земли (§§ 117, 118). Химическій отдѣлъ добавленъ понятіями о пайныхъ отношеніяхъ, о химическихъ формулахъ и справочною табличкою простыхъ тѣлъ (§§ 143, 188 и 211). Наконецъ, послѣ главы объ энергіи, включены свѣдѣнія „о передачѣ и преобразованіи работы помощью машинъ“ (бо́льшая часть гл. XXVIII, въ которую перенесены и паровые двигатели).

Въ разныхъ мѣстахъ книги сдѣлано много болѣе или менѣе мелкихъ измѣненій и поправокъ, частью на основаніи личнаго опыта, частью по дружескимъ указаніямъ лицъ, внимательно ознакомившихся съ 1-мъ изданіемъ. Улучшены нѣкоторые рисунки и увеличено ихъ число.

Едва ли надо говорить, что и въ новомъ изданіи я не счелъ себя вправѣ касаться „электромагнитнаго міропониманія“ идущаго на смѣну механическому. Для элементарнаго изложенія здѣсь пока встрѣчаются неодолимыя трудности.

Какъ и въ 1-омъ изданіи, опыты (за рѣдкими исключеніями) не описываются съ технической ихъ стороны: книга никоимъ образомъ не задается цѣлью научить производству опытовъ. Необходимыя практическія указанія касательно тѣхъ изъ нихъ, которые отличаются извѣстными особенностями, можно большею частью найти въ другихъ моихъ книгахъ: „Физическіе опыты въ начальной школѣ“ (1913) и „Простые физическіе опыты и приборы“ (1908); первая содержитъ также элементарныя практическія свѣдѣнія о классномъ экспериментированіи вообще и о лабораторной обстановкѣ начальнаго преподаванія.

Основной и болѣе плотный шрифты книги тѣсно между собою связаны: напечатанное, въ виду сокращенія размѣровъ книги, болѣе плотно нельзя разсматривать лишь какъ рядъ дополненій или вставокъ (за немногими исключеніями); напротивъ, нѣкоторую законченность изложеніе представляетъ именно въ цѣломъ. (Изъ предисловія).

*Н. Д.*

# ЗАДАЧИ.

## Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

**№ 199** (6 сер.). На двухъ противоположныхъ сторонахъ выпуклаго четырехугольника построены квадраты, обращенные во внѣшнее поле по отношенію къ четырехугольнику, а на двухъ другихъ сторонахъ — квадраты, обращенные во внутреннее поле. Доказать, что центры этихъ квадратовъ суть вершины нѣкотораго паралеллограмма.

*М. Софроновъ* (Уральскъ).

**№ 200** (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{12}\cdot\frac{(x+5)(x-6)}{(x+6)(x-7)}-\frac{1}{11}\cdot\frac{(x+10)(x-11)}{(x+11)(x-12)}=\frac{8}{33}.$$

*Л. Закутинскій* (Черкассы).

**№ 201** (6 сер.). Построить треугольникъ, зная положеніе центровъ $O$ и $I_a$ круговъ описаннаго и внѣвписаннаго относительно стороны $BC$, а также средины $M$ этой стороны.

*Л. Богдановичъ* (Н.-Новгородъ).

**№ 202** (6 сер.). Доказать тожества:

$$\lg_{ab} x=\frac{\lg_a x\cdot\lg_b x}{\lg_a x+\lg_b x},\quad \lg_{a_1 a_2\cdots a_n} x=\frac{1}{\dfrac{1}{\lg_{a_1} x}+\dfrac{1}{\lg_{a_2} x}+\cdots+\dfrac{1}{\lg_{a_n} x}},$$

$$\lg_{(a:b)} x=\frac{\lg_a x\cdot\lg_b x}{\lg_b x-\lg_a x}.$$

*N.*

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

## Отдѣлъ I.

**№ 135** (6 сер.). *Доказать, что сумма членовъ безконечнаго ряда*

$$\frac{1}{11}+\frac{2\,.\,9}{111}+\frac{3\,.\,9^2}{1111}+\frac{4\,.\,9^3}{11111}+\cdots$$

*стремится къ конечному предѣлу и вычислить этотъ предѣлъ съ точностью до* 0,000001.

