

№ 525.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIV-го Семестра № 9-й.

ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1910.

<http://vofem.ru>

„СОВРЕМЕННЫЙ МІРЪ“

№ 11.

Содержаніе: Левъ Николаевичъ Толстой. I отд.: „Деревня“ (пов.) Ив. Бунина; „Улица“ (пов.) С. Юшкевича; „Признаніе“ (разск.) А. Федорова; „Безплодная“ (ром.) Д. Ришъ; „Африканскіе нѣчи“ (разск.) Г. Бессеиеръ; „П. Г. Чернышевскій и учителя его мысли“ Евг. Ляцкаго; „Императоръ Александръ I“ Н. Рожкова; „И да здравствуетъ весь міръ!“ (О Левѣ Толстомъ) В. Вересаева; СТИХОТВОРЕНІЕ А. Федорова. II отд.: „Французская биржа и русскія цѣнности“ Г. Алексѣева; „Письма съ Дальняго Востока“ Старога сотрудника; „Искусство на выставкѣ въ Брюсселѣ“ Я. Тугендхольда; „Магдебургскій партейтагъ“ В. Майскаго; „Въ подпольѣ“ Вл. Кранихфельда; „Потѣшное дѣло“ І. Ларскаго; „Родныя картинки“ А. Яблоновскаго; „Стачка желѣзнодорожниковъ во Франціи“ К. Вейдемюллера; „Наша средняя школа“ Г. Гордона; „Уходъ Л. Н. Толстого“ Ник. Юрданскаго; „П. Д. Боборыкинъ“ Вл. Кранихфельда; „Нѣмецкая книжка объ интеллигенціи“ Н. Троцкаго. Критика и библіографія. Новыя книги. Объявленія.

Открыта подписка на 1911 годъ.

Условія подписки (съ дост. и пер.) годъ—9 р.; полгода—4 р. 50 к.; на 4 мѣс.—3 р. Заграницу: 12 р. годъ и 6 р. полгода. Безъ доставки въ Спб. 8 р. годъ и 4 р. полгода.

Проспекты высылаются по первому требованію.

Спб., Надеждинская, 41.

34-й ГОДЪ ИЗДАНІЯ.

ЖУРНАЛЪ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLEMENTAIRES.

Выходитъ въ Парижѣ 1-го и 15-го каждого мѣсяца, кромѣ августа и сентября. Подписка открыта цѣлый годъ, но подписной годъ считается съ 1 октября: лица, подписывающіяся послѣ этого срока, получаютъ всѣ вышедшіе номера. Подписная плата для Россіи: 2р. 25к. Деньги высылаются переводомъ, сопровождаемымъ отдѣльнымъ открытымъ письмомъ. Писать можно по-русски.

Журналъ предназначенъ для учениковъ высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для готовящихся въ высшія учебныя заведенія. Онъ печатаетъ научныя статьи по математикѣ и физикѣ, а также задачи, предлагаемыя во Франціи на экзаменахъ на степенъ бакалавра и на конкурсныхъ экзаменахъ для поступленія въ разныя высшія спеціальныя школы, какъ-то: школа изящныхъ искусствъ, агрономическій институтъ, морское училище, учительскіе институты, школы промысл., физики и химіи и т. п. Лучшія рѣшенія предлагаемыхъ въ журналѣ задачъ печатаются съ указаніемъ фамилій рѣшившихъ. Всѣ статьи и задачи сопровождаются чертежами.

Помимо этого журнала, фирма издаетъ два другихъ математическихъ журнала: L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE, для учениковъ 3-го, 4-го и 5-го классовъ среднихъ и LA REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES для учащихся высшихъ учебныхъ заведеній. У ней же можно достать журналъ, всѣ статьи котораго сопровождаются почти дословнымъ переводомъ на русскій языкъ. Пробные номера всѣхъ журналовъ, а также полный каталогъ нашихъ изданій высылаются бесплатно.

АДРЕСЪ: VUIBERT et NONY, 63, Boulevard Saint-Germain PARIS, 5e.

Вѣстникъ Опытной Физики

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ГОРОДСКАЯ
20. ДЕК. 1910
ПУБЛИЧНАЯ БИБЛИОТЕКА



№ 525.



Содержаніе: Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію. *М. Планка.* (Окончаніе). — Международная Коммиссія по преподаванію математики. Математика на выставкѣ въ Брюссель. *Проф. Д. Синцова.* (Окончаніе). — О вписанныхъ четырехугольникахъ. *Д. Ефремова.* (Продолженіе). — Опыты и приборы: Опредѣленіе коэффициента расширенія воздуха помощью узкой трубки въ 0,5 — 1 мм. въ поперечникѣ. *Е. Б.* — Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка. — Рецензіи: В. П. Вахтсмуть. Методическое руководство къ практическимъ занятіямъ по общей химіи. *М. Л.* — Задачи №№ 354 — 359 (5 сер.) — Рѣшенія задачъ: №№ 200 и 242 (5 сер.). — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Объявленія.

Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.

Рѣчь, произнесенная во второмъ общемъ засѣданіи 82 Съезда Общества Германскихъ Естествоиспытателей и Врачей 23 сент. 1910 г. въ Кенигсбергѣ.

М. Планка.

(Окончаніе*).

Лишь послѣ того, какъ получила господство электромагнитная теорія свѣта, этотъ споръ былъ прекращенъ, какъ не имѣющій значенія; послѣднее, правда, по мнѣнію тѣхъ только физиковъ, которые ограничиваются тѣмъ, что разсматриваютъ свѣтъ, какъ электромагнитное явленіе. Дѣйствительно, задача о механическомъ объясненіи свѣтовыхъ волнъ осталась не рѣшенной; она была лишь отложена впередъ до разрѣшенія гораздо болѣе общей проблемы о свѣдѣніи всѣхъ электромагнитныхъ процессовъ — какъ статическихъ, такъ и динамическихъ — къ движенію. Въ самомъ дѣлѣ, съ дальнѣйшимъ развитіемъ электродинамики интересъ къ этой болѣе общей проблемѣ снова усилился въ значительной степени. Къ разрѣшенію ея стали подходить съ болѣе обширнымъ матеріаломъ, исходя изъ болѣе общихъ соображеній, и вмѣстѣ съ тѣмъ опять возросло значеніе свѣтового эюра; теперь онъ являлся носителемъ не только оптическихъ волнъ, какъ до сихъ

портъ, но всѣхъ вообще электромагнитныхъ явленій, — по крайней мѣрѣ, въ чистомъ вакуумѣ.

Но все было напрасно: опять, несмотря на всѣ усилія, свѣтовой эфиръ никакъ не поддавался механической интерпретаціи. Выяснилось, правда, то обстоятельство, что электрическая энергія и магнитная въ извѣстномъ смыслѣ относятся одна къ другой, какъ кинетическая энергія и потенциальная, и на первыхъ порахъ казалось, что остается только рѣшить вопросъ, электрическую ли энергію слѣдуетъ считать кинетической или магнитную. Первое привело бы въ оптикѣ къ подтвержденію теоріи Френеля, второе говорило бы въ пользу теоріи Неймана. Однако, надежда, что привлечение свойствъ статическихъ и стаціонарныхъ полей доставить необходимую опору для рѣшенія этого вопроса, оказавшагося неразрѣшимымъ въ предѣлахъ оптики, — надежда эта не осуществилась. Наоборотъ, благодаря новой постановкѣ вопроса трудности возросли въ еще большей степени. Были исчерпаны рѣшительно всѣ мыслимыя комбинаціи и предположенія, чтобы раскрыть строеніе свѣтового эира, при чемъ изъ великихъ физиковъ особенно много работалъ въ этомъ направленіи лордъ Кельвинъ, не оставившій этой задачи до самой своей смерти; оказалось, однако, невозможнымъ вывести электродинамическіе процессы въ свободномъ эфирѣ изъ одной цѣльной механической гипотезы, тогда какъ дифференціальныя уравненія Максвелла-Герца представляютъ намъ эти же самые процессы съ удивительною простотою и испытанною точностью вплоть до всѣхъ подробностей. Такимъ образомъ, самые законы были извѣстны до мельчайшихъ подробностей, но механическое объясненіе этихъ простыхъ законовъ ни за что не удавалось; мало того, приходится разъ навсегда отказаться отъ всякой надежды на успѣхъ! По крайней мѣрѣ, я думаю, что не вызову серьезныхъ возраженій со стороны физиковъ, если скажу коротко, что предположеніе о точномъ соотвѣтствіи съ дѣйствительностью простыхъ дифференціальныхъ уравненій Максвелла-Герца для электродинамическихъ процессовъ въ чистомъ эфирѣ исключаетъ возможность механическаго объясненія послѣднихъ. Это положеніе вещей нисколько не измѣняется, конечно, отъ того, что Максвеллъ первоначально пришелъ къ своимъ уравненіямъ съ помощью механическихъ представлений. Это не первый случай, когда логически небезупречный ходъ мыслей приводилъ къ совершенно правильному результату. Кто въ настоящее время желаетъ оставаться при механистическомъ пониманіи электродинамическихъ явленій въ свободномъ эфирѣ, тотъ вынужденъ разсматривать уравненія Максвелла-Герца, какъ не совсѣмъ точныя, и присоединить къ нимъ для точности нѣсколько членовъ низшаго порядка. Заранѣе ничего, конечно, нельзя возразить противъ законности такой точки зрѣнія, и здѣсь еще открывается богатое поле для умозрѣній всякаго рода; но, съ другой стороны, слѣдуетъ принять во вниманіе, что она можетъ быть обоснована лишь опытнымъ путемъ, и что при всякой подобной попыткѣ весьма велика вѣроятность, что къ разнообразнымъ безуспѣшнымъ экспериментамъ, придуманнымъ раньше, прибавится еще одинъ новый. Объ экспериментахъ этого рода я уже говорилъ; объ одномъ

лишь я еще не упомянулъ, и это важнѣйшій изъ всѣхъ, потому что значеніе его совершенно не зависитъ отъ всѣхъ болѣе частныхъ допущеній относительно природы свѣтового ээира.

Дѣйствительно, что бы мы ни думали о строеніи свѣтового ээира, будемъ ли мы представлять его себѣ непрерывнымъ или прерывнымъ, состоящимъ изъ „ээирныхъ атомовъ“ или „нейтроновъ“, во всѣхъ случаяхъ является вопросъ, увлекаетъ ли съ собою движущееся прозрачное тѣло находящійся въ немъ свѣтовой ээиръ, или же свѣтовой ээиръ во время движенія тѣла весь или частью остается въ покоѣ. На этотъ вопросъ можно съ увѣренностью отвѣтить лишь, что свѣтовой ээиръ, во всякомъ случаѣ, не всегда цѣликомъ увлекается тѣломъ, а иногда даже совсѣмъ почти не увлекается. Въ самомъ дѣлѣ, въ движущемся газѣ — на примѣръ, въ движущемся воздухѣ — распространеніе свѣта явно не зависитъ отъ скорости газа, или, выражаясь образно, свѣтъ идетъ противъ вѣтра съ такой же самой скоростью, какъ и по вѣтру. Это доказалъ Физо своими тонкими интерференціонными опытами еще въ серединѣ прошлаго столѣтія. Мы должны, слѣдовательно, представлять себѣ, что ээиръ, въ которомъ распространяются свѣтовые волны, не испытываетъ замѣтнаго вліянія со стороны движущагося воздуха, но остается въ покоѣ въ то время, какъ воздухъ проносится сквозь него. Но въ такомъ случаѣ естественно возникаетъ другой вопросъ: какъ велика скорость, съ которой атмосферный воздухъ проходитъ сквозь ээиръ?

Это и есть тотъ вопросъ, на который до сихъ поръ ни въ одномъ случаѣ никакое измѣреніе не могло дать отвѣта. Окружающій землю атмосферный воздухъ въ общемъ участвуетъ въ движеніи земли; это даетъ по отношенію къ солнцу скорость, величина которой равна около 30 км. въ секунду, а направленіе непрерывно мѣняется въ зависимости отъ времени года. Хотя эта скорость составляетъ всего лишь одну десяти тысячную часть скорости свѣта, мы въ состояніи, однако, придумать оптическіе опыты, которые, судя по всему уровню нашихъ оптическихъ знаній, давали бы возможность измѣрить скорость такого порядка. Изслѣдованія, относящіяся къ измѣренію движенія земли по отношенію къ свѣтовому ээиру, заполняютъ много страницъ физическихъ журналовъ. Но все затраченное остроуміе и экспериментальное искусство разбивалось объ упорство фактовъ. Природа оставалась нѣмой и отказывалась отвѣчать. Нигдѣ внутри нашей атмосферы нельзя было обнаружить никакихъ слѣдовъ вліянія движенія земли на оптическія явленія. Въ этомъ отношеніи особенно поразителенъ результатъ опыта А. Майкельсона. Въ этомъ опытѣ распространеніе свѣта въ направленіи движенія земли сравнивается съ распространеніемъ свѣта поперекъ направленія движенія земли*). Принципъ опыта отличается столь необыкновенной простотой, а методъ измѣренія такой чрезвычайной чувствительностью, что вліяніе движенія земли должно было бы обнаружиться совершенно явственно. Тѣмъ не менѣе ожидаемаго дѣйствія не получается.

