№ 547.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Привать-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLVI-го семестра № 7-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1911.

Книгоиздательство „МАТЕЗИСЪ“

Одесса, Новосельская, 66.

Вышла въ свѣтъ:

А. А. МАЙКЕЛЬСОНЪ.

СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ И ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ

Перевела **В. О. Хвольсонъ**
подъ редакціей и съ дополненіями
заслуж. проф. **О. Д. Хвольсона.**

Около 13 печатн. листовъ, съ 109 черт. и тремя цвѣтными таблицами. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Содержаніе: Лекція I. Волновое движеніе и интерференція. Лекція II. Сравненіе микроскопа и телескопа съ интерферометромъ. Лекція III. Примѣненіе методовъ интерференціи для измѣренія разстояній и угловъ. Лекція IV. Примѣненіе методовъ интерференціи въ спектроскопіи. Лекція V. Свѣтовыя волны, какъ единицы длины. Лекція VI. Изслѣдованіе вліянія магнитизма на свѣтовыя волны при помощи интерферометра и ступеньчатой рѣшетки (эшелона). Лекція VII. Приложенія интерференціоннаго метода въ астрономіи. Лекція VIII. Эѳиръ.

Дополнительныя статьи проф. О. Д. ХВОЛЬСОНА:

1. О диффракціи. 2. Объ интерференціонныхъ полосахъ. 3. Нѣсколько словъ о спектральномъ анализѣ. 4. Современное положеніе вопроса объ эѳирѣ. 5. Другой интерференціонный способъ изслѣдованія строенія спектральныхъ линій.

Вышелъ № 10 (октябрь) журнала

„СОВРЕМЕННЫЙ МІРЪ“

Содержаніе: Стихотворенія: **Скитальца, Г. Галиной, А. Дикаго, Аллегро**; „Бумажное царство“ (ром.), **А. Федорова**; „Горячая“ (очеркъ), **А. Никандрова**; „Женька“ (разск.), **О. Погодиной**; „Шестипенсовый докторъ“ (очеркъ), **Д. Нилъ-Лойонса**; „Жизнь одного человѣка“ (ром.), **Я. Кристенсена**; „Н. Г. Чернышевскій въ редакціи „Современника“, **Е. Ляцкаго**; “Крѣпостная буржуазія“, **П. Берлина**; „Духовенство въ разсказахъ С. Н. Елеонскаго“, **В. Покровскаго**; „Піо Бароха“, **В. Фриче**; „Францъ Листъ“, **В. Вальтера**; „Неприкосновенные“, **В. Брусянина**; „Въ четвертомъ измѣреніи внутренней политики“, **І. Ларскаго**; „Живой Трупъ“, **Вл. Кранихфельда**; „Упадокъ тройственнаго союза“, **К. Вейдемюллера**; „Желѣзный интернаціоналъ„, **Г. Ц.**; „Дума 3-го іюня и крѣпостное право на Кавказѣ“, **О. С. А.**; „Борцы за свободу“, **І. Л.**; „Письмо въ редакцію“, **А. Куприна; критика и библіографія. Новыя книги. Объявленія.**

Открыта подписка на 1912 годъ и продолжается подписка на 1911 годъ.

Условія подписки (съ дост. и пер.): годъ—**9** р.; полгода—**4** р. **50** к.; на **4** мѣс.—**3** р.
Заграницу: 12 р. годъ и **6** р. полгода. Безъ доставки въ Спб.: **8** р. годъ и **4** р. полгода.

Подробные проспекты высылаются по первому требованію безплатно.

Спб., Надеждинская, 33.

Издательница **М. К. Іорданская**. Редакторъ **Вл. П. Кранихфельдъ.**

XLVI Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 547.

Содержаніе: Объ истинѣ и заблужденіи въ математикѣ. *О. Перрона.* — Рѣшеніе задачи на премію № 4. *А. Фрумкина.* — Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики. *Проф. Д. Синцова.* — Задачи №№ 450 — 455 (5 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 361, 364 и 365 (5 сер.). — Объявленія.

Объ истинѣ и заблужденіи въ математикѣ.

О. Перрона.

Вступительная лекція, читанная въ Тюбингенѣ 19 января 1911 года.

Высокочтимое собраніе!

Изъ всѣхъ наукъ математика, повидимому, наименѣе способна вызывать къ себѣ интересъ со стороны неспеціалистовъ и наименѣе доступна ихъ пониманію. Выдающіяся открытія, сдѣланныя въ другихъ областяхъ, быстро проникаютъ въ общую прессу и такимъ образомъ становятся, до извѣстной степени, всеобщимъ достояніемъ. Такъ, напримѣръ, теперь всякій знаетъ что-нибудь о дѣйствіи рёнтгеновскихъ лучей или радія, не говоря уже о препаратѣ Эрлиха-Гата 606. Но кто когда-либо слыхалъ, что существуютъ такія непрерывныя функціи, которыя нигдѣ не допускаютъ производной? Кто вообще въ состояніи хотя бы усмотрѣть въ этихъ словахъ какое-либо разумное содержаніе? Или кого интересуетъ доселѣ нерѣшенный вопросъ о томъ, имѣетъ ли функція Римана ξ только вещественные корни?

Впрочемъ, въ математикѣ есть нѣсколько проблемъ, которыя съ давнихъ поръ возбуждаютъ интересъ и среди неспеціалистовъ, причемъ — удивительная вещь — всегда оказывалось, что ими больше всѣхъ занимаются, безплодно затрачивая свое время, какъ разъ наименѣе призванные. Таковы задачи о трисекціи угла и о квадратурѣ круга. При этомъ изъ тѣхъ, кто занимался и теперь еще занятъ этими проблемами, хотя онѣ давно уже разрѣшены, лишь весьма немногіе въ состояніи даже дать правильный отвѣтъ на вопросъ, въ чемъ, собственно говоря, заключается самая проблема. А въ послѣднее время теорема Ферма также попала въ число популярныхъ проблемъ, а именно съ тѣхъ поръ, какъ премія въ 100 000 марокъ, назначенная за ея рѣшеніе, вызвала у многихъ совершенно неожиданное „научное“ рвеніе.

Но если не считать такихъ отдѣльныхъ исключеній, то математическіе вопросы дня остаются совершенно неизвѣстными для не-математиковъ; да это и не можетъ быть иначе уже по одному тому, что открытіе или проблема изъ области математики могутъ быть поняты въ большинствѣ случаевъ лишь тѣми, кто владѣетъ математической терминологіей и языкомъ формулъ въ такой мѣрѣ, въ какой это имѣетъ мѣсто только у спеціалистовъ.

Но въ то время, какъ пониманіе и даже интересъ къ математикѣ въ общемъ весьма незначительны внѣ узкаго круга спеціалистовъ, эта наука пользуется всеобщимъ признаніемъ и высокимъ авторитетомъ больше, чѣмъ какая-либо другая; всякій, кого вы спросите, согласится съ тѣмъ, что по сравненію со всѣми прочими науками ея результаты обоснованы наиболѣе надежнымъ образомъ. Все въ ней — сплошная истина; нѣтъ ни одной недоказанной или плохо доказанной гипотезы. Можно еще, пожалуй, сомнѣваться въ пользѣ иной математической теоремы, но ужъ ни въ какомъ случаѣ не въ ея истинности; причиной этому — безупречность самого математическаго метода. Таково мнѣніе всѣхъ или, по крайней мѣрѣ, огромнаго большинства.

Какъ же въ дѣйствительности обстоитъ дѣло съ этой хваленой надежностью математическаго метода и его результатовъ? Этотъ именно вопросъ я избралъ предметомъ сегодняшней лекціи. Въ отвѣтъ на него я съ самаго начала выскажу такое утвержденіе: эта полная достовѣрность представляетъ иллюзію; она не существуетъ или, по меньшей мѣрѣ, не существуетъ въ абсолютномъ смыслѣ слова.

Если бы эта надежность имѣла мѣсто, то прежде всего то, что создали математики прежнихъ временъ, должно было бы и теперь сохранять безусловное значеніе. А между тѣмъ это имѣетъ мѣсто лишь въ сравнительно небольшой мѣрѣ. Хотя мы все еще продолжаемъ восхищаться той высокой степенью логической точности, которой достигъ Евклидъ, однако, теперь мы знаемъ, что онъ далекъ отъ совершенства; чуть ли не на каждой его страницѣ современный строгій критикъ могъ бы указать ему на жестокіе промахи. Далѣе, если окинуть взоромъ классическую эпоху математическихъ открытій, — я имѣю въ виду тѣ, приблизительно, 100 лѣтъ, которыя слѣдовали за изобрѣтеніемъ анализа безконечно малыхъ, — то насъ и теперь еще поражаетъ у математиковъ того времени, каковы Ньютонъ, Лейбницъ, Эйлеръ, Бернулли и многіе другіе, богатство ихъ идей, ихъ геніальный даръ изобрѣтательности, благодаря которому они придумывали все новые и новые крайне оригинальные методы для того, чтобы побѣдоносно преодолѣвать всѣ встрѣчавшіяся имъ трудности.

Конечно, если бы въ ту эпоху появился человѣкъ нашего времени и сталъ бы указывать на ошибки этихъ авторовъ, то они, навѣрное, отвѣтили бы ему сострадательной улыбкой и перешли бы къ порядку дня, врядъ ли бы даже понявъ, въ чемъ дѣло. Но тѣмъ не менѣе многіе ихъ методы невѣрны, что слѣдуетъ хотя бы изъ тѣхъ — правда очень рѣдкихъ — случаевъ, въ которыхъ ложные методы привели и къ ложнымъ результатамъ. И это именно обстоятельство часто приводило къ сознанію, что методъ неправиленъ, — по поговоркѣ „бѣда уму-разуму учитъ“. Но большей частью, могу я прибавить, въ „бѣдѣ“ не было надобности.

Однако, просматривая даже современныя работы, мы часто будемъ испытывать разочарованіе, если ожидаемъ встрѣтить одни лишь безупречныя разсужденія. Мы встрѣтимъ въ нихъ нерѣдко промахи, вполнѣ аналогичные тѣмъ, какіе встрѣчаются у прежнихъ авторовъ; правда, въ отличіе отъ того, что было раньше,— настолько мы все-таки ушли впередъ, — теперь почти всякій самъ признаетъ собственныя ошибки, часто весьма сильно замаскированныя, если на нихъ обратить его вниманіе. Болѣе того, есть въ математикѣ еще и теперь одна дисциплина, въ которой существующіе взгляды весьма сильно расходятся между собой; въ ней одни считаютъ правильнымъ то, что другіе совершенно отвергаютъ. Это — такъ называемое ученіе о совокупностяхъ (Mengenlehre), въ которомъ надежность математической дедукціи, повидимому, вовсе утрачена.

Чѣмъ же объяснить то, что математика, слывущая за столь надежную и безупречную науку, оказывается въ такой степени подверженной заблужденіямъ и сомнѣніямъ? Я хочу попытаться раскрыть главнѣйшія причины этого обстоятельства, подвергнувъ съ этой цѣлью критическому обзору природу наиболѣе важныхъ видовъ ошибокъ. Въ чемъ же состоятъ эти ошибки и какъ можно ихъ избѣжать?

Прежде всего, многія ошибки являются попросту ошибками въ вычисленіяхъ, при чемъ я имѣю въ виду, разумѣется, менѣе всего численныя выкладки. Объ этой категоріи ошибокъ, которыя происходятъ исключительно отъ недостаточнаго вниманія и которыхъ поэтому всегда можно избѣжать, распространяться не приходится. Но слѣдующимъ — и весьма опаснымъ — источникомъ ошибокъ является языкъ. Въ этомъ отношеніи иногда вина падаетъ на автора, который не всегда находитъ наиболѣе удачное словесное выраженіе, но иногда и на самый языкъ, какъ таковой.

Если какимъ-либо образомъ полученъ нѣкоторый результатъ, могущій въ дальнѣйшемъ оказаться полезнымъ, то всегда слѣдуетъ формулировать этотъ результатъ полностью въ видѣ теоремы. Если же, какъ часто дѣлаютъ, этимъ правиломъ пренебречь, то представляется опасность, что результатъ сохранится въ нашей памяти въ не совсѣмъ точномъ видѣ, и потому мы можемъ сдѣлать изъ него ложное примѣненіе.

Но если даже и формулируютъ теорему, то часто дѣлаютъ это съ недостаточной полнотой; именно, цѣлый рядъ предположеній, безъ которыхъ теорема перестаетъ быть справедливой, попросту опускаютъ по той причинѣ, что эти предположенія почти очевидны и при всѣхъ предполагаемыхъ примѣненіяхъ теоремы сами собой выполняются. Однако, такое reservatio mentalis въ высшей степени опасно и уже не разъ являлось источникомъ грубыхъ ошибокъ.

Часто разсчитываютъ избѣжать возможности такихъ ошибокъ, говоря, что теорема правильна „въ общемъ случаѣ". Но эта очень принятая манера выражаться не приноситъ никакой пользы, покуда не указано подробнымъ образомъ, какъ именно можно узнать относительно каждаго отдѣльнаго случая, подходитъ ли онъ подъ понятіе „общаго случая" или нѣтъ. А между тѣмъ какъ часто опускаютъ такого рода указанія!

