

№ 546.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

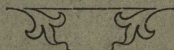
ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Привать-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLVI-го семестра № 6-й.



ОДЕССА.

Типографія Акп. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1911.

<http://vofem.ru>

1) А. П. Охитовичъ. Геометрія круга (циклометрія).

Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Стран. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

2) А. П. Охитовичъ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій.

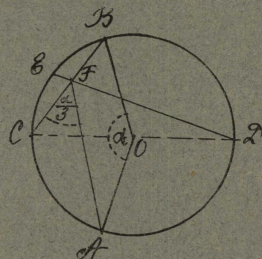
Часть 1-ая. Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Стран. II+XI+302+18=333. Цѣна 2 р 50 коп.

3) А. П. Охитовичъ. Доказательство великой теоремы Фермата. 51 стран. Цѣна 50 коп.

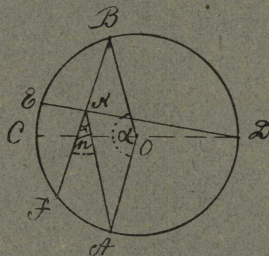
4) Alexander Ochitowitsch. Beweis des grossen Fermatschen Satzes. 50 Seiten. Preis 1 Mark.

ОБРАЩАТЬСЯ ВЪ КНИЖНЫЕ МАГАЗИНЫ:

„Новаго Времени“ (СПб., Москва, Харьковъ, Саратовъ), н.н. Карбасникова (СПб., Москва, Вольфа (СПб.), Т-ства „Общественная Польза“ (СПб.), Т-ства Сытина (Москва), Бельке (Кіевъ), Оглоблина (Кіевъ), Башмаковыхъ (Казань), „Современникъ“ (Саратовъ), „Волжанинъ“ (Самара), Филимонова (Москва), Дре-деръ (Харьковъ) и друг.



$$\sphericalangle AC = \sphericalangle CB; \sphericalangle AD = \sphericalangle DB; \sphericalangle CE = \sphericalangle EB.$$



$$\sphericalangle AC = \sphericalangle CB; \sphericalangle AD = \sphericalangle DB; \sphericalangle CE = \sphericalangle \frac{CB}{n-1}; \sphericalangle EF = \sphericalangle EB.$$

Вышелъ № 9 (августъ) журнала

„СОВРЕМЕННЫЙ МІРЪ“

Содержаніе: Стихотворенія: Г. Галиной, З. Тулубъ, А. Лукьянова; „Братья Аримфейскіе“ (разск.), М. Арцыбашева; „Простая жизнь“ (разск.), Н. Осиповича; „Бумажное царство“ (ром.), А. Федорова; „Одержимый“ (ром.), К. Лемонье; „Н. Г. Чернышевскій въ редакціи „Современника“, Е. Ляцкого; „Изъ исторіи отечественной морали“, П. Столпянскаго; „Очерки новой аграрной политики“, Г. Алексѣева; „Писатель безъ выдумки“ (А. В. Амфитеатровъ), В. Львова-Рогачевскаго; „Юхани Ахо“, А. Тиандера; „Иліодоръ“, І. Ларскаго; „Волчій аппетитъ“, Г. Ц.; „Политическое обозрѣніе“, Ник. Іорданскаго; „Передъ выборами“, В. Майскаго; „Марокко и Триполи“, К. Вейдемюллера; Критика и Библиографія Новыя книги. Объявленія.

Продолжается подписка на 1911 годъ.

Условія подписки (съ дост. и пер.): годъ—9 р.; полгода—4 р. 50 к.; на 4 мѣс.—3 р. Заграницу: 12 р. годъ и 6 р. полгода. Безъ доставки въ СПб.: 8 р. годъ и 4 р. полгода.

Спб., Надеждинская, 33.

Издательница М. К. Іорданская.

Редакторъ Вл. П. Кранихфельдъ.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 546.

Содержаніе: Георгъ Дарвинъ и его творенія. *Ф. В. Генкеля.* — Точка пересѣченія высотъ треугольника. *К. Крюзе.* — Варіанты доказательства теоремы Пифагора. *Н. Влодавера.* — Научная хроника: Строеніе фосфоресцирующихъ тѣлъ. — Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 22 апрѣля 1911 г. — Рѣшенія задачъ №№ 344, 349, 350, 351, 352 и 354 (5 сер.). — Объявленія.

При этомъ номерѣ разсылается объявленіе о книгахъ г. Извольскаго „Геометрія на плоскости“, „Геометрія въ пространствѣ“ и др.

Георгъ Дарвинъ и его творенія.

Ф. В. Генкеля.

Сэръ Георгъ Дарвинъ, сынъ великаго натуралиста Чарльза Дарвина и профессоръ астрономіи въ Кембриджскомъ университетѣ, извѣстенъ всему міру своей знаменитой приливной теоріей эволюціи и своими первоклассными трудами о приливахъ и отливахъ, о періодическихъ орбитахъ и о проблемахъ, относящихся къ формѣ равновѣсія и устойчивости жидкостей. Всѣ его работы занимаютъ безспорно первое мѣсто среди новѣйшихъ изслѣдованій по теоретической астрономіи и проливаютъ обильный свѣтъ на множество пунктовъ космогонической теоріи.

Мемуары, представленные имъ Лондонскому Королевскому Обществу или опубликованные въ различныхъ научныхъ журналахъ за послѣдніе 30 лѣтъ, въ настоящее время издаются Кембриджской типографіей въ видѣ полнаго собранія его сочиненій. Сейчасъ вышли въ свѣтъ первые три тома этого собранія. Авторъ счелъ болѣе удобнымъ размѣстить эти статьи не въ строго хронологическомъ порядкѣ, но по содержанію. Такимъ образомъ, въ первомъ томѣ помѣщены мемуары, содержащіе изысканія о приливахъ и отливахъ, и опыты по измѣренію пертурбацій

силы тяжести, производимых луной; второй томъ посвященъ тренію, производимому приливами и отливами, и слѣдствіямъ, вытекающимъ отсюда для космогонической теоріи; третій томъ содержитъ мемуары о видахъ равновѣсія, которые могутъ принимать жидкости, имѣющія вращательное движеніе, а также теорію формы земли и планетъ. Четвертый томъ, пока еще не вышедшій, будетъ посвященъ періодическимъ орбитамъ и различнымъ вопросамъ, не стоящимъ въ прямой связи съ предыдущими.

Какъ мы сказали, первая часть тома I-го посвящена приливамъ и отливамъ. Онъ содержитъ мемуары, появившіеся въ „Трудахъ“ Королевскаго Общества, Британской Ассоціаціи для содѣйствія развитію наукъ и т. д. Авторъ прежде всего объясняетъ, чѣмъ онъ обязанъ лорду Кельвину: знаменитый физикъ первый сталъ проводить ту мысль, что къ явленіямъ приливовъ и отливовъ слѣдуетъ примѣнять анализъ, аналогичный тому, которымъ пользуются въ теоріи движенія луны и планетъ, и онъ же первый выступилъ въ Британской Ассоціаціи съ докладами по гармоническому анализу наблюденій. Тому же лорду Кельвину и его брату, профессору Джемсу Томсону, наука обязана изобрѣтеніемъ гармоническаго анализатора*); назначеніе этого инструмента — анализировать приливныя волны, но до сихъ поръ онъ еще не употреблялся на практикѣ и въ настоящее время находится въ Лондонскомъ научномъ музеѣ, въ South Kensington.

Всѣмъ извѣстно, что явленіе приливовъ и отливовъ, состоящее въ болѣе или менѣе регулярномъ поднятіи водъ океана послѣ ихъ пониженія, обуславливается притяженіемъ луны и солнца, дѣйствующимъ на жидкія части земной поверхности. Относительно этого нужно замѣтить прежде всего, что это дѣйствіе не обуславливается полнымъ притяженіемъ небесныхъ тѣлъ, но лишь разностью между притяженіемъ, испытываемымъ водой, и притяженіемъ твердой массы земли.

Сила поднятія въ приливахъ и отливахъ составляетъ лишь малую долю полнаго притяженія; найдено, что на землѣ полное притяженіе, исходящее отъ луны, дѣйствуетъ въ два слишкомъ раза сильнѣе, чѣмъ притяженіе солнца, хотя послѣднее гораздо больше притяженія луны. Такъ какъ (по закону Ньютона) притяженіе обратно пропорціонально кубамъ разстояній, то легко можно показать, что дѣйствія силъ притяженія небесныхъ тѣлъ, съ точки зрѣнія приливовъ и отливовъ, обратно пропорціональны кубамъ ихъ разстояній отъ земли; вслѣдствіе этого луна оказываетъ на движенія приливовъ и отливовъ большее дѣйствіе, чѣмъ солнце, хотя масса луны гораздо меньше, чѣмъ масса

*) Подробное описаніе устройства гармоническаго анализатора для свѣтовыхъ волнъ можно найти въ сочиненіи: А. Майкельсонъ, „Свѣтовые волны и ихъ примѣненія“. Перевела съ англійскаго В. О. Хвостовъ подъ редакціей проф. О. Д. Хвольсона. Одесса, „Mathesis“. Устройство анализатора Кельвина иное, но основная идея прибора та же. Очень ясное изложеніе теоріи приливовъ и отливовъ и гармоническаго ихъ анализа можно найти въ сочиненіи: Р. Боллъ, „Вѣка и приливы“. Переводъ съ англійскаго подъ редакціей прив.-доц. А. Р. Орбинскаго. Одесса, „Mathesis“.

солнца. Какъ мы сейчасъ увидимъ, явленіе приливовъ даетъ способъ рѣшить одинъ весьма важный пунктъ въ вопросѣ о составѣ внутреннихъ частей земли. Если земля, какъ до сихъ поръ еще полагаютъ нѣкоторые геологи, представляетъ собою массу, которая можетъ считаться жидкой, но только окружена тонкой скорлупой, то всѣ части суши должны были бы понижаться и подыматься одновременно съ водами, и нельзя было бы замѣтить приливовъ и отливовъ. Если бы земля была полужидкой или вязкой, какъ утверждаютъ нѣкоторые, то явленіе приливовъ и отливовъ было бы замѣтно, но въ значительно болѣе слабой степени, чѣмъ въ случаѣ, если бы земля была твердой. Поэтому, сравнивая результаты наблюденій съ вычисленной высотой приливовъ и отливовъ, мы можемъ узнать, какая изъ этихъ гипотезъ лучше согласуется съ дѣйствительностью.