*) См. „Мировой ээиръ“ проф. О. Лоджа въ № 520 „Вѣстника“.

Въ виду большихъ трудностей и загадокъ, къ которымъ такое положеніе вещей приводитъ теоретическую физику, вполне естественно является вопросъ, не лучше ли будетъ попробовать подойти къ проблемѣ свѣтового эѳира съ совершенно другой стороны. Не окажется ли тогда, что неудача всѣхъ опытовъ, относящихся къ механическимъ свойствамъ свѣтового эѳира, имѣетъ принципиальное основаніе? Не окажется ли, что всѣ изложенные нами вопросы о строеніи, плотности и упругихъ свойствахъ эѳира, о продольныхъ эѳирныхъ волнахъ, о связи между скоростью эѳира и плоскостью поляризаціи, о скорости земной атмосферы по отношенію къ эѳиру — не имѣютъ съ точки зрѣнія физики никакого смысла? Въ такомъ случаѣ попытки разрѣшить эти вопросы пришлось бы поставить рядомъ, напริมѣръ, съ попытками построить *perpetuum mobile*. Здѣсь мы подошли къ рѣшающему поворотному пункту.

Гельмгольцъ въ своей Кёнигсбергской рѣчи, о которой я упомянулъ въ началѣ, особенно подчеркиваетъ то обстоятельство, что первымъ шагомъ къ открытію принципа энергіи послужило возникновеніе вопроса: какія соотношенія должны существовать между силами природы, если построеніе *perpetuum mobile* слѣдуетъ признать невозможнымъ. Съ такимъ же правомъ можно выставить утвержденіе, что первый шагъ къ открытію принципа относительности совпадаетъ съ вопросомъ: какія соотношенія должны существовать между силами природы, если признать, что невозможно обнаружить въ свѣтовомъ эѳирѣ какія-либо свойства вещества? Къ какимъ выводамъ приведетъ предположеніе, что свѣтотыя волны распространяются черезъ пространство безъ всякаго посредства матеріальнаго носителя? Конечно, въ этомъ случаѣ скорость движущагося тѣла по отношенію къ свѣтовому эѳиру не только была бы недоступна измѣренію, но и вообще была бы понятіемъ безъ опредѣленнаго содержанія.

Само собою понятно, что такой взглядъ совершенно несовмѣстимъ съ механистическимъ міровоззрѣніемъ, и тотъ, кто считаетъ послѣднее постулатомъ физическаго мышленія, никогда не помирится съ теоріей относительности. Люди же, болѣе свободные въ своихъ сужденіяхъ, прежде всего спросятъ, куда ведетъ насъ названный принципъ. Оказывается сейчасъ же, что данная нами чисто отрицательная формулировка новаго принципа пріобрѣтаетъ плодотворное содержаніе лишь при условіи сочетанія этого принципа съ положительнымъ основаніемъ, заимствованнымъ изъ опыта; въ качествѣ такого основанія лучше всего годятся упомянутыя уже нами уравненія Максвелла-Герца для электродинамическихъ процессовъ въ свободномъ эѳирѣ, или, какъ теперь лучше говорятъ, въ чистомъ вакуумѣ. Дѣйствительно, между всѣми срединами вакуумъ является самой простой, какую только можно себѣ представить, и сообразно съ этимъ во всей физикѣ, за исключеніемъ общихъ принциповъ, мы не знаемъ никакихъ другихъ соотношеній, которыя касались бы явленій столь тонкой природы и вмѣстѣ съ тѣмъ были бы вѣрны съ такой точностью, какъ эти уравненія.

Однако, каждой новой истинѣ приходится на первыхъ порахъ бороться съ извѣстными трудностями, такъ какъ въ противномъ случаѣ она была бы открыта гораздо раньше. Въ теоріи относительности главное затрудненіе заключается въ томъ, что слѣдствіе изъ нея приводитъ къ коренному, можно даже сказать, революціонному перевороту въ нашемъ понятіи о времени. Я позволю себѣ ближе выяснитъ этотъ кардинальный пунктъ на одномъ конкретномъ примѣрѣ.

Согласно принципу относительности совершенно невозможно обнаружить въ нашей солнечной системѣ путемъ измѣреній внутри ея какую-либо постоянную скорость всѣхъ составныхъ частей ея. Такая скорость, сколь бы она ни была велика, по существу не могла бы, слѣдовательно, никакимъ образомъ проявиться въ какихъ-либо дѣйствіяхъ внутри системы. Для астронома это положеніе не требуетъ дальнѣйшихъ поясненій, но и физикъ тоже долженъ освоиться съ справедливостью его. Всѣ образованные люди знаютъ, что при наблюденіи какого-либо особеннаго явленія на нѣкоторомъ небесномъ тѣлѣ — на примѣръ, на солнцѣ — это явленіе совершается на солнцѣ не въ тотъ самый моментъ, въ который оно воспринимается наблюдателемъ на землѣ, но между явленіемъ и наблюденіемъ должно пройти нѣкоторое время: промежутокъ, въ теченіе котораго свѣтъ проходитъ разстояніе отъ солнца до земли. Если мы допустимъ, что солнце и земля оба находятся въ покоѣ, — движенія земли вокругъ солнца мы можемъ совершенно не принимать здѣсь во вниманіе, — то этотъ промежутокъ времени составитъ около восьми минутъ. Если же солнце и земля движутся съ одинаковой скоростью, на примѣръ, въ направленіи отъ земли къ солнцу, такъ что земля несется къ солнцу, а солнце съ такой же скоростью уносится отъ земли, то это время короче. Дѣйствительно, послѣ того какъ свѣтовая волна, несущая землѣ вѣсть о происшествіи на солнцѣ, покидаетъ солнце, она пробѣгаетъ свой путь въ междупланетномъ пространствѣ со скоростью свѣта независимо отъ движенія солнца, земля же идетъ навстрѣчу вѣстнику, такъ что эта волна прибудетъ на землю раньше, чѣмъ въ томъ случаѣ, если бы земля ожидала прибытія ея, находясь въ покоѣ. Обратно, если земля движется отъ солнца, а солнце слѣдуетъ за ней на одномъ же разстояніи, то время между моментомъ явленія и моментомъ наблюденія будетъ болѣе продолжительнымъ.

Итакъ, если мы спросимъ, какой же промежутокъ протекаетъ „въ дѣйствительности“ между явленіемъ на солнцѣ и наблюденіемъ на землѣ, то такой вопросъ совершенно равнозначущъ съ вопросомъ: какова же „дѣйствительная“ скорость солнца и земли? Но такъ какъ по принципу относительности послѣдній вопросъ лишенъ всякаго физическаго смысла, то это же самое слѣдуетъ сказать и относительно перваго вопроса, или другими словами: показаніе времени имѣетъ въ физикѣ опредѣленный смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если принято въ расчетъ состояніе скорости наблюдателя, для котораго это показаніе должно имѣть силу.

Это слѣдствіе, согласно которому величина, измѣряющая время, такъ же, какъ и скорость, можетъ имѣть лишь относительное значеніе,

такъ что въ случаѣ двухъ не зависящихъ одно отъ другого событій въ различныхъ мѣстахъ понятія „раньше“ и „позже“ для двухъ различныхъ наблюдателей могутъ быть замѣнены одно другимъ, звучитъ весьма странно для нашего воображенія и кажется чѣмъ-то совершенно непріемлемымъ! Но, быть можетъ, не менѣе непріемлемымъ казалось пять вѣковъ тому назадъ утвержденіе, что направленіе, которое мы называемъ вертикальнымъ, не обладаетъ абсолютнымъ постоянствомъ, но за каждые 24 часа описываетъ въ пространствѣ конусъ. Хотя во многихъ случаяхъ требованіе наглядности является вполне законнымъ, но иногда оно становится вреднымъ препятствіемъ, особенно для проникновенія въ науку новыхъ великихъ идей. Несомнѣнно, что множество плодотворныхъ физическихъ идей выросло на почвѣ наглядныхъ представлений, но не менѣе часто новыя мысли, и при томъ не изъ худшихъ, должны были завоевать себѣ мѣсто лишь въ упорной борьбѣ съ традиционными представленіями.

Каждый изъ насъ, вѣроятно, хорошо еще помнить изъ своего дѣтства, какъ трудно было для нашего дѣтскаго воображенія представить себѣ, что на земномъ шарѣ живутъ люди, обращенные къ намъ ногами, что эти люди не хуже насъ расхаживаютъ по землѣ, не падаютъ съ земного шара внизъ головою и даже не испытываютъ непріятныхъ приливовъ крови къ головѣ. Но если кто-нибудь въ настоящее время выставилъ бы недостаточную наглядность, какъ существенный доводъ противъ относительнаго характера всѣхъ пространственныхъ направленій, то онъ былъ бы, конечно, встрѣченъ насмѣшками. Я не увѣренъ, что черезъ пять вѣковъ послѣ насъ такая же судьба не постигнетъ того, кто вздумаетъ тогда усумниться въ относительномъ характерѣ времени.

Масштабъ для оцѣнки новой физической гипотезы заключается не въ наглядности ея, но въ плодотворности. Если гипотеза оказывается плодотворной, то съ ней осваиваются, и затѣмъ она постепенно сама собой пріобрѣтаетъ извѣстную степень наглядности. Когда электромагнитныя дѣйствія были еще не вполне изслѣдованы, господствовало убѣжденіе, что для полученія нагляднаго представленія о гальваническомъ токѣ, электромагнитныхъ силахъ и магнитныхъ силовыхъ линіяхъ невозможно обойтись безъ образовъ текущей воды, гидравлическихъ насосовъ и натянутыхъ резиновыхъ нитей. Въ настоящее же время электротехники въ большинствѣ случаевъ не хотятъ вовсе знать этихъ несовершенныхъ аналогій, предпочитая въ своей работѣ пользоваться непосредственно электромагнитными представленіями, которые уже стали для нихъ привычными. Мало того, иногда физики прибѣгаютъ, наоборотъ, къ электромагнитнымъ аналогіямъ, чтобы придать большую наглядность сложнымъ случаямъ токовъ въ жидкостяхъ, — напримѣръ, Гельмгольцевымъ вихревымъ движеніямъ.

Что можно сказать въ данномъ отношеніи о теоріи относительности? Она несомнѣнно предъявляетъ силѣ воображенія физиковъ чрезвычайно широкія требованія, но зато методы ея удобны и универсальны и, что важнѣе всего, даютъ вполне опредѣленные результаты, сравнительно легко формулируемые. Изъ пионеровъ въ этой

новой области на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ назвать Гендрика Антона Лоренца, который придумалъ понятіе объ относительномъ или „мѣстномъ“ времени^{*)} и ввелъ его въ электродинамику, хотя и не развилъ его до слишкомъ радикальныхъ выводовъ, затѣмъ Альберта Эйнштейна, который первый нашелъ въ себѣ достаточно смѣлости, чтобы провозгласить относительность всѣхъ показаній времени, какъ универсальный постулатъ, и, наконецъ, Германа Минковского, которому удалось возвести теорію относительности на степень закругленной математической системы.

Не случайно, конечно, что особеннымъ интересомъ эти абстрактныя проблемы пользуются со стороны математиковъ, которые преимущественно и занимаются разработкой ихъ, особенно послѣ того, какъ обнаружилось, что рѣшающую роль въ этой области играютъ совершенно такіе же математическіе методы, какіе были выработаны въ четырехмѣрной геометріи. Но и свободные отъ предразсудковъ чистокровные экспериментальные физики отнюдь не враждебно настроены къ этой теоріи: они спокойно выжидаютъ дальнѣйшаго развитія ея, и вопросъ о своемъ отношеніи къ ней ставятъ въ зависимость лишь отъ тѣхъ результатовъ, которые дастъ экспериментальная провѣрка. Въ этомъ отношеніи слѣдуетъ отмѣтить, что, хотя число физическихъ слѣдствій, вытекающихъ изъ теоріи относительности, весьма велико, однако, провѣрка ихъ требуетъ такой точности измѣреній, которая стоитъ у крайняго предѣла досягаемости экспериментальныхъ инструментовъ. Это обуславливается прежде всего тѣмъ обстоятельствомъ, что скорости тѣлъ, служащихъ намъ для измѣреній, вообще чрезвычайно малы въ сравненіи со скоростью свѣта. Самыя быстрыя движенія мы встрѣчаемъ у электроновъ; поэтому въ области динамики электроновъ слѣдуетъ ожидать первыхъ положительныхъ и надежныхъ результатовъ. Съ другой стороны, съ теченіемъ времени сила инструментовъ возрастаетъ, точность измѣреній повышается и провѣрка теоріи дѣлается болѣе тонкой и глубокой. Въ данномъ случаѣ дѣло обстоитъ совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ приведенномъ нами сравненіи съ фигурой нашей планеты. Если бы радіусъ земли не былъ столь великъ въ сравненіи со всѣми тѣми длинами, съ которыми мы имѣемъ дѣло въ нашихъ опытахъ, то шарообразная форма земли и относительность всѣхъ пространственныхъ направленій несомнѣнно были бы признаны гораздо раньше.