Чтобы избѣжать этого рода ошибокъ, слѣдуетъ обращать большое вниманіе на точную формулировку теоремы и перечислять всѣ отдѣльныя предположенія. Но даже и тогда мы не избавляемся вполнѣ отъ возможности ошибокъ, не говоря уже о томъ, что исполненіе этого требованія приводитъ часто къ невозможному нагроможденію предложеній. Дѣло въ томъ, что всегда можетъ оказаться роковой возможность различнаго пониманія теоремы, выраженной словами; причина этого кроется въ недостаточной опредѣленности словеснаго выраженія теоремы, — такъ сказать, въ ея „многозначности". Правда, подобную многозначность часто бываетъ легко замѣтить, и тогда остается только попросту измѣнить выраженіе теоремы; но нерѣдко можетъ вкрасться такая многозначность, которой мы не замѣтимъ, такъ какъ не существуетъ абсолютно ни одного критерія для того, чтобы судить о томъ, имѣетъ ли какая-нибудь теорема, формулированная на нашемъ языкѣ, дѣйствительно одно лишь то значеніе, какое мы имѣемъ въ виду. Такимъ образомъ, можетъ случиться, что, перечитывая ради какого-нибудь примѣненія теорему, которую мы раньше считали однозначной, мы придадимъ ей другое какое-нибудь изъ возможныхъ ея значеній, котораго раньше мы и не подозрѣвали, и такимъ образомъ упустимъ изъ виду прежнее ея значеніе.

Изъ этого вытекаетъ, какъ неизбѣжный выводъ, что вообще никогда нельзя вполнѣ полагаться на словесную формулировку, въ которую отливается какая-либо теорема. Напротивъ того, необходимо во всякій моментъ ясно представлять себѣ всю цѣпь доказательствъ, которая привела къ примѣняемой теоремѣ. Только при такомъ условіи мы будемъ точно оріентированы относительно истиннаго ея смысла и навѣрно избѣгнемъ неправильныхъ ея примѣненій.

Другой, несомнѣнно лучшій, путь для избѣжанія подобнаго рода ошибокъ состоитъ въ томъ, чтобы пользоваться такимъ языкомъ, который исключаетъ возможность различнаго пониманія. Но откуда взять такой языкъ? Отвѣтъ не представляетъ особенныхъ затрудненій. Вѣдь мы въ математикѣ многое вообще пишемъ не словами, а въ видѣ формулъ; послѣднія всегда однозначны. Если поэтому, удается записать теорему въ видѣ формулы, безъ всякихъ словъ, то цѣль наша достигнута. Конечно, если пользоваться обычнымъ математическимъ языкомъ формулъ или, вѣрнѣе, письмомъ формулъ, то этого можно достигнуть лишь въ немногихъ случаяхъ. Но въ послѣднее время пытались — и не безъ успѣха — настолько расширить эту формулографію, что дѣйствительно можно обойтись безъ словъ, такъ что этимъ вполнѣ освобождаются отъ всѣхъ недостатковъ языка. Какъ въ обычномъ математическомъ письмѣ ариѳметическія операціи изображаются посредствомъ опредѣленныхъ знаковъ, каковы $+$, $-$, $\int$ и т. д., такъ и въ этой всеобщей формулографіи и идеографіи*), разработкой и полезнымъ примѣненіемъ которыхъ мы особенно обязаны итальянцу Пеано (Peano), логическія операціи также представлены посредствомъ простыхъ знаковъ, сочетанія которыхъ подчиняются такимъ же формальнымъ законамъ, какъ и въ обыкновенной ариѳметикѣ.

Впрочемъ, не однѣ лишь теоремы могутъ оказываться многозначными при употребленіи обыкновеннаго языка, но также и опредѣленія, что иногда бываетъ весьма роковымъ. Въ прежнее время для многихъ понятій, каковы „непрерывный“, „сходящійся“, „безконечно малый“ и тому подобное, вовсе не давали достаточно подробныхъ опредѣленій. Вслѣдствіе этого случалось, что этимъ понятіямъ иногда приписывали такіе признаки, которые первоначально имъ вовсе не принадлежали. Этимъ очень просто объясняются многія ошибки упомянутаго выше классическаго періода. Подъ вліяніемъ Гаусса, Коши, Абеля постепенно признали необходимымъ, для полученія логически правильнаго доказательства, пользоваться лишь такими свойствами какой-нибудь вещи, которыя содержатся въ ея опредѣленіи или уже раньше были выведены изъ него, и, исходя изъ такого взгляда, стали добросовѣстно пополнять недостающія опредѣленія; тѣмъ не менѣе и по сей день проскальзываютъ ошибки, происходящія отъ неудачной формулировки опредѣленій.

Этой причиной объясняется, напримѣръ, то обстоятельство, что долгое время не дѣлали различія между понятіями „сходящійся“ и „равномѣрно сходящійся“ рядъ. А именно, когда Коши доказывалъ теорему, что сумма сходящагося ряда непрерывныхъ функцій сама представляетъ собой непрерывную функцію, то онъ въ дѣйствительности неправильно понялъ свое собственное опредѣленіе сходимости, и эта ошибка долгое время оставалась незамѣченной. Лишь когда изслѣдованія Дирикле (Dirichlet) о рядѣ Фурье обнаружили, что теорема Коши дѣйствительно ложна, постепенно стали догадываться, въ чемъ дѣло, пока, наконецъ, Зейдель (Seidel) не выяснилъ вполнѣ этого вопроса, указавъ на разницу между простой и равномѣрной сходимостью ряда. И этотъ случай можетъ, такимъ образомъ, служить примѣромъ того, что бѣда уму-разуму учитъ, какъ я раньше выразился. Впрочемъ, я долженъ замѣтить, что работа Зейделя не оказала непосредственно

*) Слово „идеографія“ означаетъ письмо въ идеяхъ, т. е. письмо, въ которомъ знаками выражаются понятія и соотношенія между ними. (По-нѣмецки — Begriffschrift).

того дѣйствія, какого слѣдовало бы ожидать отъ нея. Она осталась незамѣченной, и, если въ настоящее время важное понятіе о равномѣрной сходимости стало общимъ достояніемъ всѣхъ математиковъ, то это представляетъ, главнымъ образомъ, заслугу Вейерштрасса.

Ошибки другого рода происходятъ отъ того, что считаютъ очевиднымъ что-либо такое, что въ дѣйствительности не только не очевидно, но даже прямо-таки невѣрно. Такъ, напримѣръ, долгое время считали вполнѣ очевиднымъ, что въ случаѣ ряда послѣдовательныхъ переходовъ къ предѣлу порядокъ этихъ переходовъ не играетъ никакой роли. Въ связи съ этимъ стоитъ то обстоятельство, что, напримѣръ, безконечнымъ суммамъ приписывали, нисколько не задумываясь, тѣ же свойства, что и конечнымъ, и, въ частности, считали допустимыми ихъ почленное дифференцированіе и интегрированіе, не чувствуя даже потребности въ спеціальномъ доказательствѣ. А между тѣмъ слѣдовало бы дать совершенно новое доказательство, которое существеннымъ образомъ опиралось бы на опредѣленіе безконечной суммы; но это какъ разъ одно изъ тѣхъ опредѣленій, о которыхъ тогда забывали. Въ настоящее время мы знаемъ, что эти вещи, считавшіяся прежде самоочевидными, вовсе даже неправильны, и что, наоборотъ, почленное дифференцированіе и интегрированіе безконечныхъ рядовъ, можно производить лишь при вполнѣ опредѣленныхъ предположеніяхъ, а если послѣднія не выполнены, то эти дѣйствія приводятъ къ ложнымъ результатамъ.

Но возьмемъ другой, болѣе общепонятный примѣръ. Одинъ изъ величайшихъ геометровъ, Якобъ Штейнеръ (Steiner), хотѣлъ доказать теорему, что изъ всѣхъ плоскихъ замкнутыхъ линій равной длины окружность заключаетъ внутри себя наибольшую площадь, — теорему, справедливость которой всякій, конечно, склоненъ считать, по меньшей мѣрѣ, вѣроятной. Съ этой цѣлью Штейнеръ безупречнымъ образомъ доказалъ слѣдующее: „Если имѣемъ какую-либо замкнутую линію данной длины и если это не окружность, то всегда можно найти другую линію такой же длины, которая будетъ заключать бо́льшую площадь“. Можно думать, что этимъ вопросъ исчерпанъ, и самъ Штейнеръ былъ тоже такого мнѣнія. Но изслѣдуемъ точнѣе, что, собственно говоря, доказалъ Штейнеръ. Только слѣдующее: никакая линія, отличная отъ окружности, не можетъ заключать наибольшей площади. Отсюда вытекаетъ: если вообще существуетъ такая линія (т. е. линія, заключающая наибольшую площадь), то ею можетъ быть только окружность. Но Штейнеръ, конечно, заблуждался, когда считалъ доказаннымъ, что окружность содержитъ наибольшую площадь. Для этого ему нужно было еще доказать, что вообще существуетъ линія, обладающая такимъ свойствомъ. Однако, именно это Штейнеръ считалъ очевиднымъ*),

*) Штейнеръ далъ нѣсколько доказательствъ упомянутой теоремы, которыя всѣ, какъ извѣстно, страдаютъ однимъ и тѣмъ же недостаткомъ. Изящнѣе всего, пожалуй, то доказательство, которое находится во II томѣ полнаго собранія его сочиненій (стр. 193); тамъ Штейнеръ ясно говоритъ

и несомнѣнно, что и теперь еще многіе неискушенные склонны будутъ согласиться съ нимъ въ этомъ. А между тѣмъ это является заблужденіемъ, которое не перестаетъ, конечно, быть таковымъ несмотря на то, что здѣсь случайно получается правильный результатъ. Эта теорема дѣйствительно оказывается вѣрной, какъ показываютъ многочисленныя доказательства, придуманныя позже и свободныя отъ этого пробѣла.

Для современнаго критически мыслящаго математика ничто не должно быть очевиднымъ; и дѣйствительно, бываютъ вполнѣ аналогичные случаи, когда кажется очевиднымъ то, что на самомъ дѣлѣ совершенно ложно. Для примѣра сопоставимъ слѣдующія двѣ задачи. Первая задача заключается въ слѣдующемъ: „изъ всѣхъ площадей, которыя столь малы, что ихъ можно заключить внутри кривой данной длины, найти наибольшую“. Это разсмотрѣнная выше задача Штейнера. Но наряду съ нею разсмотримъ вполнѣ аналогичную ей вторую задачу: „Найти наименьшую изъ всѣхъ площадей, которыя настолько велики, что ихъ нельзя заключить внутри кривой данной длины“. Съ логической точки зрѣнія эти двѣ столь родственныя между собой задачи представляются вполнѣ эквивалентными; и поскольку мы для первой задачи склонны считать существованіе рѣшенія очевиднымъ, постольку же мы, съ логической точки зрѣнія, должны были бы признавать рѣшеніе и въ другомъ случаѣ. Но если бы мы стали на эту точку зрѣнія, мы жестоко ошиблись бы. Ибо эти двѣ задачи, какъ легко можно доказать, стоятъ одна къ другой въ такомъ отношеніи, что, если одна изъ нихъ допускаетъ рѣшеніе, то другая ни въ коемъ случаѣ не можетъ имѣть рѣшенія; но одна изъ двухъ должна имѣть рѣшеніе, что также можетъ быть легко доказано*). Однако, мнѣ нисколько не представляется очевиднымъ, что именно первая задача должна допускать рѣшеніе, какъ полагалъ Штейнеръ. A priori, съ

слѣдующее: „Если. при одномъ и томъ же заданномъ периметрѣ, фигуры могутъ имѣть неодинаковую площадь, но послѣдняя не можетъ быть произвольно велика (это Штейнеръ дѣйствительно доказалъ предварительно), то непремѣнно должна существовать либо одна фигура, которая имѣетъ бо́льшую площадь, чѣмъ всѣ остальныя, либо нѣсколько такихъ фигуръ различнаго вида, площади которыхъ равны между собой, но больше площадей всѣхъ прочихъ фигуръ, имѣющихъ тотъ же периметръ“. Неискушенному въ этихъ вещахъ читателю это разсужденіе можетъ показаться правильнымъ „выводомъ“. Но вѣдь тогда съ одинаковымъ правомъ можно было бы сдѣлать такой, напримѣръ, выводъ: „такъ какъ рядъ $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ сходится при различныхъ положительныхъ значеніяхъ x, но не при произвольно большихъ значеніяхъ, то необходимо должно существовать нѣкоторое наибольшее значеніе, при которомъ рядъ этотъ сходится“, — что, конечно, невѣрно.

*) Величины тѣхъ площадей, которыя можно заключить внутри кривой данной длины, образуютъ континуумъ A положительныхъ чиселъ; величины площадей, которыхъ нельзя окружить такой кривой, составляютъ континуумъ B. При этомъ всякое число континуума B больше всякаго числа континуума A, а въ обоихъ континуумахъ A и B вмѣстѣ содержатся всѣ положительныя числа. Смотря по тому, принадлежитъ ли число, отдѣляющее оба континуума (сѣченіе A/B), къ A или къ B, — чего нельзя знать a priori, — рѣшеніемъ будетъ обладать первая или вторая задача.

