№ 521.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Привата-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIV-го Семестра № 5-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIV Сем. № 5.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 521.

Броуновское движеніе.

А. Іоллоса.

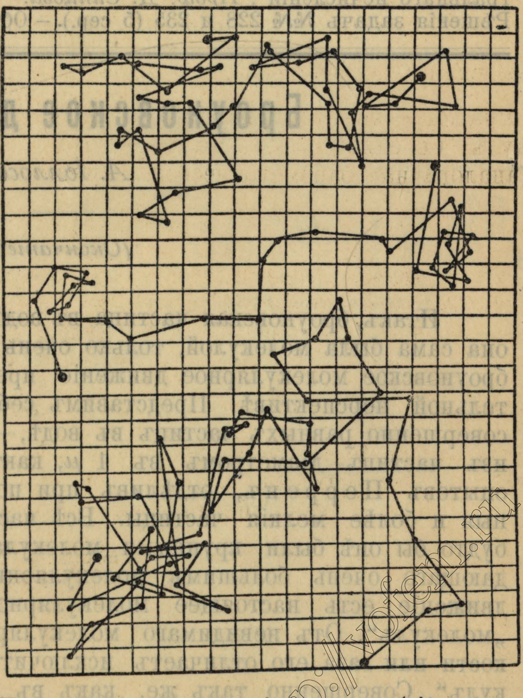
(Окончаніе).*

Итакъ, броуновская частица въ водѣ двигается такъ, какъ будто бы она сама была молекулой, только очень крупнаго размѣра. И тутъ-то броуновское молекулярное движеніе представляется въ новой поразительной перспективѣ. Представимъ себѣ не одну, а огромное число совершенно равныхъ частицъ въ водѣ, — напримѣръ, эмульсію мастики изъ частицъ діаметромъ въ 1 μ, какъ ее приготовилъ для своихъ опытовъ Перренъ, отдѣливъ при помощи центрофуги болѣе крупныя и болѣе мелкія частицы. Всѣ частицы будутъ двигаться, какъ будто бы онѣ были крупными молекулами какого-то вещества, обладающаго очень большимъ молекулярнымъ вѣсомъ. Ихъ броуновское движеніе есть настоящее молекулярное движеніе очень крупныхъ „молекулъ". Отъ невидимаго молекулярнаго движенія молекулъ жидкости или газа его отличаетъ исключительно крупный размѣръ „молекулъ". Совершенно такъ же, какъ въ растворахъ, это движеніе обусловливаетъ нѣкоторое осмотическое давленіе и диффузію, препятствующую, напримѣръ, осѣданію всѣхъ частицъ на днѣ подъ дѣйствіемъ силы тяжести. Для физика же эти своеобразныя „крупныя

*) См. „Вѣстникъ", № 520.

молекулы“ имѣютъ одно огромное преимущество передъ обыкновенными молекулами: ихъ можно видѣть, наблюдать, считать, почти-что вылавливать руками; это не только давало возможность провѣрить правильность кинетической теоріи броуновскаго движенія, но въ случаѣ благопріятнаго исхода провѣрки обѣщало также дать новое желанное подтвержденіе кинетическихъ и атомистическихъ воззрѣній вообще.

Такое двойное подтвержденіе и получено Перреномъ, работой котораго мы уже пользовались и въ предыдущемъ. Первый путь провѣрки, который былъ предложенъ Эйнштейномъ и уже до Перрена избранъ Сведбергомъ (Svedberg), но который у этого экспериментатора не далъ вполнѣ благопріятныхъ для теоріи результатовъ, состоитъ въ измѣреніи средней скорости перемѣщеній, наблюдаемыхъ въ микроскопѣ. Мы уже подчеркнули, что эта наблюдаемая скорость не есть дѣйствительная скорость, которая гораздо больше. Но математическая теорія позволяетъ все-таки вывести и среднія перемѣщенія, которыя должны наблюдаться черезъ извѣстные интервалы, — напримѣръ, черезъ каждыя 30 секундъ. Послѣ Сведберга тѣ же опыты были предприняты Анри (Henri), который дѣлалъ съ этой цѣлью кинематографическіе снимки броуновскаго движенія, но получилъ значительныя отклоненія опыта отъ теоріи. Однако, новѣйшія тщательныя измѣренія Перрена дали полное совпаденіе опыта съ теоріей, и тотъ же самый благопріятный для теоріи результатъ онъ получилъ еще совершенно инымъ оригинальнымъ методомъ, о которомъ будетъ рѣчь впереди. Оба раза, впрочемъ, Перренъ не сопоставляетъ прямо величины, непосредственно добываемыя опытомъ, съ тѣми ихъ значеніями, которыя онѣ должны имѣть по теоріи. Онъ вмѣсто этого выбираетъ болѣе изящный способъ сравненія, вычисляя на основаніи данныхъ опыта универсальную постоянную N, число молекулъ въ граммъ-молекулѣ, которая входитъ въ теоретическія формулы. Онъ получаетъ для N то же самое число, которое было опредѣлено на основаніи данныхъ изъ совершенно другихъ областей физики.



Пути частицъ эмульсіи мастики (діаметръ = 1 μ), наблюдаемыхъ черезъ каждыя 30 секундъ. 16 дѣленій квадратной сѣти чертежа = 50 μ (по Перрену).

Новый (второй) способъ провѣрки Перрена основанъ на слѣдующемъ разсужденiи. Возьмемъ эмульсiю, въ которой частицы, совершающiя броуновское движенiе, имѣютъ всѣ одинаковую величину. Совокупность всѣхъ частицъ („крупныхъ молекулъ"), какъ мы уже сказали, проявляетъ себя совершенно такъ же, какъ газъ, состоящiй изъ такихъ крупныхъ молекулъ. Подобно тому, какъ молекулы атмосфернаго воздуха не осаждаются подъ дѣйствiемъ силы тяжести и устанавливается лишь постепенное уменьшенiе давленiя съ высотой подъема надъ земной поверхностью, такъ и частицы эмульсiи не падаютъ всѣ на дно, а получается нѣкоторое состоянiе равновѣсiя. Въ виду крупной величины частицъ главное количество сосредоточится въ низшихъ слояхъ, но нѣкоторое число остается и въ высшихъ слояхъ и (обусловливаемое броуновскимъ движенiемъ) осмотическое давленiе будетъ уменьшаться съ высотой формально совершенно по тому же закону, по которому уменьшается барометрическое давленiе въ атмосферѣ. Для осмотическаго давленiя на разныхъ уровняхъ эмульсiи получается, слѣдовательно, формула, совершенно аналогичная той, по которой опредѣляется барометрическое давленiе на высотахъ. Но осмотическое давленiе мы можемъ замѣнить въ этой формулѣ числомъ „молекулъ" (т. е. частицъ) въ единицѣ объема. Обозначая это число черезъ n, мы изъ раньше выведенныхъ формулъ получаемъ $p = \frac{2}{3} w \cdot n$. Если подставить это выраженiе вмѣсто давленiя и обозначить еще черезъ n_0 число молекулъ въ единицѣ объема на другомъ уровнѣ эмульсiи, то формула (аналогичная барометрической) принимаетъ видъ:

