№ 611—612.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА.

Второй серіи

I-го семестра № 11—12.

ОДЕССА
Типографія „Техникъ"— Екатерининская, 58.
1914.

Второй серіи I-го семестра № 11—12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

№ 611—612.

Отъ редакціи.

Редакторъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ находился заграницей, во Франціи, когда возникли столь неожиданно развернувшіяся событія. Послѣ чрезвычайно продолжительнаго путешествія онъ имѣлъ возможность возвратиться въ Одессу только 5-го сентября. Секретарь редакціи, которому было поручено подготовить къ печати оставленные для этого матеріалы, вступилъ въ ряды дѣйствующей арміи. Вслѣдствіе этого естественно возникла задержка въ выходѣ номеровъ „Вѣстника“.

Въ то время какъ наши братья сражаются на полѣ битвы, мы, остающіеся на мѣстахъ, должны сосредоточить всѣ силы на томъ, чтобы поддержать вокругъ себя нормальный, возможно болѣе здоровый укладъ жизни. Редакція „Вѣстника“ надѣется, что его читатели среди волнующихъ міровыхъ событій, приведшихъ въ напряженіе всѣ силы нашей родины, сохранятъ интересъ къ вопросамъ незыблимыхъ, вѣчныхъ истинъ, на которыхъ зиждится вся жизнь, что интересъ къ наукѣ и точному знанію послѣ побѣдоносной войны у насъ еще углубится и окрѣпнетъ, что отвлеченныя идеи, приносимыя „Вѣстникомъ“, дадутъ въ эту трудную пору нашимъ читателямъ минуты отвлеченія и душевнаго отдыха.

Отъ состоящаго подъ Высочайшимъ покровительствомъ Его Императорскаго Величества Государя Императора Скобелевскаго Комитета.

Состоящій подъ Высочайшимъ покровительствомъ Его Императорскаго Величества Государя Императора Скобелевскій Комитетъ, открывая госпитали-санаторіи для леченія воиновъ, призванныхъ подъ знамена на защиту Родины, — призываетъ отзывчивыхъ русскихъ людей внести свою посильную лепту на пользу тѣхъ, кого такъ гарячо любилъ незабвенный Михаилъ Дмитріевичъ Скобелевъ и кто боготворилъ его. Ни суммой, ни количествомъ жертвуемаго просятъ не стѣсняться, такъ какъ всякое пожертвованіе, какъ вещами, такъ и деньгами будетъ принято съ глубокой благодарностью. Лицъ, желающихъ помочь своимъ личнымъ трудомъ, просятъ пожаловать въ канцелярію Комитета.

Пожертвованія принимаются въ Канцеляріи Комитета, Петроградъ, Пески, Мытнинская ул. № 27.

Къ теоріи maximum'a и minimum'a функціи одного перемѣннаго.

2-ая часть *).

Прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

§ 1. Въ предыдущей статьѣ о maximum'ѣ и minimum'ѣ функціи одного независимаго перемѣннаго изложенъ особаго рода методъ для нахожденія extrema функціи $f(x)$, удовлетворяющей надлежащимъ ограниченіямъ. Этотъ методъ приводитъ задачу нахожденія extrema функціи $f(x)$ къ полному, исчерпывающему рѣшенію уравненія

$$(1) \quad f(z) = f(x)$$

относительно z. Если удается рѣшить уравненіе (1) относительно z при помощи равенствъ вида:

$$(2) \quad z = \varphi_\nu(x)$$

и если, функція $f(x)$, и функціи $\varphi_\nu(x)$ удовлетворяютъ ограниченіямъ, указаннымъ въ § 6-омъ предыдущей статьи, то изложенный

*) См. „Вѣстникъ“, № 598 — 600.

выше методъ даетъ возможность отыскать extrema функціи $f(x)$ и детально изслѣдовать ея ходъ, не прибѣгая къ помощи дифференціальнаго исчисленія. Дѣйствительно, при указанныхъ условіяхъ для отысканія всѣхъ значеній независимаго перемѣннаго, для которыхъ функція $f(x)$ достигаетъ extremum, достаточно найти всѣ вещественные корни всѣхъ уравненій вида

$$(3)\quad x=\varphi_\nu(x),$$

получаемыхъ изъ равенствъ (2) замѣной z черезъ x, при чемъ оказывается, что между двумя неравными ближайшими корнями уравненій (3) функція $f(x)$ монотонна.

Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду дополнить этотъ методъ рѣшенія задачъ на extrema нѣкоторыми замѣчаніями. Кромѣ того, мы намѣрены уяснить вопросъ о томъ, въ какомъ видѣ слѣдуетъ, по нашему мнѣнію, пользоваться при современномъ состояніи анализа основными теоремами дифференціальнаго исчисленія для рѣшенія задачъ на extrema. Въ курсахъ дифференціальнаго исчисленія рекомендуется слѣдующій общеизвѣстный основанный на примѣненіи строки Taylor'а методъ для нахожденія extrema функціи $f(x)$: дифференцируютъ функцію $f(x)$ и находятъ вещественные корни уравненія $f'(x)=0$; затѣмъ вычисляютъ для каждаго изъ найденныхъ корней c послѣдовательныя значенія (конечно, въ томъ предположеніи, что это возможно) второй, третьей и т. д. производныхъ функціи $f(x)$; если въ рядѣ чиселъ $f''(c)$, $f'''(c), \ldots$, мы приходимъ такимъ путемъ къ первой отличной отъ нуля производной $f^{(n)}(c)$, то при n нечетномъ $f(c)$ не есть extremum; если же n четное, то, при $f^{(n)}(c)<0$, $f(c)$ есть maximum, а при $f^{(n)}(c)>0$, — minimum функціи $f(x)$. Во второй части настоящей статьи мы покажемъ, что этотъ обычный методъ рѣшенія задачъ на extrema съ помощью дифференціальнаго исчисленія можетъ быть съ успѣхомъ замѣненъ при рѣшеніи большинства обычно предлагаемыхъ задачъ другимъ, болѣе простымъ и практичнымъ методомъ.

§ 2. Методъ рѣшенія задачъ на extrema, изложенный въ предыдущей статьѣ, т. е. методъ пользованія корнями уравненій (3), можетъ быть названъ по справедливости методомъ Fermat. Дѣйствительно, въ основу этого метода положена слѣдующая идея знаменитаго французскаго математика: если при $x=c$ функція $f(x)$ достигаетъ extremum'а, то она получаетъ равныя значенія $f(c+h)$ и $f(c+k)$ при нѣкоторыхъ значеніяхъ h и k разныхъ знаковъ. Fermat, какъ извѣстно, самъ пользовался этой идеей задолго до открытія дифференціальнаго исчисленія для рѣшенія задачъ на maximum и minimum, и можно сказать, что все, изложенное въ §§ 6 и 7 предыдущей статьи, есть лишь подробное развитіе идеи Fermat съ точки зрѣнія современнаго ученія о вещественной функціи. Съ другой стороны, функціи $\varphi_\nu(x)$ образуютъ одну или нѣсколько группъ подстановокъ, преобразовывающихъ функцію $f(x)$, въ силу тожествъ $f[\varphi_\nu(x)]=f(x)$, въ самое себя; поэтому изложенный въ предыдущей статьѣ методъ рѣшенія задачъ на extrema можно также назвать методомъ группъ автоморфнаго преобразованія въ широкомъ смыслѣ слова или просто методомъ автоморфизма*).

§ 3. Методъ Fermat'а имѣетъ то неоспоримое преимущество передъ методомъ примѣненія строки Taylor'а, что онъ сразу даетъ необходимыя и достаточныя условія достиженія функціей $f(x)$ значеній extrema въ нѣкоторыхъ точкахъ c, при чемъ сравнительно простыя вычисленія даютъ и отличіе maximum'а отъ minimum'а и сами наибольшія и наименьшія значенія функціи. Въ видѣ примѣра достаточно сравнить рѣшеніе задачи III-ей предыдущей статьи $\left(\text{найти extrema функціи } \frac{2-4x-x^2}{x^2+1}\right)$ методомъ Fermat'а съ обычнымъ рѣшеніемъ при помощи строки Taylor'а; это обычное рѣшеніе потребовало бы, конечно, въ разсматриваемомъ случаѣ нѣсколько болѣе сложныхъ вычисленій. Разсмотримъ еще слѣдующій примѣръ: пусть требуется найти extrema функціи $f(x)=x^3$ (если они существуютъ). Примѣняя методъ Fermat'а, рѣшаемъ уравненіе:

$$(4)\quad z^3-x^3=0$$

относительно z, при чемъ устраняемъ корень $z=x$. Такимъ образомъ, приходимъ къ уравненію $z^2+zx+x^2=0$, рѣшая которое относительно z, получимъ:

$$z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}x,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$. Итакъ, мы не получили ни одной вещественной функціи $z=\varphi_\nu(x)$, разрѣшающей уравненіе (4), не приводящейся къ функціи $z=x$ и опредѣленной въ нѣкоторомъ промежуткѣ. Слѣдовательно, функція x^3 монотонна во всемъ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$, а потому она не имѣетъ extremum ни въ одной точкѣ. Обычный методъ требовалъ бы дифференцированія функціи x^3, нахожденія корня производной функціи x^3 и послѣдовательной подстановки этого единственнаго корня, а именно, $x=0$ во вторую производную, обращающуюся въ нуль, и наконецъ въ третью производную, которая оказывается отличной отъ нуля; такъ какъ въ данномъ случаѣ первая не уничтожающаяся производная нечетнаго порядка, то это обстоятельство и обнаруживаетъ отсутствіе extremum'а для изслѣдуемой функціи.

Слѣдуетъ также замѣтить, что методъ Fermat'а можетъ оказаться приложимымъ къ такой функціи $f(x)$, къ которой не прило-

---

*) Функцію $f(x)$ называютъ автоморфной, строго говоря, лишь тогда, если существуетъ линейная (цѣлая или дробная) функція $\varphi(x)$ [т. е. функція вида $\frac{ax+b}{cx+d}$, гдѣ a, b, c, d — данныя постоянныя], по отношенію къ которой функція $f(x)$ удовлетворяетъ тожеству $f[\varphi(x)]=f(x)$; въ случаѣ же, подобномъ нашему, говорятъ, что функція $f(z)$ имѣетъ или допускаетъ группу (или группы) подстановокъ $z=\varphi_i(x)$. Поэтому и прибавлены слова „въ широкомъ смыслѣ слова". За отсутствіемъ другого краткаго термина мы прибѣгли къ слову греческаго корня „автоморфизмъ", которое и обозначаетъ буквально преобразованіе въ самое себя.

жимъ обычный методъ. Дѣйствительно, методъ Fermat'a примѣнимъ ко всякой функціи $f(x)$, непрерывной во всей области ея опредѣленія и удовлетворяющей требованіямъ 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, указаннымъ въ § 36-омъ первой части, тогда какъ обычный методъ, основанный на примѣненіи строки Taylor'a, предполагаетъ существованіе производной функціи $f(x)$ во всй области ея опредѣленія, кромѣ того, существованіе производныхъ высшаго порядка вплоть до первой не уничтожающейся производной въ точкахъ c, служащихъ корнями уравненія $f'(x)=0$. Такимъ образомъ, напримѣръ, угловыя точки и точки возврата кривой $y=f(x)$ могутъ не препятствовать примѣненію метода Fermat'a, если только функція $f(x)$ во всемъ промежуткѣ ея опредѣленія непрерывна и удовлетворяетъ требованіямъ 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 *). Наконецъ, если функція $f(x)$ имѣетъ конечное число точекъ разрыва непрерывности въ томъ промежуткѣ, въ которомъ она задана, и если въ промежуткахъ между послѣдовательными точками разрыва она удовлетворяетъ требованіямъ 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, то методъ Fermat'a примѣнимъ въ послѣдовательныхъ промежуткахъ между точками разрыва (или же въ промежуткѣ отъ одного изъ концовъ всей области опредѣленія функціи $f(x)$ до ближайшей точки разрыва), при чемъ, конечно, каждая точка разрыва должна быть изслѣдована особо. Въ частности, если функція $f(x)$ допускаетъ въ области ея опредѣленія конечное число исключительно лишь безконечныхъ разрывовъ, то методъ Fermat'a не требуетъ другихъ дополнительныхъ изслѣдованій, кромѣ опредѣленія характера разрыва. Пусть, напримѣръ, требуется найти extrema функціи $f(x)$, опредѣляемой равенствомъ **):

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}.$$

---

*) Угловой точкой кривой $y=f(x)$ называется такая, въ которой функція $f(x)$, будучи непрерывной, имѣетъ правую и лѣвую производныя, не равныя между собой, т. е. точка a, $f(a)$ есть угловая въ томъ случаѣ, когда отношеніе $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ имѣетъ разные предѣлы, если h стремится къ нулю, сохраняя въ одномъ случаѣ положительный, а въ другомъ отрицательный знакъ. Такъ какъ для кривой $y=\dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$, если условиться, что при $x=0$ и $y=0$, начало координатъ есть угловая точка. Точкой возврата для кривой $y=f(x)$ является такая точка, въ которой функція $f(x)$, будучи непрерывной, имѣетъ безконечныя лѣвую и правую производныя разнаго знака, т. е. точка a, $f(a)$ есть точка возврата, если функція $f(x)$ непрерывна при $x=a$ и если отношеніе $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ стремится при безконечномъ убываніи h и при сохраненіи имъ опредѣленнаго знака соотвѣтственно къ безконечности опредѣленнаго знака. Напримѣръ, для кривой $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ начало координатъ есть точка возврата.

**) Примѣръ этотъ взятъ изъ извѣстнаго сборника упражненій по анализу Вѣры Шиффъ.

Представивъ изслѣдуемую функцію въ видѣ:

$$f(x)=1-\frac{6x}{(x+1)(x+2)},$$

мы замѣчаемъ, что она опредѣлена во всемъ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$ кромѣ значеній независимаго перемѣннаго $x=-1$ и $x=-2$, для которыхъ она претерпѣваетъ безконечный разрывъ. Полагая $x=-1+\varepsilon$, а затѣмъ $x=-1-\varepsilon$, гдѣ ε есть достаточно малое положительное число, получимъ:

$$f(-1+\varepsilon)=1+\frac{6(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)},\quad f(-1-\varepsilon)=1-\frac{6(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

Когда ε, оставаясь положительнымъ, стремится къ нулю, то выраженія $6(1-\varepsilon)$ и $6(1+\varepsilon)$ стремятся къ предѣлу, равному 6, а каждое изъ выраженій $\varepsilon(1+\varepsilon)$ и $\varepsilon(1-\varepsilon)$ стремится къ предѣлу, равному нулю, становясь окончательно положительнымъ. Поэтому *)

$$(4)\quad \lim_{x=1-0} f(x)=\lim_{\varepsilon=+0} f(-1-\varepsilon)=-\infty,\quad \lim_{x=-1+0} f(x)=\lim_{\varepsilon=+0} f(-1+\varepsilon)=+\infty.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что

$$(5)\quad \lim_{x=-2-0} f(x)=\lim_{\varepsilon=+0} f(-2-\varepsilon)=+\infty,\quad \lim_{x=-2+0} f(x)=\lim_{\varepsilon=+0} f(-2+\varepsilon)=-\infty.$$

Съ другой стороны, представивъ $f(x)$ въ видѣ:

$$f(x)=1-\frac{6}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{1}{x+2}$$

и замѣчая, что, при возрастаніи x до безконечности, множитель $\dfrac{6}{1+\frac{1}{x}}$ стремится къ предѣлу, равному 6, а множитель $\dfrac{1}{x+2}$ стремится къ нулю, находимъ, что

$$(6)\quad \lim_{x=+\infty} f(x)=1,\quad \lim_{x=-\infty} f(x)=1.$$

Итакъ, разсматриваемая функція $f(x)$ непрерывна въ каждомъ изъ разомкнутыхъ промежутковъ $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$, удовлетворяя притомъ въ каждомъ изъ нихъ, какъ дробная раціональная функція, требованію 1^0 § 6-го предыдущей статьи. Разрѣшая теперь относительно z уравненіе

$$1-\frac{6z}{z^2+3z+3}=1-\frac{6x}{x^2+3x+2},\quad \text{или}\quad \frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{x}{x^2+3x+2},$$

*) Предѣлы $\lim\limits_{x=a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$ суть соотвѣтственно предѣлы $\lim\limits_{h=0} f(a+h)$ и $\lim\limits_{h=0} f(a-h)$ при безконечномъ убываніи перемѣннаго h, сохраняющаго положительное значеніе.