равнымъ правомъ могла бы допускать рѣшеніе и вторая задача, какъ вполнѣ аналогичная первой, и тогда первая задача не имѣла бы рѣшенія. Во всякомъ случаѣ, противоположное этому предположеніе отнюдь не очевидно, но нуждается въ спеціальномъ доказательствѣ.

Считать что-либо очевиднымъ весьма часто заставляетъ насъ пространственная интуиція, и здѣсь мы подходимъ къ наиболѣе важному и распространенному источнику ошибокъ: онъ состоитъ въ примѣненіи непосредственнаго воззрѣнія (Anschauung), или интуиціи, вмѣсто логическаго доказательства. Въ этомъ же заключается и главная ошибка классическаго періода. Начнемъ сразу съ простого примѣра. Одна извѣстная теорема изъ теоріи функцій вещественнаго перемѣннаго гласитъ: „если непрерывная функція отъ x имѣетъ въ началѣ и въ концѣ нѣкотораго промежутка разные знаки, то она должна, по крайней мѣрѣ, въ одномъ мѣстѣ промежутка обращаться въ нуль". Съ точки зрѣнія нагляднаго представленія эта теорема очевидна, такъ какъ геометрическимъ образомъ непрерывной функціи всегда служитъ сплошная кривая. Поэтому чертятъ попросту прямую, изображающую ось x-овъ, и непрерывную кривую, которая лежитъ частью по одну, частью по другую сторону отъ прямой. Никто не станетъ сомнѣваться въ томъ, что кривая, переходящая съ одной стороны прямой на другую ея сторону, должна гдѣ-либо пересѣчь эту прямую; а въ этомъ и состоитъ наша теорема. Или вотъ еще болѣе простая интерпретація: если въ 8 часовъ утра мы опредѣляемъ по термометру температуру въ 3^0 холода, а въ 3 часа дня находимъ 3_0 тепла, то всякій пойметъ, что въ этотъ промежутокъ времени термометръ долженъ былъ хоть разъ показать температуру въ 0^0. Но эти соображенія, основанныя на непосредственномъ созерцаніи, отнюдь не представляютъ собой логическаго доказательства. Гдѣ здѣсь отдѣльные логическіе выводы, изъ которыхъ должно быть построено всякое доказательство? И прежде всего здѣсь слѣдуетъ указать, что понятіе о непрерывной функціи, входящее въ нашу теорему, и ея геометрическій образъ — математическая кривая — получаютъ въ математикѣ вполнѣ точное, чисто ариѳметическое опредѣленіе, не имѣющее отношенія къ какимъ-либо явленіямъ эмпирическаго геометрическаго пространства или къ какимъ-либо инымъ эмпирическимъ даннымъ. Конечно, это опредѣленіе сознательно такъ установлено, чтобы математическая кривая возможно болѣе соотвѣтствовала наглядной, начерченной, эмпирической кривой. Но мы ничего не можемъ сказать о томъ, какъ далеко идетъ это соотвѣтствіе; суть въ томъ, что ту кривую, которую мы себѣ наглядно представляемъ, которая является объектомъ нашего созерцанія, нельзя опредѣлить ариѳметически, такъ что относительно нея невозможно ничего доказать.

Поэтому съ нашей стороны является совершенно нелогичнымъ, если вмѣсто входящаго въ нашу теорему понятія о непрерывной функціи или о математической кривой — понятія, произвольно нами установленнаго и такимъ образомъ нами самими созданнаго, — мы подставляемъ такое эмпирическое понятіе, какъ наглядная кривая, или даже, какъ мы это дѣлаемъ во второй интерпретаціи, ходъ измѣненія температуры въ теченіе дня. Вѣдь съ такимъ же основаніемъ мы могли бы восползоваться примѣромъ колебаній курса цѣнной бумаги; но тогда получился бы совсѣмъ другой результатъ. Правда, всякій сейчасъ же скажетъ, чтобы объяснить эту разницу, что денежные курсы измѣняются скачками, а температура непрерывно. Но что это значитъ — „скачками"? И какъ надо понимать терминъ „непрерывно"? Это именно и надо опредѣлить. Но, давая эти опредѣленія, мы покидаемъ почву интуиціи и должны уже вести логическое доказательство, основываясь на данномъ опредѣленіи.

Но, несмотря на все это, какой-нибудь неисправимый утилитаристъ могъ бы замѣтить, что все же успѣхъ говоритъ въ пользу примѣненія интуиціи; вѣдь вотъ же, напримѣръ, теорема о непрерывной функціи оказывается вѣрной. Хотя, стоя на точкѣ зрѣнія логика, я и не обязанъ считаться съ подобнаго рода взглядами, однако, я хочу на нѣсколькихъ примѣрахъ показать, что интуиція съ успѣхомъ можетъ приводить и къ ложнымъ выводамъ. Интуиція является несовершеннымъ, грубымъ орудіемъ, которое позволяетъ намъ лишь приблизительно познать истинныя соотношенія. Такъ, напримѣръ, интуиція, несомнѣнно заставляетъ насъ думать, что всякая кривая въ любой своей точкѣ, если не считать нѣсколькихъ отдѣльныхъ точекъ перегиба, либо совпадаетъ съ прямою, либо съ одной стороны выпукла, а съ другой — вогнута. А между тѣмъ математика учитъ насъ, что эти два случая отнюдь не составляютъ полной дизъюнкціи. Существуютъ даже такія кривыя, которыя ни въ одной точкѣ не совпадаютъ съ прямой и не обращены ни въ одну сторону выпуклостью или вогнутостью. Интуиція сама по себѣ никогда не смогла бы обнаружить существованія такой кривой. Чтобы замѣтить такія тонкости внутренняго строенія, скрытыя отъ нашихъ грубыхъ чувствъ, мы должны были бы имѣть возможность разсматривать кривую черезъ увеличительныя стекла произвольно большой силы. Такія увеличительныя стекла доставляетъ намъ именно математика и логика.

Наконецъ, такая кривая, которая проходитъ черезъ всѣ точки квадрата, для нагляднаго представленія должна казаться невозможной; а между тѣмъ такія кривыя существуютъ, какъ показалъ Пеано*).

Лишь недавно я натолкнулся въ одной новой работѣ на другую ошибку, которая также покоится на ненадежности нагляднаго представленія. Въ этой работѣ авторъ основываетъ довольно длинное изслѣдованіе на одной геометрической леммѣ, которую онъ, правда, не формулируетъ, но которую, въ нѣсколько суженномъ смыслѣ, можно было

---

*) Въ дѣйствительности, существованіе такихъ кривыхъ, парадоксальныхъ съ точки зрѣнія нагляднаго представленія, указываетъ только на то, какъ велико различіе между интуитивной кривой и кривой математической, опредѣляемой посредствомъ понятія о непрерывной функціи. Если я выше сказалъ, что математическую кривую старались опредѣлить такъ, чтобы имѣло мѣсто возможно большее соотвѣтствіе между математической и наглядной кривой, то теперь мы видимъ, что эта цѣль оказалась достигнутой лишь отчасти. А между тѣмъ принятое опредѣленіе (математнческой кривой) оказалось столь плодотворнымъ, что ничто не даетъ повода его измѣнять.

бы выразить такъ: „Если неограниченный рядъ точекъ $P_1, P_2, P_3, \ldots$, лежащихъ въ одной плоскости, расположенъ такимъ образомъ, что каждая изъ этихъ точекъ лежитъ внутри треугольника, образуемаго тремя предыдущими точками, и если площадь каждаго послѣдующаго треугольника не больше половины площади предшествующаго ему треугольника, то всѣ эти точки стремятся къ вполнѣ опредѣленной предѣльной точкѣ“. Авторъ не даетъ доказательства этой леммы. Но, если воплотить ее въ чертежѣ, то ея истинность становится почти очевидной, такъ что, пожалуй, многимъ покажется даже излишнимъ ее доказывать. Авторъ, очевидно, столь увѣренъ въ талантливости своихъ читателей, что считаетъ для нихъ легкимъ дѣломъ самимъ придумать доказательство. Съ такой увѣренностью въ способностяхъ читателя часто приходится встрѣчаться въ математической литературѣ, и она, конечно, во многихъ случаяхъ вполнѣ умѣстна въ интересахъ сбереженія мѣста и времени. Но въ данномъ случаѣ авторъ забылъ самъ проконтролировать средствами логики справедливость своей леммы, которой онъ обязанъ интуиціи. Въ противномъ случаѣ онъ, несомнѣнно, замѣтилъ бы, что лемма совершенно невѣрна*), такъ что и дальнѣйшія теоремы, которыя онъ выводитъ изъ нея, тоже частью неправильны.

Наконецъ, вотъ еще одинъ примѣръ, который, быть можетъ, яснѣе всѣхъ другихъ показываетъ, до какой степени слѣдуетъ остерегаться слишкомъ поспѣшныхъ сужденій, основанныхъ на интуиціи. Если функція двухъ перемѣнныхъ, которыя мы будемъ представлять себѣ, какъ прямоугольныя координаты на плоскости, въ нѣкоторой точкѣ этой плоскости вдоль всѣхъ направленій, проходящихъ черезъ нее, достигаетъ максимума, то можно думать, что она вообще имѣетъ максимумъ въ этой точкѣ. Эта теорема кажется до наглядности очевидной, если разсуждать, примѣрно, слѣдующимъ образомъ. Представимъ себѣ, что изъ нѣкоторой точки на склонѣ горы во всѣ стороны расходятся горизонтальныя прямыя. Однѣ изъ нихъ моментально войдутъ внутрь горы; напримѣръ, если склонъ обращенъ къ сѣверу, то это будетъ съ прямой, направленной къ югу, и съ прямыми, лежащими въ извѣстной близости отъ нея. Прямая же, направленная къ сѣверу, пройдетъ сперва въ воздухѣ и либо вовсе не встрѣтитъ горы, либо войдетъ въ нее, но лишь на извѣстномъ разстояніи, а именно войдетъ въ склонъ противолежащей горы. Конечно, это разстояніе можетъ быть очень мало, а именно въ томъ случаѣ, если долина, лежащая между обоими склонами, очень узка.

Но если мы представимъ себѣ такую точку горной поверхности, что в с я к а я горизонтальная прямая, исходящая изъ нея, сперва проходитъ свободно по воздуху (и даже не идетъ вдоль поверхности горы), а если и встрѣчаетъ гору, то лишь на нѣкоторомъ разстояніи отъ разсматриваемой точки, — то съ этой точки открывается

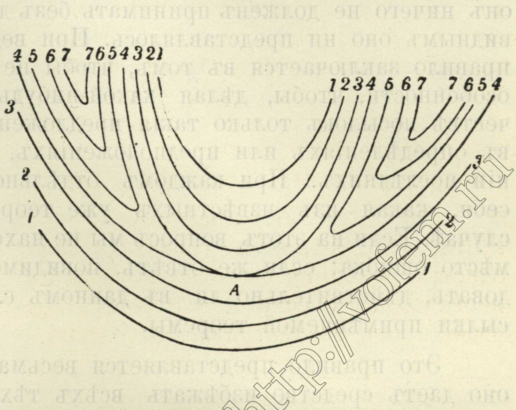
*) А именно, какъ легко видѣть, точки могутъ имѣть такое расположеніе, что онѣ стремятся не къ предѣльной точкѣ, а къ предѣльному отрѣзку, лежащему внутри всѣхъ треугольниковъ.

свободный видъ во всѣ стороны. Выходя изъ нашей точки по любому направленію, мы никогда не станемъ сразу подыматься; со всѣхъ сторонъ придется сперва немного спуститься внизъ, прежде чѣмъ мы получимъ возможность снова начать подъемъ, а именно, лишь перейдя долину, мы сможемъ подняться по противолежащему склону горы. Это заставляетъ насъ думать, что наша точка расположена выше всѣхъ сосѣднихъ точекъ на поверхности горы въ опредѣленной окрестности, такъ что мы находимся на одной изъ вершинъ. Врядъ ли кто-нибудь потребуетъ доказательства этого утвержденія,—столь наглядно и очевидно обстоитъ дѣло.

И тѣмъ не менѣе мы сдѣлались жертвой заблужденія. Если на всѣхъ прямыхъ, исходящихъ изъ нашей точки, тѣ отрѣзки, которые можно пройти по воздуху, не встрѣчая горы, больше одного какого-нибудь даннаго отрѣзка, то наше заключеніе справедливо. Но это условіе не должно обязательно быть выполнено, такъ что можетъ случиться, что, хотя всякая горизонтальная п р я м а я лишь на нѣкоторомъ разстояніи входитъ въ гору, существуютъ, однако, такія горизонтальныя к р и в ы я линіи, которыя сразу же входятъ въ толщу горы, не проходя вовсе по воздуху. Тогда можно, выйдя изъ нашей точки и идя вдоль изогнутаго хребта, сразу же начать подыматься; такимъ образомъ, дойдя до нашей точки, мы еще не достигли бы вершины *).