Въ своихъ мемуарахъ профессоръ Дарвинъ объясняетъ, въ чемъ состоитъ методъ гармоническаго анализа, и показываетъ его преимущества надъ прежними методами и его связь съ ними. Онъ предполагаетъ, что общее движеніе приливовъ и отливовъ, обусловленное измѣненіемъ разстояній и конфигураціи луны и солнца относительно земли, разлагается на нѣкоторое число простыхъ гармоническихъ слагающихъ; для этого служить способъ, весьма аналогичный тому, который даетъ возможность, благодаря теоріи Фурье, разсматривать музыкальный звукъ, какъ сумму членовъ сложной гармонической функціи *). Эти элементарные приливы и отливы, имѣющіе различные періоды, начиная отъ половины дня и до девятнадцати лѣтъ, получили различныя названія: приливы и отливы лунные, солнечные, лунносолнечные, полдневные, эллиптическіе, лунные мѣсячные, полугодишносолнечные и т. д.; наложеніе этихъ элементарныхъ приливовъ съ амплитудой, свойственной каждому изъ нихъ, другъ на друга порождаетъ результирующее движеніе водъ, эквивалентное тому, которое наблюдается въ дѣйствительности. Дарвинъ разсматриваетъ также поднятіе и пониженіе водъ, вызываемое болѣе или менѣе регулярными вѣтрами, выпаденіемъ дождя и т. п. явленіями, которыя въ извѣстныхъ областяхъ возвращаются съ очень большою правильностью, порождая такъ называемые „метеорологическіе приливы и отливы“. Онъ сравниваетъ результаты гармоническаго анализа съ тѣми, которые наблюдались въ дѣйствительности, въ отношеніи часа и уровни высокой воды и низкой воды; оказывается, что теорія достаточно хорошо согласуется съ наблюденіемъ, даже тогда, когда для полученія „константъ приливовъ и отливовъ“ пользуются данными краткаго ряда (пятнадцатидневнаго) часовыхъ наблюденій. Если мы примемъ въ соображеніе чрезвычайную сложность явленія и ограниченное число использованныхъ „константъ приливовъ и отливовъ“ **), то найдемъ довольно хорошее согласіе въ таблицахъ

*) Т. е. членовъ вида $A \cos at$ и $B \sin \beta t$, гдѣ A, B, a, β — постоянныя, а t — время, отсчитываемое отъ опредѣленнаго начальнаго момента. *Ред.*

**) Т. е. значеній коэффиціентовъ A, B, a, β . *Ред.*

приливовъ, нанесенныхъ для Адена, Портъ-Блера, Андаманскихъ острововъ, и двухъ или трехъ портовъ Британскихъ Острововъ (Ливерпуль, Сѣндрлэндъ и Вестъ-Гартлепуль). Двухнедѣльный рядъ наблюдений для Портъ-Блера даетъ максимальное отклоненіе: для времени — въ 0,4 часа, а для уровня высокой или низкой воды — въ $\pm 0,4$ фута ($= 0,1$ м.), что, въ сущности, составляетъ лишь незначительную дробь отъ всего соответственнаго промежутка времени и отъ уровней; несомнѣнно, однако, что при еще болѣе длинномъ рядѣ можно было бы получить еще лучше результаты. Изъ этого общаго сравненія результатовъ наблюденія и теоріи авторъ, въ согласіи съ лордомъ Кельвиномъ, выводитъ заключеніе, что приливы и отливы доказываютъ, что земная кора должна, дѣйствительно, обладать твердостью, по меньшей мѣрѣ, стали.

Въ статьѣ, взятой изъ второго изданія книги Томсона и Тэта „Natural Philosophy“ (одно изданіе этого сочиненія было пересмотрѣно въ значительной части самимъ сэромъ Г. Дарвиномъ), авторъ дѣлаетъ попытку вычислить твердость земли по приливамъ съ долгимъ періодомъ; онъ приходитъ къ приведенному выше заключенію. Какъ мы уже указывали, приливовъ и отливовъ нельзя было бы вовсе замѣчать, если бы земля представляла собой жидкость подъ сравнительно тонкой корой. Если бы она была вязкой или полужидкой, то можно было бы наблюдать лишь волны съ короткимъ періодомъ. Волны, зависящія отъ долгихъ интерваловъ (напримѣръ, отъ годичнаго измѣненія разстоянія между луной и солнцемъ) почти совершенно сглаживались бы, такъ какъ земная кора поддавалась бы медленно и движенія не обнаруживались бы. Такъ какъ всякое возвратное періодическое измѣненіе въ величинѣ силъ прилива вызываетъ соответствующій приливъ равной періодичности, и такъ какъ приливы съ длиннымъ періодомъ совершаются почти во всей полнотѣ своей теоретической величины, то отсюда слѣдуетъ, что степень осѣданія или вязкости земли должна быть незначительной.

Лапласъ полагалъ, что теорія равновѣсія водъ въ состояніи объяснить колебанія съ длиннымъ періодомъ; лордъ Кельвинъ показалъ, что обусловленные ими приливы и отливы должны были бы измѣняться въ величинѣ, и что они должны были бы значительно уменьшаться вслѣдствіе осѣданія земли; вычисленные авторомъ размѣры этихъ приливовъ въ большинствѣ портовъ Индіи дали ему возможность найти съ извѣстнымъ приближеніемъ осѣданіе земли, обусловливаемое приливами.

Первая часть I-го тома заканчивается мемуарами о динамической теоріи приливовъ и отливовъ. Хотя элементарная теорія Ньютона даетъ общее объясненіе нѣсколькихъ, наиболѣе замѣчательныхъ особенностей движенія приливовъ, однако, она оказывается уже неудовлетворительной въ отношеніи деталей, а въ некоторыхъ случаяхъ она даетъ результаты, абсолютно противорѣчащіе дѣйствительности. Если бы земля была вся покрыта водой и если бы она не вращалась вокругъ самой себя, то она постоянно имѣла бы высокій уровень моря въ точкахъ, для которыхъ луна находится въ плоскости меридіана, и

постоянно низкій уровень — въ точкахъ, находящихся въ 90 градусъ восточной или западной долготы по отношенію къ предыдущимъ. Но поверхность земли лишь частью покрыта водой; она заключаетъ въ себѣ большія массы континентовъ и, кромѣ того, вращается вокругъ самой себя со скоростью, достигающей на экваторѣ 1000 миль (1670 км.) въ часъ. Вслѣдствіе этого проблема имѣетъ динамическій, а не „статическій“ характеръ. Если бы земля была цѣлкомъ покрыта водой, и если бы она вращалась, какъ теперь, то волна приливовъ правильно перемѣщалась бы вокругъ земного шара, и ея гребни наибольшей высоты слѣдовали бы за видимымъ движеніемъ луны съ точностью на разстояніи 90° по долготѣ. Вслѣдствіе этого низкая вода имѣла бы мѣсто у точекъ, лежащихъ подъ луной и у ихъ антиподовъ, а высокая вода — въ точкахъ, лежащихъ на разстояніи 90° долготы отъ предыдущихъ, — выводъ, діаметрально противоположный тому, который даетъ статическая теорія. Однако, вслѣдствіе присутствія материковъ и измѣненія глубины воды, ходъ и характеръ волнъ, имѣющихъ мѣсто въ дѣйствительности, отличны отъ результатовъ, соотвѣтствующихъ тому или другому предположенію, и теорія должна быть дополнена тщательными наблюденіями.

Лапласъ и другіе придумали теорію „канала“, предполагая, что мы можемъ представлять себѣ приливъ какъ бы циркулирующимъ вокругъ земли по зонамъ, параллельнымъ экватору, — предположеніе, которое, очевидно, не соотвѣтствуетъ истинѣ для мѣстностей, удаленныхъ отъ экватора; но затрудненія математическаго характера, касающіяся движенія въ высокихъ широтахъ, слишкомъ велики и не поддаются вычисленію. Въ десятомъ мемуарѣ (томъ I), взятомъ изъ „Британской Энциклопедіи“, изложены успѣхи, достигнутые въ динамической теоріи благодаря работамъ Пуанкаре, Гоу (Hough) и автора о различныхъ колебаніяхъ воды, „свободныхъ“ и „вынужденныхъ“^{*)}; теорія изложена въ той формѣ, которую далъ ей Гоу, королевскій астрономъ и преемникъ сэра Давида Гилля (Gill) въ Капѣ. По мнѣнію автора, трудъ Гоу представляетъ собою „послѣднюю эпоху Лапласа самый важный вкладъ въ динамическую теорію приливовъ“. Однако, такъ какъ анализъ Гоу сложнѣе, чѣмъ анализъ Лапласа, то мы можемъ привести лишь нѣкоторые результаты этого труда.

Что касается „полумѣсячнаго прилива“, обусловливаемого попеременнымъ движеніемъ луны по направленію къ сѣверу и къ югу отъ небеснаго экватора, то результаты динамической теоріи не очень отличаются отъ результатовъ, къ которымъ приводитъ Лапласово рѣшеніе по принципу равновѣсія, хотя послѣднее рѣшеніе точнѣе выражаетъ то,

^{*)} Когда естественный періодъ колебанія тѣла (т. е. періодъ, съ которымъ оно вибрировало бы, если бы, получивъ смѣщеніе, оно было предоставлено самому себѣ), равенъ періоду силы, приводящей его въ движеніе, то говорятъ, что колебанія тѣла свободны. Если же періодъ силы не совпадаетъ съ періодомъ естественныхъ колебаній возмущеннаго тѣла, то эта сила сообщаетъ ему вынужденныя колебанія.

что имѣло бы мѣсто въ случаѣ морей, болѣе глубокихъ, чѣмъ наши океаны. Теорія Лапласа разсматривается вторично въ слѣдующемъ мемуарѣ (n^o 11), который первоначально появился въ „Запискахъ Королевскаго Общества“ (1886); на основаніи своего анализа авторъ приходитъ къ заключенію, что Лапласова теорія равновѣсія не годится для изученія приливовъ съ длиннымъ періодомъ (за исключеніемъ приливовъ съ самымъ длиннымъ періодомъ, если бы ихъ можно было обнаружить). Онъ показываетъ, что этимъ путемъ никакъ невозможно вычислить твердость земли, и что дѣйствія тренія, какъ они имѣютъ мѣсто въ дѣйствительности, не достаточно велики, чтобы океанъ могъ принять „форму равновѣсія“ Лапласа. Самый долгій изъ всѣхъ „теоретическихъ“ приливовъ, обуславливаемый регрессивнымъ движеніемъ узловъ лунной орбиты за періодъ въ 19 лѣтъ (благодаря этому движенію измѣняется широта луны и, слѣдовательно, ея разстояніе къ сѣверу или къ югу отъ небеснаго экватора), слишкомъ, однако, малъ, чтобы его можно было открыть и, вѣроятно, замаскировывается метеорологическимъ приливомъ.