Но значеніе этой дважды указанной мною аналогіи между пространствомъ и временемъ идетъ гораздо глубже. Это больше, чѣмъ аналогія, это — тождественность, по крайней мѣрѣ, въ математическомъ смыслѣ. Главнымъ образомъ, Минковскому мы обязаны доказательствомъ положенія, что, если измѣрять величины времени надлежащей мнимой единицей, то три измѣренія пространства и единственное измѣреніе времени входятъ въ основныя физическіе законы абсолютно симметрическимъ образомъ. Согласно этому, переходъ отъ

*) См. статью Г. Пуанкаре „Новая механика“ въ № 505 „Вѣстника“

одного пространственного направленія къ другому съ математической и физической точки зрѣнія совершенно равносильнъ переходу отъ одной скорости къ другой, и ученіе объ относительномъ значеніи всякаго состоянія скорости (*Geschwindigkeitszustand*) является лишь дополненіемъ къ ученію объ относительности всякаго пространственного направленія. Какъ послѣднее ученіе завоевало себѣ всеобщее признаніе лишь послѣ долгой борьбы, такъ и первое ученіе должно будетъ еще выдержатъ жестокую борьбу, которая въ настоящее время — благодареніе небу! — уже не сопряжена съ опасностью заточенія и казни для поборниковъ новыхъ взглядовъ. Лучшее же средство — можно даже сказать, единственное средство — для ускоренія окончательнаго рѣшенія состоятъ въ томъ, чтобы возможно ближе прослѣдить тѣ выводы, къ которымъ приводятъ новыя идеи; съ этой точки зрѣнія я и прошу судить о моихъ нижеслѣдующихъ соображеніяхъ.

По принципу относительности физическій міръ, доступный нашимъ наблюденіямъ, обладаетъ четырьмя вполне равноцѣнными измѣреніями, которыя могутъ быть замѣнены одно другимъ. Три изъ нихъ мы называемъ пространствомъ, а четвертое временемъ; изъ каждаго физическаго закона можно путемъ замѣны входящихъ въ него міровыхъ координатъ вывести три другихъ закона.

Верховнымъ закономъ физики, вѣнцомъ всей этой системы является — по крайней мѣрѣ, на мой взглядъ — принципъ наименьшаго дѣйствія, содержащій четыре міровыя координаты въ совершенно симметрическомъ расположеніи*). Отъ этого центрального принципа расходятся по четыремъ направленіямъ симметрически въ видѣ лучей четыре совершенно равнозначущихъ принципа, соотвѣтственно четыремъ измѣреніямъ міра; пространственнымъ измѣреніямъ соотвѣтствуетъ тройной принципъ количества движенія, временному измѣренію соотвѣтствуетъ принципъ энергіи. Прежде было бы совершенно невозможно прослѣдить глубокое значеніе и общее происхожденіе этихъ принциповъ столь глубоко, вплоть до самаго корня.

Благодаря новымъ воззрѣніямъ вопросъ объ отношеніи механическаго міровоззрѣнія къ энергетическому тоже получаетъ новое освѣщеніе. Въ самомъ дѣлѣ, какъ энергетическое міровоззрѣніе основывается на началѣ сохраненія энергіи, такъ механистическое міропониманіе основывается на принципѣ количества движенія. Въдѣ три извѣстныхъ Ньютоновы уравненія движенія представляютъ собой не что иное, какъ выраженіе принципа количества движенія въ приложеніи къ матеріальной точкѣ: согласно этимъ уравненіямъ измѣненіе количества движенія равно импульсу силы, тогда какъ по принципу

*) Такъ какъ принципъ наименьшаго дѣйствія обыкновенно выражается интеграломъ времени, то можетъ показаться, что въ этомъ заключается нѣкоторое предпочтеніе времени (передъ другими координатами). Однако, эта односторонность лишь кажущаяся и обусловлена способомъ обозначенія. Дѣйствительно, „количество дѣйствія“ (*Wirkungsquantum* — величина, варіація которой становится равной нулю) какаго-либо физическаго явленія представляетъ собою инвариантъ по отношенію ко всѣмъ Лоренцовымъ преобразованіямъ.

энергіи оно равно работѣ силы. Оба эти міровоззрѣнія, механистическое и энергетическое, страдают, слѣдовательно, извѣстной односторонностью, хотя первое имѣетъ то существенное преимущество, что соотвѣтственно съ векторіальнымъ характеромъ количества движенія оно дастъ три уравненія, энергетическое же даетъ всего лишь одно уравненіе. Сказанное справедливо, понятно, не только для движенія одной лишь матеріальной точки, но и вообще для всякаго обратимаго процесса изъ области механики, электродинамики и термодинамики.

Изъ количества движенія или энергіи движущагося тѣла можно также вывести величину его инертной массы, которая при такомъ способѣ разсматриванія теряетъ свой элементарный характеръ и спускается на степень производнаго, вторичнаго понятія. Дѣйствительно, инертная масса тѣла получается этимъ путемъ, не какъ постоянная, но какъ величина, зависящая отъ скорости^{*)}, при чемъ зависимость эта такого рода, что съ возрастаніемъ скорости тѣла до скорости свѣта инертная масса возрастаетъ безпредѣльно. Поэтому по теоріи относительности вообще невозможно довести скорость тѣла до величины, равной или превышающей величину скорости свѣта. Впрочемъ, положеніе, что инертная масса тѣла не есть величина постоянная, но, строго говоря, зависитъ даже отъ температуры, вытекаетъ совершенно помимо теоріи относительности уже изъ того обстоятельства, что каждое тѣло заключаетъ внутри себя извѣстное количество лучистой теплоты, зависящее отъ температуры; инерцію этой теплоты впервые опредѣлилъ Фрицъ Газенорль (Hasenöhrle).

Теперь является неизбѣжный вопросъ: коль скоро понятіе о матеріальной точкѣ, которое до сихъ поръ всѣ считали основнымъ, теряетъ свойство постоянства и неизмѣняемости, то что же собственно остается субстанціального? гдѣ же тѣ неизмѣняемые строительные элементы, изъ которыхъ сложено все физическое зданіе міра? На это можно отвѣтить слѣдующее: неизмѣняемыми элементами системы физики, основанной на принципѣ относительности, являются такъ называемыя универсальныя постоянныя: прежде всего скорость свѣта въ вакуумѣ, электрическій зарядъ и покоящаяся масса электрона, полученное изъ тепловаго излученія „элементарное количество дѣйствія“, которое играетъ, вѣроятно, фундаментальную роль и въ химическихъ явленіяхъ, постоянныя тяготѣнія и еще многія другія. Эти величины обладаютъ реальнымъ значеніемъ постольку, поскольку ихъ значенія независимы отъ свойствъ, точки зрѣнія и „состоянія скорости“ наблюдателя. Нужно, впрочемъ, имѣть въ виду, что здѣсь еще многое подлежитъ детальному выясненію. Если бы мы были въ состояніи дать удовлетворительный отвѣтъ на всѣ подобные вопросы, то физика не была бы болѣе индуктивной наукой, каковой она навѣрное останется навсегда.

Уже изъ этихъ немногихъ замѣчаній можно видѣть, что принципъ относительности отнюдь не имѣетъ исключительно разрушитель-

*) См. цитированную статью Пуанкаре.

наго и разлагающаго характера, но въ несравненно болѣе высокой степени несутъ съ собой элементы порядка и созиданія: онъ отбрасываетъ въ сторону лишь форму, которая и безъ того уже разрушена подъ напоромъ непрекращающагося расширенія науки. На мѣсто стараго зданія, ставшаго слишкомъ тѣснымъ, онъ воздвигаетъ новое, болѣе просторное и прочное зданіе, которое вмѣщаетъ въ себя всѣ сокровища стараго, — разумѣется, также и всю изображенную мною атомистику, въ измѣненной и болѣе удобной группировкѣ, и заблаговременно оставляетъ опредѣленное мѣсто для тѣхъ сокровищъ, которыя мы вправѣ ожидать отъ будущаго. Онъ удаляетъ изъ міровой картины физики несущественные элементы, привнесенные лишь случайными чертами нашихъ человѣческихъ воззрѣній и привычекъ, и благодаря этому очищаетъ физику отъ антропоморфическихъ ингредіентовъ, возникающихъ изъ индивидуальныхъ особенностей физиковъ; какъ я пытался доказать въ другомъ мѣстѣ, совершенное удаленіе этихъ ингредіентовъ составляетъ настоящую цѣль всякаго физическаго познанія. Передъ изслѣдователемъ, охотно пробирающимся впередъ, открывается величественная перспектива въ необозримую даль: въ ней открываются такія зависимости, о которыхъ въ прежніе періоды не могли имѣть даже никакого представленія; онъ должны были оставаться чуждыми даже для законченной по своей формѣ механики Генриха Герца. Всякій, кто взялъ на себя трудъ углубиться въ логику этихъ новыхъ воззрѣній, долго не сможетъ освободиться отъ исходящаго отъ нихъ очарованія; вполне понятно, что художественную натуру безвременно отнятаго отъ науки Германа Минковского они зажгли яркимъ пламенемъ энтузіазма.

Но физическіе вопросы разрѣшаются не съ эстетическихъ точекъ зрѣнія, а путемъ опытовъ, которые всегда требуютъ прозаической, утомительной, терпѣливой и кропотливой работы. И высокое физическое значеніе принципа относительности сказывается какъ разъ въ томъ, что на цѣлый рядъ физическихъ вопросовъ, которые раньше оставались въ полной темнотѣ, онъ даетъ совершенно точный отвѣтъ, который можно провѣрить съ помощью опытовъ. Поэтому принципъ слѣдуетъ цѣнить, по меньшей мѣрѣ, какъ чрезвычайно плодотворную рабочую гипотезу, въ полную противоположность механическимъ гипотезамъ о свѣтовомъ эфирѣ. Наиболѣе горячій бой завязался теперь въ области динамики электроновъ, которая слѣдалась доступной для болѣе тонкихъ наблюденій благодаря открытію электрическаго и магнитнаго отклоненія свободно летящихъ электроновъ. Въ различныхъ лабораторіяхъ независимо другъ отъ друга усердно работаютъ опытные изслѣдователи и искусные экспериментаторы. Въ началѣ казалось, что результаты измѣреній противорѣчатъ принципу относительности, тогда какъ въ настоящее время стрѣлка весовъ, повидимому, опять склоняется въ пользу нашего принципа, тѣмъ съ большимъ нетѣрпѣніемъ должны мы ожидать исхода этой борьбы!

Глаза множества физиковъ и друзей физики обращены на эти фундаментальные опыты, и точно такъ же наше Общество выразило свой интересъ къ нимъ, удѣливъ часть доходовъ съ капитала имени Тренкле (Trenkle) въ пользу экспериментальнаго изслѣдованія

такого рода. Будемъ надѣяться, что и оно окажетъ существенное содѣйствіе для разрѣшенія этой проблемы.

Къ чему бы ни привело ожидаемое рѣшеніе, — выдержать ли принципъ относительности это испытаніе, или же мы должны будемъ отказаться отъ него, дѣйствительно ли мы находимся у порога совершенно новаго воззрѣнія на природу, или же и новые успѣхи не выведутъ насъ изъ темноты, — ясность должна быть достигнута во всякомъ случаѣ и какой бы то ни было цѣной. Даже разочарованіе, если только оно основательное и окончательное, означаетъ шагъ впередъ, и жертвы, съ которыми сопряженъ отказъ отъ принятой теоріи, щедро окупятся сокровищами вновь приобретеннаго знанія. Смѣю думать, что эти слова вполне соответствуютъ духу нашего общества, которому нужно вѣрить въ особую заслугу, что оно никогда не связывало себя напередъ установленнымъ научнымъ маршрутомъ, и рѣшительно отклоняло всякія попытки въ этомъ направленіи. Мы не должны сомнѣваться, что такъ останется и въ будущемъ, и что нашъ лозунгъ какъ въ физикѣ, такъ и во всемъ естествознаніи будетъ неустанно вести насъ впередъ къ свѣту истины, что бы насъ ни ожидало.

Международная Коммиссія по преподаванію математики.

Математика на выставкѣ въ Брюсселѣ.

Съѣздъ Международной Коммиссіи по преподаванію математики 9—10-го августа и конференціи въ нѣмецкомъ отдѣлѣ 11—12-го августа. н. ст.

(Окончаніе *).

Но вернемся къ Брюссельскому съѣзду. Въ закрытомъ засѣданіи съѣхавшимися членами были подведены итоги работамъ въ различныхъ странахъ, и итоги эти оказались въ общемъ удовлетворительными.