$$\frac{2}{3} w \log \frac{n_0}{n} = A \cdot (S - s) g h$$

(гдѣ на правой сторонѣ A есть объемъ каждой частицы эмульсiи, $S-s$ есть разность плотностей частицъ и среды, g — постоянная силы тяжести, h — разность уровней). Этой формулой и пользуется Перренъ. Такъ какъ всѣ величины правой стороны для спецiально приготовленныхъ имъ эмульсiй ему извѣстны, то ему остается опредѣлить отношенiе $\frac{n_0}{n}$. Это отношенiе онъ получаетъ простымъ подсчетомъ частицъ на двухъ разныхъ уровняхъ подъ микроскопомъ. Тогда изъ уравненiя опредѣляется w, средняя кинетическая энергiя, общая, какъ мы знаемъ, всѣмъ газамъ, жидкостямъ, растворамъ. Уравненiе $\frac{2}{3} wN = RT$ позволяетъ, наконецъ, опредѣлить искомую универсальную постоянную N.

Для экспериментальнаго подсчета частицъ на разныхъ уровняхъ и опредѣленiя отношенiя $\frac{n_0}{n}$ Перренъ помѣщаетъ подъ микроскопъ слой эмульсiи толщиной въ нѣсколько десятковъ μ. Такой слой представляетъ „атмосферу" миниатюрныхъ размѣровъ, въ которой давленiе падаетъ на половину при подъемѣ не въ 6000 *м.*, какъ въ воздушной атмосферѣ, а въ одну или въ нѣсколько сотыхъ долей миллиметра! Устанавливая микроскопъ на разные уровни этого слоя, Перренъ либо фотографируетъ ихъ и подсчитываетъ затѣмъ частицы на снимкахъ, либо же считаетъ глазомъ. Но въ послѣднемъ случаѣ онъ ограничиваетъ поле зрѣнія экраномъ съ булавочнымъ проколомъ, сквозь который видна столь малая часть обычнаго поля зрѣнія, что въ немъ попадаются лишь нѣсколько частицъ одновременно. Производятся сотни такихъ легкихъ подсчетовъ на однихъ и тѣхъ же двухъ уровняхъ и изъ нихъ затѣмъ опредѣляется отношеніе $\frac{n_0}{n}$.

Результатъ этихъ опытовъ былъ блистательный. Не только оправдался самый законъ уменьшенія числа частицъ съ высотой надъ дномъ (барометрическая формула), но для всѣхъ изслѣдованныхъ эмульсій получены были одни и тѣ же числа для w и N, и эти числа совпадаютъ съ тѣми, которыя были получены въ другихъ отрасляхъ физики. Именно, для N получено значеніе $7 \, . \, 10^{23}$. Столько молекулъ содержится въ граммъ-молекулѣ.

Нелишнимъ будетъ вкратцѣ упомянуть, во-первыхъ: какъ изъ этого числа опредѣляются нѣкоторыя другія величины молекулярныхъ теорій и, во-вторыхъ: какими независимыми способами (помимо броуновскаго движенія) было уже раньше получено то же значеніе для N. Зная число N, можно очень просто получить вѣсъ молекулъ (и атомовъ). Для этого надо только раздѣлить вѣсъ граммъ-молекулы, т. е. молекулярный вѣсъ, на N. Такъ, вѣсъ молекулы кислорода равенъ $\frac{32}{N}$, или круглой цифрой $5 \, . \, 10^{-23}$ *гр.*, атомъ же кислорода вѣситъ половину этого числа. Нѣсколько сложнѣе опредѣленіе діаметра молекулъ. Для этого приходится пользоваться формулой М а к с в е л л я, вывода которой мы здѣсь не дадимъ, и которая имѣетъ видъ:

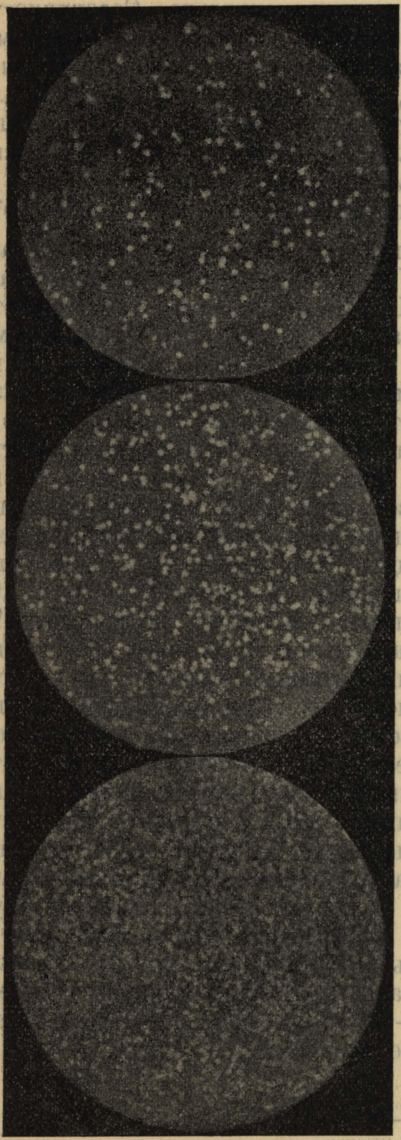
$$L = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot d^2},$$

гдѣ n есть опять число молекулъ въ кубическомъ сантиметрѣ, легко вычисляемое, разъ извѣстно число N, d есть искомый діаметръ. L же на лѣвой сторонѣ — величина, играющая большую роль въ кинетической теоріи, именно такъ называемый свободный путь молекулъ, т. е. средній путь молекулы между двумя столкновеніями съ другими молекулами. Для газовъ L можно опредѣлить изъ экспериментально полученнаго коэффиціента внутренняго тренія (при скольженіи одного слоя газа надъ другимъ). Такъ какъ, слѣдовательно, въ этомъ уравненіи извѣстны всѣ величины кромѣ d, то d и можно вычислить: d получается порядка одной десятимилліонной *мм.*, напр., для кислорода $= 2{,}6 \, . \, 10^{-8}$ *см.* Очень просто, наконецъ, получается элементарная единица электрическаго заряда e, атомъ электричества. При разложеніи одной граммъ-молекулы соляной кислоты путемъ электролиза каждый іонъ переноситъ такой элементарный зарядъ. Общее количество электричества, переносимаго токомъ при разложеніи граммъ-молекулы, есть величина, извѣстная изъ опыта. Она должна быть равной $N \, . \, e$. А разъ извѣстно N, то можно отсюда получить e. Элементарный зарядъ круглымъ числомъ равенъ $4 \, . \, 10^{-10}$ электростатическихъ единицъ.