Мы дошли теперь до другого ряда изысканій, предпринятыхъ сэромъ Георгомъ Дарвиномъ и его братомъ Гораціемъ Дарвиномъ, членомъ Кембриджской Коммисіи Научныхъ Инструментовъ, по мысли лорда Кельвина. Согласно законамъ тяготѣнія всякое тѣло вселенной притягиваетъ всякое другое тѣло: солнце притягиваетъ землю, земля притягиваетъ луну и, обратно, луна притягиваетъ землю и солнце и т. д. Сила, съ которой земля притягиваетъ тѣло, находящееся у ея поверхности, называется вѣсомъ тѣла; вѣрнѣе говоря, вѣсомъ называютъ мѣру стремленія тѣла направиться къ поверхности земли. Однако, когда луна находится въ зенитѣ, то притяженіе, вызываемое ею въ какомъ-нибудь тѣлѣ на поверхности земли, дѣйствуетъ въ направленіи, противоположномъ дѣйствию земли, и слегка уменьшаетъ вѣсъ тѣла. Опыты, произведенные съ цѣлью измѣрить это „возмущеніе тяготѣнія луной“, описаны въ мемуарѣ 13-мъ (томъ I). Опыты были произведены въ 1879—1880 г. въ „залѣ маятника“ Кэвендишской лабораторіи въ Кембриджѣ. Чтобы избѣжать всякой пертурбаціи, имѣющей своимъ источникомъ земной магнетизмъ, взяли былъ маятникъ (цилиндрическій) изъ чистой мѣди и были приняты мѣры величайшей предосторожности, чтобы освободить результаты отъ всѣхъ возмущающихъ вліяній, которыя могли бы отразиться на столь тонкихъ изысканіяхъ. Тѣмъ не менѣе движенія инструмента были столь неправильны и прерывисты, что оказалось невозможнымъ установить, какую роль въ этихъ движеніяхъ слѣдуетъ приписать дѣйствию луны, и что нужно отнести на счетъ другихъ причинъ.

Найдено было, что поверхность земли находится въ состояніи непрерывнаго сотрясенія, что она подвержена очень малымъ „землетрясеніямъ“; чувствительность аппаратовъ была столь велика, что даже тѣла наблюдателей своимъ вѣсомъ вызывали перемѣщенія, которыя очень явственно регистрировались инструментомъ. Тепловое дѣйствіе солнца вызывало ежедневныя колебанія, значительно превышавшія возможное перемѣщеніе, обусловленное дѣйствіемъ луны. Та-

кимъ образомъ, этими опытами совершенно не удалось обнаружить существованіе искомаго отклоненія, но они показали, что поверхность земли подвержена непрестанному движенію — „колебаніямъ“ съ различными періодами, начиная отъ части секунды и до одного года. Тѣмъ не менѣе, послѣ этихъ опытовъ докторъ Геккеръ въ Потсдамѣ пришелъ къ мысли, что его опыты съ горизонтальнымъ маятникомъ доказали существованіе движенія (аналогичнаго движенію двери, подвѣшенной на двухъ петляхъ и совершающей качанія не въ вертикальной, но въ горизонтальной плоскости), совершающагося два раза въ сутки подъ дѣйствіемъ луны. Геккеръ полагаетъ, что онъ обнаружилъ такимъ образомъ легкія поднятія и пониженія поверхности европейскаго материка, т. е. настоящіе „приливы и отливы суши“, обусловливаемые аналогичными причинами. Однако, эти движенія столь слабы, что потребовались спеціальныя тонкіе методы, чтобы измѣрить ихъ величину и, насколько возможно, исключить весьма значительное дѣйствіе, производимое тепловымъ дѣйствіемъ солнца, имѣющимъ періодъ, почти равный тому, который могъ бы быть вызванъ всякой другой причиной луннаго происхожденія. Хотя сэръ Георгъ Дарвинъ соглашается съ заключеніями Геккера, однако, можно сказать, что нѣкоторые сомнѣваются въ дѣйствительномъ существованіи столь малыхъ остаточныхъ колебаній. Докторъ Геккеръ находитъ, что амплитуда зарегистрированныхъ колебаній составляла около двухъ третей той величины, которую она имѣла бы, если бы земля была совершенно твердой; этимъ онъ выражаетъ, что дѣйствительная твердость земли почти та же, что стали, — заключеніе, къ которому привели уже и другіе методы.

Въ послѣднемъ мемуарѣ тома I-го разсматриваются измѣненія вертикали, обусловливаемыя упругостью земной поверхности, повышеніе и пониженіе приливовъ въ областяхъ, расположенныхъ вблизи поморскихъ станцій, и т. д.

Вопросы, изложенныя во второмъ томѣ „Tidal Friction and Cosmogony“, имѣютъ, можно сказать, наиболѣе общій интересъ по вытекающимъ изъ нихъ слѣдствіямъ относительно вѣроятнаго прошлаго и будущаго нашей солнечной системы. Въ открытомъ морѣ движеніе приливовъ и отливовъ сводится, главнымъ образомъ, къ малымъ восходящимъ и нисходящимъ движеніямъ частичекъ воды; но вблизи береговъ это колебательное движеніе преобразуется отчасти въ массовый переносъ большихъ массъ воды, которыя направляются къ землѣ, поднимаются приливами въ рѣкахъ и затѣмъ возвращаются въ море; эти движенія совершаются съ большою затратой и нѣкоторой потерей энергіи.

Эта послѣдняя заимствуется, главнымъ образомъ, изъ кинетической энергіи земли, и такъ какъ она теряется (т. е., вѣрнѣе, превращается въ теплоту, которая получается отъ тренія о сушу и о дно моря и отъ тренія, происходящаго при движеніи всѣхъ водъ), то эта потеря должна имѣть своимъ слѣдствіемъ уменьшеніе скорости вращенія земли и стремится вызвать такимъ образомъ приращеніе продолжительности сутокъ — нашей мѣры времени. Покуда періодъ вращенія

земли (сутки) будетъ отличаться отъ періода обращенія луны (мѣсяцъ), будетъ существовать тенденція къ уравнию этихъ двухъ періодовъ, хотя изъ этого отнюдь не слѣдуетъ, что въ настоящее время они ближе одинъ къ другому, чѣмъ когда-либо въ прошломъ. Хотя существуютъ компенсирующія причины, какъ сокращеніе земной коры и паденіе метеоритнаго вещества, которыя стремятся вызвать сокращеніе сутокъ, у насъ нѣтъ, однако, данныхъ которыя доказывали бы, что въ настоящее время этотъ періодъ короче или продолжительнѣе, чѣмъ въ первыя эпохи исторіи. Во всякомъ случаѣ, треніе, обусловливаемое приливами и отливами, въ настоящее время дѣйствуетъ чрезвычайно медленно; въ самомъ дѣлѣ, никто не можетъ сказать, вращается ли земля нѣсколько быстрѣе или нѣсколько медленнѣе, чѣмъ въ теченіе протекшихъ безчисленныхъ вѣковъ. Однако, по мнѣнію сэра Георга Дарвина это дѣйствіе должно было быть гораздо болѣе энергичнымъ въ теченіе гипотетическаго періода, когда наша планета находилась въ жидкомъ состояніи.

Второй томъ содержитъ мемуары объ изысканіяхъ относительно приливовъ и отливовъ вязкихъ и полупругихъ сфероидовъ, замѣчанія о теоріи лорда Кельвина, о графическомъ опредѣленіи вѣковыхъ дѣйствій, обусловленныхъ треніемъ приливовъ и отливовъ, и о треніи, вызываемомъ приливами и отливами, одновременно возникающими на планетѣ, имѣющей нѣсколько спутниковъ, а также объ измѣненіяхъ, которыя вызываются въ орбитѣ спутника, вращающагося вокругъ планеты, приливами и отливами; наконецъ, въ этомъ томѣ имѣется еще важный мемуаръ о напряженіи внутри земли, вызываемомъ вѣсомъ материковъ и горъ. Всѣ эти мемуары впервые появились въ печати между 1879 и 1882 г.; для настоящаго изданія они были пересмотрѣны и подверглись нѣкоторымъ измѣненіямъ.

Теорію эволюціи подѣ дѣйствіемъ приливовъ и отливовъ, основанную на этихъ изысканіяхъ, вкратцѣ можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Какъ мы видѣли, дѣйствіе тренія, обусловленнаго приливами и отливами, состоитъ въ удлиненіи періода вращенія; очевидно, поэтому, что въ отношеніи, по крайней мѣрѣ, этой лишь причины рачіонально будетъ предположить, что вращеніе земли въ прошлыя времена было, можетъ быть, болѣе быстрымъ, чѣмъ въ настоящее время. Сэръ Георгъ Дарвинъ исходитъ изъ предположенія о планетѣ, имѣющей около 8000 миль (1 миля = 1610 м.) въ діаметрѣ (13 000 км.) и состоящей частью изъ твердаго, частью изъ жидкаго и частью изъ газообразнаго вещества. Онъ предполагаетъ, что эта планета вращается вокругъ оси, наклоненной на 11° или 12° къ нормали эклиптики (половина дѣйствительной величины) и вращается вокругъ самой себя съ періодомъ отъ 2 до 4 часовъ, при чѣмъ разстояніе ея отъ солнца почти равно разстоянію земли въ настоящее время. Скорость этого вращенія столь велика, что планета не можетъ продолжать существовать въ формѣ эллипсоида, или же она столь близка къ неустойчивому состоянію, что солнечные приливы и отливы