Съ помощью чертежа или модели, хотя всякая модель можетъ передать лишь приближенно истинныя соотношенія, было бы нетрудно представить эти вещи столь наглядным образомъ, чтобы онѣ показались очевидными всякому. Такимъ образомъ, здѣсь мы имѣемъ дѣло отнюдь не съ тѣмъ случаемъ, когда что-либо оказывается слишкомъ тонкимъ для грубаго созерцанія; напротивъ, здѣсь—а также и въ преды-

*) Подобная формація горы представлена на приложенномъ эскизѣ посредствомъ изогипсъ (линій равной высоты); A — разсматриваемая точка. Существенно при этомъ то, что обѣ вѣтви, изъ которыхъ состоитъ изогипса 4, касаются другъ друга въ точкѣ A, и что обѣ онѣ обращены вогнутостью въ одну и ту же сторону (къ сѣверу). Нетрудно построить уравненіе подобной поверхности. Проложимъ плоскость XY черезъ изогипсу 4 и обозначимъ черезъ $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ уравненія двухъ ея вѣтвей; тогда



$$z=[y-f(x)]\,[\varphi(x)-y]$$

представитъ поверхность съ требуемыми свойствами. Въ этомъ можно сразу убѣдиться, разсматривая знакъ z въ различныхъ областяхъ, на которыя изогипса 4 дѣлитъ плоскость XY. Если обѣ вѣтви представляютъ параболы $[f(x)=p^2x^2,\ \varphi(x)=q^2x^2]$, то получается извѣстный примѣръ П е а н о.

дущемъ примѣрѣ — все доступно интуитивному пониманію. Но первоначальная интуиція ввела насъ въ заблужденіе тѣмъ, что изъ-за нея мы упустили изъ виду одинъ изъ возможныхъ случаевъ. Въ этомъ заключается особенное коварство наглядныхъ представленій; я могъ бы привести много другихъ случаевъ, въ которыхъ наглядное представленіе заставляетъ упустить изъ виду такіе случаи, которые сами по себѣ вполнѣ доступны усмотрѣнію. Одна только логика, которая представляетъ въ наше распоряженіе законъ исключеннаго третьяго, въ состояніи предостеречь насъ отъ подобныхъ ошибокъ; но ни въ коемъ случаѣ этого нельзя сказать объ интуиціи.

Но я не хотѣлъ бы, чтобы мои слова были поняты въ томъ смыслѣ, будто я произношу смертный приговоръ интуиціи. Отъ этого я очень далекъ, такъ какъ, не взирая на всѣ свои недостатки, интуиція необходима изслѣдователю; это она ставитъ передъ нимъ новыя цѣли. Интуиція и фантазія составляютъ то орудіе, при помощи котораго находятъ новыя математическія истины. Но только эта сторона дѣятельности изслѣдователя разыгрывается большею частью, такъ сказать, за кулисами.

Лишь послѣ того, какъ теоремы, рожденныя интуиціей и фантазіей, выдержатъ испытаніе огнемъ въ горнилѣ логики, онѣ получаютъ право увидѣть свѣтъ. Такъ, логика, большею частью, является лишь воспріемницей, а настоящей матерью — интуиція. Но здѣсь во всякомъ случаѣ крещеніе безусловно необходимо.

Изъ сказаннаго мною видно, что изслѣдователь-математикъ непрерывно подвергается на своемъ одинокомъ пути не только трудностямъ, но даже опасностямъ. Но пониманіе ошибки или возможности ошибиться даетъ въ большинствѣ случаевъ и средство избѣжать ошибку. Выше я всякій разъ указывалъ пути и средства для того, чтобы можно было избѣжать ошибокъ различнаго рода, о которыхъ я говорилъ. Прежде всего математику необходимъ крайній скептицизмъ; онъ ничего не долженъ принимать безъ доказательства, какимъ бы очевиднымъ оно ни представлялось. При веденіи доказательствъ главное правило заключается въ томъ, чтобы не покидать почвы логики, и, въ особенности, чтобы, дѣлая какой-нибудь выводъ, примѣнять въ качествѣ посылокъ только такія предложенія, которыя либо заключаются въ опредѣленіяхъ или предположеніяхъ, либо уже доказаны на основаніи послѣднихъ. При каждомъ отдѣльномъ выводѣ надо спрашивать себя, какая изъ извѣстныхъ уже теоремъ примѣняется въ данномъ случаѣ. Если на этотъ вопросъ мы не находимъ яснаго отвѣта, то имѣетъ мѣсто ошибка; если же отвѣтъ, повидимому, найденъ, то должно изслѣдовать, дѣйствительно ли въ данномъ случаѣ выполнены всѣ предпосылки примѣняемой теоремы.

Это правило представляется весьма простымъ; и дѣйствительно, оно даетъ средство избѣжать всѣхъ тѣхъ ошибокъ, о которыхъ я говорилъ. Слѣдуя ему, во многихъ отдѣлахъ чистой математики достигли такой степени надежности результатовъ, дальше которой идти невозможно. Но, къ сожалѣнію, это не вездѣ имѣетъ мѣсто. Въ одной изъ самыхъ молодыхъ отраслей математики, а именно—въ ученіи о многообразіяхъ, наше правило для избѣжанія ошибокъ, повидимому, отказывается служить. На этомъ я хотѣлъ бы нѣсколько остановиться*).

Я сказалъ, что при всѣхъ нашихъ заключеніяхъ мы всегда должны имѣть въ виду опредѣленія и предположенія. Но въ этомъ именно и заключается трудность. Дѣло въ томъ, что, приступая къ построенію любой математической дисциплины, мы должны установить рядъ понятій, которыхъ мы не можемъ опредѣлить, такъ какъ во всякое опредѣленіе какого-нибудь понятія всегда войдутъ новыя понятія. Такими неопредѣляемыми „основными понятіями" являются въ современной геометріи, напримѣръ, понятія „точка", „прямая", „между" и т. д. Точно такъ же мы не можемъ доказать всѣхъ предложеній; нѣкоторыя изъ нихъ должны оставаться недоказанными въ качествѣ предположеній или, какъ говорятъ, аксіомъ или постулатовъ. Въ геометріи такую роль играетъ, напримѣръ, предложеніе: „черезъ двѣ точки проходитъ одна и только одна прямая".

Но, быть можетъ, иной ультраскептикъ усмотритъ трудность въ томъ, что вѣдь аксіомы, не будучи доказаны, могутъ оказаться ложными, и тогда всѣмъ слѣдствіямъ, а съ ними и всей математикѣ грошъ цѣна. Но, къ счастью, эта опасность намъ не грозитъ. Аксіома, въ чемъ бы она ни состояла, не можетъ быть ложной. Въ самомъ дѣлѣ, если мы не опредѣляемъ понятій „точка" и „прямая", то, напримѣръ, аксіома „черезъ двѣ точки проходитъ только одна прямая" можетъ имѣть только тотъ смыслъ, что подъ точкой и прямой мы хотимъ разумѣть такія вещи, которыя обладаютъ свойствомъ, выражаемымъ этой аксіомой. Предложеніе „черезъ двѣ точки проходятъ двѣ прямыя" само по себѣ въ качествѣ аксіомы было бы столь же правильно, какъ и первое; этимъ было бы лишь сказано, что подъ точкой и прямой мы понимаемъ такія вещи, которыя обладаютъ этимъ новымъ свойствомъ. Правда, такая геометрія не соотвѣтствовала бы эмпирической геометріи, но сама по себѣ она была бы логически правильна. Поэтому значеніе аксіомы заключается исключительно въ томъ, что она до извѣстной степени замѣняетъ отсутствующее опредѣленіе основныхъ понятій; можно сказать, что аксіома неявно опредѣляетъ эти понятія. Опредѣленіе въ собственномъ смыслѣ (номинальное опредѣленіе) представляетъ, съ этой точки зрѣнія, лишь частный случай аксіомы, какъ бы въ формѣ разрѣшеннаго уравненія, и именно разрѣшеннаго по отношенію къ опредѣляемому понятію.

Итакъ, всякая аксіома сама по себѣ правильна. Конечно, мы формулируемъ аксіомы геометріи, большей частью, нарочно такимъ образомъ, чтобы онѣ находились въ согласіи съ извѣстными эмпирическими данными, такъ что въ послѣднемъ счетѣ мы заимствуемъ аксіомы у интуиціи. Но во всякомъ случаѣ мы ничего не знаемъ о томъ, представляется ли это согласіе полнымъ, да и никогда ничего не

---

*) Объ этомъ см. подробнѣе въ книгѣ Ф. Клейна „Вопросы элементарной и высшей математики". Одесса, „Mathesis".

узнаемъ объ этомъ, если будемъ оставаться на почвѣ математики и логики. Изслѣдованіе этого вопроса лежитъ вообще за предѣлами той задачи, которую ставитъ себѣ математикъ; это дѣло философа.

Итакъ, опасеніе того, что аксіома окажется ложной, не соотвѣтствуетъ въ дѣйствительности никакому затрудненію; однако, послѣднее встрѣчается въ нѣкоторомъ сходномъ обстоятельствѣ. Дѣло въ томъ, что для любой системы основныхъ понятій мы всегда постулируемъ не одну какую-нибудь аксіому, а цѣлую систему аксіомъ. И вотъ возникаетъ вопросъ о томъ, не заключаютъ ли эти различныя аксіомы какого-нибудь противорѣчія. Вѣдь можетъ случиться, что изъ нѣкоторыхъ изъ числа принятыхъ аксіомъ можно логически вывести такое заключеніе, которое будетъ находиться въ отношеніи противорѣчія съ одной изъ остальныхъ аксіомъ. Подобныя группы аксіомъ, конечно, не годятся ни для какого примѣненія; поэтому, прежде чѣмъ принять какую-либо систему аксіомъ, мы всегда должны предварительно изслѣдовать вопросъ о томъ, свободна ли данная система отъ противорѣчій; это имѣетъ мѣсто, разумѣется, и по отношенію къ тѣмъ спеціальнымъ аксіомамъ, которыя мы называемъ опредѣленіями. Такіе вопросы, вообще, очень трудны. Но въ настоящее время мы уже можемъ съ успѣхомъ заниматься ими какъ въ геометріи, такъ и въ ариѳметикѣ, исходя при этомъ изъ такого принципа: „система постулируемыхъ свойствъ нѣкоторой вещи (система понятій, Begriffsystem) свободна отъ противорѣчій, если можно построить такую вещь, которая обладаетъ всѣми этими свойствами“ *).

---

*) Это нуждается въ поясненіи. Такъ какъ здѣсь идетъ рѣчь не о построеніи посредствомъ ручной работы, а о построеніи при помощи логическихъ операцій, то не надо забывать, что эти логическія операціи должны примыкать къ нѣкоторой другой системѣ понятій и аксіомъ, которую мы предполагаемъ свободной отъ противорѣчій. Такъ, напримѣръ, Гильбертъ доказываетъ отсутствіе противорѣчій въ Евклидовой геометріи тѣмъ, что онъ строитъ ее средствами другой системы понятій, а именно ариѳметики (аналитическая геометрія). Но, говоря вообще, сперва надо доказать отсутствіе противорѣчій во второй системѣ понятій и аксіомъ, для чего понадобится новая, третья, система. Чтобы избѣжать такого regressus in infinitum, можно представить себѣ слѣдующій путь. Пусть a_1, a_2, ..., a_n образуютъ систему n аксіомъ, относительно которой доказано отсутствіе противорѣчій. Чтобы показать, что нѣкоторая $(n+1)$-ая аксіома a_{n+1} совмѣстима съ прежними n аксіомами, мы стараемся построить, пользуясь исключительно аксіомами a_1, a_2, ..., a_n, такую систему понятій, которая обладаетъ свойствами, содержащимися въ аксіомахъ a_1, a_2, ..., a_{n+1}. Нетрудно видѣть, что достаточно также умѣть образовать такую систему понятій съ помощью аксіомъ a_1, a_2, ..., a_n, $\overline{a_{n+1}}$, гдѣ $\overline{a_{n+1}}$ обозначаетъ сужденіе, противорѣчащее аксіомѣ a_{n+1} (при этомъ для насъ совершенно безразлично, совмѣстимо ли $\overline{a_{n+1}}$ съ a_1, a_2, ..., a_n или нѣтъ). Такъ поступаютъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда доказываютъ отсутствіе противорѣчій въ неевклидовой геометріи тѣмъ, что реализуютъ ее однимъ изъ извѣстныхъ способовъ внутри евклидовой геометріи; при этомъ аксіомой a_{n+1} служитъ отрицаніе евклидовой аксіомы о параллельныхъ, такъ что $\overline{a_{n+1}}$ означаетъ эту самую аксіому, тогда какъ a_1, a_2, ..., a_n означаютъ прочія геометрическія аксіомы. Точно такъ же отсутствіе противорѣчій въ си-

Не такъ счастливы мы до сихъ поръ еще въ ученіи о многообразіяхъ. Здѣсь мы вообще не имѣемъ ни одной полной системы понятій и аксіомъ, — хотя въ этомъ направленіи кое-что уже сдѣлано, — не говоря уже о томъ, что не доказано отсутствіе противорѣчій. Правда, доказано, что нѣкоторыя понятія, съ которыми многіе склонны оперировать, полны противорѣчій и, слѣдовательно, должны быть изгнаны изъ математическихъ изслѣдованій, какъ, напримѣръ, понятіе „комплексъ всѣхъ комплексовъ“ (Menge aller Mengen). Но кто гарантируетъ насъ отъ того, что извѣстныя другія понятія, съ которыми мы оперируемъ безъ всякаго стѣсненія, или тѣ предположенія, тѣ аксіомы, которыя мы допускаемъ, не содержатъ, въ свою очередь, внутреннихъ противорѣчій? Рѣшить этотъ вопросъ относительно ученія о комплексахъ теперь еще мы не въ состояніи. Этимъ объясняется то, что мнѣнія относительно многихъ вопросовъ столь сильно расходятся. Наиболѣе рѣзко обнаруживаются противорѣчія по вопросу о возможности такъ называемаго „совершеннаго расположенія континуума“. Въ то время, какъ одна группа математиковъ, занятыхъ этими вопросами, считаетъ имѣющіяся доказательства абсолютно безупречными и уже выводитъ изъ этой возможности расположенія самыя смѣлыя заключенія, другіе — считаютъ все это невѣрнымъ. Такимъ образомъ, здѣсь мы стоимъ передъ тѣмъ прискорбнымъ фактомъ, что даже математика, самая точная изъ всѣхъ точныхъ наукъ, не всегда знаетъ, дѣйствительно ли точны ея методы. Но вѣдь, познавая это собственное незнаніе, мы уже подвигаемся впередъ. Итакъ, не будемъ отчаиваться! Во многихъ отдѣльныхъ областяхъ мы достигли, какъ я уже говорилъ, такой точности, что ее можно назвать полной; и если мы сравнимъ это съ тѣмъ, что было 50 или, тѣмъ болѣе, 100 лѣтъ назадъ, то увидимъ, что мы быстро движемся впередъ. И мы можемъ съ радостной надеждой взирать на будущее, которое, несомнѣнно, вскорѣ **вскроетъ** передъ нами многіе нерѣшенные вопросы, если только мы будемъ, не робѣя, продолжать изслѣдовать и искать, помня, что еще прекраснѣе, чѣмъ готовая истина, сами поиски истины!