получимъ послѣ обычныхъ преобразованій $xz^2+2x-x^2z-2z=0$, или же $(z-x)(xz-2)=0$, откуда, устранивъ рѣшеніе $z=x$, находимъ: $z=\frac{2}{x}$; такимъ образомъ требованія 2^0, 3^0 предыдущей статьи тоже удовлетворяются. Наконецъ, полагая, $\frac{2}{x}=x$ [т. е., слѣдуя обозначеніямъ предыдущей статьи, $\varphi(x)=x$], находимъ, что уравненіе $\frac{2}{x}=x$ имѣетъ корни $x=c_1=-\sqrt{2}$, $x=c_2=\sqrt{2}$; итакъ, требованіе 4^0 тоже выполняется. Слѣдовательно, къ разсматриваемой функціи $f(x)$ примѣнимъ методъ Fermat'а въ каждомъ изъ промежутковъ $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, +\infty)$. Первый изъ этихъ промежутковъ не содержитъ ни одного изъ корней $\pm\sqrt{2}$ уравненія $\frac{2}{x}=x$; поэтому въ промежуткѣ $(-\infty, -2)$ изслѣдуемая функція $f(x)$ монотонна, при чемъ въ этомъ промежуткѣ она [см. (5), (6)] возрастаетъ отъ 1 до $+\infty$. Промежутокъ $(-2, -1)$ содержитъ лишь одинъ корень $c_1=-\sqrt{2}$ уравненія $\frac{2}{x}=x$, а потому $f(-\sqrt{2})$ есть extremum функціи $f(x)$, а именно maximum функціи $f(x)$ и въ то же время наибольшее значеніе въ $(-2, -1)$, такъ какъ [см. (4), (5)]

$$\lim_{x=-2+0} f(x)=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x=-1-0} f(x)=-\infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по основной теоремѣ метода Fermat'а функція $f(x)$ монотонна въ каждомъ изъ промежутковъ $(-2, -\sqrt{2}\rangle$ и $\langle\sqrt{2}, -1)$, при чемъ изъ равенствъ

$$\lim_{x=-2+0} f(x)=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x=-1-0} f(x)=-\infty$$

ясно, что въ первомъ изъ этихъ промежутковъ функція $f(x)$ монотонно возрастаетъ, а во второмъ — монотонно убываетъ. Вычисляя $f(-\sqrt{2})$, получимъ, что

$$f(-\sqrt{2})=-\frac{(4+\sqrt{18})^2}{2}=-(17+4\sqrt{18})=-33{,}97\ldots$$

Промежутокъ $(-1, +\infty)$ тоже содержитъ лишь одинъ корень $c_2=\sqrt{2}$ уравненія, а потому $f(\sqrt{2})$ также есть extremum функціи $f(x)$. Вычисляя $f(\sqrt{2})$, находимъ, что

$$f(\sqrt{2})=-\frac{(4-\sqrt{18})^2}{2}=4\sqrt{18}-17=-0{,}03\ldots$$

Такъ какъ [см. (4), (6)]

$$\lim_{x=-1+0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x=+\infty} f(x)=1,$$

то $f(\sqrt{2})$ есть minimum, а именно наименьшее значенiе функцiи $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +\infty)$; въ этомъ легко убѣдиться, разсмотрѣвъ отдѣльно промежутки $(-1, \sqrt{2}\rangle$ и $\langle\sqrt{2}, +\infty)$.

§ 4. Методъ Fermat'a примѣнимъ лишь къ тѣмъ непрерывнымъ функцiямъ, которыя удовлетворяютъ требованiями 1^0, 2^0, 3^0, 4^0. Изъ этихъ требованiй, конечно, требованiе 2^0 является особенно тяжелымъ, такъ какъ, при сложномъ видѣ функцiи $f(x)$, задача рѣшенiя уравненiя $f(z) = f(x)$ относительно z представляетъ нерѣдко значительныя трудности; такимъ образомъ не легко вообще узнать, выполняется требованiе 2^0, или нѣтъ. Это обстоятельство значительно ограничиваетъ примѣненiе метода Fermat'a, а потому рѣшенiе задачъ на extrema функцiй при помощи методовъ дифференцiальнаго исчисленiя обыкновенно оказывается наиболѣе цѣлесообразнымъ. Ниже будетъ выяснено, что при рѣшенiи обычнаго типа задачъ на extrema выгоднѣе пользоваться не обычнымъ прiемомъ дифференцiальнаго исчисленiя, основаннымъ на строкѣ Taylor'a (см. § 1), а нѣсколько иными соображенiями. Эти соображенiя связаны съ изслѣдованiемъ хода функцiи при помощи теоремы Lagrange'a (см. § 2 предыдущей статьи) и съ тѣми значительными упрощенiями, которыя вноситъ въ это изслѣдованiе извѣстная теорема Darboux, устанавливающая одно изъ основныхъ свойствъ производной; теорема эта доказана въ мемуарѣ Darboux „Sur les fonctions discontinues“ *). Теорема Darboux содержитъ слѣдующее утвержденiе: если въ $\langle a, b\rangle$ существуетъ производная**) $f'(x)$ функцiи $f(x)$, при чемъ значенiя производной $f'(a) = A$ и $f'(b) = B$ въ концахъ промежутка не равны, и если C есть любое данное число, лежащее между A и B, то внутри $\langle a, b\rangle$ существуетъ число c, для котораго $f'(c) = C$. Короче эту теорему выражаютъ такъ: производная $f'(x)$ функцiи $f(x)$ не можетъ перейти отъ одного значенiя къ другому, не проходя всѣхъ промежуточныхъ значенiй.

Для доказательства теоремы Darboux установимъ сначала ея справедливость въ частномъ случаѣ, а именно докажемъ слѣдующее предложенiе.

Теорема I. Если въ $\langle a, b\rangle$ существуетъ производная $f'(x)$ функцiи $f(x)$ и если значенiя $f'(a)$ и $f'(b)$ производной разныхъ знаковъ, то внутри $\langle a, b\rangle$ существуетъ число c, для котораго $f'(c) = 0$.

Пусть, для большей опредѣленности, $a < b$,

$$(7) \quad f'(a) > 0, \quad f'(b) < 0.$$

Такъ какъ функцiя $f(x)$ имѣетъ производную въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$, то она въ немъ непрерывна. Поэтому, согласно съ

*) „Annales de l'École Normale“, 1875. См. также Vallée Poussin — „Cours d'Analyse infinitésimale“, 1909, § 102 (t. I).

**) Во всемъ дальнѣйшемъ изложенiи подъ производной подразумѣвается конечная производная.

извѣстнымъ предложеніемъ Weierstrass'а, функція $f(x)$ достигаетъ для нѣкоторыхъ значеній x, лежащихъ въ $\langle a, b\rangle$, своего наибольшаго и своего наименьшаго значенія въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$. Пусть $f(x)$ достигаетъ наибольшаго значенія въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$ при $x=c$, т. е. пусть

$$(8)\quad f(c)\geqq f(x),\quad \text{если}\quad a\leqq x\leqq b.$$

Покажемъ теперь, пользуясь неравенствами (7), что число c лежитъ внутри $\langle a, b\rangle$. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что по условію $a<b$, имѣемъ, согласно съ опредѣленіемъ производной, для достаточно малыхъ положительныхъ значеній h слѣдующія равенства:

$$(9)\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\eta,\quad (10)\quad \frac{f(b-h)-f(b)}{-h}=f'(b)+\eta_1,$$

гдѣ η и η_1 суть надлежащія функціи отъ h, которыя стремятся къ нулю вмѣстѣ съ h. Поэтому, въ силу неравенствъ (7), при достаточно малыхъ положительныхъ значеніяхъ h имѣемъ: $f'(a)+\eta>0$, $f'(b)+\eta_1<0$, т. е. [см. (9), (10)] $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$, $\dfrac{f(b-h)-f(b)}{-h}<0$, откуда, такъ какъ $h>0$, слѣдуетъ для достаточно малыхъ значеній h, что $f(a+h)-f(a)>0$, $f(b-h)-f(b)>0$, или

$$(11)\quad f(a)<f(a+h),\quad (12)\quad f(b)<f(b-h),$$

гдѣ h — достаточно малое положительное число. Изъ неравенствъ (11) и (12) слѣдуетъ, что c лежитъ внутри $\langle a, b\rangle$; дѣйствительно, если бы c не лежало внутри $\langle a, b\rangle$, то оно, находясь въ этомъ промежуткѣ, совпадало бы съ a или съ b, такъ что [см. (10), (11)] выполнялось бы одно изъ неравенствъ $f(c)<f(a+h)$, $f(c)<f(b-h)$, а это невозможно, такъ какъ каждое изъ этихъ неравенствъ противорѣчитъ неравенству (8) въ силу того обстоятельства, что числа $a+h$ и $b-h$ принадлежатъ промежутку $\langle a, b\rangle$. Итакъ, функція $f(x)$ достигаетъ наибольшаго значенія въ нѣкоторой точкѣ c, лежащей внутри промежутка $\langle a, b\rangle$, Поэтому, по основной теоремѣ теоріи maximum'а и minimum'а, $f'(c)=0$. Если бы мы имѣли

$$(13)\quad f'(a)<0,\quad f'(b)>0,$$

то пришлось бы повторить по существу то же доказательство съ тѣмъ лишь измѣненіемъ, что подъ $f(c)$ мы подразумѣвали бы не наибольшее, а наименьше значеніе функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$. Этотъ случай доказательства теоремы можно также свести къ предыдущему, разсмотрѣвъ вспомогательную функцію $g(x)$, опредѣляемую въ $\langle a, b\rangle$ равенствомъ $g(x)=-f(x)$. Тогда

$$(14)\quad g'(x)=-f'(x),\quad g'(a)=-f'(a),\quad g'(b)=-f'(b),$$

а потому [см. (13)]

$$(15)\quad g'(a)>0,\quad g'(b)<0.$$

Неравенства (15) даютъ возможность примѣнить къ функціи $g(x)$ доказываемую теорему въ разсмотрѣнномъ уже нами случаѣ [см. (7)], откуда слѣдуетъ, что внутри $\langle a, b\rangle$ существуетъ число c, для котораго $g'(c)=0$, т. е. [см. (14)] $-f'(c)=0$, или $f'(c)=0$. Такимъ образомъ теорема доказана для всѣхъ случаевъ.

Теперь обратимся къ общему случаю теоремы Darboux.

Теорема II. Если въ $\langle a, b\rangle$ существуетъ производная $f'(x)$ функціи $f(x)$, при чемъ значенія производной $f'(a)=A$ и $f'(b)=B$ въ концахъ промежутка не равны, и если C есть любое данное число, лежащее между A и B, то внутри $\langle a, b\rangle$ существуетъ число c, для котораго $f'(c)=C$.

Разсматривая вспомогательную функцію $g(x)$, опредѣляемую въ $\langle a, b\rangle$ равенствомъ $g(x)=f(x)-Cx$, находимъ:

$$(16)\quad g'(x)=f'(x)-C$$

и, въ частности, $g'(a)=f'(a)-C,\ \ g'(b)=f'(b)-C$, т. е.

$$(17)\quad g'(a)=A-C,\ \ g'(b)=B-C.$$

По условію C лежитъ между A и B; поэтому [см. (17)] значенія $g'(a)$ и $g'(b)$ производной $g'(x)$ функціи $g(x)$ по концамъ промежутка $\langle a, b\rangle$ имѣютъ разные знаки. Слѣдовательно, по предыдущей теоремѣ, есть число c, лежащее внутри $\langle a, b\rangle$, для котораго $g'(c)=0$, или [см. (16)] $f'(c)-C=0$, откуда $f'(c)=C$. Другими словами внутри $\langle a, b\rangle$ существуетъ число c, для котораго $f'(c)=C$.

Замѣчаніе. Итакъ, если производная $f'(x)$ существуетъ въ нѣкоторомъ промежуткѣ, то она обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ непрерывной функціи*), а именно тѣмъ, что она не можетъ перейти отъ одного своего значенія къ другому, не проходя черезъ всѣ промежуточныя значенія. Отсюда, однако, вовсе не слѣдуетъ, что если производная $f'(x)$ нѣкоторой функціи существуетъ въ нѣкоторомъ промежуткѣ, то она въ немъ и непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію

$$(18)\quad f(x)=x^2\sin 1/x.$$

Эта функція опредѣлена для всѣхъ вещественныхъ значеній x, кромѣ $x=0$; но мы условимся опредѣлить ее и для $x=0$ равенствомъ

$$(19)\quad f(0)=0.$$

Такимъ образомъ функція $f(x)$ опредѣлена въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$. Вычислимъ производную $f'(0)$ разсматриваемой функціи въ точкѣ $x=0$. При $x=0$ имѣемъ [см. (18), (19)]:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin 1/x}{x}=x\sin\frac{1}{x}.$$

---

*) См. Г. Ковалевскій, „Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій“, § 33, стр. 40—42. „Mathesis“. Одесса, 1911.

Такъ какъ (конечно, при $x \neq 0$) $|\sin 1/x| \leqq 1$, то $|x \sin 1/x| < |x|$; значитъ, если x стремится къ нулю, то и $x \sin 1/x$ стремится къ нулю, т. е.

$$(20) \quad \lim_{x=0} x \sin 1/x = 0.$$

Итакъ, $\lim\limits_{x=0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x=0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, т. е.

$$(21) \quad f'(0) = 0.$$

Если же $x \neq 0$, то, дифференцируя равенство (18) по обычнымъ правиламъ, получимъ

$$(22) \quad f'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x.$$

Такъ какъ функціи $\sin z$ и $\cos z$ непрерывны при любомъ z, а функція $1/x$ непрерывна при $x \neq 0$, то при $x \neq 0$ производная $f'(x)$ [см. (22)] изслѣдуемой функціи непрерывна. Но въ точкѣ $x = 0$ производная этой функціи разрывна. Дѣйствительно, если бы производная $f'(x)$ нашей функціи была непрерывна и въ точкѣ $x = 0$, то мы имѣли бы что $\lim\limits_{x=0} f'(x) = f'(0)$, т. е. [см. (21)]

$$(23) \quad \lim_{x=0} f'(x) = 0.$$

Но [см. (22)], при $x \neq 0$, $\cos 1/x = 2x \sin 1/x - f'(x)$, откуда вытекало бы [см. (20), (23)]:

$$\lim_{x=0} \cos 1/x = 2 \lim_{x=0} x \sin 1/x - \lim_{x=0} f'(x) = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{x=0} \cos 1/x = 0$. Но послѣднее равенство очевидно нелѣпо. Дѣйствительно, если бы оно было вѣрно, то предѣлъ функціи $\cos 1/x$ оставался бы равнымъ нулю, по какому бы закону ни убывало x. Разсмотримъ значенія x, опредѣляемыя формулой $x = 1/2k\pi$, гдѣ k принимаетъ значенія $k = 1, 2, 3, \ldots$; тогда x, при безконечномъ возрастаніи k, стремилось бы къ нулю, и мы имѣли бы

$$\lim_{k=\infty} \cos \frac{1}{(1/2k\pi)} = \lim_{k=\infty} \cos 2k\pi = 0,$$

гдѣ k получаетъ значенія $1, 2, 3, \ldots$, — что нелѣпо, такъ какъ $\cos 2k\pi = 1$ при любомъ цѣломъ положительномъ k, откуда слѣдуетъ, что $\lim\limits_{k=\infty} \cos 2k\pi = 1$; такимъ образомъ мы пришли бы къ нелѣпому равенству $1 = 0$.

Итакъ, функція $f(x)$, опредѣляемая равенствами (18) и (19), имѣетъ производную во всемъ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$, которая непрерывна при $x \neq 0$, но при $x = 0$ не непрерывна. Замѣтимъ еще, что для теоріи maximum'а и minimum'а намъ нужна будетъ собственно теорема I-ая, а не общая теорема II-ая.

§ 5. Теперь докажемъ слѣдующія предложенія.

Теорема. III. Если функція $f(x)$ имѣетъ въ замкнутомъ или незамкнутомъ промежуткѣ $a \ldots b$ производную $f'(x)$, отличную отъ нуля для всякаго x въ $a \ldots b$, то эта производная сохраняетъ постоянный знакъ въ промежуткѣ $a \ldots b$.