вызываютъ полную неустойчивость. Она поэтому раздѣлится на двѣ массы: большую массу земли и малую — луны. Каждая изъ этихъ массъ, вначалѣ почти соприкасавшихся, деформируется вслѣдствіе притяженія, исходящаго отъ другой массы, и каждая изъ нихъ такъ же, какъ и солнце, вызываетъ въ другой приливы и отливы. Чѣмъ далѣе, тѣмъ болѣе онѣ удаляются одна отъ другой, при чемъ періодъ вращенія луны такъ же, какъ и солнца, возрастаетъ, но первый періодъ быстрѣе, чѣмъ второй. Благодаря непрерывно повторяющемуся дѣйствию тренія, обусловливаемого приливами и отливами, луна постепенно отдаляется все больше и больше; наконецъ, ея экваторъ почти совпадаетъ съ плоскостью ея орбиты, и (какъ въ настоящее время) въ результатъ ея вращеніе вокругъ ея оси совершается одновременно съ ея обращеніемъ вокругъ нашей планеты, т. е. лунныя сутки становятся равными мѣсяцу, вслѣдствіе чего нашъ спутникъ всегда обращенъ къ намъ одной и той же стороною. Съ теченіемъ времени совершаются другія измѣненія. Къ сожалѣнію, недостатокъ мѣста не позволяетъ намъ останавливаться на этомъ пунктѣ. Та же самая теорія была примѣнена для объясненія быстраго обращенія спутниковъ Марса вокругъ ихъ родоначальника; тотъ спутникъ, который находится внутри, имѣетъ періодъ обращенія вокругъ планеты меньшій, чѣмъ продолжительность вращенія родоначальника. Предполагали, что планета прежде вращалась быстрѣе, чѣмъ теперь, и что ея періодъ вращенія прогрессивно возрасталъ. Точно такъ же предполагаемое равенство періодовъ вращенія Меркурія и его обращенія вокругъ солнца, можетъ быть, обусловливается треніемъ приливовъ и отливовъ; есть достаточное основаніе думать, что благодаря аналогичному же дѣйствию большое число спутниковъ, подобно нашей собственной лунѣ, обращены къ своему родоначальнику всегда одной и той же стороною своей поверхности. Однако, если даже дѣйствіе тренія, вызываемого приливами, и есть „vera causa“, все же эта теорія генезиса луны сопряжена съ многочисленными трудностями. Въ настоящее время, когда уже невозможно принять небулярную гипотезу Лапласа, очень трудно понять, какимъ образомъ земля могла вращаться со столь большою скоростью, что отъ нея отдѣлилась лишь малая часть вещества, или какимъ образомъ образовавшаяся этимъ путемъ луна могла удержаться, какъ отдѣльное цѣлое, при столь большой близости отъ земли. Сэръ Георгъ Дарвинъ объясняетъ это раздробленіе первоначальной планеты тѣмъ, что оно могло быть вызвано совпаденіемъ солнечнаго прилива и отлива съ періодомъ основнаго свободнаго колебанія самой планеты. Критическія замѣчанія Нолана (Nolan) и другихъ побудили Георга Дарвина заново пересмотрѣть нѣкоторые пункты своего изслѣдованія; онъ нашелъ, что удаленіе центра земли, при которомъ луна могла сдѣлать полный оборотъ вокругъ самой себя, составляло, по меньшей мѣрѣ, 6500 миль (10 000 км.). Изысканія Роша (Roche) такъ же, какъ и послѣднія изысканія Георга Дарвина, показываютъ (это, впрочемъ, достаточно очевидно), что равновѣсіе не можетъ имѣть мѣста, если въ какой-либо точкѣ на поверхности массы сумма силы, порождающей приливъ, и центробѣжной реакціи больше силы тяжести. Однако, хотя Георгъ Дарвинъ самъ предложилъ

вышеуказанное объяснение происхожденія нашей луны, онъ замѣчаетъ: „необходимо предположить, что послѣ рожденія спутника происходитъ рядъ измѣненій, которыя намъ совершенно неизвѣстны“. Все же несомнѣнно, что, каковъ бы ни былъ результатъ тренія отъ приливовъ и отливовъ въ нашей системѣ въ прошлое или настоящее время, дѣйствіе тренія удовлетворительно объясняетъ множество особенностей въ орбитахъ двойныхъ звѣздъ.

Послѣдній мемуаръ II-го тома посвященъ вопросу о внутренности земли и напряженіяхъ, обусловленныхъ вѣсомъ материковъ и горныхъ массъ. Это изысканіе приводитъ къ слѣдующему заключенію: если земля совершенно тверда, то ея вещество должно обладать такой же твердостью, какъ гранитъ, занимающій нѣсколько тысячъ миль ея поверхности; если она имѣетъ жидкую или газообразную внутренность и кору толщиной въ 1000 миль, то эта кора должна быть болѣе крѣпкой, чѣмъ гранитъ; наконецъ, если эта кора обладаетъ меньшей толщиной, то ея твердость должна быть еще гораздо болѣе. Вывѣсивъ все это, нужно признать, что первое предположеніе представляется наиболѣе правдоподобнымъ.

Въ пятнадцати мемуарахъ III тома разсматривается вопросъ о равновѣсіи жидкихъ массъ и вопросы геологіи или геофизики. Въ первомъ мемуарѣ этого тома авторъ изслѣдуетъ измѣненія положеній земной оси, которыя могли имѣть мѣсто вслѣдствіе пониженій или поднятій, перераспределеніе силы тяжести, вызванное ледяными покровами въ теченіе ледниковаго періода, и т. д. Положеніе полюса могло перемѣститься на 1° или 2° въ случаѣ твердой земли; движеніе въ болѣе обширныхъ размѣрахъ, какъ показываетъ авторъ, могло явиться въ результатъ стремленій къ фигурѣ равновѣсія, обусловливаемыхъ, можетъ быть, землетрясеніями. Однако, подобныя движенія не могли бы произойти безъ обширныхъ и многочисленныхъ деформаций, безъ частыхъ перемѣнъ въ географическомъ распределеніи морей и материковъ; въ заключеніе авторъ ставитъ такой вопросъ: въ правѣ ли геологи предполагать, что материки всегда находились тамъ, гдѣ они лежатъ теперь, и не слѣдуетъ ли отказаться отъ всякой гипотезы, допускающей значительное перемѣщеніе полюса (при объясненіи факта ледниковыхъ періодовъ и т. д.)? Съ другой стороны, наклонное положеніе эклиптики (наклонъ оси вращенія къ плоскости орбиты) можетъ лишь ничтожно мало измѣниться отъ перераспределенія матеріи, которое могло имѣть мѣсто, или отъ деформаций фигуры земли.

Теоріи фигуры земли посвященъ мемуаръ, первоначально представленный Королевскому Астрономическому Обществу въ Лондонѣ въ 1900 г. (№ 7 т. III-го); въ этой работѣ значеніе g дается формулой

$$g = g_e (1 + Y \cos^2 \lambda - 0,000\,295 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda);$$

здѣсь λ есть широта, g_e — напряженіе силы тяжести на экваторѣ, а величина Y выражается формулой $Y = \frac{g_p - g_e}{g_e}$, т. е. отношеніемъ

разности между напряженіемъ силы тяжести на полюсѣ и на экваторѣ къ напряженію силы тяжести на экваторѣ.

Важныя изысканія о фигурахъ жидкой планеты и ея спутника во время ихъ очень большой близости (мемуаръ 9) исходятъ изъ совершенно другой точки зрѣнія, чѣмъ мемуаръ Пуанкаре; хотя эти изслѣдованія, предпринятые съ цѣлью пролить нѣкоторый свѣтъ на Канто-Лапласовскую гипотезу туманности, даютъ много интересныхъ результатовъ; однако, авторъ остался, повидимому, нѣсколько разочарованнымъ. Онъ говоритъ: „результаты не оказываютъ намъ существенной помощи“... Изысканія Пуанкаре и соображенія, которыя присоединяетъ къ нимъ авторъ, повидимому, приводятъ къ такому выводу: когда часть центрального тѣла отдѣлилась вслѣдствіе возрастанія угловой скорости, эта часть должна была сравнительно съ остальной частью имѣть гораздо болѣшую величину, чѣмъ наблюдаемая величина спутниковъ сравнительно съ ихъ планетами. Сама луна, масса которой составляетъ лишь $\frac{1}{81}$ массы земли, сравнительно съ землей довольно мала и все же въ солнечной системѣ извѣстны спутники, масса которыхъ составляетъ лишь $\frac{1}{4000}$ массы своего родоначальника.

Мемуары 11 и 12 посвящены „грушевидной фигурѣ“, которая получается при равновѣсіи жидкой массы, обладающей вращательнымъ движеніемъ; авторъ пользуется здѣсь аналитическимъ методомъ, развитымъ въ 10 мемуарѣ „Ellipsoidal harmonic Analyse“ (представленномъ Королевскому Обществу въ 1901 и 1902 г.г.). Авторъ опредѣляетъ типъ фигуры численными величинами и даетъ ея рисунокъ; оказывается, что сходство ея съ грушей менѣе велико, чѣмъ полагали раньше. Эту новую форму жидкости, обладающей вращательнымъ движеніемъ, открылъ Пуанкаре, но авторъ нашелъ, что эта фигура значительно болѣе продолговатая, чѣмъ думали. Профессоръ Дарвинъ того мнѣнія, что доказательству устойчивости грушевидной фигуры немного лишь недостаетъ до алгебраической строгости; однако, русскій ученый Ляпуновъ полагаетъ, что эта форма неустойчива. Профессоръ Дарвинъ даетъ рисунокъ, представляющій крайнюю стадию развитія этой фигуры и показывающій нѣкоторое удлиненіе у одного конца; при этомъ профессоръ Дарвинъ дѣлаетъ интересное замѣчаніе: „у насъ невольно возникаетъ мысль о нѣкоторомъ явленіи такого рода, какъ выпусканіе протоплазматическаго отростка массой живого вещества“. Онъ считаетъ, что этотъ процессъ, „почти сравнимый съ жизненнымъ“, соответствуетъ одному, по крайней мѣрѣ, изъ родовъ образованія двойныхъ небесныхъ тѣлъ: звѣздъ, планетъ и спутниковъ.

Въ послѣднемъ мемуарѣ третьяго тома (№ 15) гармонической анализъ примѣняется къ развитію и провѣркѣ изслѣдованій Эдуарда Роша (Roche), профессора въ Монпелье, работа котораго долгое время оставалась незамѣченной, пока на нее не обратилъ вниманія Георгъ Дарвинъ. Помимо этой разсматриваемой въ мемуарѣ работы (о фигурѣ устойчивости жидкаго спутника), Рошъ развилъ теорію кометныхъ явленій, которая изложена нами въ „Journal of the British Astronomical Association“ (т. XX, п^о 7, стр. 361 — 363); его имя теперь извѣстно также по термину: „предѣлъ

Роша". До известнаго разстоянія сферической планеты ни одинъ жидкій спутникъ не можетъ вращаться, потому что дѣйствіе приливовъ и отливовъ, исходящее отъ его родоначальника, разорветъ его. Это разстояніе составляетъ въ радіусахъ планеты 2,44, такъ что въ случаѣ земли и луны наименьшее возможное разстояніе для луны (считая отъ центра земли) равно около 11 000 миль (18 000 км.), что составляетъ 7000 миль (11 000 км.) для той точки земной поверхности, которая наиболѣе близка къ центру луны. Такъ какъ діаметръ луны превышаетъ 2160 миль (3400 км.), то наименьшее возможное разстояніе между поверхностями двухъ небесныхъ тѣлъ при наличности предполагаемыхъ условій сводится почти къ 6000 миль (10 000 км.).

Профессоръ Дарвинъ примѣняетъ работу Роша, рассматривающаго лишь сферическія тѣла, къ болѣе общему случаю эллипсоидовъ; онъ изучаетъ движеніе жидкихъ массъ, соединенныхъ невѣсомымъ проводникомъ, и находитъ условія ихъ равновѣсія. Но такъ какъ онъ находитъ, что двѣ жидкія сферы не могутъ такимъ способомъ быть устойчиво соединены, то невѣроятно, чтобы два приливныхъ эллипсоида могли находиться въ такой связи другъ съ другомъ. Однако, такъ какъ треніе, обуславливаемое приливами и отливами, есть медленно дѣйствующая причина неустойчивости, то частичная устойчивость этихъ формъ можетъ имѣть большое значеніе для теоріи эволюціи міровъ.