Разсмотримъ выраженіе $\sigma_n$, опредѣляемое равенствомъ

$$(1)\qquad \sigma_n=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1},$$

гдѣ $q \neq 1$. Умноживъ обѣ части равенста (1) на $q$, получимъ

$$(2)\qquad \sigma_n q=q+2q^2+\cdots+(n-1)\,q^{n-1}+nq^n.$$

Вычитая изъ равенства (2) равенство (1), находимъ, что

$$\sigma_n(1-q)=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-nq^n, \text{ или } \quad (3)\quad \sigma_n=\frac{1}{(1-q)^2}-\frac{q^n}{(1-q)^2}-\frac{nq^n}{1-q}.$$

Пусть теперь $|q|<1$. При этомъ условіи, съ возрастаніемъ $n$ до безконечности, (4) $\lim q^n=0$. Такъ какъ $|q|<1$, то $|q|=\frac{1}{1+b}$, гдѣ $b>0$, откуда

$$|nq^n|=\frac{n}{(1+b)^n}=\frac{n}{1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2+\cdots+b^n},$$

а потому, если $n>1$, $|nq^n|<\frac{n}{\left[\frac{n(n-1)b^2}{2}\right]}$, т. е. (5) $|nq^n|<\frac{2}{(n-1)b^2}$.

При возрастаніи $n$ до безконечности $\lim\frac{2}{(n-1)b^2}=0$; слѣдовательно, при $|q|<1$, [см. (5)] (6) $\lim nq^n=0$. Изъ равенствъ (3), (4), (6) слѣдуетъ, что $\lim\sigma_n=\frac{1}{(1-q)^2}$, или, обозначая, какъ это принято, предѣлъ суммы безконечнаго ряда безконечной строкой,

$$(7)\quad 1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Полагая въ формулѣ (7) $q=\frac{p}{m}$, гдѣ $p$ и $m$ цѣлыя положительныя числа, при чемъ $p<m$, и умножая обѣ части на $\frac{p}{m^2}$, находимъ

$$\frac{p}{m^2}+\frac{2p^2}{m^3}+\frac{3p^3}{m^4}+\cdots+\frac{np^n}{m^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{(m-p)^2}.$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $p=9$ и $m=10$, $10^2$, $10^3$ и т. д. получимъ безконечный рядъ равенствъ:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
\frac{9}{10^2}+\frac{2\,.\,9^2}{10^3}+\frac{3\,.\,9^3}{10^4}+\cdots+\frac{n\,.\,9^n}{10^{n+1}}+\cdots=\frac{9}{(10-9)^2},\\[2ex]
\frac{9}{10^4}+\frac{2\,.\,9^2}{10^6}+\frac{3\,.\,9^3}{10^8}+\cdots+\frac{n\,.\,9^n}{10^{2n+2}}+\cdots=\frac{9}{(10^2-9)^2},\\[2ex]
\frac{9}{10^6}+\frac{2\,.\,9^2}{10^9}+\frac{3\,.\,9^3}{10^{12}}+\cdots+\frac{n\,.\,9^n}{10^{3n+3}}+\cdots=\frac{9}{(10^3-9)^2},\\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]
\frac{9}{10^{2k}}+\frac{2\,.\,9^2}{10^{3k}}+\frac{3\,.\,9^3}{10^{4k}}+\cdots+\frac{n\,.\,9^n}{10^{kn+k}}+\cdots=\frac{9}{(10^k-9)^2}.\\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Вычисляя правыя части формулъ (8), получимъ послѣдовательно 9, $\frac{9}{91^2}$, $\frac{9}{991^2}$,... Разсматривая затѣмъ рядъ (9) $9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}+\cdots$, мы замѣчаемъ, что члены его, начиная со второго, соотвѣтственно меньше членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи

$$(10)\qquad \frac{9}{90^2}+\frac{9}{900^2}+\frac{9}{9000^2}+\cdots$$

съ первымъ членомъ $\frac{9}{90^2}$ и съ знаменателемъ $\frac{1}{100}$, а потому, такъ какъ сумма безконечно убывающей прогрессіи (10) стремится къ конечному предѣлу, то рядъ (9) также сходится, т. е. и его сумма, при безконечномъ возрастаніи числа членовъ, стремится къ конечному предѣлу. Такъ какъ члены всѣхъ рядовъ, просуммированныхъ въ формулахъ (8), положительны, то изъ сходимости ряда (9) вытекаетъ, какъ извѣстно, право суммировать безконечные ряды (8) по вертикалямъ *). Выполняя это суммированіе, приходимъ къ тожеству:

$$9\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right)+2\,.\,3^2\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)+3\,.\,9^3\left(\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\cdots\right)+$$

$$+n\,.\,9^n\left(\frac{1}{10^{n+1}}+\frac{1}{10^{2n+2}}+\cdots\right)+\cdots=9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}+\frac{9}{9991^2}+\frac{9}{99991^2}+\cdots$$