Допустимъ, что $f'(x)$ не сохраняетъ въ промежуткѣ $a \ldots b$ постояннаго знака. Тогда, такъ какъ по условію $f'(x) \neq 0$ въ $a \ldots b$, то въ этомъ промежуткѣ должны существовать два числа α и β, для которыхъ производная $f'(x)$ принимаетъ значенія $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$ разныхъ знаковъ. Существуя въ промежуткѣ $a \ldots b$, производная $f'(x)$ существуетъ и въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle \alpha, \beta \rangle$, принимая въ концахъ его, какъ указано выше, значенія разныхъ знаковъ. Слѣдовательно, по теоремѣ I, внутри $\langle \alpha, \beta \rangle$ существуетъ число c, для котораго $f'(c) = 0$. Но это невозможно, такъ какъ, находясь внутри $\langle \alpha, \beta \rangle$, число c лежитъ и въ промежуткѣ $a \ldots b$, въ которомъ, по условію, $f'(x) \neq 0$. Итакъ, $f'(x)$ сохраняетъ знакъ въ промежуткѣ $a \ldots b$ *).

Слѣдствіе. Если функція $f(x)$ непрерывна въ концахъ a и b замкнутаго промежутка $\langle a, b \rangle$ и если она внутри $\langle a, b \rangle$ имѣетъ производную $f'(x)$, которая отлична отъ нуля для всякаго x, лежащаго внутри $\langle a, b \rangle$, то функція $f(x)$ монотонна въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle a, b \rangle$.

Дѣйствительно, примѣнивъ къ незамкнутому промежутку (a, b) предыдущую теорему, мы находимъ, что производная $f'(x)$ сохраняетъ въ немъ, т. е. внутри промежутка $\langle a, b \rangle$, постоянный знакъ. Итакъ функція $f(x)$ непрерывна въ концахъ промежутка $\langle a, b \rangle$, имѣя внутри него производную постояннаго знака. Слѣдовательно, по теоремѣ Lagrange'а, функція $f(x)$ монотонна въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle a, b \rangle$, а именно она въ немъ монотонно возрастаетъ или монотонно убываетъ съ возрастаніемъ x, смотря по тому, сохраняетъ ли $f'(x)$ внутри $\langle a, b \rangle$ положительный или отрицательный знакъ.

Теперь докажемъ слѣдующія предложенія.

Теорема IV. a) **Лемма.** Пусть функція $f(x)$ обладаетъ слѣдующими свойствами: 1) она непрерывна въ концахъ промежутка $\langle a, b \rangle$ и 2) имѣетъ производную внутри $\langle a, b \rangle$, при чемъ 3) уравненіе

$$(24) \quad f'(x) = 0.$$

имѣетъ конечное число вещественныхъ корней, лежащихъ внутри $\langle a, b \rangle$. Пусть эти корни, расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, суть $c_1, c_2, \ldots, c_m$, при чемъ пусть, для большей опредѣленности, $a < b$. При этихъ

---

*) Разсматриваемый въ теоремѣ III промежутокъ обозначенъ черезъ $a \ldots b$ съ цѣлью отмѣтить то обстоятельство, что онъ можетъ быть и замкнутымъ и не замкнутымъ (одно изъ трехъ возможныхъ типовъ (a, b), $\langle a, b)$ или $(a, b\rangle$).

условіяхъ функція $f(x)$ монотонна въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle, \ldots$, $\langle c_{m-1}, c_m\rangle$, $\langle c_m, b\rangle$, и въ рядѣ чиселъ

$$(25)\quad f(a),\ f(c_1),\ f(c_2), \ldots,\ f(c_m),\ f(b)$$

всякія два сосѣднихъ числа не равны между собою.

b) **Основное предложеніе** Пусть функція $f(x)$ обладаетъ свойствами 1), 2). 3). Для нахожденія всѣхъ ея extrema достаточно (удерживая обозначенія предыдущей теоремы) отобрать среди чиселъ $f(c_1)$, $f(c_2), \ldots$, $f(c_m)$ тѣ изъ нихъ, которыя не заключаются между двумя сосѣдними членами ряда (25), при чемъ $f(c_i)$ есть maximum функціи $f(x)$, если число $f(c_i)$ больше, и minimum, если оно меньше каждаго изъ двухъ сосѣднихъ чиселъ ряда (25). Въ частности, если числа ряда (25) расположены всѣ въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ [или если уравненіе (24) не имѣетъ вещественныхъ корней внутри $\langle a, b\rangle$], то функція $f(x)$ не имѣетъ extremum'а въ $\langle a, b\rangle$.

c) Пусть функція $f(x)$ обладаетъ свойствами 1), 2), 3). Тогда (при прежнихъ обозначеніяхъ) для нахожденія наибольшаго (или наименьшаго*) значенія функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$ достаточно выбрать среди чиселъ (25) то (или тѣ), которое (или которыя) не меньше (или не больше) всѣхъ остальныхъ чиселъ этого ряда.

Въ каждой изъ точекъ a, c_1, $c_2, \ldots$, c_m, b функція $f(x)$ непрерывна. Дѣйствительно, числа c_1, $c_2, \ldots$, c_m лежатъ по условію внутри $\langle a, b\rangle$, а потому въ каждой изъ точекъ c_1, $c_2, \ldots$, c_m функція $f(x)$, въ силу 2-го свойства, даннаго въ условіи, имѣетъ производную и поэтому непрерывна; въ точкахъ же a и b функція $f(x)$ непрерывна по 1-му ея свойству. Съ другой стороны, такъ какъ числа c_1, $c_2, \ldots$, c_m суть всѣ корни уравненія, (24) лежащія въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$, и такъ какъ они послѣдовательно расположены въ $\langle a, b\rangle$, то производная $f'(x)$ отлична отъ нуля внутри каждаго изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_m, b\rangle$. Итакъ, производная $f'(x)$ непрерывна въ концахъ каждаго изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_m, b\rangle$ и внутри каждаго изъ нихъ отлична отъ нуля. Поэтому, по слѣдствію изъ теоремы III, функція $f(x)$ монотонна въ каждомъ изъ замкнутыхъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_m, b\rangle$, откуда вытекаетъ, что для концовъ этихъ промежутковъ справедливы неравенства $f(a) \gtreqless f(c_1)$, $f(c_1) \gtreqless f(c_2), \ldots, f(c_m) \gtreqless f(b)$, въ каждомъ изъ которыхъ надо взять верхній или нижній знакъ въ

*) Здѣсь рѣчь идетъ о нахожденіи наибольшаго (или наименьшаго) значенія функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $\langle a, b\rangle$, т. е. объ отысканіи въ $\langle a, b\rangle$ числа a, удовлетворяющаго неравенству $f(\alpha) \geqq f(x)$ [или $f(\alpha) \leqq f(x)$] для всякаго x, лежащаго въ $\langle a, b\rangle$; если же отыскивается значеніе $f(\alpha)$, удовлетворяющее неравенству $f(\alpha) > f(x)$ [или $f(\alpha) < f(x)$ для всякаго x въ $\langle a, b\rangle$, то $f(\alpha)$ называется наибольшимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ въ обычномъ, собственномъсмыслѣ слова.

зависимости отъ того, возрастаетъ ли монотонно функція $f(x)$ въ соотвѣтствующемъ промежуткѣ или убываетъ. Итакъ лемма a) доказана.

Для доказательства теоремы b) замѣтимъ прежде всего, что подъ extrema функціи мы подразумѣваемъ, — какъ и всегда, когда нѣтъ никакихъ дополнительныхъ указаній, — maxima или minima функціи исключительно для нѣкоторыхъ значеній c, лежащихъ внутри промежутка, въ которомъ опредѣлена функція $f(x)$, т. е. мы ищемъ внутри $\langle a, b\rangle$ точки c, для каждой изъ которыхъ можно указать положительное число δ такъ, чтобы разность $f(x)-f(c)$ сохраняла опредѣленный знакъ, коль скоро выполняются неравенства $0<|x-c|<\delta$. Такимъ образомъ, ни точка a, ни точка b не сообщаютъ функціи $f(x)$ значенія extremum въ $\langle a, b\rangle$ по самому опредѣленію понятія объ extremum'ѣ. Точно такъ же число ξ, лежащее внутри одного изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_m, b\rangle$, не можетъ сообщить функціи $f(x)$ значенія extremum'а, такъ какъ по леммѣ a) функція $f(x)$ монотонна внутри каждаго изъ этихъ промежутковъ, вслѣдствіе чего разность $f(x)-f(\xi)$ мѣняетъ знакъ при переходѣ въ достаточно малой окрестности точки ξ отъ значеній меньшихъ ξ къ значеніямъ большимъ ξ*). Такимъ образомъ значенія независимаго перемѣннаго, для которыхъ функція $f(x)$ достигаетъ extremum'а, можно разыскивать (если только такія значенія вообще существуютъ) исключительно среди чиселъ $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Чтобы узнать, достигаетъ ли функція $f(x)$ extremum'а при $x=c_1$, разсмотримъ числа $f(a)$, $f(c_1)$, $f(c_2)$ [или $f(a)$, $f(c_1)$, $f(b)$, если $m=1$]. По леммѣ a) $f(a) \neq f(c_1)$ и $f(c_1) \neq f(c_2)$, а потому $f(c_1)$ либо заключается между числами $f(a)$ и $f(c_2)$, либо одновременно больше или одновременно меньше каждаго изъ чиселъ $f(a)$ и $f(c_2)$. Въ первомъ случаѣ справедливы неравенства:

$$(26)\quad f(a)<f(c_1)<f(c_2) \quad \text{или} \quad (27)\quad f(a)>f(c_1)>f(c_2),$$

а во второмъ

$$(28)\quad f(c_1)>f(a),\ f(c_1)>f(c_2) \quad \text{или} \quad (29)\quad f(c_1)<f(a),\ f(c_1)<f(c_2).$$

Согласно съ леммой a), функція $f(x)$ монотонна въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$. Поэтому въ случаѣ неравенствъ (26), она монотонно возрастаетъ въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$ и $\langle c_1, c_2\rangle$, а потому монотонно возрастаетъ и во всемъ промежуткѣ $\langle a, c_2\rangle$, состоящемъ изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$ и $\langle c_1, c_2\rangle$, откуда слѣдуетъ, что при $x=c_1$ функція $f(x)$ не достигаетъ extremum'а, такъ какъ c_1 лежитъ внутри $\langle a, c_2\rangle$; въ случаѣ же неравенствъ (27) функція $f(x)$ монотонно убываетъ въ $\langle a, c_2\rangle$, а потому $f(c_1)$ также не есть extremum. Въ случаѣ же неравенствъ (28) функція $f(x)$, будучи монотонна въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle a, c_1\rangle$ и $\langle c_1, c_2\rangle$, въ первомъ изъ нихъ монотонно возрастаетъ, а во второмъ — монотонно убываетъ. Поэтому значеніе $f(c_1)$ функціи $f(x)$ является

*) Чтобы доказать, что $f(\xi)$ не есть extremum, можно также сослаться на то, что $f'(\xi) \neq 0$, такъ какъ ξ лежитъ внутри $\langle a, c_1\rangle$; значитъ въ точкѣ ξ не соблюдено необходимое условіе достиженія extremum'а, въ силу котораго должно было быть $f'(\xi)=0$, а потому $f(\xi)$ не есть extremum.

наибольшимъ въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle a,\ c_1\rangle$ и $\langle c_1,\ c_2\rangle$, а потому оно есть наибольшее значеніе функціи $f(x)$ и въ цѣломъ промежуткѣ $\langle a, c_2\rangle$, при чемъ, $f(c_1)$ есть и maximum функціи $f(x)$, такъ какъ c_1 лежитъ внутри $\langle a,\ c_1\rangle$. Разсуждая аналогичнымъ образомъ въ случаѣ неравенствъ (29), находимъ, что $f(c_1)$ есть наименьшее значеніе функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ промежутковъ $\langle a,\ c_1\rangle$ и $\langle c_1,\ c_2\rangle$, а также въ цѣломъ промежуткѣ $\langle a,\ c_2\rangle$, и вмѣстѣ съ тѣмъ $f(c_1)$ есть minimum изслѣдуемой функціи. Подобнымъ же образомъ, разсматривая числа $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$ и промежутки $\langle c_1,\ c_2\rangle$, $\langle c_2,\ c_3\rangle$, затѣмъ числа $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$ и промежутки $\langle c_2,\ c_3\rangle$, $\langle c_3,\ c_4\rangle$, и т. д., наконецъ, числа $f(c_{m-1})$, $f(c_m)$, $f(b)$ и промежутки $\langle c_{m-1},\ c_m\rangle$, $\langle c_m,\ b\rangle$, можно убѣдиться, что каждое изъ чиселъ $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_m)$ ряда (25) или заключается между двумя сосѣдними числами этого ряда, не давая въ этомъ случаѣ extremum'а функціи $f(x)$, или не заключается между сосѣдними числами этого ряда, оказываясь при томъ сразу или больше или меньше каждаго изъ сосѣднихъ чиселъ: въ первомъ случаѣ изслѣдуемое значеніе функціи есть maximum, а во второмъ minimum. Такимъ образомъ теорема b) доказана.

Обозначимъ черезъ α число, выбранное изъ ряда чиселъ a, c_1, $c_2, \ldots, c_m$, b такъ, чтобы въ ряду чиселъ (25) число $f(\alpha)$ было не меньше всѣхъ остальныхъ чиселъ этого ряда. Тогда число α удовлетворяетъ неравенству

$$(30) \qquad f(\alpha) \geqq f(x)$$

для всякаго x въ $\langle a,\ b\rangle$. Дѣйствительно, если x равно одному изъ чиселъ a, c_1, $c_2, \ldots, c_m$, b, то по условію имѣемъ соотвѣтственно:

$$(31) \qquad f(\alpha) \geqq f(a), \quad f(\alpha) \geqq f(c_1), \quad f(\alpha) \geqq f(c_2), \ldots, \quad f(\alpha) \geqq f(c_m), \quad f(\alpha) \geqq f(b).$$

Если же число x, находясь въ $\langle a,\ b\rangle$, не совпадаетъ ни съ однимъ изъ чиселъ a, c_1, $c_2, \ldots, c_m$, b, то оно лежитъ въ одномъ изъ промежутковъ $\langle a,\ c_1\rangle$, $\langle c_1,\ c_2\rangle, \ldots, \langle c_m,\ a\rangle$, въ каждомъ изъ которыхъ, по теоремѣ a), функція $f(x)$ монотонна. Поэтому $f(x)$ лежитъ между нѣкоторыми двумя числами ряда (25), и $f(\alpha)$, будучи не меньше каждаго изъ этихъ двухъ чиселъ, навѣрно б о л ь ш е промежуточнаго числа $f(x)$. Итакъ, $f(\alpha)$ удовлетворяетъ неравенству (30) для всякаго x въ $\langle a,\ b\rangle$, а потому $f(\alpha)$ есть наибольшее (въ широкомъ смыслѣ слова) значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle a,\ b\rangle$, и никакое значеніе функціи $f(x)$, кромѣ одного или нѣсколькихъ значеній $f(\alpha)$, выбраннаго (или выбранныхъ) указаннымъ выше образомъ, не является наибольшимъ въ $\langle a, b\rangle$. Подобнымъ же образомъ, выбравъ среди чиселъ $a, c_1, c_2, \ldots, c_m, b$ число a_0 такъ, чтобы число $f(a_0)$ было не болѣе всѣхъ другихъ чиселъ ряда (25), получимъ наименьшее въ широкомъ смыслѣ слова значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle a,\ b\rangle$; доказывается это при помощи совершенно аналогичныхъ разсужденій, замѣняя вездѣ слова и знаки [см. (30), (31)], „не меньше" „больше" словами и знаками „не больше", „меньше". Итакъ, теорема c доказана.

d) Слѣдствіе. Д л я т о г о, ч т о б ы ф у н к ц і я $f(x)$ и м ѣ л а в ъ $\langle a,\ b\rangle$ н а и б о л ь ш е е (и л и н а и м е н ь ш е е) з н а ч е н і е в ъ с о бственномъ смыслѣ слова, необходимо и достаточно, чтобы среди чиселъ (25) было наибольшее (или наименьшее); это число ряда (25) и есть наибольшее (или наименьшее) значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ въ собственномъ смыслѣ слова.

Если въ ряду (25) есть наибольшее (или наименьшее) число, то оно является по предыдущей теоремѣ наибольшимъ (или наименьшимъ) значеніемъ функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ въ широкомъ смыслѣ слова; однако, въ разсматриваемомъ случаѣ въ формулахъ (31) (или имъ аналогичныхъ) отпадаетъ по условію знакъ равенства, а потому онъ отпадаетъ и въ формулѣ (30) (или ей аналогичной) при $x \neq a$. Поэтому наибольшее (или наименьшее) число ряда (25) есть наибольшее (или наименьшее) значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ въ собственномъ смыслѣ слова. Наоборотъ, наибольшее (или наименьшее) значеніе функціи $f(x)$ въ $\langle a, b\rangle$ въ собственномъ смыслѣ слова есть также и наибольшее (или наименьшее) ея значеніе въ узкомъ смыслѣ слова, а потому оно равно одному изъ чиселъ (25); но это число по опредѣленію больше (или меньше) всѣхъ другихъ значеній функціи $f(x)$, а потому оно больше (или меньше) всѣхъ другихъ чиселъ этого ряда.