Изъ методовъ, которыми (помимо броуновскаго движенія) было опредѣлено число N и остальныя связанныя съ нимъ молекулярныя величины, приведемъ слѣдующіе: очень просто получается нижній предѣлъ для числа N, если предположить, что молекулы имѣютъ шарообразную форму, и что въ объемѣ граммъ-молекулы жидкости онѣ, во всякомъ случаѣ, помѣщаются не тѣснѣе, какъ соприкасаясь другъ съ другомъ. Геометрически можно высчитать, что объемъ совокупности нагроможденныхъ (внутри куба) соприкасающихся шаровъ составляетъ 0,73 всего объема куба. Приравнивая каждый шаръ молекулѣ, діаметръ которой обозначимъ черезъ d, мы имѣли бы уравненіе:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 . N = 0{,}73 V,$$

гдѣ V есть объемъ граммъ-молекулы жидкости (или газа въ жидкомъ состояніи).



Фотографическіе снимки для подсчета частицъ въ эмульсіи мастики на трехъ уровняхъ, отстоящихъ на 12 μ другъ отъ друга. Діаметръ частицъ $= 1\ \mu$ (по Перрену).

Но правильно будетъ вмѣсто знака равенства писать, что лѣвая сторона (объемъ всѣхъ молекулъ), во всякомъ случаѣ, меньше правой. Если, тѣмъ не менѣе, вычислить изъ этого уравненія d, комбинируя его съ приведеннымъ выше уравненіемъ Максвелля, которое для газовъ даетъ намъ величину произведенія $n . d^2$, а, слѣдовательно, и $N . d^2$, то для d получится, во всякомъ случаѣ, слишкомъ большая величина, а, слѣдовательно, впослѣдствіи для N (изъ уравненія Максвелля) — слишкомъ малая, — другими словами, нижній предѣлъ для N. Такимъ путемъ получили, что N должно быть больше, чѣмъ 45.10^{22}. Съ другой стороны, теорія, по которой діэлектрическая постоянная газовъ обусловливается тѣмъ, что въ электрическомъ полѣ происходитъ въ каждой молекулѣ раздѣленіе электричества (образуются электрическіе „диполы“

съ положительнымъ электричествомъ на одномъ концѣ и отрицательнымъ на другомъ) позволяетъ вычислить, какимъ числомъ равныхъ по величинѣ проводящихъ шаровъ можно себѣ представить замѣненнымъ молекулы для того, чтобы получить тѣ значенія діэлектрическихъ постоянныхъ газовъ, которыя найдены экспериментально. Совокупность объемовъ этихъ шаровъ будетъ, во всякомъ случаѣ, меньше суммы молекулярныхъ объемовъ. Приравнивая поэтому эти величины (и пользуясь опять формулой Максвелля, какъ вторымъ уравненіемъ для N и d), мы теперь получимъ слишкомъ малую величину для d и слишкомъ большую, верхній предѣлъ, для N. Получено, что N должно быть, во всякомъ случаѣ, меньше, чѣмъ $200 \,.\, 10^{22}$. Такимъ образомъ, N заключено между довольно тѣсными предѣлами — $45 \,.\, 10^{22}$ и $200 \,.\, 10^{22}$.

Болѣе опредѣленный результатъ дало примѣненіе извѣстнаго уравненія Ванъ-деръ-Вальса (Van-der-Waals). Соединенное уравненіе Бойля-Маріотта и Гэ-Люссака $pv = RT$ въ точности справедливо только для идеальнаго газа, т. е. для газа, въ которомъ объемомъ самихъ молекулъ можно вовсе пренебречь и молекулы не оказываютъ другъ на друга никакихъ притяженій. Идеальный газъ при расширеніи въ пустое пространство (знаменитый опытъ Гэ-Люссака) не измѣняетъ своей температуры, такъ какъ не производитъ при этомъ никакой работы. Однако, Джоуль и Вильямъ Томсонъ показали, что большинство газовъ при этомъ все-таки охлаждаются и на этомъ эффектѣ основанъ даже извѣстный аппаратъ Линде (Linde) для добыванія жидкаго воздуха. Охлажденіе получается потому, что въ дѣйствительности расширеніе происходитъ не безъ работы: должна быть израсходована теплота на работу по преодолѣнію притяженій между молекулами, удаляемыми на бóльшія разстоянія другъ отъ друга. Какъ разъ противоположный эффектъ получается для водорода при обыкновенной температурѣ. При расширеніи въ пустое пространство онъ не охлаждается, а, напротивъ, нагрѣвается. Тутъ преобладаетъ второе обстоятельство, не принятое въ разсчетъ при разсмотрѣніи идеальнаго газа, именно: конечная величина объема молекулъ. Легко понять, что въ данномъ объемѣ газа это приводитъ къ болѣе частымъ столкновеніямъ молекулъ, а когда газу предоставляется бóльшій просторъ, то температура повышается благодаря тому, что молекулы въ состояніи развить бóльшую среднюю кинетическую энергію. Это явленіе и преобладаетъ въ водородѣ при комнатной температурѣ надъ тѣмъ, которое даетъ охлажденіе въ другихъ газахъ. Итакъ, дѣйствительные газы не идеальны. Принимая въ расчетъ оба упомянутыхъ вліянія, Ванъ-деръ-Вальсъ вмѣсто уравненія идеальнаго газа $pv = RT$ получилъ свое уравненіе:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = RT.$$

Въ этомъ уравненіи a и b — постоянныя, характеризующія каждый отдѣльный газъ. Для каждаго газа ихъ можно получить, изучая его отклоненія отъ законовъ идеальнаго газа. Здѣсь насъ въ частности интересуетъ постоянная b, которая, по Ванъ-деръ-Вальсу, есть не что иное, какъ умноженная на 4 совокупность всѣхъ молекулярныхъ объемовъ (та часть объема газа, которая заполнена самими молекулами). Зная постоянную b, мы, слѣдовательно, имѣемъ уравненіе:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 . N = \frac{b}{4},$$

которое (опять вмѣстѣ съ уравненіемъ Максвелля) позволяетъ вычислить d и N. Получено $N = 60 . 10^{22}$.