Въ заключеніе проф. Беке (Веке, Венгрія), одинъ изъ горячихъ поборниковъ введенія началъ высшей математики въ курсъ средней школы, поднялъ вопросъ, въ какихъ странахъ эти понятія официально введены въ программы среднего образованія. Изъ разъясненій присутствовавшихъ выяснилось, что это имѣетъ мѣсто во Франціи съ 1902 г., гдѣ эти начала, по словамъ Маротта, вполне укоренились и даютъ прекрасные результаты, въ Швейцаріи (въ 6 гимназіяхъ проходитъ дифференціальное и интегральное исчисленіе, въ 6 другихъ — только дифференціальное), въ Австріи, Баденѣ, Баваріи и Гамбургѣ — въ реальныхъ училищахъ, въ Россіи — въ военныхъ училищахъ, среднихъ техническихъ школахъ и реальныхъ училищахъ. Отмѣтимъ, что въ Пруссіи учебные планы составлены такъ, что въ послѣднемъ классѣ оставлено достаточно времени для того, чтобы учитель могъ заняться ознакомленіемъ учениковъ съ началами высшей математики, хотя въ программахъ этого и не предписывается.

*) См. „Вѣстникъ“, № 524.

Въ 4-мъ часу въ томъ же Hôtel Ravenstein, старинномъ зданіи XV-го вѣка, 17 лѣтъ назадъ возобновленномъ и служащемъ мѣстопробываніемъ цѣлой серіи ученыхъ обществъ, состоялось публичное засѣданіе, открытое проф. Клейномъ, предоставившимъ слово Т. Кломперсу (T. Klompers) — Directeur général de l'enseignement moyen, который и прочелъ привѣтствіе отъ имени министра des Sciences et des Arts. Указавъ на все растущее значеніе математики въ наукѣ и жизни, Кломперсъ высказалъ убѣжденіе, что въ преподаваніи она получить еще большее значеніе, и что труды Коммисіи окажутся плодотворными для дальнѣйшаго развитія преподаванія. — Профессоръ Ф. Клейнъ поблагодарилъ представителя бельгійскаго правительства за привѣтствіе и въ интересной рѣчи остановился на задачахъ и цѣляхъ Коммисіи. Математика не представляетъ собою чего-либо законченнаго; какъ и всякая другая наука, она непрерывно развивается, какъ съ чисто научной стороны, такъ и со стороны приложений. Но этому развитію науки не отвѣчаетъ такое же развитіе преподаванія ея; до сихъ поръ курсъ средней школы почти тотъ же, что и въ средніе вѣка; но тогда это было послѣднее слово науки, а теперь эта программа отстала на 400 лѣтъ, и мы должны стремиться согласовать и соединить вновь эти *membra disjecta*. Проф. Клейнъ остановился затѣмъ на характеристикѣ работъ различныхъ національных подкоммисій, какъ онѣ выяснились въ предыдущемъ закрытомъ засѣданіи. За рѣчью проф. Ф. Клейна, сказанною по-нѣмцки, выступилъ проф. Г. Феръ и во французской рѣчи резюмировалъ сказанное председателемъ и познакомилъ собраніе съ состояніемъ работъ въ отдѣльныхъ странахъ.

За рѣчью проф. Г. Фера послѣдовало сообщеніе проф. К. Бурле о взаимномъ проникновеніи чистой и прикладной математики въ среднемъ образованіи. Начавъ съ выраженія благодарности отъ имени присутствующихъ членамъ центральнаго Комитета, проф. К. Бурле прочелъ свой докладъ, основная мысль котораго — правда, не новая — заслуживаетъ полнаго сочувствія: чтобы дать мѣсто въ средней школѣ научнымъ завоеваніямъ новаго времени, надо пересмотрѣть традиціонный багажъ и выбросить изъ него все лишнее съ точки зрѣнія дальнѣйшихъ приложений. И въ этомъ отношеніи проф. Бурле идетъ довольно далеко. Къ чему утомлять мозги дѣтей отъ 10 до 13 лѣтъ безконечными варіаціями объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ, къ чему всѣ эти очень изящныя, но совершенно безполезныя предложенія о простыхъ числахъ и періодическихъ десятичныхъ дробяхъ? На что понадобится 99-ти ученикамъ изъ 100 знать, что число разлагается единственнымъ образомъ на первоначальные множители? Все это, по мнѣнію проф. Бурле, должно быть отложено до послѣдняго класса научной секціи нашихъ среднихъ школъ (*1. e. classe de mathématiques élémentaires*). Мѣсто этого надо ввести начала исчисления безконечно-малыхъ. Съ геометрией, по мнѣнію профессора Бурле, дѣло обстоитъ еще хуже. Всѣ попытки приспособить къ силамъ учениковъ начала Евклида безплодны. Нужно оставить старинное зданіе Евклида, какъ монументъ историческій, и построить по новому плану зданіе однородное и отвѣчающее современнымъ потребностямъ. Надо ввести понятіе о перемѣщеніяхъ и,

стало быть, понятіе объ ихъ группахъ; мѣсто постулата Евклида займетъ тогда тотъ фактъ, что поступательныя перемѣщенія образуютъ ихъ инвариантную подгруппу. Такая геометрія болѣе наглядна и доступна начинающему. Въ то же время, примыкая къ обширнѣйшей изъ современныхъ теорій, она открываетъ любознательному ученику завѣсу высшей математики. Границы между математикою чистою и прикладною не существуетъ, — эти науки нераздѣльны; онѣ должны непрестанно другъ другу помогать и другъ друга пополнять; „l'union fait la force“ — красиво закончилъ ораторъ бельгійскимъ девизомъ.

Этою конференціей и закончился съѣздъ членовъ IMUK въ собственномъ смыслѣ слова. Но онъ имѣлъ продолженіе въ видѣ ряда конференцій, устроенныхъ въ германскомъ и французскомъ отдѣлахъ. Нѣмецкій отдѣлъ по образованію былъ одинъ изъ интереснѣйшихъ и поучительнѣйшихъ на выставкѣ. Главное участіе въ организаціи его приняла Пруссія при участіи Саксоніи и Гамбурга. Ограничившись въ противоположность выставкамъ въ Чикаго и Сенъ-Луи, демонстрированіемъ средней и низшей школы, нѣмцы прекрасно использовали отведенныя имъ 23 залы, чтобы дать представленіе о жизни и объ обстановкѣ средней и низшей школы въ Германіи. Немалое значеніе имѣло и изданіе обстоятельнаго двухтомнаго путеводителя. Здѣсь не мѣсто подробно останавливаться на характерныхъ чертахъ современнаго направленія въ развитіи школьной жизни; въ противоположность одностороннему интеллектуальному, господствовавшему въ нѣмецкой школѣ за малыми исключеніями въ продолженіе столѣтій, теперь подъ вліяніемъ Англіи и Америки выступаютъ требованія физическаго развитія, школьной гігіены, развитія эстетическаго чувства, преподаванія ручного труда, (въ особенности въ Volks- u. Fortbildungsschulen), поднятія уровня преподаванія естественныхъ наукъ; занявшіе большое мѣсто на выставкѣ демонстраціонные аппараты и учебныя пособія говорятъ о томъ значеніи, которое руководители школьнаго дѣла въ Германіи придаютъ развитію преподаванія точныхъ наукъ, приобретающихъ и здѣсь, на родинѣ классицизма, равныя права съ науками гуманистическими въ среднемъ образованіи. Не менѣе важно преобразование въ женскомъ среднемъ образованіи, вызванное допущеніемъ женщины къ университетскому образованію и приведшее къ организаціи женскихъ учебныхъ заведеній трехъ типовъ: семинаріи для учительницъ, женской школы и учебнаго заведенія (Studienanstalt), подходящаго по характеру къ мужскимъ заведеніямъ реалистическаго типа. Всѣ эти различные типы и были представлены на выставкѣ.

Но довольно объ учебномъ отдѣлѣ вообще; отмѣтимъ только еще, что въ вестибюлѣ помѣщена была выставка „Die amtliche akademische Auskunftsstelle an der Königlichen Friedrich-Wilhelms Universität zu Berlin“; основанная въ 1904 г. первоначально для ориентировки въ Берлинскомъ университетѣ, его институтахъ и вообще ученыхъ и учебныхъ учрежденіяхъ германской столицы, она расширила свою дѣятельность на всю Германію и даже далѣе — на главнѣйшія культурныя страны. На брюссельской выставкѣ изъ всѣхъ собраній было выставлено по ограниченности мѣста только то, что отно-

сится къ Германіи, съ цѣлью служить дополненіемъ къ экспонатамъ учебнаго отдѣла и помочь ориентироваться во внѣшней организаціи дѣла преподаванія; съ этою же цѣлью выставлены ручная учительская бібліотека, ученическая бібліотека и бібліотека по школьной гігіенѣ. Каталогъ этихъ бібліотекъ составляетъ 2-й томъ „Путеводителя“.

Спеціально по преподаванію математики выставка давала, однако, не особенно много. Въ частности устроители выставки совершенно упустили изъ виду то, что лично меня болѣе всего интересовало, — примѣненіе моделей въ преподаваніи математики.

Этотъ пробѣлъ и былъ возмѣщенъ устроителями конференцій — „Verein'a zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“, поставившими привлечь докладчиковъ, которые бы познакомили съ тѣмъ, что дѣлается въ Германіи для достиженія наглядности въ преподаваніи математики.

Но начнемъ по порядку. Конференціи происходили 11 и 12 августа н. ст. въ нѣмецкомъ павильонѣ, въ залѣ, спеціально устроенной для такихъ собраній и докладовъ и представлявшей сама по себѣ интересный экспонатъ современныхъ приспособленій для научныхъ докладовъ, для демонстрацій съ фонаремъ и т. д. Засѣданіе было открыто президентомъ Verein'a А. Тэромъ (D-r A. Thaer), директоромъ „Oberrealschule am Holstenthor“ въ Гамбургѣ, предоставившимъ слово тайному совѣтнику А. Маттіасу (D-r A. Matthias), одному изъ устроителей отдѣла по образованію, который отъ имени Прусскаго Министерства Народнаго Просвѣщенія привѣтствовалъ собравшихся Членовъ Коммисіи, высказавъ увѣренность въ конечномъ успѣхѣ реформы преподаванія въ духѣ уравниванія правъ школъ всѣхъ типовъ, — прошло время, когда гуманистическая гимназія пользовалась монополіей, когда реальная гимназія была замарашкой. Пусть движеніе еще встрѣчаетъ сопротивленіе, — это сопротивленіе недолговѣчно. Привѣтствовали затѣмъ собравшихся Ploumen (Inspecteur de l'enseignement moyen) отъ имени „Fédération de l'enseignement moyen officiel belge“ и сэръ Грингилль отъ имени Международной Коммисіи. Затѣмъ секретарь отдѣла по образованію Мошъ (D-r Mosch) познакомилъ съ общей организаціей отдѣла и съ цѣлями, которыя поставили себѣ устроители. Присутствующимъ были розданы схематическіе планы выставки; желающіе могли получить и подробный путеводитель.

Затѣмъ выступилъ П. Трейтлейнъ (P. Treutlein), директоръ Real- und Reformgymnasium въ Карлсруэ, на тему о наглядномъ геометрическомъ обученіи („Ueber geometrischen Anschauungsunterricht“), демонстрируя при этомъ свою коллекцію моделей, употребляемую имъ при пропедевтическомъ курсѣ геометріи. Эта обширная коллекція — плодъ его долготѣней педагогической дѣятельности — издается теперь у Тейбнера. Трейтлейнъ высказывается противъ отнесенія стереометріи въ курсъ старшихъ классовъ по Евклиду; онъ вполне сочувствуетъ наиболѣе распространенному въ Италіи фюзіонистскому движенію, сливающему преподаваніе планиметріи и стереометріи. Трейтлейну представляется совершенно непедагогичнымъ начи-

нать прямо съ абстракцій, для которыхъ молодой умъ совершенно еще не созрѣлъ. Говорятъ о неспособности къ математикѣ. Это ошибка. Всѣ ученики способны къ математикѣ. Надо только умѣть взяться. И вотъ съ этой-то стороны и важно примѣненіе моделей, умѣлое пользованіе которыми развиваетъ въ ученикѣ способность представленія геометрическихъ объектовъ и даетъ ему необходимую геометрическую опытность. Теперь никто уже не считаетъ возможнымъ преподавать геометрію, основываясь только на текствъ Евклида. Въ Баденѣ примѣняется система одногодичнаго вводнаго курса, который является самою основою для геометріи. Самыми простыми средствами можно достигать значительныхъ результатовъ. Беремъ кубъ; онъ даетъ матеріалъ для цѣлаго ряда вопросовъ: понятіе о прямой—его ребра, плоскости—его грани, ихъ взаимное положеніе; показываемъ кубы изъ разнаго матеріала, одинаковые по величинѣ и такимъ образомъ подготавливаемъ отвлеченіе, къ которому ученикъ долженъ придти самъ; полезно показать еще и проволочный кубъ, чтобы еще болѣе подчеркнуть, что въ геометріи дѣло идетъ о формѣ; затѣмъ удаляемъ модель и предлагаемъ вопросы, заставляющіе припомнить различные отношенія въ разсмотрѣнномъ тѣлѣ; такъ развивается внутреннее геометрическое воззрѣніе; логическіе элементы вводятся лишь постепенно. Полезно заставлять разыскивать геометрическія фигуры, съ которыми познакомились, въ окружающей насъ обстановкѣ—на матеріяхъ, обояхъ и т. д. Нужно развивать не только логику, но и эстетическое чувство (что, по мнѣнію докладчика, влияетъ и на развитіе этического чувства). Складываніе квадрата даетъ уже понятіе о механикѣ, о движеніи, о симметріи. Беремъ дальше параллелепипедъ и пользуемся имъ; предварительно нужно знать немного черченіе, имѣть понятіе о линейкѣ и масштабѣ. Но недостаточно пассивнаго созерцанія моделей, — если только возможно, нужно заставлять учениковъ самимъ вырѣзывать различныя фигуры изъ бумаги: разрѣзывать параллелограммы по діагоналямъ, вырѣзывать и складывать квадраты и т. д. Понятіе объ углѣ Трейтлейнъ вводитъ при помощи циферблата; въ дальнѣйшемъ пользуется астролябіей. Трейтлейнъ демонстрировалъ затѣмъ цѣлый рядъ моделей на преобразование фигуръ (треугольника — въ параллелограммъ и трапецію и обратно). Такъ, на моделяхъ вводится понятіе о сродствѣ, о симметричныхъ фигурахъ. Необходимо, однако, при пользованіи моделями постоянно ставить, — не ограничиваясь непосредственно наглядностью, — вопросъ *warum?* Нужно всегда „die Freude an den Formen frisch erhalten“. Но при всей полезности моделей не надо ими увлекаться. Все же модели лишь предварительная ступень. Какъ только геометрическое воображеніе развито, модели должны быть оставлены.