§ 6. Пояснимъ изложенный въ § 5-омъ методъ рѣшенія задачъ на maximum и minimum примѣромъ. Пусть требуется въ конусъ съ высотою h и радіусомъ основанія r вписать*) цилиндръ наибольшаго объема. Обозначивъ черезъ x высоту, а черезъ y радіусъ основанія цилиндра, имѣемъ изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ, получаемыхъ въ осевомъ сѣченіи конуса и цилиндра: $y/r = (h-x)/h$. Опредѣляя изъ этого равенства y и подставляя въ выраженіе $\pi y^2 x$ объема цилиндра, получимъ, обозначая окончательно полученное выраженіе черезъ $v(x)$,

$$(32) \quad v(x) = \pi r^2/h^2\, x\,(h-x)^2,$$

при чемъ x по условію измѣняется въ промежуткѣ $\langle 0, h\rangle$. Строго говоря, при $x=0$ и $x=h$ исчезаетъ фигура цилиндра, а $v(x)$ обращается при этихъ значеніяхъ x въ нуль. Но мы условимся вписывать въ конусъ также цилиндръ нулевого объема и при высотѣ 0 и h (вырождающійся какъ бы въ основаніе или въ высоту конуса), т. е. точнѣе, условимся разсматривать измѣненія функціи $v(x)$ въ замкнутомъ промежуткѣ $\langle 0, h\rangle$. Еще же проще разсмотрѣть измѣненія въ $\langle 0, h\rangle$, функціи

$$(33) \quad f(x) = x\,(h-x)^2,$$

которая достигаетъ наибольшаго значенія вмѣстѣ съ $v(x)$, такъ какъ $\pi r^2/h^2 > 0$. Дифференцируя равенство (33), находимъ, что

$$f'(x) = (h-x)\,(h-3x).$$

Значитъ уравненіе $f'(x)=0$, или $(h-x)(x-3x)=0$, имѣетъ внутри

*) Подъ вписаннымъ въ конусъ цилиндромъ подразумѣевается здѣсь цилиндръ, ось котораго лежитъ на оси конуса, верхнее основаніе котораго есть параллельное сѣченіе конуса, а нижнее — лежитъ на основаніи конуса.

$\langle 0, h\rangle$ единственный корень $x = h/3$, получаемый приравниванiемъ нулю множителя $h - 3x$. Такъ какъ производная $f'(x)$ существуетъ во всемъ промежуткѣ $\langle 0, h\rangle$, то $f(x)$ непрерывна въ точкахъ 0 и h. Въ ряду чиселъ

$$f(0) = 0, \quad f(h/3) = 4h^3/27, \quad f(h) = 0$$

число $f(h/3)$ является наибольшимъ, поэтому $f(h/3)$ есть наибольшее значенiе функцiи $f(x)$ въ промежуткѣ $\langle 0, h\rangle$. Ему отвѣчаетъ [см. (32)] наибольшее значенiе $v(h/3) = 4\pi r^2 h/27$ объема вписаннаго цилиндра. Итакъ, наибольшаго объема достигаетъ вписанный въ конусъ цилиндръ тогда, когда высота его равна трети высоты конуса; это наибольшее значенiе объема цилиндра есть и maximum, такъ какъ точка $h/3$ лежитъ внутри $\langle 0, h\rangle$.

Въ слѣдующей статьѣ по теорiи maximum'a и mimimum'a мы нѣсколько обобщимъ теорему IV, затѣмъ разберемъ глубже особенности каждаго изъ изложенныхъ выше методовъ рѣшенiя задачъ на maxima и minima, поясняя эти особенности примѣрами, а затѣмъ перейдемъ къ разсмотрѣнiю того интереснаго случая, когда уравненiе (24) имѣетъ безконечное число корней въ конечномъ промежуткѣ.

Новые пути физическаго познанiя.

Проф. М. Планка.

Никогда еще экспериментальное физическое изслѣдованiе не переживало столь бурнаго подъема, какъ на глазахъ нашего поколѣнiя, и никогда еще сознанiе значенiя нашей науки для человѣческой культуры не проникало въ широкiе круги въ такой мѣрѣ, какъ въ настоящее время. Нѣтъ человѣка, который не интересовался бы болѣе или менѣе, волнами безпроволочнаго телеграфа, электронами, рёнтгеновскими лучами, явленiями радiоактивности. Но если мы спросимъ, въ какой мѣрѣ эти новыя блестящiя открытiя влiяли и способствовали нашему пониманiю природы и ея законовъ, то на первый взглядъ положенiе вещей покажется намъ здѣсь далеко не столь блестящимъ.

Предшествующая теоретическая эпоха отличалась такой ясностью, такой спокойной увѣренностью, что ее по справедливости называютъ классической. Совсѣмъ не то мы видимъ теперь. Если мы попробуемъ съ нѣкоторой высоты и отдаленiя оцѣнить современное состоянiе физическихъ теорiй, то впечатлѣнiе наше будетъ такое, что благодаря множеству новыхъ, отчасти совершенно неожиданныхъ, опытныхъ открытiй современное изслѣдованiе какъ бы запуталось и точно ощупью ищетъ пути. Мы видимъ вездѣ, какъ старыя, прочно укоренившiяся представленiя подвергаются нападкамъ, общепризнанныя предложенiя опровергаются, и на ихъ мѣсто утверждаются новыя гипотезы, столь смѣлыя, что пониманіе ихъ иногда недоступно даже для людей науки И ужъ менѣе всего, конечно, эти гипотезы могутъ намъ внушить увѣренность въ непрерывный и сознательно идущій къ цѣли прогрессъ науки. Такимъ образомъ, современная теоретическая физика напоминаетъ намъ древнее и чтимое зданіе, пришедшее уже въ ветхость: постепенно отваливается одинъ кусокъ за другимъ, и вотъ-вотъ начинаетъ уже колебаться самый фундаментъ.

Въ дѣйствительности, однако, такое впечатлѣніе совершенно обманчиво. Правда, въ строѣ физическихъ теорій въ настоящее время совершаются очень крупныя и глубокія измѣненія. Но ближайшее разсмотрѣніе показываетъ, что происходитъ отнюдь не разрушеніе, а наоборотъ, расширеніе и усовершенствованіе зданія; здѣсь и тамъ работники сдвигаютъ отдѣльныя плиты, чтобы заложить ихъ въ болѣе надежномъ и подходящемъ мѣстѣ, но самый фундаментъ никогда не обладалъ такой твердостью и прочностью, какъ въ настоящее время. Я постараюсь подробнѣе объяснить и обосновать это утвержденіе.

Но прежде всего замѣчаніе общаго характера. Первымъ толчкомъ къ пересмотру и преобразованію физической теоріи почти всегда служитъ открытіе одного или нѣсколькихъ фактовъ, которые не вмѣщаются въ рамкахъ теоріи въ ея современномъ видѣ. Эти факты и являются всегда той Архимедовой точкой, опираясь на которую можно ниспровергнуть самыя устойчивыя и тяжеловѣсныя теоріи. Вотъ почему для настоящаго теоретика нѣтъ ничего интереснѣе, чѣмъ фактъ, оказывающійся въ прямомъ противорѣчіи съ общепризнанной теоріей. И въ самомъ дѣлѣ, здѣсь-то собственно и начинается его задача.

Какъ нужно поступить въ подобномъ случаѣ? Одно несомнѣнно: въ существующей теоріи нѣчто должно быть измѣнено такъ, чтобы она согласовалась съ новымъ фактомъ. Но часто не такъ-то легко бываетъ рѣшить, какая именно глава теоріи нуждается въ усовершенствованіи. Въ самомъ дѣлѣ, одинъ фактъ не даетъ еще теоріи. Обыкновенно теорія состоитъ изъ цѣлаго ряда связанныхъ между собой предложеній. Она подобна сложному организму, отдѣльныя части котораго находятся въ такой многообразной и тѣсной зависимости между собой, что всякое вторженіе въ одно какое-либо мѣсто чувствуется болѣе или менѣе сильно въ различныхъ другихъ, повидимому, весьма отдаленныхъ частяхъ. Поэтому каждое умозаключеніе данной теоріи вытекаетъ изъ совокупности нѣсколькихъ ея предложеній, такъ что за каждый промахъ теоріи обыкновенно должны отвѣчать нѣсколько предложеній, и спасительный выходъ почти всегда можетъ быть найденъ нѣсколькими различными путями. Обыкновенно вопросъ, въ концѣ концовъ, разростается въ конфликтъ между двумя или тремя предложеніями, которыя раньше мирно уживались въ теоріи, а теперь въ виду новаго факта по крайней мѣрѣ, одно изъ нихъ, непремѣнно должно отпасть. Нерѣдко борьба тянется годы и даже десятки лѣтъ. Исходъ ея знаменуется не только окончательнымъ исчезновеніемъ побѣжденнаго предложенія, но вмѣстѣ съ тѣмъ также, — на что мы здѣсь должны обратить особе вниманіе, — и естественнымъ укрѣпленіемъ и возвышеніемъ въ достоинствѣ другихъ, побѣдившихъ предложеній

Тутъ мы должны отмѣтить чрезвычайно важный и замѣчательный фактъ: во всѣхъ конфликтахъ подобнаго рода, разыгравшихся въ новѣйшее время, побѣдителями въ борьбѣ остались великіе общіе принципы физики; начало сохраненія энергіи, начало сохраненія количества движенія, начало наименьшаго дѣйствія, основныя начала термодинамики, и всѣ эти принципы сильно повысились въ своемъ значеніи. Побѣжденными же въ борьбѣ оказались такія предложенія, которыя до того, правда, служили, повидимому, надежной исходной точкой во всѣхъ теоретическихъ разсужденіяхъ, но только потому, что ихъ считали вполнѣ самоочевидными, и вслѣдствіи этого не находили нужнымъ или просто забывали даже упоминать о нихъ особо. Можно сказать, словомъ, что побѣда великихъ физическихъ принциповъ надъ нѣкоторыми только привычными намъ, хотя и глубоко укоренившимися допущеніями, и представленіями опредѣляетъ собой весь характеръ теоретической физики въ ея современномъ развитіи.

Для большей ясности я остановлюсь на нѣкоторыхъ изъ предложеній указаннаго рода; раньше ими обыкновенно пользовались безъ всякихъ колебаній, какъ самоочевидной основой всякой теоріи, но при свѣтѣ новыхъ фактовъ они оказались несовмѣстимыми съ общими принципами физики или, по меньшей мѣрѣ, весьма и весьма сомнительными. Я назову здѣсь три такихъ предложенія: неизмѣняемость химическихъ атомовъ, взаимная независимость между пространствомъ и временемъ, и, наконецъ, непрерывность всѣхъ динамическихъ процессовъ.

Само собой понятно, я здѣсь отнюдь не собираюсь излагать всѣхъ тѣхъ вѣскихъ основаній, которыя говорятъ противъ *неизмѣняемости химическихъ атомовъ*. Я укажу лишь одинъ единственный фактъ, который привелъ къ безвыходному столкновенію этого допущенія, которое раньше считалось самоочевиднымъ, съ однимъ общимъ физическимъ принципомъ. Этотъ фактъ есть постоянное выдѣленіе тепла всякимъ радіевымъ соединеніемъ, а физическій принципъ — начало сохраненія энергіи, и конфликтъ закончился, наконецъ, полной побѣдой этого начала, хотя вначалѣ нѣкоторые изслѣдователи начали было въ немъ сомнѣваться.

Радіевая соль, заключенная въ достаточно толстой свинцовой оболочкѣ, безпрерывно выдѣляетъ теплоту, — каждый граммъ радія около 135 калорій въ часъ, — и потому она все время, подобно натопленной печи, остается болѣе теплой, чѣмъ окружающая среда. Но согласно принципу сохраненія энергіи наблюдаемая теплота не можетъ возникнуть изъ ничего, и гдѣ-нибудь должно происходить эквивалентное измѣненіе, являющееся причиной наблюдаемаго выдѣленія тепла. Въ печи эту роль играетъ непрерывный процессъ горѣнія. Въ соляхъ же радія, за отсутствіемъ всякаго другого химическаго процесса, необходимо допустить измѣненіе самихъ атомовъ радія. Эта гипотеза, которая съ точки зрѣнія прежней химіи кажется неслыханно смѣлой, подтвердилась, однако, во всѣхъ направленіяхъ.

Если стоять на строго формальной почвѣ, то въ понятіи перемѣннаго атома заключается извѣстное противорѣчіе, такъ какъ атомы по своему первоначальному опредѣленію являются неизмѣняемыми составными частями всѣхъ матеріальныхъ тѣлъ. Поэтому, чтобы быть точнымъ, слѣдовало бы названіе „атомъ" оставить только за дѣйствительно неизмѣняемыми элементами, т. е. скажемъ, за электронами и водородомъ. Но такая перемѣна обозначеній вызвала бы въ научной литературѣ полнѣйшій хаосъ, не говоря уже о томъ, что врядъ ли даже когда-либо удастся вообще установить, существуютъ ли абсолютно неизмѣняемые элементы. Вѣдь атомы современной химіи давно уже перестали быть атомами Демокрита; они имѣютъ гораздо болѣе строгое опредѣленіе, на основѣ котораго производятся относящіяся къ нимъ вычисленія и измѣренія. Только объ этихъ атомахъ идетъ рѣчь, когда говорятъ о превращеніи атомовъ, такъ что недоразумѣніе въ указанномъ направленіи совершенно исключено.

Столь же самоочевидной, какъ неизмѣняемость атомовъ, до недавняго времени казалась и взаимная независимость между количествами, относящимися къ пространству, съ одной стороны, и ко времени — съ другой. Вопросъ, одновременны ли или нѣтъ два событія, происходящія въ двухъ различныхъ мѣстахъ, имѣлъ прежде опредѣленный физическій смыслъ безотносительно къ наблюдателю, производившему измѣреніе времени. Теперь же это не такъ. Благодаря факту, который до сихъ поръ постоянно подтверждается тончайшими оптическими и электродинамическими опытами и который носитъ краткое, хотя и не вполнѣ ясное, названіе относительности всѣхъ движеній, простое представленіе объ одновременности пришло въ конфликтъ съ такъ называемымъ принципомъ постоянства скорости свѣта, установленнымъ электродинамикой Максвелла-Лоренца; этотъ принципъ гласитъ, что скорость распространенія свѣта въ пустомъ пространствѣ не зависитъ отъ движенія источника свѣта. Такимъ образомъ, если считать относительность экспериментально доказанной, то приходится пожертвовать либо принципомъ постоянства скорости свѣта, либо же взаимной независимостью между пространствомъ и временемъ.

Пояснимъ сказанное простымъ примѣромъ. Представимъ себѣ, что изъ нѣкоторой центральной станціи, напримѣръ, съ Эйфелевой башни, безпроволочнымъ телеграфомъ посылается сигналъ времени, (какъ это, впрочемъ, нынѣ дѣйствительно дѣлается международнымъ бюро времени). Всѣ станціи, находящіяся на окружности на одинаковомъ разстояніи отъ центральной станціи, получатъ сигналъ въ одинъ и тотъ же моментъ и могутъ сообразно съ нимъ вывѣрить свои часы. Но этотъ способъ контролированія времени становится принципіально недопустимымъ, коль скоро мы, основываясь на относительности всѣхъ движеній, перенесемся мысленно съ земли на солнце и будемъ, слѣдовательно, разсматривать землю, какъ находящуюся въ движеніи. Въ самомъ дѣлѣ, согласно принципу постоянства скорости свѣта ясно, что тѣ станціи, которыя для наблюдателя съ центральной станціи находятся въ направленіи движенія земли, получатъ сигналъ позже, чѣмъ станціи, лежащія въ противоположномъ направленіи, такъ какъ первыя станціи движутся прочь отъ свѣтовыхъ волнъ сигнала, которымъ приходится поэтому ихъ догонять, тогда какъ противоположныя станціи, напротивъ, несутся навстрѣчу волнамъ. Такимъ образомъ принципъ постоянства скорости свѣта дѣлаетъ невозможнымъ абсолютное опредѣленіе времени, т. е. независимое отъ состоянія движенія наблюдателя: отъ одного изъ двухъ мы должны отказаться. До настоящаго времени рѣшительный перевѣсъ въ борьбѣ остается за принципомъ постоянства скорости свѣта, и, несмотря на нѣкоторыя возникшія въ послѣднее время сомнѣнія, весьма вѣроятно, что и впредь въ этомъ отношеніи ничто не измѣнится.