Выше мы уже указали способъ полученія элементарнаго электрическаго заряда e, если извѣстно N. Но этотъ элементарный зарядъ, зарядъ іоновъ и электроновъ, былъ полученъ непосредственно рядомъ независимыхъ способовъ при изученіи іонизаціи газовъ и радіаціи радіоактивныхъ элементовъ. И, конечно, разъ стала извѣстна величина e, то, зная изъ опыта электролиза величину произведенія $N . e$, можно обратно вычислить N. Были получены этимъ путемъ, смотря по тому, какъ опредѣлялся зарядъ e, числа для N между $60 . 10^{22}$ и $70 . 10^{22}$.

Тѣ же числа получаются и изъ распредѣленія энергіи въ инфракрасномъ спектрѣ излученія чернаго тѣла, на основаніи закона излученія, высказаннаго Лоренцомъ (Lorentz) и Планкомъ (Planck). Наконецъ, лордъ Релей (Rayleigh) получилъ тотъ же порядокъ величины для N изъ опредѣленій яркости синяго цвѣта неба, который, по его предположенію, надо объяснить диффракціей (и именно преимущественной диффракціей короткихъ волнъ) солнечнаго свѣта около самихъ молекулъ атмосферы.

Какъ мы видимъ, все это методы, совершенно независимые отъ броуновскаго движенія и дающіе все одинъ и тотъ же результатъ. Броуновское движеніе теперь прибавило къ нимъ новый методъ. Оно также позволяетъ опредѣлить молекулярныя величины, напримѣръ, даже такую, какъ будто ничего общаго съ нимъ не имѣющую, величину, какъ атомъ электричества e. Но всего этого еще мало. Нельзя закончить этотъ обзоръ, не указавъ на ту своеобразную позицію, которую броуновское движеніе, разъ признана кинетическая теорія его происхожденія, занимаетъ по отношенію къ второму закону термодинамики, къ принципу энтропіи. Оно представляетъ явное нарушеніе этого принципа. Внутренняя тепловая энергія непосредственно производить работу не можетъ, — а между тѣмъ производитъ, двигая на нашихъ глазахъ подчасъ сравнительно крупныя частицы и поднимая ихъ противъ силы тяжести. Энергія, „разсѣянная" на безпорядочныя движенія мелкихъ и невидимыхъ молекулъ, передается опять видимымъ тѣламъ. Этотъ фактъ нарушенія принципа энтропіи, прочно усвоеннаго наукой, и порождалъ долгое время недовѣріе къ кинетической теоріи броуновскаго движенія. Правда, уже Максвеллъ воображалъ демона, способнаго ловить отдѣльныя молекулы, и, вылавливая только такія, которыя двигаются въ одномъ направленіи, при помощи ихъ, т. е. за счетъ тепловой энергіи, совершать работу, поднимать, напримѣръ, тяжесть.

Но на то же онъ и демонъ. Перренъ утѣшаетъ насъ тѣмъ, что „было бы легкомысленно разсчитывать на броуновское движеніе, какъ на средство для подъема камней при постройкѣ дома". Все же сортировка броуновскихъ частицъ, частицъ видимыхъ и несомнѣнно реальныхъ, не представляется уже въ такой степени „демонической" задачей, какъ вылавливаніе самихъ молекулъ, остающихся невидимыми и теоретическими.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

Замѣтка по поводу возраженія г-на Лебединцева на нашу статью объ ирраціональныхъ числахъ въ № 511 „Вѣстника", помѣщеннаго въ № 513 того же журнала*).

Предложенная нами въ № 511 „Вѣстника" схема разработки съ учениками V-го класса реальныхъ училищъ вопроса объ установленіи понятія объ ирраціональномъ числѣ встрѣтила возраженіе со стороны г. Лебединцева въ № 513 „Вѣстника". Къ сожалѣнію, мы ознакомились съ этимъ возраженіемъ слишкомъ поздно — лишь теперь, по возвращеніи въ г. Юрьевъ — и потому за недостаткомъ времени въ настоящей замѣткѣ коснемся лишь главнаго пункта возраженія.

Г. Лебединцевъ ставитъ, главнымъ образомъ, намъ на видъ, будто въ самомъ основномъ пунктѣ вопроса мы попали въ логическій кругъ, при чемъ утверждаетъ, будто „понятіе объ ирраціональномъ числѣ z, неизвѣстномъ еще ученикамъ, выясняется при помощи понятія о разности между этимъ неизвѣстнымъ z и перемѣннымъ раціональнымъ числомъ $\frac{x}{n}$ $\left(\text{или } \frac{x+1}{n}\right)$" (стр. 218). Но развѣ это такъ? У насъ, какъ, по нашему мнѣнію, достаточно ясно изъ разсужденій, предваряющихъ и сопровождающихъ теорему 10-ую статьи, на вновь вводимое число z налагается требованіе, чтобы оно было представителемъ величины отрѣзка OM. Противъ такого предварительнаго введенія числа z въ

*) Удѣляя мѣсто этому возраженію на замѣтку г. Лебединцева, мы считаемъ все же нужнымъ сказать, что по существу дѣла мы вполнѣ согласны съ г. Лебединцевымъ. Теоретически въ разсужденіи г. Смирнова есть кругъ и въ такого рода ложный кругъ несомнѣнно впадаютъ и тѣ, которые (какъ говоритъ объ этомъ и г. Смирновъ ниже) говорятъ о разности ирраціональныхъ чиселъ раньше, чѣмъ они таковую опредѣлили. Другое дѣло дидактическая сторона вопроса. Мы глубоко убѣждены, что изложить въ средней школѣ, въ особенности въ V классѣ, ученіе объ ирраціональныхъ числахъ безъ всякаго логическаго дефекта нѣтъ возможности; и г. Смирновъ, на нашъ взглядъ, совершенно правильно указываетъ тонкіе дефекты и у г. Лебединцева. Поэтому врядъ ли такого рода дефектъ можно поставить въ вину преподавателю, если онъ этимъ путемъ стремится выбраться изъ круга, въ который онъ поставленъ существомъ дѣла.

Ред.

средней школѣ г. Лебединцевъ едва ли что-либо можетъ возразить, да онъ и самъ вводитъ число $\sqrt{2}$ прежде всего, какъ численнаго представителя стороны квадрата, площадь котораго вдвое болѣе площади квадрата со стороной, равной единицѣ длины (стр. 220).