На другой день послѣ обѣда почтенный педагогъ снова демонстрировалъ желающимъ свою коллекцію, разъясняя употребленіе отдѣльныхъ моделей. Въ настоящее время въ каталогъ Тейбнера появились проспекты предлагаемой коллекціи. Она будетъ состоять изъ 17 серій.

А. Модели для обученія ариметикѣ.

Серія 1-я: модели для уясненія десятичнаго знака; деревянные разрывные шары, круговыя деревянные пластинки и отдѣльные или связанные деревянные стержни, которые можно передвигать по проволокамъ.

Серія 2-я: мѣры длины, объема и вѣса (монеты).

Но большинство относится къ преподаванію геометріи.

Серія 3-я: циферблатъ и теодолитъ.

Серія 4-я: модели плоскихъ деревянныхъ пластинокъ для преобразования фигуръ въ равновеликія.

Серія 5-я: модели для опредѣленія площади параллелограмма.

Серія 6-я: модели для преобразования треугольника въ другія формы.

Серія 7-я: модели для трапеціи и произвольнаго четырехугольника.

Серія 8-я: модель для доказательства теоремы Пифагора.

Серіи 9—13: модели картонныя и проволочныя для стереометріи: тѣла съ параллельными сторонами, призмы, цилиндры, сѣти, пирамиды — простыя и усѣченныя.

Серіи 14—15: модели деревянные и проволочныя по геометріи шара и эллипсоида.

Серія 16-я: модели для изображенія сходства, конгруэнціи, подобія, аффиннаго преобразования и т. д.; и, наконецъ,

Серія 17-я: неизбѣжная и уже достаточно избитая модель плоскихъ сѣченій круговаго конуса.

Такія коллекціи въ полномъ объемѣ, конечно, не будутъ доступны по цѣнѣ каждой школѣ. Но желательно имѣть хотя отдѣльныя серіи, а полную — въ какихъ-нибудь центральныхъ образцовыхъ заведеніяхъ или педагогическихъ музеяхъ. П. Трейтлейнъ собирается издать и руководство для пользованія его коллекціей, которое должно выйти подъ заглавіемъ „*Geometrischer Anschauungs Unterricht als Unterstufe eines zweistufigen Unterrichtes in der Geometrie*“.

Какъ математикъ, я останавлиюсь еще на докладѣ Ф. Клейна 12 августа утромъ, которымъ былъ замѣненъ, какъ уже упомянуто, докладъ Шверинга „*Ist Mathematik Hexerei?*“ Клейнъ сначала остановился на различіяхъ въ преподаваніи въ Сѣверной Германіи, гдѣ эвристическій методъ преобладаетъ, и, напимѣръ, въ Вюртембергѣ съ его преподавателями, преподающими всѣ предметы. Переходя къ физикѣ, Клейнъ упомянулъ о книгѣ Тимердинга, написанной при содѣйствіи Поске (Poske), которая обнаруживаетъ удивительную живучесть въ учебникахъ устарѣлыхъ воззрѣній, объяснимую, можетъ быть, тѣмъ, что многіе ихъ авторы не создаютъ чего-нибудь свое, а списываютъ свой новый учебникъ изъ пяти прежнихъ. Даже клише обычно чуть не допотопнаго происхожденія, — стоитъ только вспомнить рисунки паровой машины, — нигдѣ такой не встрѣтить,

кромѣ какъ на страницахъ учебника физики. Не лучше обстоитъ дѣло съ математикой у инженеровъ и техниковъ, благодаря нелюбви къ которой именно они и эксплуатируются недобросовѣстными спекулянтами, общающимися какой-то особенный путь въ математику; Клейнъ указалъ на своеобразно-знаменитую „Klevers System“, многотомную коллекцію, стоящую 350 марокъ и представляющую, по энергичному выраженію Клейна, простой навозъ. При нелюбви техниковъ къ отвлеченностямъ особеннаго съ ихъ стороны вниманія заслуживали бы модели. Въ Германіи фирма Brill'я въ Дармштадтѣ, потомъ M. Schilling'a въ Галле, теперь въ Лейпцигѣ, въ послѣднее время и Тейбнеръ, преслѣдуютъ цѣль сдѣлать наглядными пространственныя фигуры. И здѣсь пробили путь французы: первыя модели ведутъ свое начало отъ Монжа (Monge). Первыя модели нитяныя — Olivier 1837 г. — хранятся теперь въ „Conservatoire national des Arts et Métiers“, но нельзя сказать, чтобы особенно бережно. Обращаясь къ личнымъ воспоминаніямъ, Клейнъ припомнилъ, какъ онъ, сначала ассистентъ I. Плюккера (I. Plücker) по физикѣ — это былъ періодъ, когда Плюккеръ читалъ и занимался физикой — постепенно вмѣстѣ съ Плюккеромъ перешелъ на геометрію и вообще на чистую математическую. Побужденіе и идею строить модели Плюккеръ получилъ отъ Фарадея, который, не будучи математически образованъ, для уясненія геометрическихъ вопросовъ дѣлалъ себѣ модели изъ картофеля и шпилекъ. Подъ этимъ вліяніемъ занялся и Плюккеръ и сдѣлалъ свою первую модель. Первое время было своего рода честолюбіемъ создавать модели возможно трудныхъ поверхностей 3-го и 4-го порядка, и лишь потомъ стали принимать во вниманіе интересы массы. Клейнъ демонстрировалъ при этомъ нѣкоторыя новыя модели, частью приготовленныя подъ его наблюденіемъ, частью принадлежащія проф. Ф. Шиллингу въ Данцигѣ.

Другіе доклады были посвящены преподаванію и практическимъ занятіямъ по физикѣ и естественнымъ наукамъ.

11-го утромъ Гримзель (Grimsehl) сдѣлалъ докладъ: „Практическія занятія по физикѣ въ Oberrealschule auf der Uhlenhorst въ Гамбургѣ“. Послѣ обѣда онъ демонстрировалъ свои аппараты, экспонированные на выставкѣ.

12-го Поске (Берлинъ) говорилъ о задачахъ преподаванія физики. Затѣмъ состоялся осмотръ физическихъ экспонатовъ на выставкѣ.

Еще два референта — Шёнихенъ (Schoenichen) и Бастіанъ (Bastian Schmidt) — говорили о задачахъ и характерѣ преподаванія биологіи. Дризенъ (Driesen) и Б. Шмидтъ демонстрировали кинематографически „Школьную жизнь въ Германіи“ и „Практическія занятія по биологіи“.

13-го и 14-го предстояли еще доклады во французскомъ отдѣлѣ: К. Бурле долженъ былъ прочесть о прогрессѣ авіаціи во Франціи; остальные доклады были посвящены вопросамъ средняго технического образованія. Но я уже не оставался на эти дни и покинулъ Брюссель наканунѣ пожара, опустошившаго значительную часть выставки.

Мой возвратный путь лежалъ черезъ Швейцарію мимо Yverdun'a, гдѣ жилъ и училъ Песталоцци въ послѣдніе годы своей жизни. Въ Мюнхенѣ я посетилъ „Deutsches Museum“*), и это замѣчательное учреждение, созданіе послѣднихъ лѣтъ, мнѣ хотѣлось бы упомянуть, чтобы обратить на него вниманіе всѣхъ тѣхъ, кому придется проходить черезъ столицу Баваріи.

Проф. Д. Синицовъ.

О вписанныхъ четырехугольникахъ.

Д. Ефремова.

(Продолженіе **).

О полномъ вписанномъ четырехугольникѣ.

11. Полнымъ четырехугольникомъ принято называть четырехугольникъ, противоположныя стороны котораго продолжены до пересѣченія.

Точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четырехугольника и углы, составленные этими сторонами, мы будемъ называть дополнительными вершинами и дополнительными углами полного четырехугольника.

Прямая линія, соединяющая дополнительные вершины полного четырехугольника, называется третьею діагональю полного четырехугольника; въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе называть эту діагональ внѣшнею, въ отличіе отъ двухъ внутреннихъ діагоналей, пересѣкающихся внутри четырехугольника.

Если четырехугольникъ вписанъ въ кругъ, то полученный изъ него полный четырехугольникъ называется полнымъ вписаннымъ четырехугольникомъ.

12. Теорема. Биссектрисы дополнительныхъ угловъ полного вписаннаго четырехугольника параллельны биссектрисамъ угловъ, составленныхъ внутренними діагоналями его.

Обозначивъ черезъ E и F точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ вписаннаго четырехугольника $ABCD$ и положимъ, что биссектрисы дополнительныхъ угловъ CED и AFD пересѣкаются съ окружностью, описанною около четырехугольника, въ точкахъ K , L , M , N (фиг. 4). Черезъ пересѣченіе діагоналей четырехугольника H проведемъ прямыя XX' и YY' , соответственно параллельныя пря-

*) Онъ состоитъ изъ двухъ отдѣловъ. Кромѣ каталоговъ для предварительнаго ознакомленія можетъ служить статья К. Matschoss „Ein Besuch im Deutschen Museum Abt. II. — Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieur 1909, с. 1528.

**) См. „Вѣстникъ“, № 523.

отсюда, замѣтивъ, что

$$\angle ANX = \frac{\overline{AX} + \overline{CX'}}{2} \text{ и } \angle BNX = \frac{\overline{BX} + \overline{DX'}}{2},$$

закключаемъ, что

$$\angle ANX = \angle BNX,$$

т. е. что прямая NX дѣлитъ пополамъ уголъ ANB . Аналогично съ этимъ прямая HY дѣлитъ пополамъ уголъ BHC .

13. Слѣдствія. Биссектрисы EK и FM дополнительныхъ угловъ полного вписаннаго четырехугольника взаимно перпендикулярны, ибо параллельны имъ прямыя XX' и YY' , какъ биссектрисы смежныхъ угловъ, образуютъ прямой уголъ.

Если X_1 и X'_1 , Y_1 и Y'_1 суть середины дугъ, стягиваемыхъ противоположными сторонами (AB и CD , BC и AD) вписаннаго четырехугольника (фиг. 4), то прямыя $X_1X'_1$ и $Y_1Y'_1$ параллельны биссектрисамъ угловъ, составленныхъ діагоналями этого четырехугольника, ибо, обозначивъ черезъ Z и Z' точки пересѣченія прямой $X_1X'_1$ съ AE и BE , увидимъ, что

$$\angle ALX_1 = \frac{\overline{AX_1} - \overline{DX'_1}}{2} \text{ и } \angle BZ'X_1 = \frac{\overline{BX_1} - \overline{CX'_1}}{2};$$

но

$$\overline{AX_1} = \overline{BX_1} \text{ и } \overline{CX'_1} = \overline{DX'_1};$$

слѣдовательно,

$$\angle AZX_1 = \angle BZ'X_1,$$

т. е. прямая $X_1X'_1$ параллельна EK , а потому параллельна и XX' .

14. Теорема. Биссектрисы дополнительныхъ угловъ полного вписаннаго четырехугольника пересѣкаютъ стороны этого четырехугольника въ вершинахъ вписаннаго въ него ромба.

Положимъ, что биссектрисы EK и FM дополнительныхъ угловъ полного вписаннаго четырехугольника $ABCD$ пересѣкаютъ его стороны въ точкахъ R и S , P и Q (фиг. 4); точку пересѣченія этихъ биссектрисъ между собою обозначимъ черезъ T . Такъ какъ

$$\angle PET = \angle QFT, \quad \angle RFT = \angle SFT$$

и прямыя ES и FP взаимно перпендикулярны (13), то

$$PT = QT \text{ и } RT = ST;$$

значить, діагонали четырехугольника $PRQS$ взаимно перпендикулярны и дѣлятся пополамъ, а потому этотъ четырехугольникъ — ромбъ.