стемѣ евклидовой геометріи можно было бы доказать, осуществляя ее внутри неевклидовой геометріи (на такъ называемой **предѣльной сферѣ**). Впрочемъ, этотъ путь, опять-таки говоря вообще, возможенъ, лишь начиная съ нѣкотораго n, тогда какъ для меньшихъ n онъ не годится. **Гильбертъ** набросалъ для ариѳметики схему другого, прямого пути („Verhandl. des 3 internat. Mathematiker Kongresses“, Seite 174 ff.).

Рѣшеніе задачи на премію № 4.

А. Фрумкина.

I. Прямая теорема. Если корни кубическаго уравненія

$$x^3 = Ax + 2B$$

суть цѣлыя числа, то

$$A^3 - 27B^2$$

будетъ полнымъ квадратомъ цѣлаго числа.

Доказательство. Данное выраженіе равняется, какъ извѣстно, четверти дискриминанта уравненія:

$$x^3 = Ax + 2B;$$

слѣдовательно,

$$A^3 - 27B^2 = \left[\frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}{2}\right]^2,$$

гдѣ x_1, x_2, x_3 — корни даннаго уравненія.

Такъ какъ, по условію, x_1, x_2 и x_3 суть числа цѣлыя, то $A^3 - 27B^2$ является полнымъ квадратомъ цѣлаго числа, ибо, по крайней мѣрѣ, одна изъ разностей $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$ должна дѣлиться на 2.

II. Обратная теорема. Если три цѣлыхъ числа A, B и C, попарно взаимно простыхъ, удовлетворяютъ равенству

$$A^3 - 27B^2 = C^2,$$

то корни кубическаго уравненія

$$x^3 = Ax + 2B$$

будутъ цѣлыми числами.

Доказательство. Раньше, чѣмъ доказывать теорему II, выведемъ нѣкоторыя предварительныя леммы.

Лемма I. Если $P = x^2 + xy + y^2$, гдѣ x и y суть числа взаимно простыя, то P есть число нечетное.

Дѣйствительно, x и y не могутъ быть одновременно четными; если x, скажемъ, есть число четное, а y — нечетное, то P есть число нечетное; если же x и y суть одновременно нечетныя числа, то P опять-таки есть число нечетное, Лемма II *). Если число P можетъ быть представлено въ видѣ x^2+xy+y^2, гдѣ x и y суть два взаимно простыхъ числа, то и каждый простой дѣлитель p числа P можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$p = x_m^2 + x_m y_m + y_m^2,$$

гдѣ x_m и y_m суть цѣлыя взаимно простыя числа.

Раздѣлимъ x и y на p, обозначимъ частныя черезъ a и b, а остатки — черезъ x_1 и y_1; x_1 и y_1 могутъ быть и отрицательными числами; но во всякомъ случаѣ выберемъ a и b такъ, чтобы остатки x_1 и y_1 были по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ $\frac{p}{2}$, что всегда возможно, такъ какъ p есть нечетное число (лемма I).

Такимъ образомъ,

$$x = pa + x_1,\quad |x_1| < \tfrac{1}{2}p;\quad y = pb + y_1,\quad |y_1| < \tfrac{1}{2}p;$$
$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 \leqslant |x_1|^2 + |x_1|\,|y_1| + |y_1|^2 < \tfrac{3}{4}p^2. \tag{1}$$

Съ другой стороны,

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = (x-pa)^2 + (x-pa)(y-pb) + (y-pb)^2 = P + pN,$$

гдѣ N есть цѣлое число.

Число P, по условію, дѣлится на p; слѣдовательно, и $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2$ дѣлится на p, и мы можемъ положить

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = n_1 p; \tag{2}$$

сопоставляя соотношенія (1) и (2), получимъ:

$$n_1 p < \tfrac{3}{4}p^2,$$

откуда

$$n_1 < \tfrac{3}{4}p. \tag{3}$$

Дѣлимъ теперь числа x_1 и y_1 на n_1. Подобно предыдущему полагаемъ:

$$x_1 = n_1 a_1 + \alpha,\quad |\alpha| < \tfrac{1}{2}n_1;\quad y_1 = n_1 b_1 + \beta,\quad |\beta| < \tfrac{1}{2}n_1; \tag{4}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 < \tfrac{3}{4}n_1^2. \tag{5}$$

Если остатки α и β одновременно равны нулю, то числа x_1 и y_1 дѣлятся на n_1; но тогда, въ силу равенства (2), $n_1 p$ дѣлится на n_1^2, т. е. p дѣ-

---

*) Методъ доказательства этой леммы въ общихъ чертахъ совпадаетъ съ методомъ доказательства извѣстной теоремы: „если число правильно разлагается на сумму двухъ квадратовъ, то и всякій его простой дѣлитель разлагается на сумму двухъ квадратовъ“.

лится на n_1; но, по условію, p есть число простое и, въ виду неравенства (3), $n_1 < p$; поэтому $n_1 = 1$ и $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = p$, чѣмъ лемма и доказана.

Предположимъ теперь, что α и β не равны одновременно нулю. Тогда, повторяя относительно α и β тѣ же разсужденія, что и относительно x_1 и y_1, находимъ, что $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ дѣлится на n_1, въ силу чего можно положить:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = n_1 n_2. \tag{6}$$

При этомъ, въ виду неравенствъ (5) и (3):

$$n_1 n_2 < \tfrac{3}{4} n_1^2;\ n_2 < \tfrac{3}{4} n_1 \text{*)} < \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} p = \tfrac{9}{16} p. \tag{7}$$

Разсмотримъ теперь выраженія:

$$\alpha x_1 + (\alpha + \beta) y_1 \quad \text{и} \quad (\alpha + \beta) x_1 + \beta y_1.$$

Подставляя сюда вмѣсто чиселъ x_1 и y_1 ихъ значенія изъ равенствъ (4), приводимъ эти выраженія къ виду $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + n_1 N$, гдѣ N есть цѣлое число. Поэтому, въ виду равенства (6), можно положить:

$$\alpha x_1 + (\alpha + \beta) y_1 = n_1 x_2; \quad -(\alpha + \beta) x_1 - \beta y_1 = n_1 y_2.$$

Далѣе, въ силу равенствъ (2) и (6):

$$(n_1 x_2)^2 + (n_1 x_2)(n_1 y_2) + (n_1 y_2)^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2) =$$

$$= n_1 n_2 \,.\, n_1 p = n_1^2 n_2 p,$$

т. е.

$$x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2 = n_2 p, \tag{8}$$

гдѣ $n_2 < \frac{9}{16} p$ [см. (7)].

Мы пришли, такимъ образомъ, къ формулѣ, аналогичной формулѣ (2); но при этомъ $n_2 < n_1$; если n_2 все еще больше единицы, то мы повторимъ тотъ процессъ, посредствомъ котораго мы пришли отъ чиселъ x_1, y_1 и n_1 къ числамъ x_2, y_2 и n_2, и такъ будемъ поступать до тѣхъ поръ, пока мы не придемъ въ нѣкоторому n_m, равному единицѣ; но тогда мы будемъ имѣть равенство

$$x_m^2 + x_m y_m + y_m^2 = p,$$

а это и требовалось доказать.

Лемма III. Если число P можетъ быть представлено въ видѣ $X^2 + XY + Y^2$, гдѣ X и Y суть числа взаимно простыя, то всякій дѣлитель r числа P можетъ быть представленъ въ видѣ $x_m^2 + x_m y_m + y_m^2$, гдѣ x_m и y_m суть числа взаимно простыя; кромѣ того, всегда можно найти два взаимно про-

*) При вещественныхъ значеніяхъ x_1 и y_1 число n_1, какъ легко доказать, имѣетъ положительное значеніе.

стыхъ числа x_n и y_n такого рода, что для нихъ выполняются равенства:

$$x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 = \frac{P}{r}$$

и

$$X = [x_m x_n + (x_m + y_m) y_n], \quad Y = -[(x_m + y_m) x_n + y_m y_n].$$

Пусть p будетъ какой-нибудь простой дѣлитель числа P. Тогда, согласно леммѣ II, $p = x^2 + xy + y^2$. Очевидно, что $X^2 + XY + Y^2$ дѣлится на $x^2 + xy + y^2$. Поэтому и

$$(Xx - Yy)(Xy - Yx) = X^2 xy - XY(x^2 + y^2) + Y^2 xy =$$

$$= (X^2 + XY + Y^2) xy - XY(x^2 + xy + y^2)$$

дѣлится на $x^2 + xy + y^2 = p$. Но p есть число простое; слѣдовательно, одно изъ чиселъ $Xx - Yy$ и $Xy - Yx$ дѣлится на p. Допустимъ сперва, что на p дѣлится $Xx - Yy$. Тогда и число

$$-XY(2xy + x^2) + Y^2(y^2 - x^2) = (Xx - Yy)^2 - (X^2 + XY + Y^2) x^2$$

дѣлится на p. Но X и Y суть числа взаимно простыя и $X^2 + XY + Y^2$ дѣлится на p; поэтому ни X ни Y не дѣлятся на p и, слѣдовательно, $-X(2xy + x^2) + Y(y^2 - x^2)$ дѣлится на p. Поэтому и

$$X(2xy + x^2) + Y(xy + 2x^2) = X(2xy + x^2) - Y(y^2 - x^2) + Y(x^2 + xy + y^2)$$

также дѣлится на p. Но p и x суть числа взаимно простыя; слѣдовательно,

$$X(2y + x) + Y(y + 2x)$$

дѣлится на p, а потому и

$$X(2y + 2x) + Y(2x) = X(2y + x) + Y(y + 2x) + (Xx - Yy)$$

дѣлится на p. Аналогично доказывается, что и $X(2y) + Y(2y + 2x)$ дѣлится на p. Но p есть число нечетное (лемма I); слѣдовательно, можно положить

$$X(y + x) + Yx = py_1; \quad -Xy - Y(y + x) = px_1. \tag{9}$$

Если бы на p дѣлилось не число $Xx - Yy$, какъ мы вначалѣ предположили, а число $Xy - Yx$, то, примѣняя тѣ же разсужденія, мы получили бы, что числа $Xx + Y(x + y)$ и $X(x + y) + Yy$ дѣлятся на p. Эта пара выраженій получается изъ первой путемъ замѣны чиселъ x и y другъ другомъ; поэтому мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ одного случая, — скажемъ, перваго.

Изъ формулъ (9) мы получаемъ:

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = \frac{(X^2 + XY + Y^2)(x^2 + xy + y^2)}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{P}{p} \tag{10}$$

и, кромѣ того,

$$X = xx_1 + (x + y) y_1 \quad \text{и} \quad Y = -(x + y) x_1 - yy_1, \tag{11}$$

гдѣ x_1 и y_1 суть числа взаимно простыя, такъ какъ X и Y суть числа взаимно простыя.

Равенствами (10) и (11) лемма III доказана для r простого. Остается ее распространить на всякое r. Для первой части леммы (всякій дѣлитель числа P имѣетъ видъ: $x_m^2 + x_m y_m + y_m^2$, гдѣ x_m и y_m — числа взаимно простыя) это сдѣлать нетрудно. Дѣйствительно, примѣняя вышеуказанное доказательство къ числамъ x_1, y_1, $\frac{P}{p}$ и p_1, гдѣ p_1 есть нѣкоторый простой множитель числа P, не входящій въ r, мы получимъ два взаимно простыхъ числа x_2 и y_2, удовлетворяющихъ равенству:

$$x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2 = \frac{P}{pp_1}.$$

Примѣняя этотъ процессъ надлежащее число разъ, мы отберемъ всѣ множители, не входящіе въ r, и придемъ къ двумъ взаимно простымъ числамъ x_m и y_m, удовлетворяющимъ равенству:

$$x_m^2 + x_m y_m + y_m^2 = r,$$

а это и требовалось доказать.