Въ предыдущемъ мы вкратцѣ очертили нѣкоторые изъ наиболѣе важныхъ проблемъ, рассматриваемыхъ въ вышепечисленныхъ томахъ; хотя мы не всегда согласны съ заключеніями автора, мы не можемъ, однако, не преклониться передъ огромнымъ значеніемъ его изслѣдованій. Прекрасные, несмотря на сложность, математическіе методы, космическіе выводы, къ которымъ часто приводятъ найденные результаты, и поразительная теорія эволюціи приливовъ и отливовъ — все это вызываетъ въ насъ чувства удивленія и признательности; тѣмъ не менѣе, мы погрѣшили бы противъ истины, если бы приняли всѣ его заключенія безъ оговорокъ.

Теорія тренія приливовъ и отливовъ въ самомъ началѣ ставила себѣ цѣлью лишь дополнить небулярную гипотезу Лапласа, и она, можетъ быть, непримѣнима къ исторіи нашего собственнаго спутника. Тѣмъ не менѣе, какъ мы сказали, не подлежитъ сомнѣнію, что она даетъ наиболѣе удовлетворительное объясненіе какъ формы орбитъ двойныхъ звѣздъ, такъ и вѣкового дѣйствія (медленно продолжающагося) этого фактора въ звѣздныхъ системахъ, въ которыхъ относительныя массы различныхъ частей болѣе приближаются къ равенству, чѣмъ въ нашей солнечной системѣ; несомнѣнно также, что это должно было нѣкогда вызвать сильныя измѣненія въ первоначальныхъ формахъ движеній составляющихъ звѣздъ вокругъ ихъ общаго центра тяжести. Нельзя сомнѣваться, что это есть причина того, что періоды обращенія луны и ея вращенія равны между собой.

Въ теоріи приливной эволюціи, примѣненной къ происхожденію луны, существеннымъ пунктомъ является положеніе, что нѣкогда земля вращалась вокругъ себя съ гораздо большей скоростью, чѣмъ въ настоящее время; однако, покойный лордъ Кельвинъ не допускалъ этого; въ своемъ отвѣтѣ сэру Георгу Дарвину онъ говоритъ: „тотъ фактъ, что фигура земли почти соответствуетъ теперешней продолжительности дня, доказываетъ, что наша планета отвердѣла въ эпоху, когда ея вращеніе было лишь немного болѣе быстрымъ, чѣмъ теперь“. Въ настоящее время изъ самого нашего сфероида нельзя болѣе извлечь никакого довода относительно этого пункта. Этотъ фактъ, конечно, можетъ быть приписанъ возможности, которую просто приходится принять; она очень слаба, но можетъ быть достаточна, чтобы вызвать значительное измѣненіе формы въ протекшіе геологическіе періоды. На возраженіе, что современная намъ скорость дѣйствія тренія, вызываемаго приливами и отливами, слишкомъ медленна, чтобы вызвать замѣтный эффектъ даже въ самые долгіе періоды времени, какіе мы можемъ себѣ вообразить, Георгъ Дарвинъ отвѣчаетъ, что вначалѣ эта причина дѣйствовала несравненно быстрѣе, чѣмъ въ настоящее время, хотя даже и въ этомъ случаѣ со времени „рожденія луны“ долженъ былъ пройти періодъ въ нѣсколько миллионъ лѣтъ.

Какъ рассказываютъ, древніе аркадійцы хвалились, что ихъ предки жили уже въ то время, когда появилась луна. Если согласиться съ этимъ, то получилась бы генеалогія, далеко превышающая самое сильное воображеніе (57 миллионъ лѣтъ!).

Памятуя, что и на солнцѣ есть пятна, мы въ заключеніе позволимъ себѣ обратить вниманіе автора на одинъ или два пункта, хотя они отнюдь не ослабляютъ силы его доводовъ. Авторъ тщательно исправилъ нѣсколько болѣе или менѣе несущественныхъ неточностей, относящихся къ математическому анализу, но, съ другой стороны, онъ слишкомъ часто пользуется нѣсколько устарѣвшими данными, основываясь на не совсемъ осторожныхъ компиляторахъ.

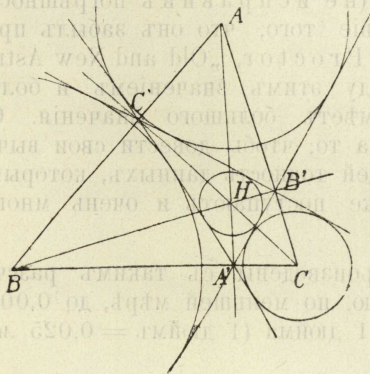
Для періода вращенія Сатурна авторъ принимаетъ число 10 часовъ 29 минутъ, неизвѣстно почему и какъ принятое и даже еще принимаемое во многихъ популярныхъ классическихъ трудахъ; точно такъ же онъ беретъ число Кайзера (не исправивъ погрѣшности въ транскрипціи, вкравшейся вслѣдствіе того, что онъ забылъ принять въ расчетъ перемѣну стили; см. Proctor, „Old and New Astronomy“, стр. 552), хотя разность между этимъ значеніемъ и болѣе точнымъ числомъ Проктора не имѣетъ большого значенія. Съ другой стороны, онъ тратитъ усилія на то, чтобы довести свои вычисления до точности, далеко превышающей точность данныхъ, которыми онъ пользуется (къ несчастью, такъ же поступаютъ и очень многіе другіе математики!).

Измѣренія высоты приливовъ произведены съ такимъ расчетомъ, чтобы дать значенія съ точностью, по меньшей мѣрѣ, до 0,0001 фута (1 футъ = 0,309 м.) или до 0,001 дюйма (1 дюймъ = 0,025 м.),

а времена, сомнительность которыхъ часто отмѣчаетъ Георгъ Дарвинъ, даны, по меньшей мѣрѣ, съ точностью до 0,01 часа! Это слишкомъ уже напоминаетъ манеру нѣкоторыхъ калькуляторовъ, которые въ результатѣ своихъ вычисленій даютъ элементы орбитъ новыхъ кометъ съ точностью, по крайней мѣрѣ, до 0,1 дуговой секунды, тогда какъ числа минутъ, а иногда даже и градусовъ, найденныя для этихъ элементовъ двумя калькуляторами, значительно разнятся между собой, несмотря на то что вычисленія основаны на однихъ и тѣхъ же результатахъ наблюденія. Но эта маленькая слабость — стремленіе къ сверхточности, — конечно, не умаляетъ истинныхъ заслугъ автора. Среди современныхъ намъ авторовъ врядъ ли у кого-нибудь другого найдется собраніе болѣе оригинальныхъ и болѣе поучительныхъ работъ по математической физикѣ. Для очень большого числа своихъ статей авторъ даетъ цѣнные конспекты, которые позволяютъ и нематематикамъ ознакомиться съ содержаніемъ статей. Мы позволимъ себѣ выразить наше мнѣніе, что то же самое слѣдовало бы сдѣлать для всѣхъ мемуаровъ. Автору слѣдовало бы также написать популярное сочиненіе о результатахъ своихъ трудовъ, такъ какъ многочисленныя рѣчи, произнесенныя имъ при открытіи собраній Британской Ассоціаціи, знаменуютъ собою различные этапы въ прогрессѣ нашихъ знаній. Соответственные вопросы выходятъ изъ рамокъ настоящей статьи, но въ ближайшемъ будущемъ мы надѣемся изложить ихъ такъ же, какъ и его весьма важные мемуары о періодическихъ орбитахъ. Въ самомъ дѣлѣ, отъ прогресса въ этомъ вопросѣ зависитъ будущность теоретической астрономіи. Профессоръ Дарвинъ здѣсь также является пионеромъ, и въ настоящее время онъ продолжаетъ свои изысканія въ этомъ направленіи: еще въ прошломъ году онъ обнародовалъ мемуаръ по этому вопросу.

Точка пересѣченія высотъ треугольника.

К. Крюзе.



Доказательство предложенія состоящаго въ томъ, что три высоты треугольника пересекаются въ одной точкѣ, основывается обыкновенно въ учебникахъ геометріи на томъ соображеніи, что высоты треугольника можно разсматривать, какъ перпендикуляры, возставленные изъ серединъ сторонъ треугольника, описаннаго вокругъ даннаго и имѣющаго стороны, соответственно параллельныя сто-

ронамъ даннаго. Но доказательство указанной теоремы можетъ быть проведено и съ меньшимъ запасомъ свѣдѣній, а именно — оно получается какъ бы мимоходомъ при разсмотрѣннн биссектрисъ треугольника.

Проведемъ въ треугольникѣ $A'B'C'$ (см. чертежъ) всѣ шесть биссектрисъ внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ; эти биссектрисы образуютъ три пары взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ и пересѣкаются по три въ точкахъ A, B, C, H . Три точки A, B, C , служащія центрами трехъ вѣѣвписанныхъ окружностей треугольника $A'B'C'$, опредѣляютъ треугольникъ ABC , высоты котораго служатъ, очевидно, биссектрисами внутреннихъ угловъ треугольника $A'B'C'$ и, слѣдовательно, пересѣкаются въ одной точкѣ H . Такимъ образомъ, предложеніе о пересѣченіи трехъ высотъ треугольника мы можемъ высказать теперь въ слѣдующей, болѣе полной формѣ: три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, служащей центромъ окружности, вписанной или вѣѣвписанной въ треугольникъ, образованный основаніями высотъ даннаго треугольника, смотря по тому, является ли данный треугольникъ косоугольнымъ или тупоугольнымъ.

С х е м а.

Треугольники:		Треугольники, образованные основаніями высотъ:	Точка пересѣченія высотъ:
ABC	(косоугольный)	$A'B'C'$	H (центръ вписанной окружности)
ABH	(тупоугольные)	"	C
AHC		"	B
HBC		"	A

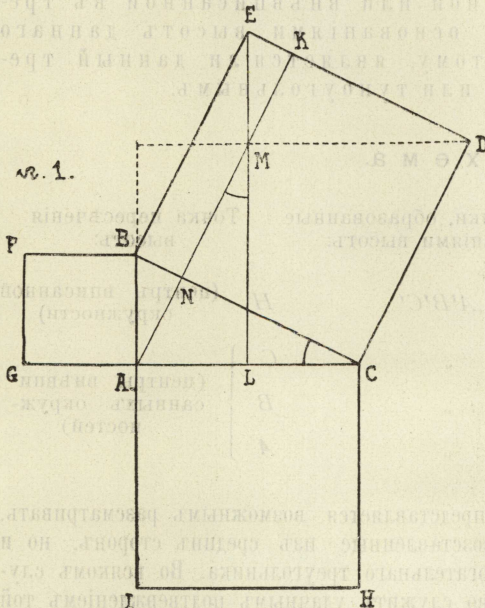
Итакъ, высоты треугольника представляется возможнымъ разсматривать, не только какъ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ, но и какъ биссектрисы нѣкотораго вспомогательнаго треугольника. Во всякомъ случаѣ, приведенное выше доказательство служить удачнымъ подтвержденіемъ той мысли, что одинъ и тотъ же геометрической чертежъ при внимательномъ разсмотрѣннн его можетъ указать различные пути для доказательства соотвѣствующей ему теоремы.