15. Нетрудно убедиться, что стороны ромба $PRQS$ параллельны диагоналям четырехугольника $ABCD$ (фиг. 4). Действительно, из треугольника CED , по свойству биссектрисы, имеемъ:

$$\frac{CR}{DR} = \frac{EC}{ED};$$

изъ подобія же треугольниковъ BED и AEC слѣдуетъ, что

$$\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{BD};$$

значить,

$$\frac{CR}{DR} = \frac{AC}{BD}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{AF}{DF} = \frac{AC}{BD};$$

слѣдовательно,

$$\frac{CR}{DR} = \frac{AQ}{DQ},$$

а потому прямая QR параллельна AC . Аналогичныя разсужденія приводятъ къ заключенію, что прямая PR параллельна BD .

16. Теорема. Биссектрисы дополнительныхъ угловъ полного вписаннаго четырехугольника пересѣкаются на медіанѣ внутреннихъ диагоналей этого четырехугольника.

Пусть U и V суть середины внутреннихъ диагоналей AC и BD полного вписаннаго четырехугольника $ABCD$ (фиг. 4). Обозначимъ черезъ A' и C' точки пересѣченія сторонъ ромба QS и PR съ прямыми VA и VC . Такъ какъ QS и PR параллельны BD (15), прямая же VA и VC суть медіаны треугольниковъ BAD и BCD , то A' и C' суть середины QS и PR , а потому прямая $A'C'$ проходитъ черезъ пересѣченіе T диагоналей ромба PQ и RS и дѣлится въ T пополамъ; съ другой стороны, прямая VU , какъ медіана треугольника AVC , проходитъ черезъ середину T прямой $A'C'$; слѣдовательно, точка пересѣченія T биссектрисъ дополнительныхъ угловъ четырехугольника находится на медіанѣ внутреннихъ диагоналей его UV .

17. Слѣдствіе. Такъ какъ

$$\frac{VT}{TU} = \frac{VA'}{A'A} = \frac{BS}{SA} = \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EC}$$

$$\frac{VT}{TU} = \frac{VC}{CC} = \frac{BP}{PC} = \frac{FB}{FC} = \frac{FD}{FA}$$

то

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{AF}{DF} = \frac{CF}{BF} = \frac{TU}{VT} = \frac{AS}{BS} = \frac{CR}{DR} = \frac{AQ}{DQ} = \frac{CP}{BP}.$$

18. Положимъ, что стороны и діагонали полнаго вписаннаго четырехугольника $ABCD$ суть (фиг. 4):

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f, EF = g.$$

Внутреннія діагонали вписаннаго четырехугольника опредѣляются по его сторонамъ на основаніи теоремъ Птолемея изъ равенствъ:

$$ef = ac + bd$$

и

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

и

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Третья (внѣшняя) діагональ g опредѣляется черезъ отрѣзки биссектрисъ дополнительныхъ угловъ ET и FT изъ прямоугольнаго треугольника ETF (13), именно:

$$g^2 = ET^2 + FT^2.$$

19. Чтобы выразить отрѣзки ET и FT черезъ стороны четырехугольника, опредѣлимъ сначала стороны треугольниковъ AEB и CED (фиг. 4). Положивъ $AE = x$ и $BE = y$, изъ подобія этихъ треугольниковъ находимъ, что

$$\frac{x}{y - b} = \frac{a}{c} = \frac{y}{x - d};$$

отсюда

$$x = AE = \frac{a(bc + ad)}{a^2 - c^2},$$

$$y = BE = \frac{a(ab + cd)}{a^2 - c^2}$$

и

$$CE = y - b = \frac{c(bc + ad)}{a^2 - c^2},$$

$$DE = x - d = \frac{c(ab + cd)}{a^2 - c^2}.$$

При помощи этихъ выраженій изъ формулы для биссектрисы треугольника AEB

$$\overline{ES}^2 = \frac{AE \cdot BE}{(AE + BE)^2} \cdot (AE + BE + AB)(AE + BE - AB),$$

находимъ, что

$$ES = \frac{2a\sqrt{(p-a)(p-c)(ab+cd)(ad+bc)}}{(a^2-c^2)(b+d)},$$

гдѣ

$$a+b+c+d=2p$$

Такимъ же образомъ, изъ треугольника CED , найдемъ, что

$$ER = \frac{2c\sqrt{(p-a)(p-c)(ab+cd)(ad+bc)}}{(a^2-c^2)(b+d)}.$$

Зная ES и ER , по формулѣ

$$ET = \frac{ER+ES}{2},$$

найдемъ, наконецъ, что

$$ET = \frac{\sqrt{(p-a)(p-c)(ab+cd)(ad+bc)}}{(a-c)(b+d)}$$

и, по аналогіи съ этимъ выраженіемъ,

$$FT = \frac{\sqrt{(p-b)(p-d)(ab+cd)(ad+bc)}}{(b-d)(a+c)}.$$

20. Подставивъ эти выраженія въ равенство (18)

$$g^2 = \overline{ET}^2 + \overline{FT}^2,$$

получимъ:

$$g^2 = (ab+cd)(ad+bc) \left[\frac{(p-a)(p-c)}{(a-c)^2(b+d)^2} + \frac{(p-b)(p-d)}{(b-d)^2(a+c)^2} \right].$$

Такъ какъ

$$(p-a)(p-c) = \frac{1}{4}(b+d+c-a)(b+d+a-c) = \frac{(b+d)^2 - (a-c)^2}{4}$$

и

$$(p-b)(p-d) = \frac{1}{4}(a+c+d-b)(a+c+b-d) = \frac{(a+c)^2 - (b-d)^2}{4},$$

то полученное равенство, послѣ преобразованія правой части его, приводится къ слѣдующему виду:

$$g^2 = (ab+cd)(ad+bc) \left[\frac{ac}{(a^2-c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2-d^2)^2} \right].$$

21. Это равенство выражаетъ слѣдующую теорему.

Теорема. Квадратъ третьей (внѣшней) діагонали полного вписаннаго четырехугольника равенъ суммѣ степеней дополнительныхъ вершинъ его относительно описаннаго круга, т. е. (фиг. 4)

$$g^2 = EB \cdot EC + FA \cdot FB,$$

Дѣйствительно, пользуясь найденными выше выраженіями для EB и EC (19), находимъ, что

$$EB \cdot EC = \frac{ac(ab + cd)(ad + bc)}{(a^2 - c^2)^2};$$

отсюда, по аналогіи,

$$FA \cdot FB = \frac{bd(ab + cd)(ad + bc)}{(b^2 - d^2)^2};$$

поэтому

$$EB \cdot EC + FA \cdot FB = (ab + cd)(ad + bc) \left[\frac{ac}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{bd}{(b^2 - d^2)^2} \right]$$

и

$$g^2 = EB \cdot EC + FA \cdot FB.$$

22. Слѣдствія. Квадратъ третьей (внѣшней) діагонали полнаго вписаннаго четырехугольника равенъ суммѣ квадратовъ касательныхъ изъ дополнительныхъ вершинъ четырехугольника къ описанному кругу, ибо произведенія $EB \cdot EC$ и $FA \cdot FB$ соответственно равны квадратамъ касательныхъ изъ точекъ E и F къ кругу, описанному около четырехугольника.

Если центръ и радіусъ круга, описаннаго около четырехугольника, обозначить черезъ O и R , то квадраты касательныхъ къ этому кругу изъ дополнительныхъ вершинъ четырехугольника E и F будутъ:

$$\overline{EO}^2 - R^2 \text{ и } \overline{FO}^2 - R^2,$$

такъ что

$$EB \cdot EC = \overline{EO}^2 - R^2 \text{ и } FA \cdot FB = \overline{FO}^2 - R^2$$

и

$$g^2 = \overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 - 2R^2.$$

Обозначимъ середину третьей діагонали EF черезъ W и соединимъ точки E , F и W съ центромъ круга O . Такъ какъ OW есть медіана треугольника EOF , то

$$\overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 = 2\overline{OW}^2 + \frac{g^2}{2} = g^2 + 2R^2,$$

отсюда

$$\frac{g^2}{4} = \overline{OW}^2 - R^2,$$

т. е. половина третьей (внѣшней) діагонали полнаго вписаннаго четырехугольника равна касательной изъ ея середины къ описанному кругу.

Послѣднее равенство, представленное въ видѣ:

$$\overline{OW}^2 = R^2 + \frac{g^2}{4},$$

обнаруживаетъ, что окружность, имѣющая діаметромъ третью діагональ полнаго вписаннаго четырехугольника, ортогональна съ окружностью, описанною около него.

23. Чтобы выразить радиусъ круга R черезъ стороны вписаннаго въ него четырехугольника, замѣтимъ, что треугольники ABC и ADC , ABD и BCD (фиг. 4), на которые вписанный четырехугольникъ разбивается своими внутренними диагоналями, суть также вписанные въ тотъ же кругъ; поэтому

$$\text{пл. } ABC \cdot 4R = abc, \quad \text{пл. } ADC \cdot 4R = cde,$$

$$\text{пл. } ABD \cdot 4R = adf, \quad \text{пл. } BCD \cdot 4R = bcf;$$

сложивъ эти равенства по два и обозначивъ площадь четырехугольника черезъ S , такъ что

$$\text{пл. } ABC + \text{пл. } ADC = \text{пл. } ABD + \text{пл. } BCD = S,$$

получимъ слѣдующіе два равенства:

$$4R \cdot S = (ab + cd)e = (ad + bc)f;$$

черезъ перемноженіе ихъ находимъ, что

$$16R^2 S^2 = (ab + cd)(ad + bc)ef.$$

Такъ какъ, по теоремѣ Птолемея,

$$cf = ac + bd,$$

то послѣднее равенство принимаетъ видъ

$$16R^2 S^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc);$$

отсюда

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4S},$$

гдѣ

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

24. Въ одинъ и тотъ же кругъ можно вписать три различныхъ четырехугольника, составленныхъ изъ сторонъ a, b, c, d ; порядокъ расположенія сторонъ этихъ четырехугольниковъ (въ томъ или другомъ направленіи), начиная, напримеръ, съ a , будетъ одинъ изъ слѣдующихъ:

$$1) a, b, c, d; \quad 2) a, b, d, c; \quad 3) a, c, b, d$$

Такъ какъ площадь вписаннаго четырехугольника S , какъ видно изъ послѣдней формулы, не зависитъ отъ порядка сторонъ его, то эти три четырехугольника равновелики. Нетрудно также замѣтить, что каждыя два изъ нихъ имѣютъ по одной внутренней діагонали равной и по одной — различной; поэтому, если діагонали 1-го четырехугольника суть e, f , то діагонали 2-го и 3-го суть e, j и f, j .

Примѣняя къ этимъ четырехугольникамъ теорему Птолемея, получимъ:

$$ef = ac + bd,$$

$$ej = ad + bc,$$

$$ff = ab + cd;$$

отсюда видно, что

$$e^2 f^2 j^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc);$$

поэтому найденное выше выраженіе для R представляется въ видѣ:

$$R = \frac{eff}{4S},$$

т. е. радиусъ круга, описаннаго около четырехугольника, равенъ произведенію неравныхъ діагоналей трехъ различныхъ вписанныхъ четырехугольниковъ, составленныхъ изъ сторонъ даннаго, раздѣленному на учетверенную его площадь.

(Окончаніе слѣдуетъ).

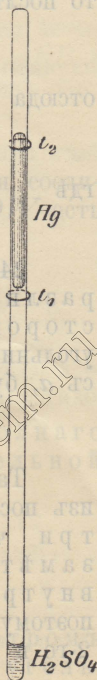
Опыты и приборы.

Опредѣленіе коэффициента расширенія воздуха помощью узкой трубки въ 0,5 — 1 мм. въ поперечникѣ.

Трубка, длиной въ 35 см., должна быть хорошо вычищена и высушена. Однимъ концомъ ея прикасаются къ поверхности концентрированной сѣрной кислоты, такъ что нѣкоторое количество ея влѣдствіе капиллярности набирается въ трубку. Тогда этотъ конецъ заполняютъ и встряхиваніемъ уводятъ кислоту на самое дно. Послѣ этого черезъ оставшійся открытымъ конецъ трубки вводятъ столбикъ ртути съ помощью стеклянной трубочки, вытянутой на концѣ въ тонкій капилляръ. (Трубку при этомъ держатъ горизонтально). Столбикъ ртути замыкаетъ такимъ образомъ опредѣленное количество воздуха. Погружая трубку въ сосудъ съ холодной и горячей водой и отмѣчая надѣтымъ на трубку нитянымъ колечкомъ положеніе ртутнаго столбика—поршня, опредѣляютъ объемы воздуха при различныхъ температурахъ, а отсюда вычисляется искомый коэффициентъ.

Внутренній діаметръ трубки долженъ быть повсюду одинаковъ.

Е. Б.



Краткій отчетъ о засѣданіи Московскаго Математическаго Кружка.