Третье изъ перечисленныхъ выше предложеній относится къ непрерывности всѣхъ динамическихъ дѣйствій; прежде оно являлось неоспоримой предпосылкой всѣхъ физическихъ теорій, которая въ связи съ видоизмѣненными слегка представленіями Аристотеля выкристаллизовалась въ извѣстный догматъ: natura non facit saltus (природа не дѣлаетъ скачковъ). Но и въ этой издревле почитаемой твердынѣ физической науки современное изслѣдованіе пробило глубокую брешь. На почвѣ новѣйшихъ опытныхъ фактовъ этотъ догматъ пришелъ въ конфликтъ съ принципами термодинамики, и, судя по всѣмъ признакамъ, дни его сочтены. Какъ оказывается, природа въ дѣйствительности дѣлаетъ скачки, и притомъ весьма страннаго рода. Для большей ясности я позволю себѣ прибѣгнуть къ наглядному сравненію.

Представимъ себѣ водную поверхность, на которой сильный вѣтеръ вздымаетъ высокія волны. Когда вѣтеръ совершенно прекратится, волны будутъ тѣмъ не менѣе продолжаться еще долгое время, ударяя то объ одинъ берегъ, то о другой. Но при этомъ съ ними происходитъ характерное измѣненіе. Энергія движенія болѣе длинныхъ и болѣе грубыхъ волнъ превращается все больше и больше въ энергію движенія болѣе короткихъ и мелкихъ волнъ, въ особенности когда онѣ ударяютъ о берегъ или о другой неподвижный предметъ. Этотъ процессъ продолжается до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, волны не сдѣлаются столь малыми, движенія столь мелкими, что станутъ совершенно невидимы для глазъ. Это — всѣмъ извѣстный переходъ видимаго движенія въ теплоту, молярнаго движенія въ молекулярное, правильнаго движенія въ безпорядочное: въ правильномъ движеніи множество сосѣднихъ молекулъ имѣетъ одну и ту же скорость, тогда какъ при безпорядочномъ движеніи каждая молекула имѣетъ свою особую скорость, отличную какъ по величинѣ, такъ и направленію.

Но нарисованный нами процессъ расщепленія не идетъ до безконечности, а находитъ себѣ естественную границу въ размѣрахъ атомовъ. Въ самомъ дѣлѣ, движеніе каждаго атома, взятаго отдѣльно самъ по себѣ, всегда правильное, такъ какъ отдѣльныя части атома всѣ движутся съ одной и той же общей всѣмъ имъ скоростью. Чѣмъ крупнѣе атомъ, тѣмъ меньше расщепляется совокупность его энергіи движенія*). До сихъ поръ все ясно, и классическая теорія прекрасно согласуется съ опытомъ.

*) Такъ какъ атомъ представляетъ собой цѣлое, части котораго могутъ совершать лишь согласованныя движенія, то, чѣмъ крупнѣе атомъ, тѣмъ большая часть кинетической энергіи принадлежитъ согласованнымъ движеніямъ, тѣмъ меньше „распыленіе“ энергіи на несогласованныя, безпорядочныя движенія отдѣльныхъ частицъ. *Прим. ред.*

Но представимъ себѣ теперь другой, совершенно аналогичный процессъ, не съ водяными волнами, а со свѣтовымъ или тепловымъ излученіемъ. Предположимъ, напримѣръ, что лучи, испускаемые сильно охлажденнымъ тѣломъ, посредствомъ зеркалъ собираются въ замкнутомъ поломъ пространствѣ, между стѣнками котораго они испытываютъ постоянное отраженіе отъ одной стороны въ другую. Здѣсь тоже совершается постепенное превращеніе лучистой энергіи длинныхъ волнъ, энергіи „правильнаго“ движенія въ энергію болѣе короткихъ волнъ, энергію безпорядочнаго движенія; болѣе длиннымъ, грубымъ волнамъ соотвѣтствуютъ ультра-красные лучи, а болѣе короткимъ, тонкимъ — ультра-фіолетовые лучи спектра. Согласно классической теоріи мы должны, слѣдовательно, ожидать, что вся лучистая энергія сведется, наконецъ, къ ультра-фіолетовой части спектра, или, другими словами, что постепенно ультра-красные, а также видимые лучи исчезнутъ и превратятся въ невидимые ультра-фіолетовые лучи, имѣющіе, главнымъ образомъ, химическое дѣйствіе.

Оказалось, однако, что въ природѣ нельзя найти ни малѣйшаго намека на подобное явленіе. Превращеніе, напротивъ, раньше или позже достигаетъ своего совершенно опредѣленнаго завершенія которое можно констатировать съ точностью, и тогда состояніе излученія остается во всѣхъ отношеніяхъ устойчивымъ.

Были сдѣланы самыя разнообразныя попытки примирить этотъ фактъ съ классической теоріей, но до сихъ поръ постоянно оказывалось, что противорѣчіе коренится слишкомъ глубоко; вслѣдствіе этого возникла необходимость подвергнуть пересмотру самые корни теоріи, — ея основы. Снова приходится констатировать, что принципы термодинамики оказались совершенно непоколебимыми. Дѣйствительно, единственный найденный до сихъ поръ путь, обѣщающій, повидимому, полное рѣшеніе загадки, исходитъ какъ разъ отъ двухъ главныхъ началъ термодинамики, но онъ соединяетъ ихъ съ новой своеобразной гипотезой, содержаніе которой можно при помощи двухъ приведенныхъ выше образовъ передать приблизительно такъ.

Въ водяныхъ волнахъ расщепленіе энергіи движенія достигаетъ своего конца благодаря тому, что атомы въ извѣстной мѣрѣ препятствуютъ безпредѣльному расщепленію, такъ какъ каждый атомъ представляетъ собою опредѣленное, конечное количество (кванту) матеріи, которое можетъ двигаться только какъ цѣлое. Аналогичнымъ образомъ также при свѣтовомъ и тепловомъ излученіи, которыя сами по себѣ, правда, имѣютъ совершенно нематеріальную природу, должны все-таки дѣйствовать извѣстные процессы, которые сдерживаютъ лучистую энергію въ опредѣленныхъ конечныхъ количествахъ-квантахъ, и сдерживаютъ тѣмъ крѣпче, чѣмъ короче волны, т. е. чѣмъ быстрѣе совершаются колебанія*).

Какъ намъ опредѣленно представить себѣ возникновеніе подобныхъ квантъ чисто динамическаго рода, объ этомъ пока еще ничего

*) Иными словами, возникаетъ представленіе о наименьшемъ недѣлимомъ количествѣ энергіи, „квантѣ“ энергіи, аналогичное наименьшему количеству, „квантѣ“ вещества. *Прим. ред.*

нельзя сказать съ достовѣрностью. Можно было бы представить себѣ возникновенiе квантъ примѣрно такимъ образомъ, что всякiй источникъ излученiя можетъ испускать энергiю лишь при условiи, когда ея количество будетъ не меньше нѣкоторой минимальной величины, подобно тому, напримѣръ, какъ резиновый пузырь, въ который постепенно накачиваютъ воздухъ, лопается и сразу отдаетъ свое содержимое, лишь когда масса воздуха въ немъ достигнетъ опредѣленнаго количества (кванты)

Такъ или иначе, гипотеза квантъ привела къ представленiю, что въ природѣ бываютъ измѣненiя, которыя совершаются не непрерывно, но на подобiе взрывовъ. Какъ всѣмъ, вѣроятно, извѣстно, это представленiе значительно выиграло въ наглядности, благодаря открытiю и подробному изслѣдованiю радiоактивныхъ явленiй. Вообще же всѣ затрудненiя, встрѣчаемыя на пути къ точному выясненiю вопроса, пока стушевываются передъ тѣтъ обстоятельствомъ, что гипотеза квантъ успѣла уже дать результаты, которые лучше всѣхъ прежнихъ теорiй согласуются съ произведенными до сихъ поръ измѣренiями излученiя.

Но больше того. Весьма счастливымъ предзнаменованiемъ для гипотезы квантъ, какъ и вообще для всякой новой гипотезы, является то обстоятельство, что она подтверждается и въ тѣхъ областяхъ, которыхъ она первоначально вовсе не имѣла въ виду. Здѣсь я приведу только одинъ весьма замѣчательный примѣръ. Съ тѣхъ поръ какъ удалось получить въ жидкомъ состоянiи воздухъ, водородъ и гелiй, для опытнаго изслѣдованiя низкихъ температуръ открылось новое обширное поле, и за короткое время здѣсь удалось уже получить рядъ новыхъ весьма поразительныхъ результатовъ. Чтобы нагрѣть кусокъ мѣди отъ -250° до -249°, т. е. на 1°, нужно затратить не такое же количество теплоты, какъ для нагрѣванiя мѣди отъ 0° до 1°, но примѣрно въ 30 разъ меньшее. Если же начальная температура мѣди была бы еще ниже, чѣмъ -250°, то и соотвѣтственное количество теплоты было бы еще во много разъ меньше, и нельзя указать границы этому уменьшенiю. Этотъ фактъ рѣзко противорѣчитъ не только всѣмъ обычнымъ представленiямъ, но также и требованiямъ классической теорiи. Въ самомъ дѣлѣ, хотя мы уже больше ста лѣтъ тому назадъ научились точно различать температуру отъ количества теплоты, однако, кинетическая теорiя матерiи привела къ заключенiю, что эти двѣ величины, если и не точно пропорцiональны, то, по крайней мѣрѣ, измѣняются до извѣстной степени параллельно.

Гипотеза квантъ вполнѣ выяснила этотъ трудный вопросъ и, кромѣ того, она при этомъ случаѣ привела еще и къ другому весьма важному результату, а именно, что силы, которыми вызываются тепловыя колебанiя въ твердомъ тѣлѣ, совершенно такого же рода, какъ и силы, производящiе упругiя колебанiя. Такимъ образомъ, теперь мы съ помощью гипотезы квантъ имѣемъ возможность по упругимъ свойствамъ одноатомнаго тѣла опредѣлить количественно его тепловую энергiю для различныхъ температуръ, — т. е. рѣшена задача, которая классической теорiи была совершенно не по плечу. Отсюда возникъ далѣе цѣлый рядъ другихъ, на первый взглядъ весьма странныхъ вопросовъ, напримѣръ, о томъ, не совершаются ли и колебанiя звучащаго камертона не абсолютно непрерывно, но квантами. Конечно, при акустическихъ колебаніяхъ, вслѣдствіе ихъ сравнительно малой частоты, кванты энергіи чрезвычайно малы; напримѣръ, при тонѣ „*la*“ онѣ составляютъ лишь около трехъ квадрилліонныхъ частей единицы работы въ абсолютныхъ механическихъ мѣрахъ. Практически гипотеза квантъ оставляетъ поэтому безъ измѣненія обыкновенную теорію упругости; вѣдь мирится же эта послѣдняя съ вполнѣ аналогичнымъ обстоятельствомъ, — а именно, съ тѣмъ, что она разсматриваетъ матерію, какъ вполнѣ непрерывную, тогда какъ, точно говоря, она имѣетъ атомистическое строеніе, т. е. состоитъ изъ квантъ. Но съ принципіальной точки зрѣнія эта новая гипотеза знаменуетъ собой очевидный для всякаго переворотъ. И хотя природа динамическихъ квантъ пока еще представляется довольно загадочной, но извѣстные уже нынѣ факты почти не позволяютъ сомнѣваться въ ихъ существованіи въ той или иной формѣ. Въ самомъ дѣлѣ, не можетъ не существовать то, что можетъ быть измѣрено.

Такъ физическая картина міра въ свѣтѣ новѣйшаго изслѣдованія постепенно открываетъ намъ все болѣе тѣсную связь своихъ отдѣльныхъ чертъ и вмѣстѣ своеобразное ихъ строеніе, тогда какъ прежде тонкія детали были недоступны и оставались скрытыми для нашихъ глазъ, недостаточно еще изощренныхъ. Однако, можно все-таки спросить, даютъ ли эти успѣхи что-нибудь существенное для удовлетворенія нашего стремленія къ знанію? Приближаетъ ли насъ утонченная картина міра хотя бы на одинъ шагъ къ пониманію самой природы? Этотъ принципіальный вопросъ относится къ тѣмъ, которые были передуманы человѣчествомъ безчисленное множество разъ, и если мы здѣсь остановимся на немъ, то не для того, чтобы сказать что-нибудь существенно новое, а просто потому, что еще и теперь взгляды по этому вопросу рѣзко расходятся, а съ другой стороны, опредѣлить свое отношеніе къ нему необходимо для всякаго, кто глубже интересуется цѣлями науки.

Тридцать пять лѣтъ тому назадъ Германъ фонъ-Гельмгольцъ доказывалъ, что наши воспріятія никогда не могутъ намъ дать изображенія внѣшняго міра, а самое большее — лишь указанія для его воспроизведенія въ нашемъ сознаніи. Дѣйствительно, нѣтъ никакого основанія допускать какое-нибудь сходство между своеобразнымъ внѣшнимъ дѣйствіемъ и вызваннымъ черезъ него своеобразнымъ ощущеніемъ; всѣ вырабатываемыя нами представленія о внѣшнемъ мірѣ, въ сущности, являются лишь какъ бы отраженіемъ нашихъ собственныхъ ощущеній. Спрашивается, имѣетъ ли какой-нибудь смыслъ противоставить нашему самосознанію отличную отъ него „вещь въ себѣ“? Не представляютъ ли собой, напротивъ, всѣ такъ называемые законы природы, въ сущности, лишь болѣе или менѣе цѣлесообразныя правила, посредствомъ которыхъ мы охватываемъ и выражаемъ потокъ нашихъ ощущеній во времени возможно точнѣе и удобнѣе? — Если бы это было такъ, то оказалось бы, что не только обыкновенный здравый смыслъ, но и точное изслѣдованіе природы вѣчно находились въ коренномъ заблужденіи. Нельзя, въ самомъ дѣлѣ, отрицать, что весь ходъ развитія физическаго познанія до настоящаго времени стремился въ дѣйствительности къ возможно болѣе глубокому и принципіальному раздѣленію процессовъ во внѣшней природѣ отъ процессовъ въ человѣческомъ мірѣ ощущеній.

Чтобы найти выходъ изъ этого затруднительнаго положенія, нужно сдѣлать еще только одинъ шагъ дальше въ томъ же направленіи. Предположимъ, что найдена физическая картина міра, которая удовлетворяетъ всѣмъ предъявляемымъ требованіямъ и которая можетъ, слѣдовательно, представить вполнѣ точно всѣ эмпирически найденные законы природы. Конечно, никоимъ образомъ невозможно доказать, что такая картина имѣетъ хотя бы нѣкоторое сходство съ „дѣйствительной“ природой. Но съ другой стороны, и это обыкновенно упускаютъ изъ виду, столь же невозможно опровергнуть несравненно болѣе смѣлое утвержденіе, — что найденная картина міра во всѣхъ безъ исключенія пунктахъ абсолютно вѣрно передаетъ дѣйствительную природу. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы только приступить къ такому опроверженію, необходимо вѣдь хотя бы что-нибудь достовѣрно знать о природѣ, а такое допущеніе заранѣе исключается, какъ совершенно невозможное.

Здѣсь передъ нами открываетси зіяющая пропасть, въ которую наука не можетъ проникнуть; перешагнуть черезъ эту бездну — дѣло не чистаго, а практическаго разума, задача здраваго міровоззрѣнія.

Міровоззрѣніе, правда, не можетъ быть доказано наукой, но, поскольку оно не содержитъ въ себѣ внутреннихъ противорѣчій и согласуется съ фактами опыта, оно съ непоколебимой стойкостью выдерживаетъ всѣ нападенія. Но ошибочно было бы думать, что хотя бы въ самой точной изъ всѣхъ естественныхъ наукъ можно подвигаться впередъ безъ всякаго міровоззрѣнія. т. е. безъ помощи недоказуемыхъ гипотезъ. Безъ вѣры нельзя спасаться и въ физикѣ; необходимо, вѣрить, по меньшей мѣрѣ, въ существованіе нѣкоторой реальности внѣ насъ. Эта твердая вѣра указываетъ путь творческимъ силамъ, неудержимо стремящимся впередъ, только она одна даетъ необходимую точку опоры ощупью пробирающейся фантазіи, и только она постоянно вливаетъ бодрость въ утомленный неудачами духъ, даетъ ему силы для новой борьбы. Тотъ изслѣдователь, который въ своей работѣ не руководится никакой гипотезой, хотя бы лишь временно и съ большой осторожностью, этимъ самымъ заранѣе отказывается отъ углубленнаго пониманія своихъ собственныхъ результатовъ. Кто отвергаетъ вѣру въ реальность атомовъ и электроновъ, или въ электромагнитную теорію свѣтовыхъ волнъ, или въ тождественность теплоты тѣлъ съ движеніемъ, тотъ, конечно, гарантированъ отъ многихъ логическихъ и эмпирическихъ противорѣчій. Но было бы очень любопытно видѣть, какъ съ такой точки зрѣнія можно было бы хоть на одинъ шагъ подвинуть физическое познаніе!