Варианты доказательства теоремы Пифагора.

Н. Влодавера.

Теорема. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника, равновелика площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ того же треугольника.

I.



Черт. 1.

Изъ вершины A прямого угла треугольника ABC опустимъ на сторону ED квадрата BD перпендикуляръ AK и докажемъ, что квадратъ AF равновеликъ прямоугольнику BK . Для этого черезъ точку E проводимъ прямую $EL \parallel AB$. Пусть M будетъ точка ея пересѣченія съ AK ; тогда, очевидно, параллелограммъ AE равновеликъ прямоугольнику BK ; съ другой стороны,

$$\triangle ALM = \triangle ABC,$$

ибо

$$\angle ALM = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$BC = BE = AM$$

и

$$\angle AML = \angle ACB,$$

какъ углы съ взаимно перпендикулярными сторонами, откуда

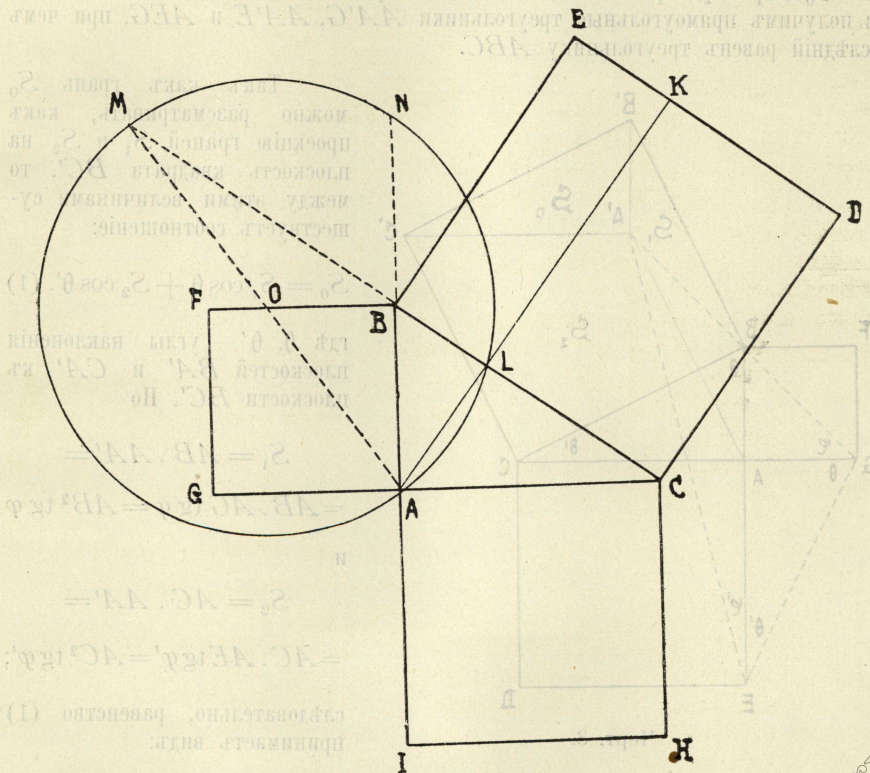
$$AL = AB = BF.$$

Слѣдовательно, параллелограммъ AE и квадратъ AF , какъ имѣющіе общее основаніе AB и высоты AL и BF по доказанному равныя, равновелики, что и требовалось доказать.

Доказавъ такимъ же образомъ (проведа черезъ D прямую параллельно AC), что квадратъ AH равновеликъ прямоугольнику DN , найдемъ, что и сумма квадратовъ AF и AH равновелика суммѣ прямоугольниковъ EN и KC , т. е. квадрату BD .

II.

Изъ вершины A прямого угла треугольника ABC опускаемъ на сторону ED квадрата BD перпендикуляръ AK . Требуется доказать, что квадратъ AF равенеликъ прямоугольнику BK . На продолженіи BC отъ точки B откладываемъ $BM=BC$; соединивъ M и A прямой и опустивъ изъ A на BC перпендикуляръ AL , получимъ прямоугольный треугольникъ AML , около котораго опишемъ кругъ (центръ его будетъ въ точкѣ пересѣченія AM съ BF , ибо $FB \parallel AC$ и $MB=BC$, такъ что $OA=OM$). Продолживъ

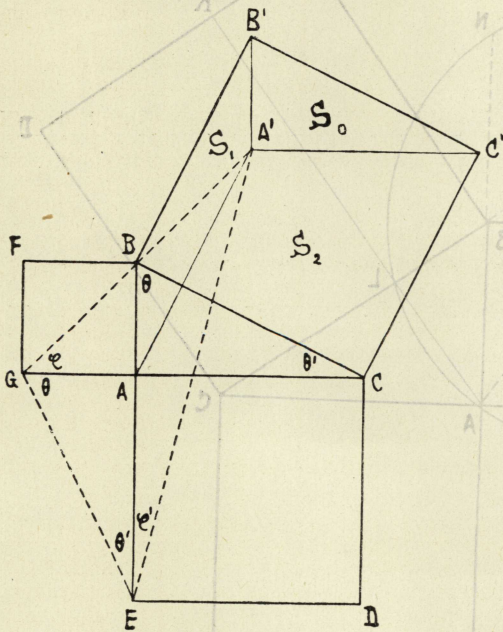


Черт. 2.

AB до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ N , можно написать, что $BM \cdot BL = AB \cdot BN$. Но такъ какъ OB — перпендикуляръ изъ центра круга на хорду AN , то $AB = BN$ и площадь $BK = BE \cdot BL = BC \cdot BL = BM \cdot BL = AB \cdot BN = AB^2 =$ площади AF . А это и слѣдовало доказать.

III.

На катетахъ и гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника ABC строимъ квадраты AF , AD и BC' , затѣмъ, перегнувъ плоскость квадрата BC' по прямой BC , приводимъ его въ нормальное относительно плоскости двухъ другихъ квадратовъ положеніе. Проведемъ черезъ двѣ пары пересѣкающихся прямыхъ AB , BB' и AC , CC' по плоскости, а черезъ $B'C'$ —плоскость, параллельную плоскости ABC , получимъ прямую треугольную призму, всѣ боковыя ребра которой равны BC ; назовемъ боковыя грани ея соответственно черезъ S_0 , S_1 , S_2 . Кромѣ того, соединивъ прямыми точки A , E , G и A' , мы получимъ прямоугольные треугольники $AA'G$, $AA'E$ и AEG , при чемъ послѣдній равенъ треугольнику ABC .



Черт. 3.

Такъ какъ грань S_0 можно разсматривать, какъ проекцію граней S_1 и S_2 на плоскость квадрата BC' , то между этими величинами существуетъ соотношеніе:

$$S_0 = S_1 \cos \theta + S_2 \cos \theta', \quad (1)$$

гдѣ θ , θ' —углы наклоненія плоскостей BA' и CA' къ плоскости BC' . Но

$$\begin{aligned} S_1 &= AB \cdot AA' = \\ &= AB \cdot AG \operatorname{tg} \varphi = AB^2 \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S_2 &= AC \cdot AA' = \\ &= AC \cdot AE \operatorname{tg} \varphi' = AC^2 \operatorname{tg} \varphi'; \end{aligned}$$

слѣдовательно, равенство (1) принимаетъ видъ:

$$S_0 = BC^2 = AB^2 \operatorname{tg} \varphi \cos \theta + AC^2 \operatorname{tg} \varphi' \cos \theta'. \quad (2)$$

Принимая во вниманіе, что

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \theta = \frac{AA'}{AG} \cdot \frac{AG}{GE} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi' \cdot \cos \theta' = \frac{AA'}{AE} \cdot \frac{AE}{GE} = 1,$$

находимъ, что $BC^2 = AB^2 + AC^2$, что и требовалось доказать.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Строение фосфоресцирующих тѣлъ. Уже давно существуетъ предположеніе, что фосфоресцирующее тѣло представляетъ твердый растворъ фосфора вѣ твердомъ разжижителѣ. Исслѣдованія М. Брунигауза (M. Bruninghaus) недавно подтвердили и дополнили эту гипотезу.

Прежде всего установлено, что простого соприкосновенія двухъ тѣлъ недостаточно для того, чтобы получить фосфоресцирующую смѣсь. Если, на примѣръ, растереть въ ступкѣ извѣсть съ 0,01 окиси марганца, то полученная смѣсь не фосфоресцируетъ; фосфоресценція красновато-оранжеваго цвѣта появляется въ томъ случаѣ, если эту смѣсь прокатить. Это накаливаніе даетъ возможность названнымъ двумъ веществамъ диффундировать другъ въ друга и установить, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторыхъ точкахъ состояніе растворенности.

Можно, впрочемъ, считать вѣроятнымъ, что взаимное диффундированіе двухъ твердыхъ тѣлъ подѣ дѣйствіемъ теплоты будетъ происходить тѣмъ легче, чѣмъ болѣе тѣсныя отношенія изоморфизма представляютъ они между собою. Дѣло въ томъ, что изоморфизмъ является для кристалловъ эквивалентомъ растворимости во всѣхъ пропорціяхъ твердаго тѣла въ жидкости или двухъ жидкостей между собою.

Большая часть извѣстныхъ фактовъ подтверждаютъ это предположеніе. Такъ, хромоокислый алюминій, сильно прокаленный, даетъ прекрасную фосфоресценцію: полуторная окись хрома изоморфна съ глиноземомъ. Среди рѣдкихъ земель слѣдующія тѣла: празеодимъ, самарій, европій, гадолиній, тербій, диспрозій, эрбій, растворенные въ извѣсти, сѣрноокисломъ кальціи или плавиковомъ шпатѣ, въ гадолинитѣ или сѣрноокисломъ гадолинитѣ, въ иттриитѣ или сѣрноокисломъ иттрии или, наконецъ, въ глиноземѣ, развиваютъ чрезвычайно яркія фосфоресценціи съ очень чистыми оттѣнками и съ великолѣпными, очень характерными спектрами. И вотъ, слѣдуетъ замѣтить, что различныя рѣдкія земли изоморфны между собой и, слѣдовательно, съ иттриитомъ и гадолинитомъ; кромѣ того, онѣ обладаютъ свойствами, промежуточными между глиноземомъ и извѣстью, и представляютъ различныя степени родства съ этими двумя тѣлами.