Но, наложивъ такое требованіе, мы обязываемся, по нашему мнѣнію, чтобы быть послѣдовательными, устанавливать свойства вводимаго нами новаго числа на основаніи аналогій со свойствами величины, имъ представляемой; по крайней мѣрѣ, намъ кажется нелогичнымъ въ своихъ дальнѣйшихъ сужденіяхъ относительно этого числа считать себя совершенно свободнымъ отъ этого основного условія, уже на него наложеннаго. Поэтому, разъ число z введено, какъ численный представитель отрѣзка OM, который является общимъ предѣломъ двухъ безконечныхъ рядовъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, то смыслъ разностей $z-\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}-z$ для учениковъ совершенно ясенъ: они будутъ представителями безконечно-малыхъ разностей соотвѣтственныхъ отрѣзковъ и, какъ таковые, сами должны будутъ разсматриваться, какъ безконечно-малыя. Такимъ образомъ, при этихъ условіяхъ мы должны будемъ введенное нами число z разсматривать, какъ общій предѣлъ чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, въ силу чего имѣемъ право написать равенства:

$$z=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right)=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right),$$

такъ что въ этихъ равенствахъ при указанной точкѣ зрѣнія нѣтъ ничего нелогичнаго. Да и вообще ирраціональное число z, т. е. $\sqrt{A}$, гдѣ A есть число положительное, не представляющее полнаго квадрата, введенное внѣ всякихъ пространственныхъ представленій, вводится въ настоящее время такъ, что свойствами, содержащимися въ этихъ равенствахъ, оно обладаетъ, чего, вѣроятно, г. Лебединцевъ не отрицаетъ.

Является теперь вопросъ, можно ли этими равенствами пользоваться, какъ опредѣленіями? На этотъ вопросъ отвѣтъ будетъ ясенъ, если будетъ установленъ надлежащій взглядъ на смыслъ опредѣленій чиселъ. Разъ мы устанавливаемъ понятіе о числѣ, какъ о представителѣ величины, то вполнѣ естественно, по нашему мнѣнію, держаться взгляда Ж. Бертрана на опредѣленіе чиселъ: „опредѣлить несоизмѣримое число значитъ указать то дѣйствіе, посредствомъ котораго составляется изъ единицы выраженная этимъ числомъ величина“. (Ж. Бертранъ, Ариѳметика. Переводъ безъ измѣненій съ послѣдняго 11-го изданія М. В. Пирожкова, 1901 г., стр. 279). Если къ этому опредѣленію несоизмѣримаго числа прибавить его же замѣчаніе: „мы опредѣлили только величину, для которой $\sqrt{N}$ служитъ мѣрою; да и на самомъ дѣлѣ невозможно опредѣлить непосредственно отвлеченное число. Если вдуматься въ данныя раньше опредѣленія, то окажется, что они даже въ простыхъ случаяхъ, съ цѣлыми или дробными числами, служатъ лишь указаніемъ того дѣйствія, при помощи котораго получается изъ единицы величина, измѣряемая какимъ-нибудь изъ этихъ чиселъ" (тамъ же, стр. 241), то будетъ очевидно, что то же опредѣленіе, по его мнѣнію, относится вообще къ числамъ. Такимъ образомъ, опредѣлить число z значитъ указать способъ построенія изъ единицы величины, для которой оно является численнымъ представителемъ.

Этотъ способъ вполнѣ устанавливается слѣдующимъ предложеніемъ: Отрѣзокъ OM есть общій предѣлъ двухъ безконечныхъ рядовъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ при неограниченно возрастающемъ n. Но это предложеніе и представлено равенствомъ:

$$z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right).$$

Такимъ образомъ, этими равенствами указывается способъ построенія изъ единицы величины, представленной числомъ z, а потому они могутъ быть разсматриваемы, какъ опредѣленія числа z.

Къ этимъ разъясненіямъ по главному пункту статьи мы прибавимъ еще нѣсколько замѣчаній по поводу предлагаемаго г. Лебединцевымъ, въ связи съ разсматриваемыми возраженіями, метода изложенія того же вопроса. Почему г. Лебединцевъ считаетъ естественнымъ при первомъ ознакомленіи учениковъ съ ирраціональными числами вводить условіе, чтобы длина діагонали квадрата со стороной, принимаемой за единицу измѣренія, была выражена числомъ $\sqrt{2}$ (?), тотчасъ же послѣ того, какъ будетъ обнаружено, что стороной квадрата съ площадью, вдвое большей площади перваго, будетъ какъ разъ эта самая діагональ? Данныхъ имъ предварительныхъ разсужденій на стр. 220 для вдумчивыхъ учениковъ будетъ слишкомъ мало, чтобы подобное обозначеніе не показалось имъ неожиданнымъ. Если же за разъясненіями по этому вопросу мы обратимся къ самому курсу г. Лебединцева, то найдемъ слѣдующее: „Если будемъ рѣшать, говоритъ авторъ, эту задачу (Данъ квадратъ, сторона котораго равна единицѣ длины. Найти сторону квадрата, площадь котораго была бы вдвое болѣе площади даннаго) вычисленіемъ, то, обозначивъ сторону искомаго квадрата черезъ x, найдемъ (?), что площадь его будетъ x^2; такъ какъ по условію эта площадь равна 2 кв. единицамъ, то имѣемъ: $x^2 = 2$, или $x = \sqrt{2}$". („Курсъ алгебры" К. Ѳ. Лебединцева. Изд. 1910 г. Ч. II. Стр. 43). Мы думаемъ, что авторъ, обозначая сторону искомаго квадрата черезъ x, разумѣетъ подъ послѣднимъ число цѣлое или дробное, — только при этомъ условіи ученикъ, не имѣющій въ своемъ распоряженіи ирраціональныхъ чиселъ, можетъ утверждать, что площадь этого квадрата выразится числомъ x^2; въ противномъ случаѣ, выраженіе площади квадрата черезъ сторону его для ученика остается еще неизвѣстнымъ. Показавъ затѣмъ, что сторона искомаго квадрата равна діагонали даннаго и что послѣднюю можно выразить приближенно при помощи чиселъ, найденныхъ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, содержащагося въ надлежаще выбранныхъ цѣлыхъ числахъ, авторъ говоритъ: „Такъ какъ длина отрѣзка AM (сторона искомаго квадрата) не можетъ быть выражена ни цѣлымъ ни дробнымъ числомъ, то необходимо придумать какое-либо новое число для ея обозначенія. Выразимъ ее особымъ числомъ, которому припишемъ названіе „квадратный корень изъ двухъ“ (?); будемъ обозначать его знакомъ (какъ иначе выражаются — символомъ) $\sqrt{2}$, причемъ условимся слова „нѣкоторый отрѣзокъ равенъ $\sqrt{2}$ единицъ длины“ понимать такъ: нѣкоторый отрѣзокъ равенъ сторонѣ квадрата, площадь котораго равна 2 соотвѣтствующимъ квадратнымъ единицамъ“ (тамъ же, стр. 46). Является вопросъ, почему же этому „особому числу“, которымъ мы выражаемъ сторону искомаго квадрата, приписывается названіе „квадратнаго корня изъ двухъ“? Если теперь эти строки сопоставить со слѣдующимъ опредѣленіемъ автора, предлагаемымъ имъ ученикамъ въ самомъ началѣ 1-й части „Алгебры“: „вообще, корнемъ какой-нибудь степени даннаго количества будемъ называть такое количество, которое, будучи возвышено въ указанную степень, дастъ въ результатѣ именно это данное количество“ („Курсъ алгебры“ К. Ѳ. Лебединцева. Изд. 1909 г. Ч. I. Стр. 13), то окажется, что квадратъ этого особаго числа, какъ квадратнаго корня изъ двухъ, долженъ равняться 2. Почему же сторона искомаго квадрата должна выражаться числомъ, квадратъ котораго равняется 2, — это во-первыхъ; а, во-вторыхъ, что еще значитъ возвысить это вновь введенное число въ квадратъ? Второй пунктъ, на который мы хотѣли бы здѣсь обратить вниманіе, — это геометрическая интерпретація вопроса, предлагаемая г. Лебединцевымъ. Неудобство ея, и, по нашему мнѣнію, весьма крупное, состоитъ въ томъ, что она не можетъ быть использована даже для радикаловъ высшихъ степеней, не говоря уже вообще объ ирраціональномъ числѣ.