Докажемъ, что и вторую часть леммы можно распространить на какое угодно r. Для этого вновь обратимся къ доказаннымъ выше равенствамъ:

$$X = xx_1 + (x+y)y_1; \quad Y = -(x+y)x_1 - yy_1;$$

$$x^2 + xy + y^2 = p; \quad x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = \frac{P}{p}.$$

Кромѣ того, пусть p_1 также будетъ простымъ дѣлителемъ числа P; тогда, согласно леммѣ II, $p_1 = x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2$, гдѣ x_2 и y_2 суть числа взаимно простыя. Съ другой стороны, такъ какъ p_1 есть простой дѣлитель числа $\frac{P}{p}$, то, какъ выше было доказано, можно найти два такихъ числа x_3 и y_3, которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x_3^2 + x_3 y_3 + y_3^2 = \frac{P}{pp_1},$$

при чемъ

$$x_1 = x_2 x_3 + (x_2 + y_2) y_3; \quad y_1 = -(x_2 + y_2) x_3 - y_2 y_3.$$

Слѣдовательно, согласно формулѣ (11):

$$\begin{aligned} X &= x[x_2 x_3 + (x_2 + y_2) y_3] + (x+y)[-(x_2 + y_2) x_3 - y_2 y_3] \\ &= x_3[-x_2 y - y_2(x+y)] + y_3[-x_2 y - y_2(x+y) + x_2(x+y) + y_2 x] \\ &= x_3 x_4 + y_3(x_4 + y_4), \end{aligned}$$

гдѣ $x_4 = -x_2 y - y_2(x+y)$, $y_4 = x_2(x+y) + y_2 x$.

Аналогично доказывается равенство:

$$Y = -(x_4 + y_4)\,x_3 - y_3 y_4;$$

кромѣ того,

$$x_4^2 + x_4 y_4 + y_4^2 = (x^2 + xy + y^2)(x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2) = pp_1.$$

Такимъ образомъ,

$$X = x_3\,x_4 + y_3(x_4 + y_4); \quad Y = -(x_4 + y_4)\,x_3 - y_3 y_4;$$

$$x_3^2 + x_3 y_3 + y_3^2 = \frac{P}{pp_1}; \quad x_4^2 + x_4 y_4 + y_4^2 = pp_1,$$

гдѣ x_4 и y_4, x_3 и y_3 суть попарно взаимно простыя числа.

Итакъ, лемма III доказана во всемъ ея объемѣ.

Замѣчанiе. Какъ мы видимъ изъ доказательства, числа x_m и y_m вполнѣ опредѣляются простыми множителями, на которые разлагается дѣлитель r, и зависятъ, такимъ образомъ, только отъ r, въ то время какъ числа x_n и y_n зависятъ и отъ P.

Перейдемъ теперь къ доказательству обратной теоремы.

Дано, что

$$A^3 = C^2 + 27B^2 = (C - 3B)^2 + (C - 3B)(6B) + (6B)^2,$$

гдѣ A, C и B суть числа попарно взаимно простыя. Легко видѣть, что $(C - 3B)$ и $(6B)$ суть числа взаимно простыя. Дѣйствительно, C не дѣлится на 3, такъ какъ тогда на 3 дѣлилось бы и A. Значитъ, общiй наибольшiй дѣлитель чиселъ $(C - 3B)$ и $(6B)$ не больше 2. Допустимъ, что онъ равенъ 2. Но тогда изъ равенства:

$$\frac{A^3}{4} = \left(\frac{C - 3B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C - 3B}{2}\right)(3B) + (3B)^2,$$

гдѣ $\frac{C - 3B}{2}$ и $3B$ суть уже числа взаимно простыя, будетъ слѣдовать, что $\frac{A^3}{4}$ не можетъ дѣлиться на 2 (лемма I), т. е. A^3 дѣлится на 4, но не на 8, что невозможно. Слѣдовательно, $(C - 3B)$ и $(6B)$ суть числа взаимно простыя. Обозначимъ $(C - 3B)$ черезъ X, а $(6B)$ черезъ Y или наоборотъ. Тогда окажется, что

$$A^3 = X^2 + XY + Y^2, \tag{12}$$

т. е. что A^3 удовлетворяетъ условiю леммы III; слѣдовательно, существуютъ два взаимно простыхъ числа x_1 и y_1, удовлетворяющихъ равенству:

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = A.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, согласно той же леммѣ III:

$$X = [x_1 R + (x_1 + y_1) S]; \quad Y = -[(x_1 + y_1) R + y_1 S], \tag{13}$$

гдѣ $R^2+RS+S^2=\dfrac{A^3}{A}=A^2$, при чемъ R и S суть числа взаимно простыя. Но число A^2, въ свою очередь, удовлетворяетъ условію леммы III; слѣдовательно, можно найти взаимно простыя числа x и y, удовлетворяющія равенству

$$x^2+xy+y^2=A,$$

при чемъ

$$R=[xx_2+(x+y)y_2],\quad S=-[(x+y)x_2+yy_2],$$

гдѣ $x_2^2+x_2y_2+y_2^2=\dfrac{A^2}{A}=A$ и x_2, y_2 суть числа взаимно простыя. Но числа x_m и y_m зависятъ только отъ дѣлителя r (см. Замѣчаніе къ леммѣ III), а такъ какъ при полученіи чиселъ x_1, y_1 и x, y мы имѣемъ дѣло съ однимъ и тѣмъ же дѣлителемъ $r=A$, то

$$x_1=x,\quad y_1=y,$$

такъ что

$$R=[x_1x_2+(x_1+y_1)y_2],\quad S=-[(x_1+y_1)x_2+y_1y_2]. \tag{14}$$

Предположимъ сначала, что $x_1 \mp x_2$ и $y_1 \mp y_2$. Обозначимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ x_1-x_2 и y_2-y_1 черезъ σ. Тогда мы получимъ равенства:

$$x_1=x_2+\sigma\alpha,\quad y_2=y_1+\sigma\beta, \tag{14a}$$

гдѣ α и β суть числа взаимно простыя. Подставляя эти выраженія для x_1 и y_2 въ равенство $x_1^2+x_1y_1+y_1^2=x_2^2+x_2y_2+y_2^2$, получимъ:

$$(x_2+\sigma\alpha)^2+(x_2+\sigma\alpha)y_1+y_1^2=x_2^2+x_2(y_1+\sigma\beta)+(y_1+\sigma\beta)^2,$$

или

$$2x_2\alpha+\sigma\alpha^2+\alpha y_1=x_2\beta+2y_1\beta+\sigma\beta^2.$$

Правая часть этого равенства дѣлится на β а лѣвая—на α; такъ какъ α и β суть числа взаимно простыя, то обѣ части дѣлятся на $\alpha\beta$. Поэтому можно положить:

$$2x_2\alpha+\sigma\alpha^2+\alpha y_1=x_2\beta+2y_1\beta+\sigma\beta^2=\alpha\beta\gamma;$$

отсюда

$$2x_2+y_1=\beta\gamma-\sigma\alpha;\quad 2y_1+x_2=\alpha\gamma-\sigma\beta$$

и

$$3x_2=(2\beta-\alpha)\gamma-(2\alpha-\beta)\sigma;\quad 3y_1=(2\alpha-\beta)\gamma+(\alpha-2\beta)\sigma.$$

На основаніи равенствъ (14a) мы послѣдовательно получаемъ:

$$3x_2=-(\alpha-2\beta)\gamma-(2\alpha-\beta)\sigma,\quad 3y_2=(2\alpha-\beta)\gamma+(\beta+\alpha)\sigma, \tag{15}$$

$$9x_2^2+9x_2y_2+9y_2^2=(3\alpha^2-3\alpha\beta+3\beta^2)(\gamma^2+\gamma\sigma+\sigma^2);$$

$$A=x_2^2+x_2y_2+y_2^2=\frac{(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\gamma^2+\gamma\sigma+\sigma^2)}{3}. \tag{16}$$

Подставивъ теперь въ первую изъ формулъ (14) выраженія для x_1, y_1 изъ равенствъ (14a) и принимая во вниманіе первое изъ равенствъ (16), получимъ:

$$R = (x_2 + \sigma\alpha)\, x_2 + (x_2 + \sigma\alpha + y_2 - \sigma\beta)\, y_2 = A + \sigma\,[\alpha x_2 + (\alpha - \beta) y_2].$$

Подставляя въ послѣднее выраженіе вмѣсто чиселъ x_2 и y_2 ихъ значенія изъ равенствъ (15), а вмѣсто A — его значеніе изъ (16), найдемъ:

$$R = \frac{(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\gamma^2 + 2\gamma\sigma)}{3}.$$

Такимъ образомъ, $3R$ дѣлится на $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$; въ силу соотношенія (16), $3A$ также дѣлится на $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$; слѣдовательно, и $3S$ дѣлится на $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$; но R и S суть числа взаимно простыя; поэтому

$$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 1 \quad \text{или} \quad \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 3.$$

Въ первомъ случаѣ $\alpha = \dfrac{\beta \pm \sqrt{4 - 3\beta^2}}{2}$, а во второмъ случаѣ $\alpha = \dfrac{\beta \pm \sqrt{12 - 3\beta^2}}{2}$. Эти уравненія имѣютъ слѣдующія цѣлыя рѣшенія:

$$\alpha = 1, \ -1, \ 1, \ 0, \ -1, \quad 0, \ 1, \ 2, \ -1, \quad 1, \ -2, \ -1,$$

$$\beta = 1, \ -1, \ 0, \ 1, \quad 0, \ -1, \ 2, \ 1, \quad 1, \ -1, \ -1, \ -2,$$

гдѣ каждая пара чиселъ, стоящихъ одно подъ другимъ, даетъ пару цѣлыхъ рѣшеній.

Случаи $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ мы исключили, такъ какъ предположили, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Изъ остальныхъ паръ корней достаточно разсмотрѣть пары $\alpha = 1$, $\beta = 1$; $\alpha = 2$, $\beta = 1$; $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $\alpha = -1$, $\beta = 2$, такъ какъ остальныя пары приводятъ, какъ легко убѣдиться, къ тѣмъ же выраженіямъ для R и S. На основаніи равенства

$$(x^2 + \sigma\alpha)^2 + (x_2 + \sigma\alpha)(y_2 - \sigma\beta) + (y_2 - \sigma\beta)^2 = x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2$$

и соотношеній (14a) мы имѣемъ:

1. если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, то $\sigma = y_2 - x_2$ и $x_1 = y_2$, $y_1 = x_2$. Подставляя это въ формулы (14), мы получаемъ:

$$R = x_1^2 + 2x_1 y_1, \quad S = -2x_1 y_1 - y_1^2;$$

2. если $\alpha = 2$, $\beta = 1$, то $\sigma = -x_2$ и $x_1 = -x_2$, $y_2 = y_1 + x_1$, откуда

$$R = 2x_1 y_1 + y_1^2, \quad S = x_1^2 - y_1^2;$$

3. если $\alpha = 1$, $\beta = -1$, то $\sigma = -x_2 - y_2$ и $x_1 = -y_2$, $y_1 = -x_2$, откуда

$$R = -x_1^2 - 2x_1 y_1, \quad S = y_1^2 + 2x_1 y_1;$$

4. если $\alpha = 1$, $\beta = 2$, то $\sigma = y_2$ и $x_2 = x_1 + y_1$, $y_1 = -y_2$, откуда

$$R = x_1^2 - y_1^2, \quad S = -2x_1 y_1 - x_1^2.$$

Остается еще разсмотрѣть случай, когда одно изъ чиселъ $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ равно нулю. Пусть, напримѣръ, $x_1 = x_2$. Въ такомъ случаѣ изъ равенства $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2$ заключаемъ, что $y_1 = y_2$ или $-(y_1 + x_1) = y_2$. Первый случай невозможенъ, ибо въ этомъ случаѣ R и S были бы равны по абсолютной величинѣ.

5. Во второмъ случаѣ получаемъ:

$$R = -2x_1 y_1 - y_1^2, \quad S = y_1^2 - x_1^2.$$

6. Наконецъ, если $y_1 = y_2$, то $y_1 = -x_1 - x_2$, или $-(x_1 + y_1) = x_2$, такъ что

$$R = y_1^2 - x_1^2, \quad S = 2x_1 y_1 + x_1^2.$$

Такимъ образомъ, всѣ случаи исчерпаны. Подставляя каждое изъ найденныхъ выраженій для R и S въ формулы (13), получимъ двѣ системы значеній для X и Y:

I-ая система:

$$X = x_1^3 - 3x_1 y_1^2 - y_1^3, \quad Y = -x_1^3 - 3x_1^2 y_1 + y_1^3.$$

Но въ этомъ случаѣ X и Y либо одновременно дѣлятся, либо одновременно не дѣлятся на 3. Но такъ какъ одно изъ этихъ чиселъ равняется $6B$, то то и другое противорѣчитъ условію; слѣдовательно, этотъ случай исключается.