Но не всѣ твердые растворы обладаютъ способностью фосфоресцировать, даже если они содержатъ тѣло, способное къ самосвѣщенію. Такъ, бура легко растворяетъ окиси металловъ; можно было бы ожидать, что перлы марганцово-кислой буры, которые представляютъ твердые или совершенные растворы, являются прекрасными фосфоресцирующими тѣлами. Однако, перлы буры и окиси марганца въ пропорціяхъ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ не обнаружили никакой фосфоресценціи подѣ дѣйствіемъ катодныхъ лучей. Съ другой стороны, стекла, которыя также очень хорошо растворяютъ различныя окиси, даютъ фосфоресценціи, которыя всегда гораздо менѣе интенсивны, чѣмъ, на примѣръ, фосфоресценціи окисей или сѣрнистыхъ соединений щелочно-земельныхъ металловъ.

Такимъ образомъ, растворяющая сила разжижителя является необходимымъ, но не достаточнымъ условіемъ для полученія яркой фосфоресценціи. Что же еще нужно? Иначе говоря, каковы тѣ свойства, которыя общи всѣмъ разжижителямъ, кромѣ ихъ растворительной способности, и каковы общія свойства хорошихъ растворителей (бура), которые оказываются плохими разжижителями?

Можно замѣтить, что легко плавящіяся щелочныя и щелочно-земельныя соли, какъ, на примѣръ, бура, являются также хорошими проводниками электрическаго тока при относительно низкихъ температурахъ. Напротивъ, щелочно-земельныя окиси и сѣрныя соединенія, представляющія собою хорошіе

разжижители, очень мало проводят электричество. Наконец, стекла, занимающія промежуточное мѣсто между этими двумя рядами тѣлъ, какъ по проводимости, такъ и по составу, не являются также ни хорошими ни плохими разжижителями. И говоря вообще, всѣ обстоятельства, которыя уменьшаютъ электрическое сопротивление разжижителя, равнымъ образомъ ослабляютъ и фосфоресценцію.

Такимъ образомъ, фосфоресцирующими веществами служатъ твердые растворы фосфорогеновъ въ разжижителяхъ, являющихся изоляторами электричества.

Въ произведеніи спектра фосфоресценціи главную роль играетъ фосфорогенъ. Такъ, замѣчается близость между цвѣтами фосфоресценціи марганца (преобладаніе краснаго и зеленаго) и цвѣтами солей этого металла. И аналогичныхъ фактовъ существуетъ множество.

Глубокое изученіе различныхъ случаевъ фосфоресценціи показало г. Бруннгаузу, что въ обычныхъ предѣлахъ наблюденія фосфорогены поглощаютъ свѣтъ, а разжижители прозрачны; свѣтъ, исходящій изъ матеріи, образованъ лучами, для которыхъ фосфорогенъ относительно прозраченъ. Эта гипотеза въ достаточной степени объясняетъ необходимость фосфорогена и разжижителя въ составѣ фосфоресцирующихъ тѣлъ: разжижитель одинъ, вещество прозрачное, не можетъ испускать лучей; фосфорогенъ, поглощающій свѣтловые лучи, можетъ, вѣроятно, и одинъ испускать ихъ, но испускаемый свѣтъ оказывается поглощеннымъ болѣе поверхностными слоями, слишкомъ непрозрачными; когда къ разжижителю присоедиляютъ фосфорогенъ во все болѣе большее количество, лучеиспусканіе проходитъ черезъ maximum (законъ optimum'a).

Отсюда, въ концѣ концовъ, вытекаетъ слѣдующее заключеніе: фосфоресцирующее тѣло образовано свѣтопоглощающимъ тѣломъ (фосфорогенъ), въ незначительномъ количествѣ растворенномъ въ прозрачномъ и изолирующемъ тѣлѣ (разжижитель).

Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка 22 апрѣля 1911 г.

Е. С. Томашевичъ сдѣлалъ докладъ: „Первые шаги на пути къ прохожденію курса дифференціального исчисленія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ“ *).

По поводу прочитаннаго сообщенія нѣкоторыми членами было указано на неудобство допускаемаго референтомъ смѣшенія символовъ дифференціального и разностнаго исчисленія, а также на затруднительность разъясненія учащимся трактуемыхъ понятій ранѣе ознакомленія ихъ съ графиками. Б. К. Млодзѣевскій находилъ не вполне удачной и самую идею вывода понятія о производной изъ опыта, такъ какъ въ дѣйствительности нельзя наблюдать при физическихъ явленіяхъ перехода къ предѣлу. Употребленіе таблицъ для ознакомленія учащихся съ дифференціальнымъ исчисленіемъ является поэтому, по мнѣнію Б. К. Млодзѣевскаго, нефлесообразнымъ и должно быть замѣнено ознакомленіемъ ихъ съ графическимъ представленіемъ функций и съ понятіемъ о непрерывномъ измѣненіи.

В. П. Свѣнцицкій прочелъ сообщеніе: „О постановкѣ преподаванія математики въ среднихъ русскихъ техническихъ училищахъ“.

*) Этотъ докладъ будетъ помѣщенъ въ № 547 „Вѣстника“.

Докладъ составленъ по плану Международной Комиссiи по реформѣ преподаванiя математики. Въ первой части его референтъ подробно изложилъ исторiю возникновенiя и развитiя въ Россiи средняго техническаго образованiя. Далѣе было разсмотрѣно современное положенiе среднихъ техническихъ учебныхъ заведенiй, при чемъ референтъ отмѣтилъ нѣкоторые существенные недостатки въ учебныхъ планахъ и въ постановкѣ преподаванiя, препятствующiя этимъ заведенiямъ въ достиженiи ихъ учебныхъ задачъ. Въ заключенiе докладчикъ разсмотрѣлъ программы по математикѣ промышленныхъ и техническихъ училищъ, а также сообщилъ свѣдѣнiя о методахъ преподаванiя математики и соприкасающихся предметовъ.

РѢШЕНIЯ ЗАДАЧЪ.

№ 344 (5 сер.). Дана сумма S площадей трехъ треугольниковъ, имѣющихъ данныя основанiя a, b, c . Определить минимумъ суммы площадей квадратовъ, построенныхъ на высотахъ этихъ треугольниковъ.

Называя соотвѣтственно черезъ x, y, z высоты треугольниковъ съ основанiями a, b, c , а черезъ u — сумму площадей квадратовъ, построенныхъ на этихъ высотахъ, имѣемъ:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

и по условiю:

$$ax + by + cz = 2S. \quad (2)$$

Пользуясь тождествомъ:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2,$$

находимъ [см. (1), (2)]:

$$u(a^2 + b^2 + c^2) = 4S^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2, \quad (3)$$

откуда видно, что выраженiе $u(a^2 + b^2 + c^2)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и u достигаетъ minimum'a при соблюденiи условiй $bz - cy = cx - az = ay - bx = 0$,

равносильныхъ уравненiямъ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Изъ этихъ уравненiй [см. (1)] находимъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2},$$

откуда

$$x = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{2bS}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{2cS}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (4)$$

Итакъ, сумма $x^2 + y^2 + z^2$ площадей разсматриваемыхъ квадратовъ достигаетъ minimum'a [см. (3)] $\frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ при значенiяхъ высотъ x, y, z , определяемыхъ формулами (4).

Р. Витвинскiй (Одесса); Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 349 (5 сер.). Доказать, что уравнение

$$x^3 + 3px + 1 = 0$$

не может иметь рациональных корней при p целом и неравном нулю.

Пусть данное уравнение имеет рациональный корень. Обозначим этот корень через $\frac{y}{z}$, где y и z суть целые взаимно-простые числа. Тогда

$$\frac{y^3}{z^3} + 3p \frac{y}{z} + 1 = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{y^3}{z} + 3pyz + z^2 = 0. \quad (1)$$

Из равенств (1) вытекает, что $\frac{y^3}{z}$ есть число целое, что возможно лишь при $z = 1$, так как y и z суть числа взаимно простые. Полагая в равенств (1) $z = 1$, имеем: $y^3 + 3py + 1 = 0$, откуда $y^2 + 3p + \frac{1}{y} = 0$, а потому $\frac{1}{y}$ есть число целое, что возможно лишь при $y = \pm 1$. Но ни одно из чисел ± 1 не удовлетворяет данному уравнению при p целом и неравном нулю. Действительно, при $y = 1$ имеем: $1^3 + 3p \cdot 1 + 1 = 3p + 2$, что могло бы равняться нулю лишь при $p = -\frac{2}{3}$, а при $y = -1$ имеем: $(-1)^3 + 3p \cdot (-1) + 1 = -3p$, что может равняться нулю лишь при $p = 0$. Итак, данное уравнение не имеет рациональных корней.

А. Фрумкин (Одесса); И. Чемисов (Никольск-Уссурийский).

№ 350 (5 сер.). Углы некоторого четырехугольника образуют арифметическую прогрессию, разность которой (в радиантах) равна $\frac{\pi}{5}$. Доказать, что каждый из углов этого четырехугольника может быть разделен с помощью циркуля и линейки на три равные части.

Предполагая, что искомый четырехугольник выпуклый, и называя наименьший его угол через x , составим сумму четырех его углов по формуле арифметической прогрессии. Тогда найдем, согласно с условием:

$$\frac{\left(2x + \frac{3\pi}{5}\right) \cdot 4}{2} = 2\pi,$$

откуда $x = \frac{\pi}{5}$, или, в градусной мере, $x = 36^\circ$. Итак, углы четырехугольника суть $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$. Построив в некотором круге центра O сторону AB правильного вписанного пятиугольника, отложим на меньшей из дуг AB дугу AC в 60° (для чего достаточно отложить в круг хорду AC , равную радиусу). Тогда $\angle COB = \frac{360^\circ}{5} - \frac{360^\circ}{6} = 12^\circ$, что составляет треть наименьшего угла рассматриваемого четырехугольника; удвоив, утроив и учетверив угол COB , построим трети его остальных углов.

А. Фрумкин (Одесса); И. Чемисов (Никольск-Уссурийский); Б. Щигелев (Варшава); Л. Богданович (Ярославль); В. Моргулев (Одесса).

№ 351 (5 сер.). Пусть a, b, c суть соответственно середины сторон BC, CA, AB некоторого треугольника ABC и пусть H и h суть соответственно точки встречи высот треугольников ABC и abc . Доказать, что общий центр тяжести G обоих треугольников ABC и abc лежит на прямой Hh и что $GH = 2Gh$.