Въ засѣданіи Кружка 24 сентября 1910 г. происходило слѣдующее:

І. І. И. Чистяковъ сдѣлалъ сообщеніе „О библиотекѣ А. И. Гольденберга“, предоставленной въ пользованіе Математическаго Кружка Физическимъ Отдѣленіемъ Общества Любителей Естествознанія, согласно желанію вдовы покойнаго А. И. Гольденберга. Сообщивъ свѣдѣнія о состояніи этой библиотекы*), референтъ перешелъ къ характеристикѣ заключающихся въ ней книгъ по отдѣламъ, при чемъ отмѣтилъ высокую цѣнность библиотекы.

Собраніе, заслушавъ докладъ, выразило референту благодарность за его трудъ по приему библиотекы и поручило Правленію разработать вопросъ объ организациіи пользованія членами Кружка книгами изъ нея, а также журналами, выписываемыми Кружкомъ.

П. Б. К. Млодзѣевскій сдѣлалъ сообщеніе „Ирраціональныя числа въ средней школѣ“. Референтъ прежде всего разсмотрѣлъ официальные учебные планы и программы гимназій и реальныхъ училищъ и отмѣтилъ тѣ пункты, которые касаются вопроса объ ирраціональныхъ количествахъ. При этомъ онъ указалъ на нѣкоторую хаотичность и непоследовательность, съ которою распределены въ программахъ матеріалъ, относящійся къ ирраціональнымъ числамъ, и благодаря которымъ образовательное значеніе этого важнаго отдѣла для учащихся сильно понижается. Затѣмъ докладчикъ намѣтилъ и желательный путь для надлежащаго прохожденія ученія объ ирраціональныхъ числахъ: основой ему должно служить развитіе понятія объ отношеніи, на которое слѣдуетъ обратить серьезное вниманіе еще при прохожденіи ариметики. Болѣе подробное изложеніе свойствъ радикальныхъ выраженій не должно вводиться въ курсъ алгебры ранѣе статьи объ извлеченіи квадратнаго корня изъ чиселъ. При прохожденіи этой послѣдней статьи сначала слѣдуетъ ограничиться случаемъ точныхъ квадратовъ, а потомъ перейти къ вопросу о приближенномъ извлеченіи, не касаясь вопроса о самомъ существованіи корня до тѣхъ поръ, пока оно не будетъ доказано на примѣрахъ соответствующихъ геометрическихъ отрывковъ. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ и кубическаго изъ чиселъ безъ всякаго ущерба могутъ быть совсѣмъ опущены. Послѣ ознакомленія учащихся съ теоріей предѣловъ можно дать понятіе объ ирраціональномъ числѣ, какъ предѣлъ безконечнаго ряда раціональныхъ чиселъ. Тогда же можно доказывать пропорциональность несоизмѣримыхъ величинъ; ранѣе же достаточно ограничиться случаемъ соизмѣримости. Строгое обоснованіе производа двѣхъ ирраціональныхъ числами докладчикъ считаетъ недостижимымъ въ средней школѣ такъ же, какъ и изложеніе вполне строгой теоріи логарифмовъ.

По поводу прочитаннаго доклада А. А. Волковъ указалъ, что нѣкоторыя изъ пожеланій, высказанныхъ докладчикомъ, давно уже на практикѣ исполняются московскими преподавателями благодаря тому, что тѣ же взгляды проводились референтомъ и въ то время, когда онъ участвовалъ въ комиссіи по реформѣ средней школы, организованной при Московскомъ Учебномъ Округѣ по распоряженію Министра Народнаго Просвѣщенія Боголюбова.

При дальнѣйшемъ обсужденіи доклада, изъ преній выяснилась тѣсная связь вопроса объ ирраціональныхъ количествахъ съ понятіемъ объ отношеніи. Поэтому собраніе выразило пожеланіе, чтобы Б. К. Млодзѣевскій или

*) Часть библиотекы А. И. Гольденберга пожертвована Тульскому Губернскому Земству, чтобы ею могли пользоваться учителя и учительницы Тульской губ.

другой членъ Кружка прочитали докладъ объ отношеніи въ одномъ изъ ближайшихъ засѣданій.

III. В. П. Писаревъ прочелъ докладъ „О постановкѣ преподаванія математики въ женскихъ гимназіяхъ“, составленный комиссіей изъ членовъ Кружка подъ предѣлательствомъ А. С. Алферовой.

Докладъ составленъ по плану, выработанному Международной Коммиссіей по реформѣ преподаванія математики и представляетъ собою обзоръ постановки преподаванія математики со времени ихъ учрежденія и по настоящее время. Матеріаломъ для составителей послужили, кромѣ различныхъ официальныхъ данныхъ, еще свѣдѣнія, полученныя путемъ устроенной ими анкеты. Въ обсужденіи доклада приняли участіе многіе члены Кружка, отмѣтившіе, какъ одинъ изъ главныхъ недочетовъ постановки преподаванія математики въ женскихъ гимназіяхъ, несоразмѣрность отведеннаго на математику времени сравнительно съ официальными программами.

РЕЦЕНЗІИ.

В. П. Вахтсмуть. *Методическое руководство къ практическимъ занятіямъ по общей химіи для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній.* Рига, 1910. Изданіе книжнаго магазина Леффлера. Стр. 62 + VIII.

Небольшая книжка г. Вахтсмута имѣетъ цѣлью служить руководствомъ для учениковъ тѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній, гдѣ въ программу включена химія и гдѣ введены практическія занятія по этому предмету. Руководство г. Вахтсмута возникло, какъ онъ пишетъ въ предисловіи, изъ практики, и въ этомъ его достоинства и недостатки. Тому обстоятельству, что всѣ опыты продолжались учениками, слѣдуетъ, по всей вѣроятности, приписать то, что огромное большинство опытовъ несложно, описывается ясно и въ большинствѣ случаевъ настолько полно, что ученикамъ старшихъ классовъ нетрудно выполнить ихъ согласно указаніямъ автора. Съ другой стороны, нельзя не замѣтить, что выборъ опытовъ до извѣстной степени случайный, зависящій, вѣроятно, отъ того цикла практическихъ занятій, который велъ авторъ. Для примѣра можно указать на то, что соединеніе азота съ водородомъ не изучается, что такая важная реакція, какъ образованіе нашатыря дѣйствіемъ амміака на хлористый водородъ, не вошла въ главу о полученіи солей, что оставлены безъ вниманія сѣра и фосфоръ. Наряду съ этимъ авторъ ввелъ двѣ главы: о разложеніи солей свѣгомъ и электрическимъ токомъ, которыя обычно не входятъ въ курсъ практическихъ занятій по химіи. Такимъ образомъ, возможно, что многіе преподаватели не найдутъ въ книжкѣ г. Вахтсмута тѣхъ опытовъ, которые они считаютъ необходимымъ продолжать съ учениками, и, наоборотъ, встрѣтятъ практическія упражненія, которыя могутъ показаться излишними. Но для преподавателей, начинающихъ только вести практическія занятія по химіи съ учениками и не имѣющихъ на этотъ счетъ строго выработанной программы, книжка г. Вахтсмута можетъ быть полезна, такъ какъ автору нельзя отказать въ томъ, что въ общемъ онъ выбралъ наиболѣе важные отдѣлы неорганической химіи и сумѣлъ выяснитъ особенности химическихъ взаимодействій хорошо подобранными опытами. Въ общихъ чертахъ содержаніе книги г. Вахтсмута слѣдующее. Послѣ общихъ указаній, какъ обращаться съ посудой и составлять приборы, и опытовъ для выясненія нѣкоторыхъ физическихъ явленій, какъ, напримѣръ, опредѣленіе точекъ плавленія и кипѣнія, растворы, фильтрованіе, авторъ переходитъ къ важнѣйшимъ газамъ — кислороду, азоту и водороду, а затѣмъ къ наиболѣе употребительнымъ кислотамъ, описывая способы ихъ полученія и главнѣйшія

свойства. Много вниманія и вполне правильно авторъ посвящаетъ солямъ, приводя разнообразныя опыты полученія солей дѣйствіемъ кислотъ на металлы и кислотъ на основанія и разложенія солей подъ влияніемъ нагреванія, дѣйствія кислотъ, основаній и металловъ и солей другъ на друга. Въ прибавленіи приводятся нѣкоторые опыты, иллюстрирующіе важныя техническія производства, какъ, напримѣръ, добываніе соды. Неудачнымъ представляется дѣленіе на „физическое и химическое раствореніе“ (стр. 11), тѣмъ болѣе, что подъ послѣднимъ почему-то понимается химическая реакція дѣйствія кислотъ на металлы.

Б. Л.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго**.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникъ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 354 (5 сер.) Данный тетраэдръ $ABCD$ пересѣчь плоскостью, параллельной двумъ противоположнымъ ребрамъ AC и BD , такъ, чтобы площадь сѣченія была наибольшей.

Р. Витвинскій (Николаевъ).

№ 355 (5 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\cos x + 2^2 \cos 2x + 3^2 \cos 3x + \dots + n^2 \cos nx.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 356 (5 сер.). Найти предѣлъ выраженія

$$\frac{(x^m - x^n)(x^m - x^{n-1}) \dots (x^m - x)}{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \dots (x - 1)},$$

въ которомъ m и n суть данныя цѣлыя числа, при неограниченномъ приближеніи x къ единицѣ.

Я. Назаревскій (Харьковъ).

№ 357 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + \dots + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

А. Д. (Лодзь).

№ 358 (5 сер.). Найти геометрическое место точки, сумма квадратовъ разстояній которой отъ вершинъ данного правильнаго многоугольника равна данной величинѣ l^*).

Н. С. (Одесса).

№ 359 (5 сер.). Найти общій видъ цѣлыхъ чиселъ A , обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что A^2 при дѣленіи на 9 и на 11 даетъ равные остатки.

(Занимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 200 (5 сер.). Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{1}{\cos m + \cos 3m} + \frac{1}{\cos m + \cos 5m} + \frac{1}{\cos m + \cos 7m} + \dots$$

Обозначая члены разсматриваемаго ряда послѣдовательно черезъ $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, и полагая $a = (k+1)m$, $b = km$ въ формулѣ $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b =$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a-b)}{\frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]}, \text{ находимъ:}$$

$$\operatorname{tg}(k+1)m - \operatorname{tg} km = \frac{2 \sin[(k+1)m - km]}{\cos[(k+1)m - km] + \cos[(k+1)m + km]} = \frac{2 \sin m}{\cos m + \cos(2k+1)m}$$

откуда

$$\frac{1}{\cos m + \cos(2k+1)m} = \frac{\operatorname{tg}(k+1)m - \operatorname{tg} km}{2 \sin m} = u_k. \quad (1)$$

Полагая въ формулѣ (1) $k = 1, 2, \dots, n$, получимъ рядъ равенствъ:

$$u_1 = \frac{\operatorname{tg} 2m - \operatorname{tg} m}{2 \sin m},$$

$$u_2 = \frac{\operatorname{tg} 3m - \operatorname{tg} 2m}{2 \sin m},$$

$$u_3 = \frac{\operatorname{tg} 4m - \operatorname{tg} 3m}{2 \sin m},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{n-1} = \frac{\operatorname{tg} nm - \operatorname{tg}(n-1)m}{2 \sin m},$$

$$u_n = \frac{\operatorname{tg}(n+1)m - \operatorname{tg} nm}{2 \sin m}.$$

*) При рѣшеніи этой задачи можно съ успѣхомъ воспользоваться элементами аналитической геометріи.