Суммируя безконечныя геометрическія прогрессіи въ круглыхъ скобкахъ, находимъ послѣдовательно:

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots=\frac{1}{10^2-1},\quad \frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\cdots=\frac{1}{10^3-1},$$

$$\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\cdots=\frac{1}{10^4-1},\ldots,\frac{1}{10^{n+1}}+\frac{1}{10^{2n+2}}+\cdots=\frac{1}{10^{n+1}-1},$$

а потому предыдущую формулу можно записать въ видѣ:

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\frac{9}{10^2-1}+\frac{2\,.\,9^2}{10^3-1}+\frac{3\,.\,9^3}{10^4-1}+\cdots+\frac{n\,.\,9^n}{10^{n+1}-1}+\cdots=\\&=9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}+\frac{9}{9991^2}+\cdots\end{aligned}$$

Но число $10^{n+1}-1$ записывается по десятичной системѣ $n$ девятками, а потому, сокращая члены лѣвой части формулы (11) на 9, получимъ:

$$(12)\qquad \frac{1}{11}+\frac{2\,.\,9^2}{111}+\frac{3\,.\,9^3}{1111}+\cdots+\frac{n9^n}{111\ldots1}+\cdots=9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}+\frac{9}{9991^2}+\cdots,$$

гдѣ символъ $111\ldots1$ обозначаетъ число, записанное $n$ единицами. Такъ какъ лѣвая часть формулы (12) представляетъ собою какъ разъ предложенный въ условіи задачи для суммированія рядъ, то изъ приведенныхъ выше разсуж-

*) Это значитъ, что каждый изъ вертикальныхъ рядовъ сходится и что предѣлы суммъ этихъ вертикальныхъ рядовъ образуютъ новый сходящійся рядъ, сумма котораго равна суммѣ ряда (9). См. O. Stolz — „Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik“, 1889, т. I. стр. 230, § 6. (Zusatz).

деній слѣдуетъ, что этотъ рядъ сходится и что предѣлъ его суммы $S$ равенъ предѣлу суммы ряда (9). Итакъ,

$$S=9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}+\frac{9}{9991^2}+\cdots, \quad \text{или} \quad (13) \quad S=S_3+r,$$

гдѣ

$$(14)\quad S_3=9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}, \qquad (15)\quad r=\frac{9}{9991^2}+\frac{9}{99091^2}+\cdots$$

Такъ какъ $9991<10000=10^4$, $99991<10^5$ и т. д., то члены ряда, опредѣляющаго $r$ [см. (15)], соотвѣтственно больше членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи $\frac{9}{10^8}+\frac{9}{10^{10}}+\frac{9}{10^{12}}+\cdots$; съ другой стороны, члены ряда, опредѣляющаго $r$, соотвѣтственно меньше членовъ сходящагося ряда (10), начиная съ третьяго его члена. Итакъ

$$\frac{9}{10^8}+\frac{9}{10^{10}}+\cdots<r<\frac{9}{9000^2}+\frac{9}{90000^2}+\cdots,$$

или, такъ какъ

$$\frac{9}{10^8}+\frac{9}{10^{10}}+\cdots=\frac{9}{10^8(1-1/10^2)}=\frac{1}{11000000}, \quad \frac{9}{9000^2}+\frac{9}{90000^2}+\cdots=$$

$$=\frac{9}{9^2(10^6-10^4)}=\frac{1}{8910000}, \quad \text{то} \quad \frac{1}{11000000}<r<\frac{1}{8910000},$$

а тѣмъ болѣе

$$(16)\quad \frac{1}{11000000}<r<\frac{1}{8000000}.$$

Вычисляя дроби $\frac{1}{11000000}$ и $\frac{1}{8000000}$ съ точностью до $\frac{1}{10^8}$ соотвѣтственно съ недостаткомъ и избыткомъ, получимъ [см. (16)]:

$$(17)\quad 0{,}00000009<r<0{,}00000013.$$

Вычисляя дроби $\frac{9}{91^2}$ и $\frac{9}{991^2}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ — первую съ точностью до $\frac{1}{10^7}$, а вторую съ точностью до $\frac{1}{10^8}$, находимъ, что

$$0{,}0010868<\frac{9}{91^2}<0{,}0010869; \quad 0{,}00000916<\frac{9}{991^2}<0{,}00000917,$$

откуда

$$(18)\quad 9+0{,}0010868+0{,}00000916<9+\frac{9}{91^2}+\frac{9}{991^2}<9+0{,}0010869+0{,}00000917.$$

Сложивъ неравенства (17) и (18), получимъ [см. (13), (14)] окончательно

$$9{,}00109605<S<9{,}0010962, \quad \text{и тѣмъ болѣе} \quad (19)\quad 9{,}001096<S<9{,}0010962.$$

Изъ неравенствъ (19) ясно, что дроби 9,001096 и 9,001097 выражаютъ $S$ съ точностью до 0,000001 соотвѣтственно съ недостаткомъ и избыткомъ.