Е. Смирновъ.

Основы безпроволочной телеграфіи*).

Л. Мандельштама и Н. Папаллекси.

Настоящая рѣчь была произнесена проф. Брауномъ 11 декабря 1909 г. въ Стокгольмѣ при полученіи преміи Нобеля. Рѣчь сопровождалась пояснительными демонстраціями діапозитивовъ, съ которыхъ

*) Настоящая статья представляетъ собой предисловіе къ издаваемой товариществомъ „Mathesis“ брошюрѣ проф. Брауна „Мои работы по безпроволочной телеграфіи и электрооптикѣ“. Въ этой брошюрѣ впервые появляется въ печати рѣчь, произнесенная Брауномъ при полученіи преміи Нобеля. Такъ какъ эта рѣчь предполагаетъ, однако, нѣкоторыя общія свѣдѣнія о началахъ современной безпроволочной телеграфіи, то ей предпосылается статья его учениковъ и сотрудниковъ привать-доцента Страсбургскаго университета Л. Мандельштама и лаборанта Н. Папаллекси.

сдѣланы клише для помѣщеныхъ въ текстѣ рисунковъ. Первая часть представляетъ собою дословный переводъ рукописи, въ которую вошла рѣчь въ томъ видѣ, въ какомъ она была произнесена, лишь съ нѣкоторыми незначительными дополненіями. Новой является вторая часть „Дополненія и литература“ и вошедшіе въ нее рисунки.

Въ своей рѣчи Браунъ касается большого количества вопросовъ, принципіально важныхъ для разсматриваемыхъ имъ областей. Обиліе матеріала и ограниченность времени, естественно, обусловили нѣкоторую сжатость изложенія. Помѣщенныя во второй части дополненія имѣютъ цѣлью пояснить нѣкоторые вопросы, которые въ рѣчи были только затронуты.

Читателю, знакомому съ основами физики и слѣдившему за развитіемъ безпроволочной телеграфіи, не составитъ, по нашему мнѣнію, труда слѣдовать за изложеніемъ Брауна. Несмотря на это, мы считаемъ нелишнимъ предпослать нѣсколько вступительныхъ словъ для того, чтобы сдѣлать рѣчь Брауна доступной еще болѣе широкому кругу читателей.

Когда теперь говорятъ о безпроволочной телеграфіи, то подразумѣваютъ обыкновенно опредѣленный родъ телеграфіи безъ проводовъ, а именно телеграфію при помощи электро-магнитныхъ волнъ. Основаніемъ ея служатъ слѣдующія физическія явленія, открытіе и разработка которыхъ связаны съ именами Фарадея, Максвелла и Герца. Представимъ себѣ проводникъ, напримѣръ, проволоку, по которой протекаютъ перемѣнные токи большой частоты, т. е. токи очень часто (напримѣръ, нѣсколько сотъ тысячъ разъ въ секунду) мѣняющіе свою силу и свое направленіе. Такой проводникъ излучаетъ въ окружающее пространство электрическія магнитныя волны, подобно тому, какъ быстро (нѣсколько сотъ разъ въ секунду) колеблющееся тѣло излучаетъ въ окружающій воздухъ звуковыя волны. Это сравненіе должно, конечно, какъ всякое сравненіе, служить только нѣкоторой иллюстраціей: въ данномъ случаѣ оба сравниваемые процесса обладаютъ также и существенными различіями. Но не всякій проводникъ, черезъ который протекаютъ токи высокой частоты, одинаково хорошо излучаетъ электро-магнитныя волны. Излучательная способность зависитъ отъ его формы. Мы можемъ представить себѣ это такъ: разобьемъ мысленно проводникъ на очень маленькія части, которыя мы вправѣ разсматривать, какъ отрѣзки прямой. Излученіе каждаго такого прямолинейнаго элемента зависитъ отъ его длины, силы и частоты тока въ немъ и оріентировки по отношенію къ тому направленію, въ которомъ мы разсматриваемъ излученіе. Дѣйствіе всего проводника складывается геометрически изъ дѣйствій отдѣльныхъ элементовъ. Съ совершенно аналогичнымъ геометрическимъ сложеніемъ мы имѣемъ дѣло въ оптикѣ при вопросахъ такъ называемой интерференціи свѣта. Отсюда ясно, что замкнутый проводникъ, имѣющій, напримѣръ, форму кольца, петли или спирали, въ большинствѣ случаевъ излучаетъ сравнительно мало, такъ какъ въ одной части его токъ идетъ въ одномъ направленіи, а въ другой — въ тотъ же моментъ времени — въ другомъ, такъ что дѣйствіе одной половины отчасти уничтожаетъ дѣйствіе другой. Прямолинейная же проволока является, напримѣръ, одной изъ формъ проводника, обладающей большой излучательной способностью. Мы видимъ, такимъ образомъ, что недостаточно умѣть возбуждать токи высокой частоты въ проводникахъ вообще, но что нужно быть въ состоянiи возбуждать ихъ въ проводникахъ, обладающихъ особыми свойствами.