Складывая эти равенства и обозначая сумму n членовъ даннаго ряда черезъ s_n , получимъ:

$$s_n = \frac{\operatorname{tg} (n+1) m - \operatorname{tg} m}{2 \sin m} = \frac{\sin nm}{2 \sin m \cos m \cos (n+1) m} = \frac{\sin nm}{\sin 2m \cos (n+1) m}. \quad (2)$$

Формула (2) можетъ быть примѣнена безъ всякихъ оговорокъ лишь тогда, если въ формулѣ (1) обѣ части имѣютъ определенное численное значеніе при $k = 1, 2, \dots, n$. Такимъ образомъ, формула (2) имѣетъ силу при всякомъ n , 1° если $\sin m \neq 0$, 2° если $\cos m + \cos (2k+1)m = 2 \cos km \cos (k+1)m \neq 0$, и 3° если каждое изъ выраженій $\operatorname{tg} (k+1)m$ и $\operatorname{tg} km$ имѣетъ конечное значеніе при всякомъ k . Условія 2° и 3° тождественны, такъ какъ оба они равносильны соблюденію двухъ неравенствъ одновременно: $\cos km \neq 0$ и $\cos (k+1)m \neq 0$. Но $\sin m = 0$ при $m = l\pi$, гдѣ l — нѣкоторое цѣлое число, а $\cos km = 0$ или $\cos (k+1)m = 0$ при $km = (2r+1)\frac{\pi}{2}$ или $(k+1)m = (2r+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ r — цѣлое число, т. е. въ обоихъ случаяхъ при $m = \frac{(2r+1)\pi}{2l}$, гдѣ r и l — цѣлыя числа, при чемъ l равно соответственно k или $k+1$; отсюда слѣдуетъ, что формула (2) имѣетъ мѣсто при всякомъ m , если m не равно ни цѣлому числу полуокружностей ни дроби отъ полуокружности съ нечетнымъ числителемъ и четнымъ знаменателемъ. Если $m = l\pi$, то $\cos m + \cos (2k+1)m = \cos l\pi + \cos (2k+1)l\pi = (-1)^l \cdot 2$, и $s_n = \frac{(-1)^l n}{2}$; болѣе подробное изслѣдованіе показываетъ, что формула (2) опять имѣетъ мѣсто, если подъ второй ея частью подразумѣвать ея истинное значеніе. Если же $m = \frac{(2r+1)\pi}{2l}$, гдѣ $l = k$ или $l = k+1$, то, предполагая, что дробь $\frac{2r+1}{2l}$ взята въ несократимой формѣ, мы заключаемъ, что формула (2) сохраняетъ непосредственный смыслъ лишь для значеній n , меньшихъ $l-1$; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $\cos (k+1)m = \cos \frac{(2r+1)(k+1)}{l} \cdot \frac{\pi}{2}$, а потому наименьшее цѣлое положительное значеніе k , при которомъ $\cos (k+1)m$ равно нулю, есть то значеніе k , при которомъ выраженіе $\frac{(2r+1)(k+1)}{l}$ обращается въ нечетное цѣлое число; такимъ образомъ, въ виду несократимости дроби $\frac{2r+1}{l}$, искомое значеніе k опредѣляется равенствомъ $k+1 = l$, откуда $k = l-1$.

П. Безчеревныхъ (Козловъ); Нюта Г. (Нижній-Новгородъ); Л. Богдановичъ (Ярославль); С. Розенблатъ (Балта).

№ 242 (5 сер.). Доказать справедливость тождества

$$\sqrt[n]{\frac{(2s-a+\sqrt{a^2-4b})(a+\sqrt{a^2-4b})}{(2s-a-\sqrt{a^2-4b})(a-\sqrt{a^2-4b})}},$$

гдѣ a и b суть соответственно сумма и произведеніе крайнихъ членовъ нѣкоторой возрастающей геометрической прогрессіи, а q, s и n суть знаменатель, сумма и число ея членовъ.

Обозначая первый членъ прогрессіи черезъ a , а послѣдній черезъ l , замѣчая, что $l > a$, такъ какъ прогрессія возрастающая, и условившись брать

всюду арифметическія значенія квадратныхъ корней, имѣемъ:

$$a = l + a, \quad b = la, \quad a^2 - 4b = (l + a)^2 - 4la = (l - a)^2, \quad \sqrt{a^2 - 4b} = l - a.$$

Поэтому

$$\sqrt[n]{\frac{(2s - a + \sqrt{a^2 - 4b})(a + \sqrt{a^2 - 4b})}{(2s - a - \sqrt{a^2 - 4b})(a - \sqrt{a^2 - 4b})}} = \sqrt[n]{\frac{[2s - (a + l) + l - a][a + l + l - a]}{[2s - (a + l) - (l - a)][a + l - (l - a)]}} = \sqrt[n]{\frac{2(s - a) \cdot 2l}{2(s - l) \cdot 2a}} = \sqrt[n]{\frac{s - a}{s - l} \cdot \frac{l}{a}}.$$

Но изъ извѣстныхъ формулъ $s = \frac{lq - a}{q - 1}$ и $l = aq^{n-1}$ имѣемъ:

$$sq - s = lq - a, \quad q(s - l) = s - a, \quad \frac{s - a}{s - l} = q, \quad \frac{l}{a} = q^{n-1}.$$

Поэтому

$$\sqrt[n]{\frac{(2s - a + \sqrt{a^2 - 4b})(a + \sqrt{a^2 - 4b})}{(2s - a - \sqrt{a^2 - 4b})(a - \sqrt{a^2 - 4b})}} = \sqrt[n]{q \cdot q^{n-1}} = \sqrt[n]{q^n} = q.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль); А. Фрумкинъ (Одесса); М. Добровольскій (Сердобскъ); В. Мордулевъ (Одесса); И. Коровицкій (Аккерманъ); А. Луконинъ (Астрахань); И. Чижевскій (Александрія); И. Лурье (Смоленскъ); И. Поляковъ (Тифлисъ); Б. Крымерманъ (Могилевъ-Под.); А. Фельдманъ (Одесса); Г. Пистракъ (Лодзь); Г. Варкентинъ (Вердянскъ); В. Богомоловъ (Шацкъ); Е. Бабицкий (Минскъ); Н. Н.; В. Бунятыцъ (Шуша); Н. Доброгаевъ (Тульчинъ); А. Д. (Лодзь); С. Сейгель (Кіевъ); Р. Боколяръ (Воронежъ); Н. Шульповъ (Петропавловскъ).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника“, подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. Долговъ. Сборникъ геометрическихъ упражненій и задачъ, составленный примѣнительно къ книжкѣ „Начатки геометріи“ того же автора. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 106 + П. Ц. 30 к.

Д. Е. Любченко. Геометрическое черченіе. Альбомъ чертежей. Курсъ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній. Въ 2-хъ частяхъ. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Стр. 22 + 43 табл. Москва, 1911. Ц. 1 р.

Книги для современной школы. **Вильямъ Клиффордъ**, профессоръ математики и механики University College въ Лондонѣ. Здравый смыслъ точныхъ наукъ. Начала ученія о числѣ и пространствахъ. Съ портретомъ автора, приложеніемъ очерка бикватернионовъ и 105 чертежами. Пособіе для обученія и самообразованія. Перев. съ 5-го англійскаго изданія А. Ф. Булишера. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Стр. 344. Ц. 1 р. 25 к.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

ВѢСТНИКЪ ВОЗДУХОПЛАВАНІЯ.

ВЪ ЖУРНАЛЪ ПРИНИМАЮТЪ УЧАСТІЕ:

Боклевскій, К. П., проф., деканъ Кор. Отд. СПб. Полит. инстит.; Воробьевъ Б. Н., инж.-мех.; Викторовъ, К. Е.; Германъ, Б. Д.; кн. Голицынъ, В. Б., академикъ; Гофманъ, Эд., инж. Англія (Лондонъ); Глуманъ, О., прив.-доц. пол. инст. въ Лага (Герм.); Гудинъ, В. Г., (Бельгія); Делонэ, Н. Б., проф. Кіевск. Полит.; Дель-Метцъ, проф. Кіевск. Унив.; Елецкій, В., Японія (Токио); Каменьщиковъ, Н. П., б. асс. Кор. Возд. Обс. въ Линденбергъ (Пруссія); Кашкаровъ, Н. А., инж. пут. сообщ.; Лавровъ, Н. А., инж.; Лебедевъ, А. А., горч. инж.; Лебедевъ, В. А.; Магометь-Бекъ, (Турція); Меерсонъ, Л. (Швейцарія); Никитинъ, П. Ф., инж.-техн.; Нѣмченко, С. А., кап. воен. инж.; Пыльновъ, К., инж.-техн.; Дель-Пропосто, Ч. А., инж. (Италія); Ракчеевъ, А. М., инж.-техн.; Ребиковъ, Н. В.; Рузеръ, Л. (Париж); Рынинъ, Н. А., инж. п. с.; Рейнбергъ, С. А., инж.-техн.; Сверхковъ, Е. П.; Сташевскій, В. В., инж.-шт.-кап.; Утѣшевъ, Н. И., инж.-подполк.; Даль-Фаббро Чезаре, инж. (Италія); Фоминъ, Н. В., шт.-кап, инж.-элек. (Владивостокъ); Форланини, Эрико, инж. (Италія); Фосмайеръ, Э., инж.-мех. (Голландія); Хволесъ, М. Э. (Австрія); Фонтъ-Шаренбергъ, шт.-кап. Китай (Пекинъ); Ширманъ, А. В., инж., зав. возд. отд. „Deutsches-Museum“ — Мюнхенъ (Германія); Щегининъ, С. С.; Эмме, К. (Льежъ, Бельгія).

Условія подписки: на 1 годъ 24 номера 10 р., на 9 мѣс. 18 номеровъ 8 р. 50 к., на 6 мѣс. 12 номеровъ 6 р., на 3 мѣс. 6 номеровъ 3 р. 50 к., на 1 мѣс. 2 номера 1 р. 25 к. Съ доставкой и пересылкой. Допускается разсрочка для годовыхъ подписчиковъ: при подпискѣ—5 руб. въ апрѣлѣ—3 руб. и въ августѣ—2 руб.

Цѣна отдѣльнаго номера 60 коп.

Главная контора и редація: С.-Петербургъ, Стремянная, 7. Телефонъ 99—98.

Редакторъ: Б. Н. Воробьевъ.

Издатели: А. М. Ракчеевъ.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрия).

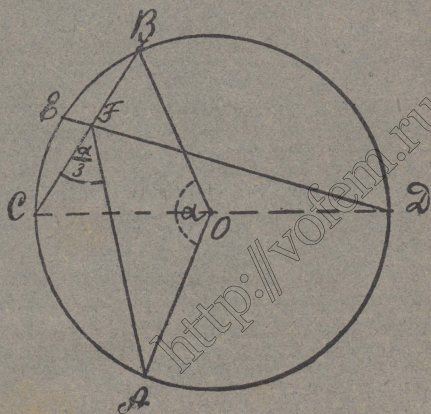
Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. I-я.

Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины:

„Новаго Времени“ (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза“ (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ“ (Москва), „Сотрудникъ Школъ“ (Москва), Вельке (Кіевъ), „Товарищества“ (Самара), „Волжанинъ“ (Самара) и др.



$$\cup AC = \cup CB; \cup AD = \cup DB; \cup CE = \cup EB.$$

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

Выходить 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, не
мѣнѣе 24 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.



ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудничковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Угражденія для учениковъ. Задачи на премию. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Статьи составляютъ настолько популярно, насколько это возможно безъ ущерба для научной стороны дѣла.

Предыдущіе семестры были **рекомендованы:** Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. для гимн. муж. и жен., реальн. уч., прогимн. город. уч., учит. инст. и семинарій; Главн. Упр. Воен.-Учебн. Зав.—для воен.-уч. заведеній; Учен. Ком. при Св. Синодѣ — для дух. семинарій и училищъ.

Пробный номеръ высылается за одну 7-коп. марку.

Важѣйшія статьи, помѣщенныя въ 190⁹/₁₀ г.

42-ой семестръ.

М. Зиминъ. Приближенное вычисленіе корней квадратнаго уравненія. — *П. В. Шенелевъ.* Объ изложеніи основныхъ понятій и законовъ механики. — *Э. Пикаръ.* Успѣхи динамическаго воздухоплаванія. — Проф. *Ф. Содди.* Отецъ радія. — *К. Граффъ.* Комета Галлея и ея предстоящее возвращеніе. — *А. Долговъ.* О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо. — Проф. *Ф. Содди.* Къ вопросу о происхожденіи радія. — Прив.-доц. *В. Каганъ.* Что такое алгебра? — Проф. *К. Делтеръ.* Искусственные драгоценные камни. — *Л. Видеманъ.* По поводу новаго объясненія твердости тѣлъ. — Проф. *Г. Кайзеръ.* Современное развитіе спектроскопіи. — Новое сообщеніе проф. Рамзая о превращеніи химическихъ элементовъ. — *Д. Ефремовъ.* О четырехугольникахъ. — *А. Пугаченко.* Приближенное дѣленіе угла на n равныхъ частей при помощи циркуля и линейки. — Опыты проф. *І. І. Косоногова* по изслѣдованію электролиза при помощи ультра-микроскопа. — Проф. *А. Беккеръ.* Сжиженіе газовъ.

43-й семестръ.

Г. Пуанкаре. Новая механика. — *П. Флоровъ.* Способъ вычисленія отношенія окружности къ диаметру съ пятью десятичными знаками, пригодный для преподаванія въ среднихъ школахъ. — *И. Мессеримидтъ.* Марсъ и Сатурнъ. — *П. Лоуэлъ.* Марсъ. — *С. Виноградовъ.* Развѣтленіе понятія о числѣ въ его исторіи и въ школѣ. — *Е. Григорьевъ.* О разложеніи въ ряды функцій $\sin x$ и $\cos x$. — Проф. *Д. Синцовъ.* Къ вопросу о преподаваніи математики. Я. Штейнеръ, какъ преподаватель. — *Г. Урбанъ.* Являются ли основныя законы химіи точными или же лишь приближенными. — *Е. Смирновъ.* Объ ирраціональныхъ числахъ. — *П. Ренаръ.* Авіація, какъ спортъ и наука. — Проф. *О. Лоджъ.* Мировой эфиръ. — *К. Лебединцевъ.* Понятіе объ ирраціональномъ числѣ въ курсѣ средней школы. — *Э. Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ. — *А. Филипповъ.* Дѣйствія съ періодическими дробями. — Прив.-доц. *В. Бобынинъ.* Естественныя и искусственныя пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденціи: Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.