**Замѣчаніе.** Сходимость ряда, заданнаго въ условіи задачи, можетъ быть доказана очень просто сравненіемъ съ рядомъ

$$(20)\quad \frac{1}{9}(0{,}9+2\,.\,0{,}9^2+3\,.\,0{,}9^3+\cdots).$$

Дѣйствительно, такъ какъ

$$10^{n+1}-1=10^n.9+10^n-1>10^n.9, \quad \text{то} \quad \frac{n.9^n}{10^{n+1}-1}<\frac{n.9^n}{10^n.9}=\frac{1}{9}\,n\left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

а потому [см. лѣвыя части равенствъ (11) и (12)] члены даннаго въ условіи ряда соотвѣтственно меньше членовъ ряда (20; рядъ же (20) сходится, такъ какъ вынося въ немъ 0,9 за скобку и примѣняя формулу (7), имѣемъ:

$$\frac{1}{9}(0{,}9+2.0{,}9^2+3.0{,}9^3+\cdots)=\frac{0{,}9}{9}(1+2.0{,}9+3.0{,}9^2+\cdots)=\frac{1}{9}\cdot\frac{0{,}9}{(1-0{,}9)^2}=10.$$

Однако непосредственное приближенное суммированіе даннаго въ условіи ряда очень затруднительно, настолько медленно онъ сходится; пріемъ рѣшенія задачи какъ разъ въ томъ и состоитъ, чтобы преобразовать медленно сходящійся рядъ въ другой рядъ, сходящійся быстрѣе.

*N.*; *N. N.* (Петроградъ); ***Н. С.*** (Одесса).

**№ 152** (6 сер.). *Доказать слѣдующее предложеніе: если въ выпукломъ четырехугольникѣ* ABCD *равнодѣлящія угловъ, составленныхъ парами прямыхъ* AB, CD *и* BC, AD, *перпендикулярны, то четырехугольникъ циклическій (т. е. такой, который можно вписать въ кругъ). Можно ли обобщить это предложеніе и на тотъ случай, когда одна или обѣ пары противоположныхъ сторонъ разсматриваемаго четырехугольника параллельны?*

Разсмотримъ сперва случай, когда обѣ пары противоположныхъ сторонъ $AB$, $CD$ и $AD$, $BC$ пересѣкаются соотвѣтственно въ точкахъ $E$ и $F$, при чемъ мы предположимъ для большей опредѣленности, что точка $A$ лежитъ между точками $E$ и $B$, а также и между точками $D$ и $F$. Условимся внутренніе углы четырехугольника $ABCD$ обозначать соотвѣтственно черезъ $A$, $B$, $C$, $D$. Пусть биссектрисы угловъ $E$ и $F$ пересѣкаются въ точкѣ $P$, и пусть биссектриса $EP$ встрѣчаетъ сторону $AD$ въ точкѣ $K$. Назовемъ уголъ $KPF$ между биссектрисами черезъ $\alpha$, а каждый изъ равныхъ угловъ $EKD$ и $PKF$ черезъ $\beta$. Такъ какъ углы треугольниковъ $PFK$ и $DEK$ суть соотвѣтственно $\alpha$, $\frac{F}{2}$, $\beta$ и $\pi-D$, $\frac{E}{2}$, $\beta$, то $\alpha+\frac{F}{2}+\beta=\pi-D+\frac{E}{2}+\beta$, откуда

$$\alpha=\pi-D+\frac{E-F}{2}. \tag{1}$$

Но изъ треугольниковъ $AFB$ и $AED$ имѣемъ:

$$F=\pi-(\pi-A+\pi-B)=A+B-\pi, \quad E=\pi-(\pi-A+\pi-D)=A+D-\pi,$$

а потому $E-F=(A+D-\pi)-(A+B-\pi)=D-B$. Слѣдовательно [см. (1)], $\alpha=\pi-D-\frac{D-B}{2}$, т. е. $\alpha=\pi-\frac{B+D}{2}$. Поэтому уголъ $\alpha$ можетъ быть прямымъ тогда и только тогда, если $\frac{B+D}{2}=\frac{\pi}{2}$, т. е. если (2) $B+D=\pi$. Итакъ, для того, чтобы уголъ $\alpha$ былъ прямымъ, необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось равенство (2), которое, какъ извѣстно, даетъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы четырехугольникъ $ABCD$ былъ циклическимъ. Слѣдовательно, перпендикулярность биссектрисъ $FP$ и $EP$ есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы четырехугольникъ $ABCD$ былъ циклическимъ.