Разсмотримъ теперь, какъ возбуждаются токи большой частоты Если зарядить конденсаторъ — напримѣръ лейденскую банку — на нѣкоторую разность потенцiала и затѣмъ разрядить его черезъ проводникъ, обладающiй не слишкомъ большимъ сопротивленiемъ (напримѣръ, черезъ спираль изъ металлической проволоки), то въ проводникѣ возникаютъ перемѣнные токи, частота которой зависитъ отъ емкости конденсатора и самоиндукцiи проводника. Другими словами, зарядъ конденсатора при своемъ исчезанiи не постепенно убываетъ, какъ это можно было бы предположить, и токъ течетъ не только въ одномъ направленiи, а происходитъ такъ называемый колебательный разрядъ. Проведемъ слѣдующую аналогiю. Представимъ себѣ висящую вертикально спиральную пружину, неподвижно прикрѣпленную верхнимъ концомъ къ штативу. Подвѣсимъ къ этой пружинѣ грузъ; пружина нѣсколько вытянется и придетъ въ нѣкоторое положенiе равновѣсiя. Растянемъ пружину еще больше. Вся наша система обладаетъ теперь нѣкоторой потенцiальной энергiей, равной той работѣ, которую мы затратили на растяженiе пружины, подобно тому какъ заряженный электричествомъ конденсаторъ обладаетъ запасомъ электрической энергiи. Отпустимъ пружину съ прикрѣпленнымъ къ ней грузомъ: упругiя силы пружины приведутъ грузъ въ движенiе, сообщая ему все большую и большую скорость. Когда грузъ достигнетъ своего положенiя равновѣсiя, движенiе его не прекратится. Наоборотъ, онъ имѣетъ въ этомъ мѣстѣ наибольшую скорость: потенцiальная энергiя всецѣло перешла въ кинетическую энергiю груза. Грузъ будетъ продолжать двигаться дальше наверхъ до тѣхъ поръ, пока вся его кинетическая энергiя не истратится на подъемъ. Дальнѣйшiй ходъ явленiй ясенъ: грузъ будетъ колебаться вертикально около своего положенiя равновѣсiя, размахи колебанiй будутъ постепенно уменьшаться благодаря неизбѣжному тренiю, пока, наконецъ, грузъ окончательно не успокоится въ своемъ положенiи равновѣсiя. Перiодъ колебанiй тѣмъ больше, чѣмъ слабѣе пружина, т. е. чѣмъ больше растяжимость ея и чѣмъ больше масса груза. Уменьшенiе размаховъ колебанiй, т. е. затуханiе колебанiй, тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше тренiе и чѣмъ больше масса приводимаго въ движенiе воздуха, т. е. чѣмъ сильнѣе излученiе воздушныхъ волнъ.

Совершенно аналогично протекаетъ колебательный разрядъ конденсатора. Электрическая энергiя заряженнаго конденсатора переходитъ въ магнитную энергiю тока. Въ тотъ моментъ, когда конденсаторъ разряженъ, токъ наиболѣе силенъ. При своемъ исчезанiи онъ перезаряжаетъ конденсаторъ, такъ что обкладка, заряженная первоначально положительно, прiобрѣтаетъ отрицательный зарядъ и наоборотъ. Послѣ того, какъ токъ сдѣлался равнымъ нулю, разрядъ протекаетъ въ обратномъ направленiи и т. д. Размахи колебанiй, т. е. въ данномъ случаѣ амплитуды тока, постепенно уменьшаются, такъ какъ часть энергiи тратится на нагрѣванiе проводника и на излученiе электро-магнитныхъ волнъ. Эти потери совершенно аналогичны потерямъ отъ тренія и отъ излученія воздушныхъ волнъ въ случаѣ пружины. Большей или меньшей растяжимости пружины соотвѣтствуетъ бо́льшая или меньшая ёмкость конденсатора, сила тока соотвѣтствуетъ скорости груза. Подобно тому, какъ кинетическая энергія груза равняется $\frac{1}{2} mv^2$, гдѣ v есть скорость груза, а m — его масса, точно такъ же магнитная энергія тока равняется $\frac{1}{2} pi^2$, гдѣ i — сила тока, а p — нѣкоторая величина, характерная для проводника и зависящая отъ его геометрическихъ размѣровъ и окружающей его среды. Эта величина называется коэффиціентомъ самоиндукціи или, просто, самоиндукціей. Коэффиціентъ самоиндукціи характеризуетъ, если можно такъ выразиться, „электромагнитную инерцію" проводника. Періодъ электрическихъ колебаній τ въ полномъ согласіи съ механической аналогіей тѣмъ больше, чѣмъ больше ёмкость c и самоиндукція p; точнѣе: $\tau = 2\pi\sqrt{pc}$. Теорія колебательнаго разряда конденсаторовъ была дана лордомъ Кельвиномъ, а экспериментальное подтвержденіе ея — впервые Феддерсеномъ.

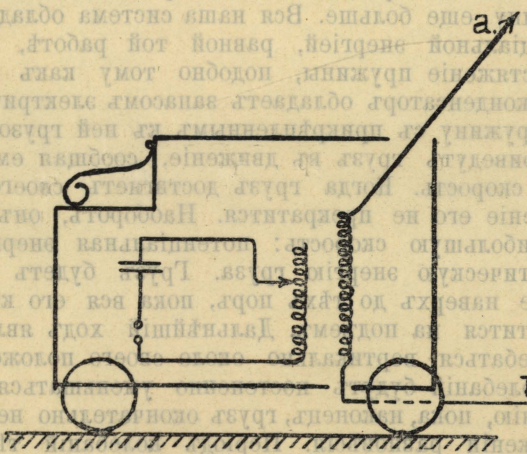


Рис. 1.

Итакъ, разрядъ конденсаторовъ даетъ намъ средство возбуждать токи желаемой частоты. Замѣтимъ, что до сихъ поръ это единственный практическій способъ для достиженія тѣхъ періодовъ, которые употребляются на практикѣ безпроволочной телеграфіи*). Только-что разсмотрѣнное нами расположеніе изображено, напримѣръ, на рисункѣ 1 посерединѣ. Двѣ параллельныя черточки изображаютъ здѣсь обѣ обкладки конденсатора, спиральная линія представляетъ проводникъ, обладающій самоиндукціей (стрѣлка, упирающаяся остріемъ въ спираль, обозначаетъ подвижной контактъ, позволяющій включить въ цѣпь большее или меньшее число завитковъ спирали и

*) Способъ электрической дуги Дудделя Паульсена пользуется тоже колебательнымъ разрядомъ конденсаторовъ.

такимъ образомъ измѣнить самоиндукцію цѣпи), а маленькіе кружки — шарики искрового промежутка. Достаточно, однако, взглянуть на рисунокъ, чтобы убѣдиться въ томъ, что описанныя схемы не обладаютъ вторымъ необходимымъ свойствомъ: излучательной способностью. Дѣйствительно, обѣ обкладки конденсатора находятся весьма близко другъ отъ друга. Это условіе необходимо для достиженія большихъ емкостей; емкость же должна быть возможно болѣе велика, такъ какъ величина энергіи, которой мы располагаемъ, прямо пропорціональна величинѣ емкости *). По этимъ и инымъ соображеніямъ обкладки обыкновенныхъ конденсаторовъ находятся весьма близко одна отъ другой. Отсюда ясно, что проводникъ, соединяющій одну обкладку съ другой, необходимо долженъ имѣть почти вполнѣ замкнутую форму. Схему съ такимъ проводникомъ называютъ, поэтому, замкнутымъ колебательнымъ контуромъ. Какъ мы видѣли выше, она именно вслѣдствіе своей замкнутой формы не пригодна въ качествѣ раціональнаго излучателя.