II-ая система:

$$X = x_1^3 + 3x_1^2 y_1 - y_1^3, \quad Y = -3x_1 y_1^2 - 3x_1^2 y_1;$$

въ этомъ случаѣ Y дѣлится на 3; поэтому изъ двухъ возможныхъ равенствъ $Y = C - 3B$ или $Y = 6B$ въ данномъ случаѣ имѣетъ мѣсто второе, такъ что $B = -\frac{1}{2} x_1 y_1 (x_1 + y_1)$, и уравненіе $x^3 = Ax + 2B$ принимаетъ видъ:

$$x^3 = (x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2)\, x - x_1 y_1 (x_1 + y_1),$$

т. е. имѣетъ корни $x = x_1$, $x = y_1$ и $x = -(x_1 + y_1)$. Изъ остальныхъ случаевъ случай 3 приводитъ къ I-ой системѣ; случаи 4, 5 и 6 приводятъ ко II-ой системѣ. Обратная теорема доказана, такимъ образомъ, во всемъ ея объемѣ.

Первый Всероссійскій Съѣздъ преподавателей математики*).

Подготовительныя работы.

Какъ только было получено разрѣшеніе созвать Съѣздъ, организаторы его приступили къ подготовительнымъ работамъ.

2-го минувшаго сентября въ помѣщеніи Педагогическаго Музея военно-учебныхъ заведеній состоялось первое — по утвержденіи Положенія о Съѣздѣ — организаціонное совѣщаніе иниціаторовъ Съѣзда и приглашенныхъ ими лицъ. Собрались, по преимуществу, петербургскіе педагоги, москвичей же не было никого, а изъ провинціальныхъ явился, кажется, одинъ лишь пишущій эти строки. Засѣданіе открылъ директоръ Педагогическаго Музея, ген.-лейт. З. А. Макшеевъ, какъ хозяинъ учрежденія, гостепріимно раскрывшаго свои двери для будущаго Съѣзда и его Организаціоннаго Бюро, и какъ одинъ изъ дѣятельнѣйшихъ иниціаторовъ Съѣзда. Собравшіеся прежде всего занялись конституированіемъ Бюро и Организаціоннаго Комитета Съѣзда. Въ составъ послѣдняго вошли прежде всего лица, подписавшія ходатайство о разрѣшеніи Съѣзда, а именно: членъ Государственнаго Совѣта засл. проф. А. В. Васильевъ (въ засѣданіи не присутствовавшій), ген.-лейт. З. А. Макшеевъ, засл. проф. К. А. Поссе и проф. С. Е. Савичъ Далѣе постановлено было считать членами Организаціоннаго Комитета всѣхъ лицъ, отозвавшихся на разосланныя приглашенія письменно или явившихся въ засѣданіе 2 сентября лично. Такимъ образомъ, въ составъ Организаціоннаго Комитета вошли военные педагоги гг. ген.-л. М. Г. Попруженко, А. К. Линдебергъ, С. Г. Петровичъ, Д. Э. Теннеръ (помощникъ директора Педагогическаго Музея), преподаватели высшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній Петербурга: г-жи В. І. Шиффъ, Т. А. Афанасьева-Эренфестъ, гг. С. И. Шохоръ-Троцкій, В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ, Д. М. Левитусъ, И. Н. Кавунъ, а изъ непетербуржцевъ — проф. Д. М. Синцовъ (Харьковъ) и редакторъ «Вѣстника Опытной Физики» прив.-доц. В. Ф. Каганъ (Одесса).

Кромѣ того, постановлено считать членами Организаціоннаго Комитета, въ случаѣ изъявленія ими согласія, членовъ русской делегаціи Международной Коммиссіи по преподаванію математики академика Н. Я. Сонина, профессора Б. М. Кояловича и К. В. Фохта, отъ которыхъ не было еще получено отвѣта ко дню засѣданія. Постановлено также просить войти въ составъ Организаціоннаго Комитета лицъ, работающихъ надъ организаціей выставки математическихъ моделей и наглядныхъ учебныхъ пособій по математикѣ, устраиваемой Техническимъ Обществомъ отдѣла. Такимъ образомъ, въ составъ Организаціоннаго Комитета, сверхъ присутствовавшихъ въ засѣданіи, вошли А. Р. Кулишеръ, П. С. Эренфестъ, Н. А. Томилинъ и, какъ лица, занимающіяся вопросами преподаванія ручного труда, Э. Ю. Лундберъ и Б. Б. Піотровскій.

Затѣмъ Организаціонный Комитетъ занялся конституированіемъ своего Бюро. Предсѣдателемъ избранъ З. А. Макшеевъ, товарищами предсѣдателя — М. Г. Попруженко, К. А. Поссе и С. Е. Савичъ, казначеемъ —

*) См. „Вѣстникъ", №№ 537 и 538.

Д. Э. Теннеръ, секретарями В. Р. Мрочекъ и Ф. В. Филипповичъ, уже въ теченіе лѣта поработавшіе надъ разсылкою приглашеній и предварительныхъ сообщеній о Съѣздѣ, и Д. М. Левитусъ.

Затѣмъ В. Р. Мрочекомъ было доложено объ имѣющихся уже заявленіяхъ о докладахъ, а также сдѣланы были заявленія нѣкоторыми изъ присутствовавшихъ. Вотъ перечень докладовъ, поступившихъ въ Организаціонный Комитетъ до 2 сентября:

Проф. А. В. Васильевъ — «О цѣломъ числѣ».

Т. А. Афанасьева-Эренфестъ — «Ирраціональныя числа въ средней школѣ».

Д. М. Левитусъ — «Объ алгебраическихъ преобразованіяхъ».

Прив.-доц. В. Ф. Каганъ — «О постановкѣ у насъ дѣла подготовленія преподавателей математики для средней школы».

Д. Э. Теннеръ — «О наглядныхъ и лабораторныхъ пособіяхъ».

Н. А. Томилинъ — «О графикахъ въ математикѣ».

Д. М. Левитусъ — «Роль геодезическихъ упражненій въ курсѣ математики».

А. В. Коржинскій — «Черченіе, рисованіе и ручной трудъ въ связи съ преподаваніемъ математики».

Д. В. Ройтманъ — «О систематическомъ курсѣ геометріи».

Т. А. Афанасьева-Эренфестъ — «Евклидъ и средняя школа».

Ф. В. Филипповичъ — «Постановка началъ анализа въ средней школѣ».

В. Р. Мрочекъ — «Значеніе исторіи математики въ курсѣ средней школы».

Проф. Д. М. Синцовъ сообщилъ, что въ педагогическихъ засѣданіяхъ Харьковскаго Математическаго Общества былъ сдѣланъ рядъ докладовъ, нѣкоторые изъ которыхъ могли бы быть доложены на Съѣздѣ. Таковы доклады:

Н. П. Бѣляевъ — «О приближенныхъ вычисленіяхъ въ курсѣ средней школы».

Г. А. Грузинцевъ — «О функціональности въ тригонометріи».

В. М. Фесенко — «О сліяніи планиметріи со стереометріей».

Его же — «Графическій методъ въ ариѳметикѣ».

Съ своей стороны, проф. Д. М. Синцовъ предложилъ познакомить Съѣздъ съ результатами преподаванія спеціальнаго курса въ реальныхъ училищахъ Харьковскаго Учебнаго Округа, главнымъ образомъ, на основаніи письменныхъ работъ оканчивающихъ. На аналогичный докладъ можно разсчитывать, по словамъ В. Р. Мрочека, и по Кавказскому Учебному Округу, — равно какъ и о лабораторныхъ занятіяхъ по математикѣ въ томъ же округѣ. Было бы, конечно, въ высшей степени желательно, чтобы аналогичные доклады, единичные или коллективные, поступили и изъ другихъ округовъ.

На коллективный докладъ можно разсчитывать по нѣкоторымъ вопросамъ программы отъ преподавателей Рижскаго Учебнаго Округа.

Очень озабочивало Организаціонный Комитетъ отсутствіе свѣдѣній о предположеніяхъ московскихъ преподавателей. Въ виду отсутствія на совѣщаніи представителей было предположено командировать кого-либо изъ членовъ

Организаціоннаго Комитета, чтобы войти въ личныя сношенія съ Московскими педагогическими организаціями и, въ особенности, съ Московскимъ Математическимъ Кружкомъ.

Въ дальнѣйшемъ Организаціонный Комитетъ нашелъ необходимымъ въ цѣляхъ упорядоченія работы Съѣзда принять мѣры какъ по обезпеченію Съѣзда докладами по всѣмъ вопросамъ программы, такъ и по предотвращенію утомленія членовъ съѣзда отъ избытка докладовъ по очень частнымъ вопросамъ, представляющимъ мало интереса.

Дѣленіе на секціи предположено въ принципѣ, но пока еще не разсматривалось. Принята была другая мѣра въ цѣляхъ болѣе равномѣрнаго распредѣленія матеріала. Было предположено распредѣлить между отдѣльными лицами, какъ принадлежащими къ составу Организаціоннаго Комитета, такъ и спеціально намѣченными Организаціоннымъ Комитетомъ, отдѣльные вопросы программы Съѣзда съ тѣмъ, чтобы этими лицами были подготовлены доклады, которые, являясь, съ одной стороны, введеніемъ къ занятіямъ Съѣзда по соотвѣтственнымъ вопросамъ, давали бы въ то же время канву для дебатовъ на Съѣздѣ. Эти доклады, по мысли высказывавшихся по этому поводу на совѣщаніи, должны, такъ сказать, раскрыть скобки по отдѣльнымъ пунктамъ программы Съѣзда и, расчленяя въ извѣстныхъ случаяхъ общіе вопросы на болѣе частные, давать такимъ образомъ темы для новыхъ докладовъ. Но для достиженія послѣдней цѣли было бы, конечно, необходимо, чтобы на страницахъ русскихъ педагогическихъ органовъ — и, въ первую голову, на страницахъ «Вѣстника Опытной Физики» — появились хотя бы краткіе обзоры по отдѣльнымъ вопросамъ программы, намѣчающіе основные мотивы руководящихъ докладовъ. Только тогда, конечно, это предположенное детализированіе программы Съѣзда можетъ повести къ новымъ докладамъ. Конечно, для петербургскихъ педагоговъ этого, можетъ быть, даже не нужно, потому что для нихъ эту службу сослужатъ собранія педагогическихъ организацій (я разумѣю собранія въ Соляномъ Городкѣ), въ которыхъ и пойдетъ, конечно, подготовительная къ Съѣзду работа. Но это нужно для возбужденія интереса къ Съѣзду въ массѣ русскихъ педагоговъ-математиковъ, которымъ, конечно, недостаточно знать, что Съѣздъ будетъ, но важно знать и то, какіе вопросы и какъ будутъ разбираться на Съѣздѣ.

Съ просьбой взять на себя подготовку такихъ докладовъ рѣшено обратиться къ слѣдующимъ лицамъ:

С. И. Шохоръ-Троцкому — по пункту I: «Психологическія основы обученія математикѣ: активность, наглядность, роль интуиціи и логики и т. п.».

В. Ф. Кагану и С. О. Шатуновскому — по пункту 2: «Содержаніе курса школьной математики съ точекъ зрѣнія: а) современныхъ научныхъ тенденцій, б) современныхъ запросовъ жизни, в) современныхъ общепедагогическихъ воззрѣній *)».

---

*) В. Ф. Каганъ и С. О. Шатуновскій не сочли себя компетентными для составленія этихъ докладовъ и ходатайствовали о разрѣшеніи имъ прочесть доклады на научныя темы, стоящія близко къ дѣлу преподаванія. В. Ф. Каганъ предложилъ прочесть докладъ „О преобразованіи многогранниковъ“, а С. О. Шатуновскій — „О величинѣ“.

К. А. Поссе и Д. М. Синцову — по пункту III, а: «Согласованіе программъ математики средней школы съ программами высшихъ школъ».

И. Н. Кавуну — по пункту III, б: «Согласованіе программъ математики средней школы съ программами низшихъ школъ».

По пункту IV: «Вопросы методики школьной математики» — можно ожидать наибольшаго наплыва докладовъ частнаго характера. Здѣсь поэтому роль лица, которому было бы поручено — sit venia verbo — завѣдываніе, совершенно иная; она состоитъ въ томъ, чтобы не столько намѣчать основные вопросы, сколько въ томъ, чтобы систематизировать и фильтровать полученные и заявленные доклады. Въ виду этого рѣшено было организовать по этому пункту спеціальную коммиссію.

М. Г. Попруженко — по пункту V, а: «Учебная литература по математикѣ».

По пункту V, б: «Учебныя пособія по математикѣ (не книги)» — вся работа поручена Выставочной Коммиссіи.

В. В. Бобынину — по пункту VI, а: «Историческіе элементы въ курсѣ математики средней школы».

А. В. Васильеву — по пункту VI, б: «Философскіе элементы въ курсѣ математики средней школы».

Ф. В. Филипповичу, А. В. Коржинскому и Б. Р. Завадскому — по пункту VII: «Рисованіе, лѣпка и ручной трудъ, какъ вспомогательныя средства при обученіи математикѣ».

В. Ф. Кагану — по пункту VIII: «Подготовка учителей математики».

С. И. Шохоръ-Троцкому — по пункту VIII въ части, касающейся военно-учебныхъ заведеній.

Отъ большинства изъ этихъ лицъ уже получено согласіе.