Одной вѣры, конечно, недостаточно, и, какъ показываетъ исторія всякой науки, она легко можетъ вводить въ заблужденія, можетъ выродиться въ ограниченность и фанатизмъ. Чтобы быть надежнымъ руководителемъ, она постоянно должна быть контролируема законами логики и опытомъ, что достигается, въ концѣ концовъ, лишь посредствомъ добросовѣстной детальной работы, часто тяжелой и самоотверженной. Тотъ никогда не будетъ королемъ отъ науки, кто не въ состояніи или не хочетъ, когда необходимо, выполнять роль чернорабочаго, будь то въ лабораторіи или въ архивѣ, подъ открытымъ небомъ или за письменнымъ столомъ. Только въ этой упорной борьбѣ съ препятствіями зрѣетъ и очищается міросозерцаніе. Только тотъ, кто самъ непосредственно былъ въ этой передѣлкѣ, въ состояніи вполнѣ оцѣнить ея смыслъ и значеніе.

Рѣшеніе задачъ однимъ циркулемъ (геометрія Маскерони*).

И. Александрова.

Мы будемъ называть прямую данною, если на чертежѣ даны двѣ ея точки; при этомъ промежутокъ этой прямой между этими точками предполагается не заполненнымъ точками, какъ это считалось при употребленіи линейки. Окружность мы считаемъ данною, если на чертежѣ имѣется ея центръ и одна изъ ея точекъ. Такъ какъ эту окружность можно начертить циркулемъ цѣликомъ, то каждая произвольная точка этой окружности будетъ считаться данною. Для рѣшенія задачи на этотъ разъ могутъ быть проводимы только однѣ окружности; для доказательствъ можно воображать но не проводить прямыя линіи.

Съ этой точки зрѣнія всякая квадратная задача приводится къ слѣдующимъ четыремъ основнымъ операціямъ: 1) на данной прямой указать одну или нѣсколько точекъ, 2) опредѣлить точку встрѣчи данныхъ прямой и окружности, 3) опредѣлить точку встрѣчи данныхъ двухъ прямыхъ и 4) опредѣлить точку встрѣчи двухъ данныхъ окружностей. Такъ какъ послѣдняя операція выполняется циркулемъ непосредственно, то достаточно показать, что первыя три операціи могутъ быть выполнены однимъ циркулемъ; тогда будетъ ясно, что всякая квадратичная задача можетъ быть рѣшена однимъ циркулемъ.

Можно составить, сколько угодно, системъ, рѣшающихъ нашъ вопросъ, но Адлеру**) пришла счастливая мысль примѣнить къ этому дѣлу принципъ инверсіи. Не слѣдуя изложенію Адлера пунктуально, можно осуществить его мысль такъ, чтобы попутно познакомить читателя хотя съ нѣкоторыми, весьма изящными, построеніями Маскерони, впервые рѣшившаго занимающій насъ вопросъ.

---

*) Mascheroni „La geometria del compasso“, Павія, 1737 г. Имѣются переводы только на французскій и нѣмецкій языки.

*) А. Адлеръ. „Теорія геометрическихъ построеній“ Переводъ съ нѣмецкаго, подъ редакціей прив.-доц. С. О. Шатуновскаго. Изд. „Mathesis“. Одесса, 1910.

Рѣшимъ съ помощью одного циркуля слѣдующія проблеммы.

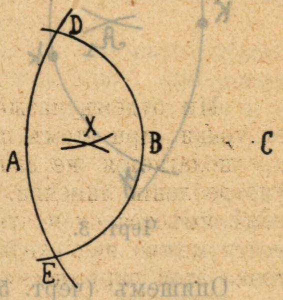
I. На данной прямой AB указать одну или нѣсколько точекъ (Маскерони).

Чертимъ послѣдовательно (черт. 1) окружности $(B,\ A)$, $(A,\ B)$, $(C,\ AB)$ и $(D,\ AB)$ *). Получаемъ точку E, лежащую на продолженіи AB. Такимъ образомъ, построеніе выполняется такъ какъ будто данная окружность дѣлится на шесть равныхъ частей.

Черт. 1.

Тутъ же видно, какъ отрѣзокъ AB можно умножить на произвольное цѣлое число.

Если намъ нужны точки отрѣзка AB, то (черт. 2) находимъ $AC = AB \,.\, n$, гдѣ n есть цѣлое произвольное число, и чертимъ окружности $(C,\ A)$, $(A,\ B)$, $(D,\ A)$ и $(E,\ A)$. Послѣднія двѣ опредѣляютъ точку X на AB. Треугольники ADX и ADC равнобедрены и имѣютъ общій уголъ при основаніи DAC. Изъ подобія $\triangle\triangle\, ADC$ и ADX находимъ $AX : AD = DX : AC$, откуда видно, что AX есть n-ая часть AB. Слѣдовательно, видно, какъ однимъ циркулемъ раздѣлить данный отрѣзокъ на n равныхъ частей.



Черт. 2.

II. Зная начало K и степень инверсіи k^2, инвертировать**) данную точку A (Адлеръ).

Построимъ (черт. 3) окружность $(K,\ k)$ и $(A,\ K)$ получимъ точки X и Y. Окружности $(X,\ KX)$ и $(Y,\ KY)$ опредѣлятъ искомую точку A_1. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія $\triangle\triangle\, KXA$ и KXA_1 видно, что $AK \,.\, A_1K = KX^2 = k^2$ ***).

Если $KA < (KX : 2)$, то это построеніе не выполнимо. Тогда строятъ (I) отрѣзокъ $KB = KA \,.\, n$ такъ, чтобы $KB > KX$. Затѣмъ находимъ точку B_1, обратную B, и умножаемъ KB_1 на n. Послѣ этого B_1 перейдетъ въ искомую точку C, потому что $KB \,.\, KB_1 = k^2$, или $(KB : n) \,.\, (KB_1 \,.\, n) = KA \,.\, KC = k^2$.

III. Зная начало K и степень инверсіи k^2, инвертировать данную прямую BL (Адлеръ).

Искомая окружность проходитъ черезъ K (черт. 4). Пусть K_1

---

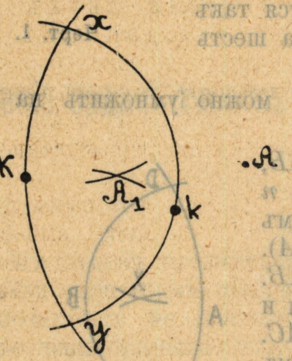
*) Символъ $(B,\ A)$ обозначаетъ окружность, центръ которой есть B, при чемъ она проходитъ черезъ A. Символъ $(M,\ MN)$ обозначаетъ окружность описанную изъ центра M радіусомъ, равнымъ MN.

**) Изложеніе теоріи инверсіи можно найти въ №№ 13, 15 и 328 „Вѣстника", а также во II-мъ томѣ „Энциклопедіи элементарной математики" Вебера и Вельштейна и наконецъ въ № 8 „Математическаго Образованія" 1913 г.

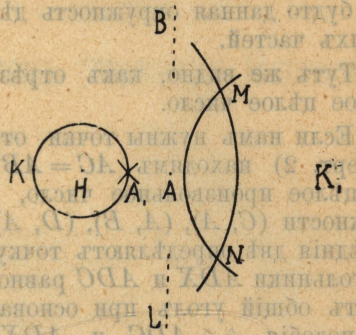
***) Въ этомъ случаѣ иногда говорятъ, что точка A инвертирована относительно окружности $(K,\ X)$. Эта окружность называется основною.

есть отраженіе K въ BL (K_1 опредѣляется четырьмя попарно равными окружностями). Инвертируемъ точку K_1 и получаемъ искомый центръ H. Это видно изъ равенства $k^2 = KH \,.\, KK_1 = 2KH \,.\, (KK_1 : 2) = KA \,.\, KA_1$.

IV. Къ тремъ даннымъ отрѣзкамъ a, b и c построить четвертый, имъ пропорціональный (Маскерони)



Черт. 3.



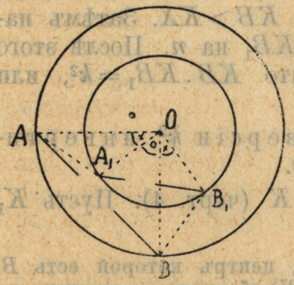
Черт. 4.

Опишемъ (черт. 5) двѣ окружности (O, a) и (O, b); отложимъ $AB = c$ и произвольную $AA_1 = BB_1$. Такимъ образомъ, предполагаемъ, что $c < 2a$. Тогда изъ подобія треугольниковъ имѣемъ: $A_1B_1 : AB = OA_1 : OA$ или $A_1B_1 : c = b : a$.*).

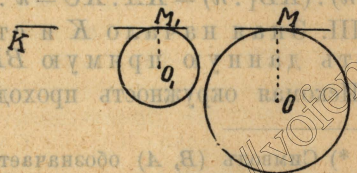
Если $c > 2a$, то вмѣсто хорды c строятъ хорду ($c : n$), гдѣ n есть цѣлое произвольное число. Тогда на чертежѣ получится n-ая часть искомаго отрѣзка (I).

V. Зная начало K и степень k^2, инвертировать данную окружность O (черт. 6).

Пусть KM и KM_1 будутъ касательными къ данной и искомой окружности O_1. Тогда M легко опредѣлить, раздѣливъ KO



Черт. 5.



Черт. 6.

пополамъ (I). Такъ какъ уголъ KMO прямой, то M находится на окружности, построенной на діаметрѣ KO. У Адлера это построеніе

*) Несомнѣнно, это рѣшеніе развилось изъ созерцанія угла AOB, пересѣченнаго параллелями AB и A_1B_1, такъ что $AO = a$, $A_1O = b$, $AB = c$.

выполняется значительно проще безъ помощи задачи (IV). Точка M_1 опредѣляется, какъ точка, обратная M (II). Затѣмъ изъ пропорцій $KO_1 : KO = KM_1 : KM$ и $M_1O_1 : MO = KM_1 : KM$ опредѣляемъ длины KO_1 и M_1O_1 (IV). Остается провести окружности (K, KO_1) и (M_1, M_1O_1). Если данная окружность проходитъ черезъ начало K, то обратная ей кривая будетъ прямою; двѣ точки этой прямой легко найти съ помощью задачи (II).

VI. Опредѣлить точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ или точку пересѣченія данныхъ прямой и окружности.

Данныя кривыя инвертируемъ, взявъ начало внѣ этихъ кривыхъ. Тогда онѣ отобразятся въ извѣстныхъ окружностяхъ (III и V); точка пересѣченія Y этихъ окружностей опредѣляется непосредственно. Затѣмъ инвертируемъ точку Y и получаемъ искомое.

Мы видимъ, что четыре основныя операціи, къ которымъ приводится рѣшеніе всякой квадратичной задачи, могутъ быть выполнены однимъ циркулемъ, а потому всякая квадратичная задача можетъ быть рѣшена однимъ циркулемъ. Отсюда уже совсѣмъ легко вывести обратное предложеніе.

Пусть нѣкоторая задача рѣшается проведеніемъ только однѣхъ окружностей, которыя вмѣстѣ съ данными задачи образуютъ геометрическій образъ M. Тогда отображенный образъ M_1 будетъ состоять изъ извѣстныхъ прямыхъ и окружностей, которыя могутъ быть построены циркулемъ и линейкой. Но, если это справедливо для образа M_1, то тоже самое будетъ справедливо и для образа M, а это бываетъ только для квадратичныхъ задачъ.

Мы видѣли, какъ тѣсно связанъ съ принципами инверсіи вопросъ о рѣшеніи задачъ однимъ циркулемъ. Сама собой напрашивается мысль, что среди многочисленныхъ и изящныхъ построеній Маскерони должны быть построенія, вытекающія изъ рѣшенія задачъ методомъ инверсіи, который былъ неизвѣстенъ во времена Маскерони. Чрезвычайно интересно указать, что такъ оно и есть. Напримѣръ.

VII. Данный отрѣзокъ AB раздѣлить на n равныхъ частей (n — цѣлое).

Пусть $AX = (AB : n)$. Инвертируемъ X, взявъ окружность (A, B) за основную (черт. 2). Точка X переходитъ въ C. Посмотримъ, извѣстна ли эта точка. По принципу инверсіи $AX . AC = AB^2$ или $(AB : n) . AC = AB^2$, откуда $AC = AB . n$ и точку C легко построить однимъ циркулемъ. Полученную точку C надо инвертировать обратно (II). Если мы выполнимъ указанныя построенія, то у насъ въ точности получится рѣшеніе Маскерони (I).

Общій методъ рѣшенія задачъ однимъ циркулемъ*) Пусть задача приводится къ опредѣленію нѣкоторой точки X.

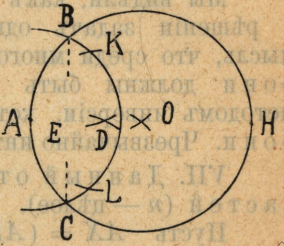
*) Все изложенное ниже, равно какъ и задача I служитъ необходимымъ дополненіемъ къ тому, что написано по этому поводу Адлеромъ (стр. 112, § 20, стр. 3 и 4). Изложеніе этого вопроса у Адлера, противъ его обыкновенія, черезчуръ сжато и неясно; оно подаетъ поводъ къ большимъ недоразумѣніямъ. Къ сожалѣнію, въ этомъ вопросѣ, однимъ изъ самыхъ трудныхъ во всей и

Вообразимъ что задача рѣшена циркулемъ и линейкой. Тогда получится геометрическій образъ, состоящій изъ ряда прямыхъ и окружностей*); въ этомъ рядѣ найдутся двѣ прямыя (прямая и окружность, или двѣ окружности), пересѣченіе которыхъ даетъ точку X. Разсмотримъ только первый случай — онъ труднѣе двухъ вторыхъ.

На замѣченныхъ двухъ прямыхъ выберемъ по двѣ точки A и B, C и D такъ, чтобы они могли быть построены однимъ лишь циркулемъ. На практикѣ эти точки обнаруживаются безъ всякаго труда. Теоретически существованіе такихъ точекъ обезпечивается тѣмъ, что, какъ мы видѣли, четыре основныя операціи построенія могутъ быть сдѣланы однимъ циркулемъ — обезпечиваются тѣмъ, что каждый шагъ циркуля и линейки мы можемъ замѣнить нѣсколькими взмахами циркуля. Взявъ какую-нибудь основную окружность, инвертируемъ прямыя AB и CD однимъ циркулемъ и превращаемъ ихъ въ окружности, пересѣкающіяся въ точкѣ X_1. Инвертируемъ точку X_1 обратно и получаемъ точку X. Сказанное легко распространить на тотъ случай, когда задача приводится къ построенію нѣсколькихъ точекъ.

Совершенно очевидно, какъ надо поступать, если точка X есть пересѣченіе прямой и окружности или двухъ окружностей. Въ этомъ случаѣ мы должны обратить все наше вниманіе на то, чтобы центры окружностей могли быть построены однимъ циркулемъ.

Описанный методъ даетъ вообще довольно сложныя построенія. Однако, въ каждомъ частномъ случаѣ эта сложность можетъ быть весьма сильно сокращена, во первыхъ, разумнымъ выборомъ основной окружности, а во вторыхъ, примѣненіемъ принциповъ инверсіи. Наконецъ, въ частныхъ случаяхъ общій методъ рѣшенія послѣ надлежащей обработки можетъ привести къ построеніямъ Маскерони. Вотъ одинъ изъ примѣровъ, иллюстрирующихъ и то, и другое.



Черт. 7.