Пусть теперь въ четырехугольникѣ $ABCD$ стороны $AB$ и $CD$ параллельны, а стороны $AD$ и $BC$ непараллельны. Въ этомъ случаѣ четырехугольникъ $ABCD$ обращается въ трапецію, а за точку пересѣченія параллельныхъ сторонъ $E$ можно принять условно такъ называемую фиктивную безконечно удаленную точку, опредѣляющую направленіе $AB$; такимъ образомъ биссектриса

$EP$ переходитъ въ нѣкоторую прямую, параллельную $AB$, и условіе перпендикулярности биссектрисъ $EP$ и $FP$ переходитъ въ условіе перпендикулярности биссектрисы $FP$ къ прямой, параллельной $AB$, т. е. въ условіе перпендикулярности биссектрисы $FP$ угла $F$ къ сторонѣ $AB$, или же въ условіе совпаденія биссектрисы угла $F$ треугольника $AFB$ съ высотой, проведенной изъ вершины угла $F$; это же послѣднее условіе необходимо и достаточно для того, чтобы треугольникъ $AFB$ былъ равнобедренный, а именно, чтобы были равны углы $FAB$ и $FBA$, т. е. чтобы были равны углы $\pi - A$ и $\pi - B$, или, что все равно, — чтобы были равны углы $A$ и $B$ трапеціи. Но равенство угловъ $A$ и $B$ при одномъ изъ основаній трапеціи $ABCD$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы трапеція $ABCD$ была равнобочной. Съ другой стороны, извѣстно, что трапеція $ABCD$ можетъ быть вписана въ кругъ лишь тогда, если она равнобочная. Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что установленный выше фактъ необходимости и достаточности перпендикулярности биссектрисъ $FP$ и $EP$ для возможности вписать четырехугольникъ $ABCD$ въ кругъ остается въ силѣ и для трапеціи, если биссектрису угла, образованнаго параллельными сторонами, замѣнить одной изъ параллельныхъ сторонъ. Изслѣдуя подобнымъ же образомъ случай параллелограмма $ABCD$, можно показать, что и здѣсь общее предложеніе остается въ силѣ, если биссектрисы $EP$ и $FP$ замѣнить смежными сторонами параллелограмма; это вытекаетъ изъ того, что, какъ извѣстно, изъ всѣхъ параллелограммовъ циклическимъ оказывается лишь прямоугольникъ.

Замѣчаніе. Мы доказали, что перпендикулярность биссектрисъ угловъ, образованныхъ парами противоположныхъ сторонъ выпуклаго четырехугольника, есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы онъ былъ циклическимъ. Въ текстѣ задачи указана лишь достаточность этого условія, и, такимъ, образомъ нами доказано нѣсколько болѣе широкое предложеніе.

*М. Шебаршинъ* (Петербургъ); *В. Кованько* (ст. Струнино); *Б. Смирновъ* (Юзовка); *В. Павловъ* (с. Ворсма); *N. N.*; *В. Яницкій* (Острогъ); *В. Ревзинъ* (Сумы); *П. Волохинъ* (Ялта).

## ПОПРАВКИ.

Въ №№ 607 и 608 „Вѣстника“ въ статьѣ „Упрощенный методъ календарныхъ вычисленій пасхалій и недѣльнаго дня“ д-ра прикладной математики Х. І. Гохмана, замѣчены слѣдующія опечатки.

| Стр.: | Строка: | Напечатано: | Должно быть: |
|---|---|---|---|
| 195 | 14 снизу | такъ какъ еврейская Пасха | такъ какъ канунъ еврейской Пасхи. |
| » | 7 » | въ 544-мъ году | въ 325-мъ году. |
| » | » » | во время Діонисія Малаго | во время Никейскаго Собора. |
| 224 | 6 » | времени Никейскаго собора | года распятія Христа. |
| » | » » | равна 48 | равна 49 |
| » | 5 » | эта дата 48 | эта дата 49. |
| 225 | 4 сверху | постоянная еврейской Пасхи | постоянная кануна еврейской Пасхи. |
| » | 6 » | 0,43221990 | 0,432220059 |
| 228 | 19 сверху | перваго года столѣтія | перваго года цикла. |

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ“ — Одесса, Екатерининская, 58.

Обложка
ищется

Обложка
пщется