Какъ уже упоминалось, рѣшено организовать при Съѣздѣ выставку учебной математической литературы и наглядныхъ пособій, для организаціи которой избрана Выставочная Коммиссія; въ составъ ея вошли: Д. Э. Теннеръ, И. Н. Кавунъ, А. Р. Кулишеръ, Н. А. Томилинъ, В. Р. Мрочекъ, Ф. В. Филипповичъ, Т. А. Афанасьева-Эренфестъ, П. С. Эренфестъ.

Было признано также желательнымъ, по примѣру Съѣзда по экспериментальной педагогикѣ, пригласить выдающихся иностранныхъ педагоговъ-математиковъ пріѣхать на Съѣздъ и сдѣлать доклады о постановкѣ преподаванія математики въ Западной Европѣ. Однако, вопросъ этотъ еще остался открытымъ.

Осуществленіе этого предположенія связано съ вопросомъ о финансовой сторонѣ Съѣзда. Дѣйствительно, незначительный по необходимости членскій взносъ (3 руб.) можетъ дать достаточныя средства лишь при очень большомъ числѣ участниковъ. Является поэтому необходимость въ субсидіи. Какъ мнѣ сообщаютъ, Министерство Народнаго Просвѣщенія обѣщало выхлопотать субсидію въ 1000 руб. Аналогичные шаги предпринимаются передъ Министерствомъ Торговли и Промышленности. Но не менѣе существенную роль въ успѣхѣ Съѣзда со стороны многолюдства должны сыграть всѣ мѣры, облегчающія будущимъ участникамъ ихъ поѣздку. Съ этой стороны существенную роль должно сыграть обѣщаніе Министерства Народнаго Просвѣщенія разослать циркулярное сообщенiе о Съѣздѣ и тѣмъ дать возможность получать командировки на предстоящiй Съѣздъ. Въ цѣляхъ облегченiя пребыванiя въ столицѣ и пользованiя ея театрами, музеями и пр. образована особая Хозяйственная Коммиссiя, которая должна озаботиться какъ исходатайствованiемъ льготъ по проѣзду (на это, впрочемъ, по русскимъ желѣзнодорожнымъ правиламъ, — въ противоположность Италiи и Францiи, — разсчитывать довольно трудно), подысканiемъ помѣщенiй на льготныхъ условiяхъ и облегченiемъ посѣщенiя членами Съѣзда театровъ, музеевъ и пр. Въ этомъ направленiи идетъ теперь работа Организацiоннаго Комитета.

Особенно энергично работаетъ Выставочная Комиссiя, привлекая къ работѣ и учащуюся молодежь въ лицѣ слушательницъ Педагогическихъ курсовъ.

Желательно только, чтобы Организацiонный Комитетъ, поглощенный своею дѣятельностью, не забывалъ оповѣщать о ней отъ времени до времени въ печати. И я думаю, что страницы «Вѣстника Опытной Физики» всегда открыты для такихъ сообщенiй. Желателенъ далѣе, по моему, и научный обмѣнъ мнѣнiй по вопросамъ, касающимся программы Съѣзда, который подготовилъ бы почву для будущаго обмѣна мнѣнiй на самомъ Съѣздѣ.

Въ засѣданiи Организацiоннаго Комитета 12 октября было заслушано предложенiе «Рижскаго Математическаго Общества» о включенiи въ число занятiй Съѣзда также вопроса объ объединенiи дѣятельности различныхъ русскихъ Обществъ и Кружковъ, разрабатывающихъ вопросы преподаванiя математики. Организацiонный Комитетъ постановилъ обратиться во всѣ Общества и Кружки, разрабатывающiе вопросъ преподаванiя математики, съ просьбой доставить на Съѣздъ доклады или, по крайней мѣрѣ, краткiя свѣдѣнiя о своей дѣятельности.

Проф. Д. Синцовъ.

Отъ редакцiи.

Вслѣдъ за сообщенiемъ проф. Д. М. Синцова, помѣщаемымъ выше, мы получили печатное «Извѣщенiе о созывѣ I-го Всероссiйскаго Съѣзда Преподавателей Математики». Все содержанiе этого «Извѣщенiя» вполнѣ исчерпывается замѣткою проф. Д. М. Синцова. Мы считаемъ нужнымъ привести лишь два нижеслѣдующихъ пункта «Извѣщенiя».

Пунктъ IV. Всѣ доклады (или ихъ конспекты) разсматриваются въ засѣданiяхъ Организацiоннаго Комитета, который и рѣшаетъ вопросъ объ ихъ допущенiи на Съѣздъ.

Въ засѣданiи 2 сентября крайнимъ срокомъ представленiя докладовъ назначено 15 ноября.

Изъ пункта VII. Желающiе принять участiе въ выставкѣ благоволятъ заявить объ этомъ Выставочной Коммиссiи (СПБ., Фонтанка, 10) не позже 15 ноября, съ указанiемъ экспонатовъ и количества мѣста, необходимаго для нихъ. Всѣ такiя заявленiя будутъ удовлетворяться въ зависимости отъ наличности свободнаго мѣста. Выставка устраивается для членовъ Съѣзда; мѣсто подъ экспонаты отводится безплатно.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 450 (5 сер.). Въ данномъ треугольникѣ $A_1A_2A_3$ проводятъ медіану A_1A_4, затѣмъ въ треугольникѣ $A_1A_4A_3$ — медіану A_4A_5, затѣмъ въ треугольникѣ $A_1A_4A_5$ — медіану A_5A_6, затѣмъ въ треугольникѣ $A_4A_5A_6$ — медіану A_6A_7 и т. д. Доказать, что точка A_n стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію при безконечномъ возрастаніи n и опредѣлить это положеніе.

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 451 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

С. Адамовичъ (Суворовскій корпусъ)

№ 452 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$\frac{a}{r_a - r} + \frac{b}{r_b - r} + \frac{c}{r_c - r} = \frac{p}{r},$$

гдѣ a, b, c, p, r_a, r_b, r_c, r суть соотвѣтственно стороны, полупериметръ и радіусы круговъ внѣвписанныхъ и вписаннаго.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 453 (5 сер.) Найти наибольшую и наименьшую величину выраженія

$$a \cos x + b \sin x.$$

Р. Витвинскій (Одесса).

№ 454 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\lg_{0,125}(x^2 - 3) - \lg_{0,729}(y^2 - 7) = 0,$$

$$2\lg_{10} x = \lg_{100}(y + 2)^2 + \lg_{\sqrt[3]{0,1}} \sqrt[3]{\frac{1}{y - 2}}.$$

И. Огіевецкій (Одесса).

№ 455 (5 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ и неотрицательномъ n число $2^{6n+1}+3^{2n+2}$ кратно 11.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 361 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)^6+\left(\frac{x-a}{2}\right)^6=a^6.$$

Записавъ данное уравненіе въ видѣ $(x+a)^6+(x-a)^6-64a^6=0$, разлагаемъ члены $(x+a)^6$ и $(x-a)^6$ по формулѣ бинома и дѣлаемъ приведеніе. Тогда уравненіе приметъ по сокращеніи на 2 видъ:

$$x^6+15a^2x^4+15a^4x^2-31a^6=0,$$

или

$$(x^6-a^6)+(15a^2x^4-15a^6)+(15a^4x^2-15a^6)=$$
$$=(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)+15a^2(x^2-a^2)(x^2+a^2)+15a^4(x^2-a^2)=$$
$$=(x^2-a^2)[(x^4+a^2x^2+a^4)+15a^2(x^2+a^2)+15a^4]=$$
$$=(x^2-a^2)(x^4+16a^2x^2+31a^4)=0.$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$x^2-a^2=0,\quad x^4+16a^2x^2+31a^4=0,$$

рѣшая которыя находимъ два дѣйствительныхъ и четыре мнимыхъ корня даннаго уравненія, а именно:

$$x_{1,2}=\pm a,\quad x_{3,4,5,6}=\pm a\sqrt{-8\pm\sqrt{33}}.$$

А. Фрумкинъ (Одесса); *А. Д.* (Лодзь); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *М. Превратухинъ* (Козловъ); *М. Рыбкинъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса).

№ 364 (5 сер.). *Существуетъ ли такой треугольникъ, въ которомъ какъ стороны его, такъ и углы составляютъ ариѳметическую прогрессію.*

Пусть углы B, A, C треугольника образуютъ въ указанномъ порядкѣ ариѳметическую прогрессію; тогда и стороны a, b, c, образующія по условію прогрессію, должны ее образовать въ соотвѣтствующемъ порядкѣ b, a, c, такъ какъ противъ большаго (равнаго) угла должна лежать большая (равная) сторона. По свойству ариѳметической прогрессіи имѣемъ:

$$2A=B+C, \tag{1}$$

откуда $\pi=A+B+C=3A$, т. е.

$$A=\frac{\pi}{3}. \tag{2}$$

Подобнымъ же образомъ имѣемъ $2a=b+c$, откуда $2=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A}$, или $2\sin A=\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, такъ какъ $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$. Итакъ, $2\sin A=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, или $4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$ $=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, откуда $\left(\text{такъ какъ } \cos\frac{A}{2}\neq 0\right)$ $2\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$, т. е. $2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1=\cos\frac{B-C}{2}$. Итакъ, $\cos\frac{B-C}{2}=1$, что возможно лишь при $B=C$, такъ какъ B и C суть углы треугольника. Итакъ, $B=C=\frac{\pi-A}{2}=$ $=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}=A$, т. е. искомый треугольникъ долженъ быть равноугольнымъ, а потому и равностороннимъ; въ такомъ треугольникѣ углы и стороны дѣйствительно образуютъ ариѳметическія прогрессіи, разности которыхъ равны нулю.

А. Фрумкинъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Р. Витвинскій* (Тирасполь).

№ 365 (5 сер.). *Привести къ логариѳмическому виду выраженіе*

$$1+2\cos 2a+2\cos 4a+\cos 6a+\cos 8a+\cos 10a.$$

Представляя данное выраженіе въ видѣ:

$$(1+\cos 8a)+(\cos 2a+\cos 6a)+(\cos 2a+\cos 10a)+2\cos 4a,$$

получимъ съ помощью извѣстныхъ формулъ:

$$1+2\cos 2a+2\cos 4a+\cos 6a+\cos 8a+\cos 10a=$$

$$=2\cos^2 4a+2\cos 4a\cos 2a+2\cos 6a\cos 4a+2\cos 4a$$

$$=2\cos 4a(\cos 4a+\cos 2a+\cos 6a+1)$$

$$=2\cos 4a\,[(1+\cos 6a)+(\cos 2a+\cos 4a)]=2\cos 4a\,(2\cos^2 3a+2\cos 3a\cos a)$$

$$=4\cos 4a\cos 3a(\cos 3a+\cos a)=4\cos 4a\cos 3a\;2\cos 2a\cos a$$

$$=8\cos a\cos 2a\cos 3a\cos 4a.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *А. Лукошинъ* (Астрахань).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не менѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы**: Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

44-ый семестръ.

Прив.-доц. С. О. Шатуновскій. О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. *Н. Извольскій.* О биссектриссахъ треугольника. *Проф. Б. К. Млодзѣевскій.* О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. *К. Ивановъ.* Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. *Н. Васильевъ.* Нѣкоторыя свойства вращающагося твердаго тѣла. *А. Іоллосъ.* Броуновское движеніе. *А. Филипповъ.* Дѣленіе на 9. *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ. *Л. Мандельштамъ и Н. Папаллекси.* Основы безпроволочной телеграфіи. *Е. Томашевичъ.* О биссектриссахъ треугольника. *Проф. Д. Мордухай-Болтовскій.* О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. *М. Планкъ* Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *Г. Е. Бѣкке.* Генезисъ минераловъ. *К. Лебединцевъ.* Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *Прив.-доц. А. А. Дмитровскій.* Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. *Т. Арльтъ.* Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій.

45-ый семестръ.

Проф. Ф. Клейнъ. О преподаваніи геометріи. *Т. Ниттгаммеръ.* Методы и новѣйшіе результаты опредѣленія силы тяжести. *Н. Васильевъ.* Объ устойчивости велосипеда въ движеніи. *В. Даватцъ.* О построеніи кривой $x^y=y^x$. *А. Филлиповъ.* Умноженіе натуральныхъ чиселъ. *Э. Маундеръ.* „Каналы" Марса. *Проф. Б. Донатъ.* Волчокъ и его будущее въ техникѣ. *І. И. Чистяковъ.* Рѣшеніе одного трансцендентнаго уравненія. *Проф. Э. Конъ.* Пространство и время съ точки зрѣнія физики. *А. Іоллосъ.* Наблюденіе іоновъ въ микроскопѣ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда. *К. Гагге.* Построеніе правильнаго семнадцатиугольника *Прив.-доц. В. В. Бобынинъ.* Исторія первоначальнаго развитія счисленія дробей. *С. Гоу.* Задачи точной астрономіи. *Проф. І. Ценнекъ.* Утилизація атмосфернаго азота при помощи вольтовой дуги. *І. Левинъ.* Нѣкоторыя соотношенія въ прямоугольномъ треугольникѣ. *Ф. Генкель.* Эволюція звѣздъ и теорія захвата. *А. Виттингъ.* Между дѣломъ и шуткой въ области чиселъ.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: **Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики"**.