Стороны ca, ba, cb треугольника abc параллельны, как известно, соответственно сторонам AC, AB, BC треугольника ABC . Таким образом, фигуры $Babc$ и $Cbca$ суть параллелограммы, а потому прямые Bb и Cc пересекают прямые ac и ab соответственно в их серединах O и O' ; следовательно, BO и CO' суть медианы треугольника abc , и точка встречи G медиан треугольника ABC , т. е. его центр тяжести, есть также точка встречи медиан и центр тяжести треугольника abc . Из подобия треугольников ABC и abc вытекает подобие треугольников BHC и bhc , при чем

$$BH = 2bh, \quad (1)$$

так как $BC = 2bc$ и стороны BH и bh являются сходственными. Кроме того, по свойству центра тяжести

$$BG = 2bG, \quad (2)$$

и прямые BH и bh , перпендикулярные соответственно к параллельным прямым AC и ca , параллельны, откуда

$$\angle Gbh = \angle GBH. \quad (3)$$

Из равенств (1), (2), (3) вытекает подобие треугольников Gbh и GBH , откуда $GH = 2Gh$ и $\angle BGH = \angle bGh$, а потому точки h, G и H лежат на одной прямой.

И. Чемисов (Никольск-Уссурийский); Л. Богданович (Ярославль); В. Моргулев (Одесса).

№ 352 (5 сер.). Доказать, что число $10^n + 18n - 28$ при всяком n целом и неотрицательном n делится на 27 без остатка.

Преобразовывая $10^n + 18n - 28$ с помощью формулы бинома последовательно к виду:

$$\begin{aligned} 10^n + 18n - 28 &= (1 + 3^n)^n + 18n - 28 = 1 + 3^n + 3^2P + 18n - 28 = \\ &= 9n + 18n - 27 + 27 \cdot 3P = 27n - 27 + 27 \cdot 3P = 27(3P + n - 1), \end{aligned}$$

где P есть надлежащее целое число, мы видим, что данное выражение кратно 27 при всяком n целом и неотрицательном значении n .

А. Фрумкин (Одесса); Г. Варкентин (Бердянск); М. Добровольский (Сердобск); И. Чемисов (Никольск-Уссурийский); Б. Щигелев (Варшава); М. Пистрак (Лодзь); Л. Богданович (Ярославль); В. Моргулев (Одесса).

№ 354 (5 сер.). Данный тетраэдр $ABCD$ пересечь плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам AC и BD так, чтобы площадь сечения была наибольшей.

Сбокущая плоскость P не может быть параллельна грани ABD , так как в противном случае прямая AC , пересекающая эту грань, пересекла бы и плоскость P , и последняя не была бы параллельна ребру AC .

Итакъ, плоскость P пересѣкаетъ грань ABD по нѣкоторой прямой l , параллельной прямой BD , такъ какъ, по условію, плоскость P параллельна прямой BD . Пусть прямая l встрѣчаетъ ребра AB и AD соответственно въ точкахъ b и d ; b и d суть точки встрѣчи плоскости P и реберъ AB и AD , причемъ $bd \parallel BD$, такъ какъ bd есть не что иное, какъ прямая l . Такимъ же образомъ убѣждаемся, что и ребра BC и CD пересѣкаются съ плоскостью P соответственно въ точкахъ b' и d' , причемъ $b'd' \parallel BD$, и точно такъ же докажемъ, что $bb' \parallel dd' \parallel AC$. Итакъ, грани тетраэдра пересѣкаются плоскостью P по прямымъ bd , dd' , $d'b'$, $b'b$, образующимъ параллелограммъ, пары сторонъ котораго bd , $b'd'$ и bb' , dd' параллельны соответственно ребрамъ BD и AC . Полагая $bd = x$, $bb' = y$, $BD = a$, $AC = \beta$, называя уголъ реберъ AC и BD черезъ ϑ и обозначая площадь параллелограмма $bdd'b'$ черезъ z , имѣемъ:

$$z = xy \sin \vartheta, \quad (1)$$

$$\frac{bd}{BD} = \frac{x}{a} = \frac{Ab}{AB}, \quad \frac{bb'}{AC} = \frac{y}{\beta} = \frac{Bb}{AB},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = \frac{Ab}{AB} + \frac{Bb}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Итакъ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 1. \quad (2)$$

Записавъ равенство (1) въ видѣ $z = a\beta \sin \vartheta \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{\beta}$ и замѣчая, что $a\beta \sin \vartheta$ есть величина постоянная, и что [см. (2)] сумма сомножителей $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{\beta}$ остается также постоянной, мы видимъ, что z достигаетъ maximum'a при

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{\beta}. \quad (3)$$

Рѣшая систему уравненій (2) и (3), находимъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{bd}{BD} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{bb'}{AC} = \frac{1}{2},$$

откуда вслѣдствіе подобія паръ треугольниковъ Abd , ABD и Bbb' , BAC вытекаетъ, что искомая плоскость проходитъ черезъ середины реберъ AB , AD , BC , CD .

М. Добровольскій (Сердобскъ); Л. Богдановичъ (Ярославль); В. Моргулевъ (Одесса).

Выходить 2-мъ исправленнымъ и дополненнымъ изданіемъ :

ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ КАЛЕНДАРЬ-СПРАВОЧНИКЪ

ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ на 1911—12 учебный годъ.

составленъ многими преподавателями

подъ общей редакціей **С. А. Ананьина** и **М. Л. Цитропа**.

1-я часть. ЗАПИСНАЯ КНИЖКА и КАЛЕНДАРЬ.

По сравненію съ первымъ изданіемъ вдвое увеличено число страницъ для класснаго журнала и количество чистой бумаги.

2-я часть. НАСТОЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ СПРАВОЧНИКЪ.

I. Библиографическій отдѣлъ. а) Литература по вопросамъ воспитанія. б) Литература по отдѣльнымъ предметамъ обученія (методика, книги научнаго содержанія для учителя, книги и пособія для учениковъ). в) Справочно-библиографическіе указатели. г) Списки книгъ, одобренныхъ Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Пр.

По сравненію съ первымъ изданіемъ этотъ отдѣлъ совершенно переработанъ и значительно пополненъ, введены рецензіи лучшихъ и наиболѣе распространенныхъ учебниковъ и др. книгъ; важнѣйшіе отдѣлы разработаны подъ совмѣстной редакціей 2-хъ лицъ.

II. Различныя справочныя свѣдѣнія. Объ учрежденіи учительскихъ обществъ и кассъ. Педагогическія учебныя заведенія. Учебно-вспомогательныя учрежденія. О школьныхъ дачахъ. О прохожденіи учебной службы. Объ экскурсіяхъ учащихся. Лѣтній отдыхъ учителей. Краткія статистическія свѣдѣнія. Метрологія.

Дополненія : Хроника узаконеній и распоряженій за послѣдній годъ. Правила для молодыхъ учителей и др.

Цѣна за обѣ части 1 р. 10 к.

Выписывать можно черезъ каждый книжный магазинъ.—Главный складъ : **Кіевъ, Александровская, 27—Издательство „Сотрудникъ“.**

Въ непродолжительномъ времени выйдетъ въ свѣтъ :

А. А. МАЙКЕЛЬСОНЪ.

СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ И ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ

Перевела **В. О. Хвольсонъ**

подъ редакціей и съ дополненіями

заслуж. проф. **О. Д. Хвольсона.**

Около 9 печатн. листовъ, съ 108 черт. и тремя цвѣтными таблицами.

Содержаніе : Лекція I. Волновое движеніе и интерференція. Лекція II. Сравненіе микроскопа и телескопа съ интерферометромъ. Лекція III. Примѣненіе методовъ интерференціи для измѣренія разстояній и угловъ. Лекція IV. Примѣненіе методовъ интерференціи въ спектроскопіи. Лекція V. Свѣтотыя волны, какъ единицы длины. Лекція VI. Изслѣдованіе вліянія магнетизма на свѣтотыя волны при помощи интерферометра и ступенчатой рѣшетки (эшелона). Лекція VII. Приложенія интерференціоннаго метода въ астрономіи. Лекція VIII. Эѳиръ.

Дополнительныя статьи проф. О. Д. ХВОЛЬСОНА:

1) О диффракціи. 2. Интерференціонныхъ полосахъ. 3. Нѣсколько словъ о спектральномъ анализѣ. 4. Современное положеніе вопроса объ эѳирѣ. 5. Другой интерференціонный способъ изслѣдованія строенія спектральныхъ линій.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не
менѣ 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премию. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляются настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн., город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку

Важнѣйшія статьи, помѣщенныя въ 1910 г.

44-ый семестръ.

Прив.-доц. С. О. Шатуновскій. О построеніяхъ, производимыхъ циркулемъ и линейкой. *Н. Извольскій.* О биссектрисахъ треугольника. *Проф. Б. К. Млодзневскій.* О четырехугольникѣ, имѣющемъ при данныхъ сторонахъ наибольшую площадь. *К. Ивановъ.* Практическія занятія по физикѣ въ германской средней школѣ. *Проф. Д. Синцовъ.* Замѣтка по вопросу о трисекціи угла. *Н. Васильевъ.* Нѣкоторые свойства вращающагося твердаго тѣла. *А. Толлосъ.* Броуновское движеніе. *А. Филипповъ.* Дѣленіе на 9. *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ. *Л. Мандельштамъ* и *Н. Папалекси.* Основы безпроводной телеграфіи. *Е. Томашевичъ.* О биссектрисахъ треугольника. *Проф. Д. Мордухай-Болтовскій.* О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью линейки при условіи, что дана неизмѣнная дуга круга съ центромъ. *М. Планкъ.* Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *Г. Е. Бёкке.* Генезисъ минераловъ. *К. Лебединцевъ.* Еще къ вопросу объ ирраціональныхъ числахъ. *Прив.-доц. А. А. Дмитровскій.* Приближенное рѣшеніе задачи объ удвоеніи куба. *Т. Арльтъ.* Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій.

45-ый семестръ.

Проф. Ф. Клейнъ. О преподаваніи геометріи. *Т. Ниттгаммеръ.* Методы и новѣйшіе результаты опредѣленія силы тяжести. *Н. Васильевъ.* Объ устойчивости велосипеда въ движеніи. *В. Даватицъ.* О построеніи кривой $x^y = y^x$. *А. Филипповъ.* Умноженіе натуральныхъ чиселъ. *Э. Маундеръ.* „Каналы“ Марса. *Проф. Б. Донатъ.* Волчокъ и его будущее въ техникѣ. *І. И. Чистяковъ.* Рѣшеніе одного трансцендентнаго уравненія. *Проф. Э. Конъ.* Пространство и время съ точки зрѣнія физики. *А. Толлосъ.* Наблюденіе іоновъ въ микроскопѣ и опредѣленіе элементарнаго электрическаго заряда. *К. Гагге.* Построеніе правильнаго семнадцатигульника. *Прив.-доц. В. В. Бобынинъ.* Исторія первоначальнаго развитія численія дробей. *С. Годъ.* Задачи точной астрономіи. *Проф. І. Ценнекъ.* Утилизанція атмосфернаго азота при помощи вольтовой дуги. *І. Левинъ.* Нѣкоторые соотношенія въ прямоугольномъ треугольникѣ. *Ф. Генкель.* Эволюція звѣздъ и теорія захвата. *А. Виттингъ.* Между дѣломъ и шуткой въ области чиселъ.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ **5% уступки.**

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.