VIII. Найти центръ окружности съ помощью одного циркуля.

По общему методу чертимъ произвольнымъ радіусомъ окружность (A, B) — получаемъ точку C (черт. 7). Опредѣляемъ циркулемъ точки M и N такъ, чтобы $AM = MB = NB = NA$, и точки P и Q такъ, чтобы $AP = PC = CQ = QA$. Точки M и N на чертежѣ не показаны. Эти точки симметричны относительно прямой AB и находятся на перпендикулярѣ проходящемъ черезъ середину AB. Точно также точки P и Q симметричны относительно AC и находятся на перпендикулярѣ, проходящемъ черезъ середину AC. Искомая точка O находится на пересѣченіи

безъ того крайне серьезной работѣ Адлера, переводчики не пришли на помощь читателю своими примѣчаніями. Въ другихъ случаяхъ къ этой превосходной книгѣ сдѣлано достаточное количество примѣчаній.

*) Въ трудныхъ случаяхъ этотъ образъ надо вычертить рукою.

MN и PQ. Взявъ окружность (A, B) за основную, отображаемъ MN и PQ въ окружностяхъ, пересѣкающихся въ X. Искомая точка O обратна точкѣ X (II).

Попробуемъ упростить это рѣшеніе. Вмѣсто прямой MN выгоднѣе взять прямую AD, потому что легко опредѣлить D — это есть отраженіе A въ BC. Во вторыхъ, легко замѣтить, $AE \cdot AH = AB^2$, т. е., что точки E и H — соотвѣтственны. Но такъ какъ $AD = 2AE$ и $AO = (AH : 2)$, то точки D и O суть тоже сотвѣтственныя.

Поэтому приходимъ къ слѣдующему рѣшенію. Опредѣливъ точки A, B, C и D, описываемъ окружность (D, DA) — получаемъ точки K и L. Затѣмъ описываемъ окружности (K, AB) и (L, AB) — получаемъ точку O. Это рѣшеніе помѣщено въ книгѣ Е. М. Пржевальскаго за № 449, III и тождественно съ однимъ изъ рѣшеній Маскерони.

О методѣ инверсіи.

А. Филиппова.

(*Окончаніе* **).

4. Приложеніе метода инверсіи къ рѣшенію геометрическихъ задачъ на построеніе.

Свойствами обратныхъ фигуръ можно пользоваться при рѣшеніи многихъ задачъ на построеніе. Для ознакомленія читателя съ характерными особенностями этого способа рѣшимъ слѣдующую задачу:

Даны три окружности O_1, O_2 и O_3, имѣющія общую точку O; требуется построить окружность, касающуюся трехъ данныхъ.

Общую точку O принимаемъ за центръ инверсіи (см. рис. 11). Описываемъ основную окружность такъ, чтобы она пересѣкала данныя окружности. Такъ какъ данныя окружности проходятъ черезъ центръ инверсіи, то онѣ обращаются въ прямыя линіи AB, BC и AC. Вписываемъ въ треугольникъ ABC кругъ O_4. Его обратное изображеніе O_4' должно касаться данныхъ круговъ. Проводимъ прямыя ON, OM и OP черезъ точки касанія окружности O_4 со сторонами треугольника ABC. Точка M есть общая точка прямой AB и окружности O_4. Ея обратное изображеніе M' есть общая точка окружностей O_1 (обратная прямой AB) и O_4'; иными словами, это есть точка, въ которой окружность O_4' касается окружности O_1. Вообще точки пересѣченія N', M', P' прямыхъ ON, OM, OP съ данными окружностями будутъ обратными изображеніями точекъ N, M и P. Слѣдовательно, искомая окружность O_4' проходитъ черезъ три точки N', M' и P'.

*) См. „Вѣстникъ", № 610.

Размотрѣнная нами задача представляетъ частный случай знаменитой задачи Аполлонія: „Даны три окружности O_1, O_2 и O_3; требуется построить окружность, касающуюся трехъ данныхъ“. Интересующихся рѣшеніемъ этой задачи и вообще подробностями приложеній метода инверсіи отсылаемъ къ книгѣ А. Адлера „Теорія геометрическихъ построеній“ (Одесса „Mathesis“, 1910.). Краткое изложеніе теоріи инверсіи можно найти въ №№ 13, 15 и 328 „Вѣстника Опытной Физики“. Въ № 8 (1913 г.) „Математическаго Образованія“

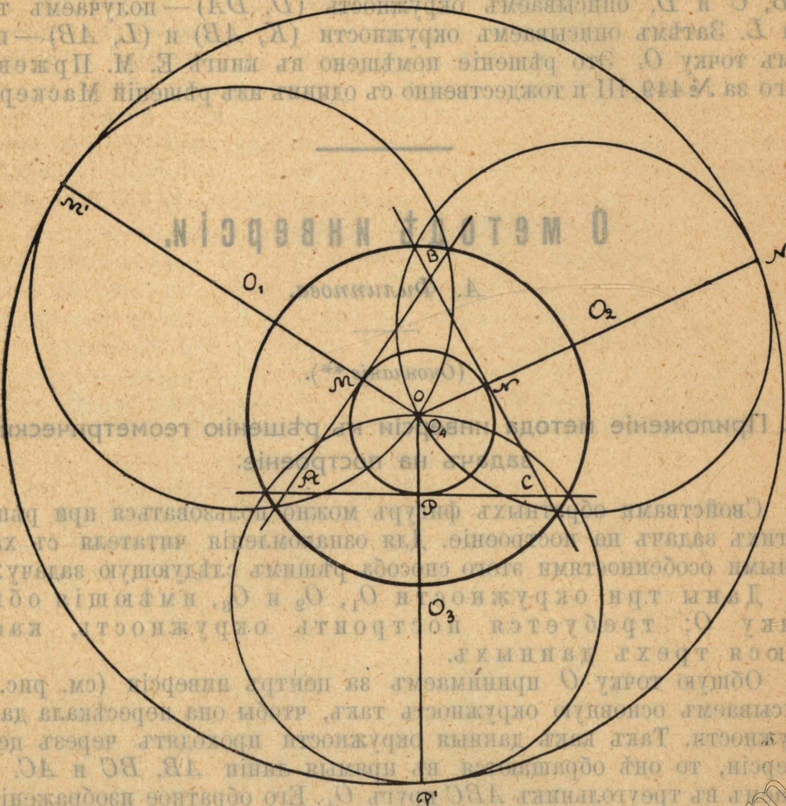


Рис. 11.

дано рѣшеніе задачи Аполлонія И. Александровымъ. Тамъ же Орбекъ даетъ рѣшеніе задачи Кастильяна при помощи того же метода.

Методъ инверсіи можетъ быть примѣненъ въ нѣкоторыхъ чисто теоретическихъ разсужденіяхъ. Такъ, А. Адлеръ, пользуясь этимъ методомъ, доказалъ теорему Маскерони, содержащуюся въ томъ, что всякая геометрическая задача второй степени можетъ быть рѣшена однимъ лишь циркулемъ. Такъ какъ этому вопросу посвящена статья И. И. Александрова, то мы вкратцѣ остановимся на двухъ другихъ приложеніяхъ этого метода. Одинъ изъ этихъ вопросовъ имѣетъ большое практическое значеніе, другой — чисто теоретическое.

§5. Стереографическія проекціи сферы.

Напомнимъ читателю, что геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ окружностямъ, равны, называется радикальной осью этихъ окружностей. Система окружностей, имѣющихъ общую радикальную ось называется пучкомъ окружностей или системой соосевыхъ окружностей. Легко видѣть, что пучокъ прямыхъ, проходящихъ черезъ какую-нибудь точку A, инвертируется въ пучекъ окружностей, радикальная ось которыхъ проходитъ черезъ центръ инверсіи O и точку A. Дѣйствительно, пусть A' есть точка, обратная точкѣ A (см. рис. 12); тогда каждой

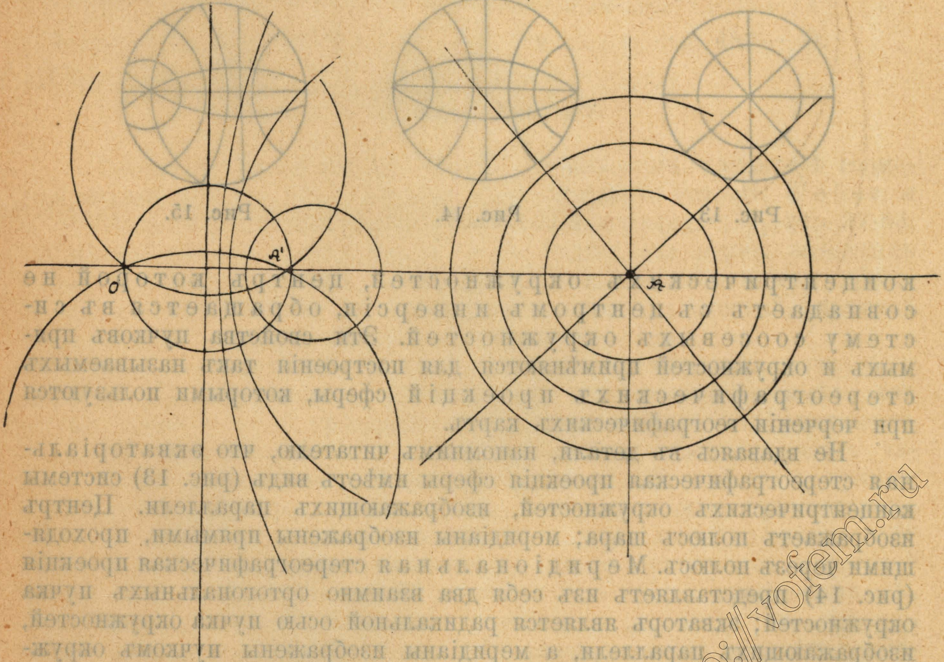


Рис. 12.

прямой, проходящей черезъ A, будетъ соотвѣтствовать окружность, проходящая черезъ точки O и A'. Совокупность окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки, какъ извѣстно, образуетъ пучокъ окружностей, радикальная ось котораго проходитъ черезъ точки пересѣченія.

Если изъ какой-нибудь точки радикальной оси проведемъ касательную къ одной изъ окружностей пучка, то отрѣзокъ этой касательной будетъ равенъ отрѣзкамъ всѣхъ другихъ касательныхъ, проведенныхъ изъ той же точки къ остальнымъ окружностямъ пучка. Если радіусомъ, равнымъ этой касательной, описать окружность вокругъ разсматриваемой точки радикальной оси, то полученная окружность пересѣчетъ всѣ окружности даннаго пучка ортогонально. Мы здѣсь не будемъ доказывать, что система окружностей, ортогонально пересѣкающихъ данный пучокъ, образуетъ новый пучокъ, радикальная ось котораго совпадаетъ съ линіей центровъ перваго пучка, а линія центровъ — съ радикальной осью перваго пучка.

Представимъ себѣ, что вокругъ точки A описана система концентрическихъ окружностей. Эта система ортогонально пересѣкаетъ пучокъ прямыхъ, проходящихъ черезъ общій центръ системы окружностей. Такимъ образомъ, система, обратная системѣ концентрическихъ окружностей, должна ортогонально пересѣкать пучокъ круговъ, обратный пучку лучей. Отсюда слѣдуетъ, что система

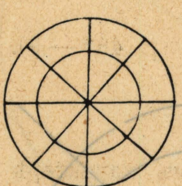


Рис. 13.

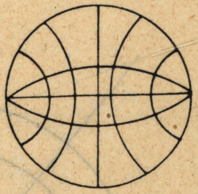


Рис. 14.

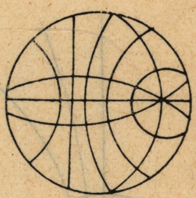


Рис. 15.

концентрическихъ окружностей, центръ которой не совпадаетъ съ центромъ инверсіи, обращается въ систему соосевыхъ окружностей. Эти свойства пучковъ прямыхъ и окружностей примѣняются для построенія такъ называемыхъ стереографическихъ проекцій сферы, которыми пользуются при черченіи географическихъ картъ.

Не вдаваясь въ детали, напомнимъ читателю, что экваторіальная стереографическая проекція сферы имѣетъ видъ (рис. 13) системы концентрическихъ окружностей, изображающихъ параллели. Центръ изображаетъ полюсъ шара; меридіаны изображены прямыми, проходящими черезъ полюсъ. Меридіональная стереографическая проекція (рис. 14) представляетъ изъ себя два взаимно ортогональныхъ пучка окружностей; экваторъ является радикальной осью пучка окружностей, изображающихъ параллели, а меридіаны изображены пучкомъ окружностей, пересѣкающихся въ полюсахъ. Горизонтальная стереографическая проекція (рис. 15) также представляетъ два взаимно ортогональныхъ пучка окружностей.

Изъ вышесказаннаго ясно, что двѣ послѣднія проекціи можно разсматривать, какъ инверсіи экваторіальной проекціи. Поэтому для черченія этихъ проекцій можно пользоваться инверсоромъ. Выбравъ надлежащимъ образомъ центръ инверсіи, обращаемъ экваторіальную проекцію въ любую другую форму стереографической проекціи (см. рис. 16).

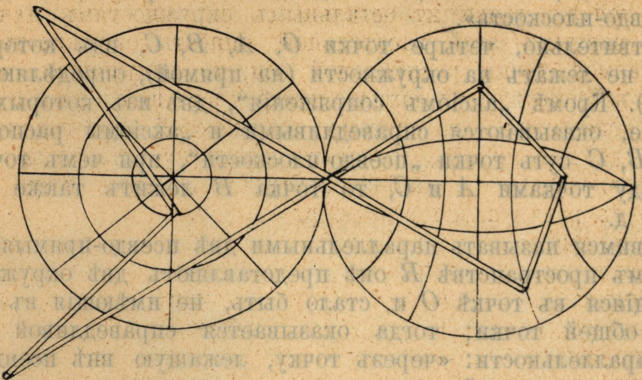


Рис. 16.

(„Элементы геометріи" Филипса и Фишера, стр. 487—9).

6. Псевдо-геометрія.

Для иллюстраціи мысли о чисто формальномъ характерѣ геометрическихъ системъ Пуанкаре далъ примѣръ (см. H. Weber и I. Wellstein, „Энциклопедія элементарной математики", II_1, стр. 37-53, „Mathesis" Одесса, 1909,), изъ котораго видно, что формы основныхъ геометрическихъ образовъ могутъ быть до извѣстной степени произвольными, что объекты, соотвѣтствующіе понятіямъ „точка", „прямая" и „плоскость", можно замѣнить другими объектами.

Въ пространствѣ R Евклидовой геометріи выберемъ точку O и подъ R' будемъ разумѣть пространство, которое будетъ имѣть всѣ тѣ же точки, что и пространство R, кромѣ точки O. Совокупность всѣхъ сферъ и окружностей пространства R, которыя проходятъ черезъ точку O, назовемъ „сферической сѣтью". Плоскости и прямыя пространства R, проходящія черезъ точку O, также принадлежатъ сѣти въ качествѣ „предѣльныхъ сферъ" и „предѣльныхъ окружностей" (съ безконечно большимъ радіусомъ). Теперь примемъ за „прямыя" и „плоскости" пространства R' окружности и сферы пространства R, принадлежащія нашей сѣти. Для отличія отъ „прямыхъ" и „плоскостей" Евклидовой геометріи назовемъ наши основные объекты терминами „псевдо-прямая" и „псевдо-плоскость".

Не трудно видѣть, что образы нашей „псевдо-геометріи" обладаютъ всѣми свойствами образовъ Евклидовой геометріи. Дѣйствительно, основныя аксіомы оказываются справедливыми. «Двѣ различныя точки A и B пространства R' постоянно опредѣляютъ „псевдо-прямую"». Справедливость этого предложенія очевидна, если разсмотрѣть ее съ точки зрѣнія Евклидовой геометріи въ пространствѣ R. Тогда три точки O, A и B опредѣляютъ окружность или прямую. Слѣдовательно, точки A и B опредѣляютъ „псевдо-прямую“.

«Три точки, не лежащія на одной псевдо-прямой, всегда опредѣляютъ псевдо-плоскость».

Дѣйствительно, четыре точки O, A, B, C, изъ которыхъ три A, B и C не лежатъ на окружности (на прямой), опредѣляютъ сферу (плоскость). Кромѣ „аксіомъ сопряженія“, двѣ изъ которыхъ приведены выше, оказываются справедливыми и „аксіомы расположенія“: «если A, B, C суть точки „псевдо-плоскости“, при чемъ точка B лежитъ между точками A и C, то точка B лежитъ также между C и A» и т. д.

Условимся называть параллельными двѣ псевдо-прямыя, если въ Евклидовомъ пространствѣ R онѣ представляютъ двѣ окружности, соприкасающіяся въ точкѣ O и, стало быть, не имѣющія въ пространствѣ R' общей точки; тогда оказывается справедливой также и аксіома параллельности: «черезъ точку, лежащую внѣ псевдо-прямой, можно провести къ ней только одну параллельную псевдо-прямую».

Нѣсколько сложнѣе устанавливается въ этой псевдо-геометріи понятіе о конгруэнтности. Останавливаться на этихъ подробностяхъ мы не будемъ, Насъ интересуетъ здѣсь слѣдующій вопросъ, содержитъ ли построенная система логическія противорѣчія? Для рѣшенія этого вопроса можно воспользоваться методомъ инверсіи. Обобщая понятіе о круговой инверсіи, мы приходимъ къ понятію о сферической инверсіи. Принимая точку O за центръ сферической инверсіи и произвольную сферу радіуса r за основную сферу инверсіи, замѣчаемъ, что псевдо-прямыя и псевдо-плоскости нашей сферической сѣти, какъ проходящія черезъ центръ инверсіи, инвертируются въ прямыя и плоскости пространства R. Отсюда ясно, что псевдо-геометрія не можетъ содержать логическихъ противорѣчій; иначе всякое противорѣчіе въ нашей системѣ привело бы путемъ инверсіи къ противорѣчію въ Евклидовой геометріи, которую мы считаемъ свободной отъ логическихъ противорѣчій.

Мы, впрочемъ, должны сказать, что чрезвычайно краткія указанія этого параграфа могутъ быть достаточно полезны только лицамъ, хорошо освоившимся съ идеей о различныхъ способахъ реализаціи формальныхъ построеній геометріи. Читатель можетъ ознакомиться съ этими идеями въ указанной книгѣ Вебера-Вельштейна.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей прив.-доц. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 190 (6 сер.). Построить треугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы вершины его лежали соотвѣтственно на трехъ данныхъ въ плоскости прямыхъ.

Ф. Д. (Петроградъ).

№ 191 (6 сер.). Въ плоскости даны двѣ равныхъ окружности. Провести сѣкущую такъ, чтобы она раздѣлилась въ точкахъ пересѣченія съ окружностями на три равныя части.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 192 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x(3-x)^5-48(3-x)+64=0.$$

Д. Ханжіевъ (Армавиръ).

№ 193 (6 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему уравненій

$$x^2-y^2-z^2=1,\quad y+z-x=3.$$

М. Бабинъ (ст. Дашковка).

№ 194 (6 сер.) Показать, что существуетъ безконечное множество функцій $\varphi(x)$, удовлетворяющихъ тожественно равенству

$$\varphi[\varphi(x)]=x,$$

и найти общій способъ для построенія любой изъ нихъ.

Н. С. (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

Отдѣлъ I.

№ 122 (6 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x(x^3-x^2+1)(x^4-x^3+x+2)=1.$$

Представивъ уравненіе въ видѣ $(x^4-x^3+x)(x^4-x^3+x+2)=1$ и полагая

$$(1)\quad x^4-x^3+x=y,$$

получимъ: $y(y+2)=1$, или $y^2+2y-1=0$. Рѣшая послѣднее уравненіе, имѣемъ: $y=-1\pm\sqrt{2}$, т. е. [см. (1)]

$$x^4-x^3+x=-1\pm\sqrt{2},\quad\text{или}\quad x^4-x^3+x=1\mp\sqrt{2}=0.$$

Итакъ, первоначальное уравненіе распадается на два уравненія:

$$(2)\quad x^4-x^3+x+1-\sqrt{2}=0\quad\text{и}\quad(3)\quad x^4-x^3+x+1+\sqrt{2}=0.$$

Но мы, условившись до конца рѣшенія подразумѣвать подъ радикаломъ $\sqrt{2}$ любое изъ двухъ его значеній, можемъ записать оба эти уравненія въ видѣ одного изъ уравненій (2) или (3), напримѣръ, въ видѣ уравненія (2). Записавъ уравненіе (2) въ видѣ

$$(4)\quad (x^4+1)-(x^3-x-\sqrt{2})=0,$$

преобразуемъ выраженія x^4+1 и $x^3-x-\sqrt{2}$ слѣдующимъ образомъ:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

$$x^3-x-\sqrt{2}=x^3-2x+x-\sqrt{2}=x(x^2-2)+x-\sqrt{2}=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+$$
$$+x-\sqrt{2}=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x-\sqrt{2}).$$

Итакъ,

$$x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),\quad x^3-x-\sqrt{2}=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x-\sqrt{2}),$$

а потому уравненіе (2) [см. (4)] можно представить въ видѣ:

$$(x^2+x\sqrt{2}+1)[(x^2-x\sqrt{2}+1)+(x-\sqrt{2}]=0,$$

или $(x^2-x\sqrt{2}+1)[x^2+x(\sqrt{2}-1)+1-\sqrt{2}]=0$. Итакъ, каждое изъ уравненій (2) распадается на два квадратныхъ уравненія:

$$(5)\quad x^2-x\sqrt{2}+1=0,\qquad(6)\quad x^2+x(\sqrt{2}-1)+1-\sqrt{2}=0,$$

въ каждомъ изъ которыхъ радикалу $\sqrt{2}$ можно приписать тотъ или иной знакъ (такъ что окончательно оказывается четыре квадратныхъ уравненія). Рѣшая уравненія (5) и (6), находимъ слѣдующіе восемь корней первоначальнаго уравненія:

$$x_{1,2,3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},\ \text{гдѣ}\ i=\sqrt{-1},\quad\text{или}\quad x_{1,2,3,4}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}},$$

гдѣ радикалу $\sqrt{2}$ можно приписывать тотъ или иной знакъ, и

$$x_{5,6,7,8}=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{8}-1}}{2}$$

гдѣ радикалъ $\sqrt{2}$ тоже можно взять съ любымъ знакомъ. Итакъ, окончательно

$$(7)\quad x_{1,2,3,4}=\frac{1\pm i}{\pm\sqrt{2}},\qquad(8)\quad x_{5,6,7,8}=\frac{1\mp\sqrt{2}\pm\sqrt{\pm\sqrt{8}-1}}{2},$$

при чемъ въ формулѣ (7) возможны всѣ четыре комбинаціи знаковъ, а въ формулѣ (8) передъ радикалами $\mp\sqrt{2}$ и $\pm\sqrt{8}$ надо взять одновременно или верхніе или нижніе знаки, комбинируя ихъ по произволу съ тѣмъ или инымъ знакомъ радикала $\pm\sqrt{\pm\sqrt{8}-1}$. Среди полученныхъ восьми корней вещественными оказываются лишь два корня, выражаемыхъ формулой

$$x=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{8}-1}}{2}.$$

А Сердобинскій (Чита); *N.*; *В. Ревзинъ* (Сумы);

№ 136 (6 сер.). *Построить треугольникъ* ABC *по радіусу описаннаго круга* R, *зная положеніе центра вписаннаго круга* I, *центра* I_a *круга, внѣвписаннаго относительно стороны* BC, *и вершины* A.

Описавъ кругъ около треугольника ABC и обозначивъ черезъ S вторую точку встрѣчи биссектрисы AI съ описанной окружностью, а черезъ A, B, C — углы треугольника, имѣемъ*):

$$\angle CBI=\angle ABI=\frac{B}{2},\quad \angle CBS=\angle CAS=\angle BAI=\frac{A}{2},\quad \angle BSA=\angle BCA=C,$$

$$\angle CBI_a=\frac{\pi-B}{2}=\frac{A+C}{2}.$$

Поэтому

$$(1)\quad \angle SBI_a=\angle CBI_a-\angle CBS=\frac{C}{2},\quad (2)\quad \angle SI_aB=\angle BSA-\angle SBI_a=C-\frac{C}{2}=\frac{C}{2}$$

$$(3)\quad \angle SBI=\angle CBS+\angle CBI=\frac{A+B}{2},\quad (4)\quad \angle BIS=\angle BAI+\angle ABI=\frac{A+B}{2},$$

Итакъ [см. (1), (2), (3), (4)] $\angle SBI_a=\angle SI_aB$, и $\angle SBI=\angle BIS$, а потому $SB=SI_a$, и $SB=SI$, и точно такъ же можно доказать, что $SC=SI_a$: слѣдовательно

$$(5)\quad SB=SI=SC=SI_a.$$

Изъ равенствъ (5) вытекаетъ, что точка пересѣченія S биссектрисы AI и описанной около треугольника окружности одинаково удалена отъ точекъ I, I_a и отъ вершинъ B и C треугольника, а потому S есть середина отрѣзка II_a. Эти соображенія приводятъ къ слѣдующему построенію: сперва находимъ середину S отрѣзка II_a, а затѣмъ — для опредѣленія центра описаннаго круга изъ точекъ A и S описываемъ окружности радіусомъ R до пересѣченія ихъ въ точкѣ O; описавъ изъ точки O, какъ изъ центра, окружность радіусомъ $OA=OS=R$, а изъ точки S, какъ изъ центра — окружность радіусомъ SI, находимъ точки пересѣченія этихъ окружностей B и C; тогда треугольникъ ABC есть искомый. Доказательство построенія, конечно, въ томъ предположеніи, что точка I лежитъ по условію внутри отрѣзка AI_a, вытекаетъ изъ того обстоятельства, что треугольникъ ABC дѣйствительно вписанъ въ кругъ радіуса $OA=R$, и изъ равенствъ (5), справедливыхъ для всякаго треугольника; дѣйствительно, по построенію $SB=SC$, а потому въ описанной окружности и $\smile SB=\smile SC$, такъ что AS есть биссектриса угла BAC; наконецъ, по

---

*) Ср. съ рѣшеніемъ задачи № 79 (6 сер.), напечатаннымъ на стр. 31 въ № 589 „Вѣстника“.

построенію $SB = SC = SI = SI_a$, а потому [см. (5)] точки I и I_a суть для треугольника ABC соотвѣтственно центры круговъ вписаннаго и внѣвписаннаго относительно стороны BC. Для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы точка I была задана лежащей внутри отрѣзка AI_a и чтобы соблюдалось неравенство $AS \leqq OA + OS = 2R$, т. е. $AS \leqq 2R$ (при чемъ S — середина II_a). Задача имѣетъ вообще два рѣшенія (отвѣчающія, однако, двумъ симметричнымъ положеніямъ одного и того же треугольника относительно биссектрисы AB) и одно рѣшеніе лишь тогда, если $AS = 2R$.

В. Павловъ (с. Ворсма); *В. Ковалько* (ст. Струнино); *N.*; *С. Конюховъ* (Томскъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

С. Богомоловъ. *Различные пути для обоснованія геометріи.* Отд. оттискъ изъ „Извѣстій Электротехн. Института Императора Александра III". С.-Петербургъ, 1914. Стр. 41.

Дж. В. А. Юнгъ, проф. методики математики Чикагскаго университета. *Какъ преподавать математику.* Перевелъ съ англійскаго съ разр. автора и дополнилъ А. Р. Кулишеръ въ 2-хъ выпускахъ. Выпускъ I. Изд-ство „Общественная польза". С.-Петербургъ, 1914. Стр. XXI + 198. Ц. 1 р. 50 к.

Инженеръ С. И. Минцловъ. *Періодическія и конечныя десятичныя дроби и дѣйствія надъ ними.* Изд. т-ва А. С. Суворина. С.-Петербугъ, 1914. Стр. 44 Ц. 45 к.

Д. Д. Галанинъ. *Леонтій Филипповичъ Магницкій и его ариѳметика.* Вып. II. „Ариѳметика-политика или гражданская". Вып. III. „Ариѳметика-логистика". Съ приложеніемъ нагляднаго пособія: „XVIII в. Ариѳметика ѳеотика или зрительная" составл. Василіемъ Кипріановымъ. Изд. книжнаго склада „Наука". Москва, 1914. Стр. 207. Ц. 2 р.

Указатель русской литературы по математикѣ, чистымъ, прикладнымъ и естественнымъ наукамъ за 1906 г., издаваемый Кіевскимъ Обществомъ естествоиспытателей подъ редакціей проф. В. К. Совинскаго. III-я серія т. VIII. Кіевъ, 1913. Стр. VIII + 400. Ц. 1 р. 50 к.

P. Delens. Problêmes d'Arithmétique amusante. Paris Libraire Wuibert, 1914 an. 164 + VIII.

Редакторъ прив.-доц. **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ" — Одесса, Екатерининская, 58.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый, подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Изъ записной книжки преподавателя. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Библіографія: I. Рецензіи. II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ. III. Новости иностранной литературы. Темы для сотрудниковъ. Задачи на премію. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр.—для гимн. мужск. и женск., реальн. уч., прогимн., городск. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Военно-Учебн. Зав.—для военно-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ—для дух. семинарій и училищъ.

Въ 1913 г. журналъ былъ признанъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. заслуживающимъ вниманія при пополненіи библіотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1913 году.

49-й и 50-й семестры.

Прив.-доц. С. О. Шатуновскій. О связи между ариѳметич. и алгебраич. дѣленіемъ. *Проф. Б. Ванахъ.* Международн. конференція времени. *Проф. Г. Л. Каллендаръ.* О природѣ тепла. *Прив.-доц. В. Каганъ.* О реакціяхъ связей. *Прив.-доц. С. О. Шатуновскій.* Замѣтка о непрерывныхъ дробяхъ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* О нахожденіи раціональныхъ корней алгебраич. уравненія. *Проф. Зюрингъ.* Значеніе и цѣль изслѣдованія облаковъ. *Г. Лѣви.* Интерференція рёнтгеновскихъ лучей и видимыя кристаллографическія пространственныя рѣшетки. *Н. Ниносъ.* Этюды по элементарной алгебрѣ. *Проф. А. Н. Уайтегидъ.* Основы математики и элементарное образованіе. *Г. фонъ-Дехендъ.* Каналовые лучи и ихъ значеніе для изслѣдованія строенія вещества. *В. Аренсъ.* I. Л. Лагранжъ. *Прив. доц. Е. Ельчаниновъ.* Аллотропія химическихъ элементовъ. *М. Якобсонъ.* Интерференція рёнтгеновскихъ лучей. *Прив.-доц. В. В. Бобынинъ.* Вторая стадія развитія счисленія дробей. *М. Смолуховскій.* Число и величина молекулъ и атомовъ. *Н. Г. Плеханова.* Англійская ассоціація преподавателей математики. *М. Ла-Роза.* Эфиръ. *К. Лезанъ.* Что такое векторъ? *Проф. Р. Вудъ.* Новѣйшіе опыты съ невидимымъ свѣтомъ. *Г. Дресслеръ.* Учебныя пособія по математикѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* XIII-ый Съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ. *Проф. В. Бьеркнесъ.* Метеорологія, какъ точная наука. *Д-ръ Э. Ленкъ.* Введеніе въ коллоидную химію. *Н. Извольскій.* Цѣль обученія ариѳметикѣ. *М. Рудзкій.* Возрастъ земли. *М. Фихтенгольцъ.* Альфа-лучи и опредѣленіе элементарнаго заряда электричества. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Къ предстоящему II-му Всероссійскому Съѣзду преподавателей математики. *Прив.-доц. Ю. Рабиновичъ.* О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ. *Т. В. Рихардсъ.* Основныя свойства элементовъ. *Прив.-доц. В. Каганъ.* Ариѳметическое и алгебраическое дѣленіе. *Проф. Эйнштейнъ.* Къ проблемѣ тяготѣнія. *Проф. В. П. Ермаковъ.* Уравненія движенія планеты около солнца. *Проф. О. Д. Хвольсонъ.* Horror absoluti (Источникъ принципа относительности). *Проф. Н. Умовъ.* Возможный смыслъ теоріи квантъ. *Прив.-доц. И. Ю. Тимченко.* Демокритъ и Архимедъ. *Проф. Д. Синцовъ.* О конкурсныхъ экзаменахъ (Къ 25-лѣтію ихъ существованія). *Проф. В. А. Циммерманъ.* О перемѣстительномъ свойствѣ произведенія нѣсколькихъ сомножителей. *Проф. А. Л. Корольковъ.* Графическій пріемъ при изученіи системы линзъ. *В. А. Гернетъ.* Капиллярный анализъ. *Прив.-доц. Е. Л. Буницкій.* Къ теоріи maximum'а и minimum'а функціи одного перемѣннаго. *Прив.-доц. Ю. Г. Рабиновичъ.* О наибольшихъ величинахъ въ геометріи.

УСЛОВІЯ ПОДПИСКИ: Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Тарифъ для объявленій: за страницу **30** руб.; при печатаніи не менѣе 3 разъ —**10%** скидки, 6 разъ—**20%**, 12 разъ—**30%**.

Журналъ за прошлые годы по **2 руб. 50 коп.**, а учащимся и книгопродавцамъ по **2 руб.** за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по **30 к.**, прошлыхъ семестровъ по **25 к.**

Адр. для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.**