До сихъ поръ мы ничего не сказали о значеніи искрового промежутка, играющаго столь важную роль въ техникѣ возбужденія электрическихъ колебаній. Дѣло въ томъ, что теорія построена въ предположеніи, что искры нѣтъ; практически же ея пока избѣжать невозможно. Одна изъ главныхъ задачъ безпроволочной телеграфіи, разрѣшенной Брауномъ, заключалась въ раціональномъ выключеніи вредныхъ качествъ искры. Неизбѣжность искры при вышеописанныхъ явленіяхъ разряда ясна изъ слѣдующаго соображенія. Представимъ себѣ, что мы хотимъ разрядить заряженный до высокаго напряженія конденсаторъ (электрическая энергія растетъ, какъ извѣстно, прямо пропорціонально квадрату разности потенціаловъ обкладокъ конденсатора, и поэтому употребляемыя на практикѣ напряженія весьма велики). Мы соединяемъ одинъ конецъ проводника, въ которомъ должны возбудиться токи высокой частоты, съ одной обкладкой и подносимъ другой конецъ къ другой обкладкѣ. Прежде, чѣмъ намъ, однако, удалось коснуться второй обкладки, между свободнымъ концомъ провода и обкладкой необходимо проскакиваетъ искра, такъ какъ никакой изолирующій слой, а тѣмъ менѣе воздухъ, при достаточно малой толщинѣ не выдерживаетъ высокой разности потенціала, а разрывается (искровой разрядъ). Правда, искра соединяетъ свободный конецъ провода со второй обкладкой и даетъ возможность конденсатору разрядиться, но въ то же время она поглощаетъ большую часть электрической энергіи. Изъ только-что сказаннаго, между прочимъ, ясно, что нѣтъ надобности подносить одинъ конецъ проводника къ обкладкѣ, а можно получить разрядъ гораздо болѣе простымъ способомъ: достаточно соединить одинъ конецъ проводника съ однимъ полюсомъ искрового промежутка надлежащей длины, другой полюсъ котораго соединенъ съ свободной обкладкой конденсатора, и затѣмъ увеличивать разность потенціаловъ соединеннаго съ полюсами искрового промежутка (или съ обкладками конденсатора) источника, дающаго высокое напряженіе, до тѣхъ поръ, пока не проскочитъ искра и

*) На практикѣ увеличенію емкости ставится предѣлъ, между прочимъ, растущимъ вмѣстѣ съ ней періодомъ колебаній.

и не произойдетъ разрядъ. На практикѣ пользуются почти исключительно этимъ способомъ. На рисункѣ 2 параллельныя стрѣлки (*b*), ведущія отъ обѣихъ обкладокъ конденсатора, изображаютъ провода, при посредствѣ которыхъ конденсаторъ заряжается индукторомъ, электрической машиной или другимъ источникомъ, дающимъ высокое напряженіе. Искровой промежутокъ представленъ двумя кружечками.

Обратимся теперь ко второй задачѣ — къ возбужденію электрическихъ колебаній въ проводахъ, обладающихъ большой излучательной способностью. Прототипомъ расположеній, служащихъ для этой цѣли, является осциллаторъ Герца. Представимъ себѣ прямолинейный проводъ, прерванный по серединѣ изолирующимъ промежуткомъ, и зарядимъ одну половину положительно, а другую отрицательно. Передъ нами теперь заряженный конденсаторъ нѣкоторой емкости. Если

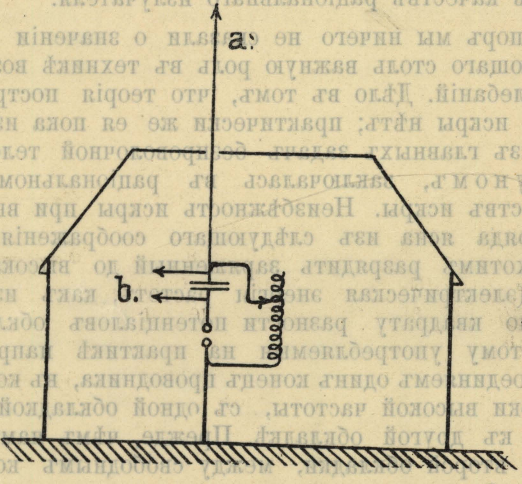


Рис. 2.

разность потенціаловъ между обѣими половинами сдѣлать достаточно большой, то черезъ изолирующій промежутокъ проскакиваетъ искра и происходитъ разрядъ. Мы можемъ примѣнить къ этому случаю, по крайней мѣрѣ, по отношенію къ качественной сторонѣ явленій, — тѣ же разсужденія, что и прежде, и приходимъ къ заключенію, что при извѣстныхъ условіяхъ и здѣсь происходитъ колебательный разрядъ. Въ количественномъ отношеніи такая „развернутая“ система отличается, конечно, отъ замкнутаго колебательнаго контура. Тамъ мы могли бы съ большимъ приближеніемъ считать проводникъ, въ которомъ возбуждаются колебанія, свободнымъ отъ емкости, такъ какъ его емкость мала по сравненію съ емкостью конденсатора. Здѣсь же линейный проводникъ играетъ роль обкладокъ конденсатора и въ то же время проводника, несущаго токъ: здѣсь емкость и самоиндукція непрерывно распредѣлены по всей длинѣ провода. Это отличіе влечетъ за собой и другое, весьма существенное: въ замкнутомъ колебательномъ контурѣ въ любой моментъ времени сила тока во всѣхъ точкахъ проводника одна и та же, въ линейномъ же проводѣ сила тока въ данный моментъ различна для различныхъ точекъ. Она равняется постоянно нулю въ концахъ проводника (въ узлахъ) и имѣетъ максимальное значеніе въ серединѣ (въ пучности). Иллюстраціей того, какъ распредѣляется сила тока въ такомъ проводникѣ, можетъ служить колеблющаяся струна. Подобно струнѣ, линейный проводникъ можетъ колебаться въ основномъ тонѣ, представляя изъ себя въ этомъ случаѣ полволны, или въ обертонахъ. Такъ какъ скорость распространенія электрическихъ магнитныхъ колебаній въ линейныхъ проводахъ приблизительно равна скорости распространенія электрическихъ магнитныхъ волнъ въ свободномъ пространствѣ, т. е. 300 000 000 *м.*, то число электрическихъ колебаній для линейнаго провода, колеблющагося въ основномъ тонѣ, равняется числу 300 000 000, дѣленному на двойную длину провода, выраженную въ метрахъ. Итакъ, мы видимъ, что въ линейномъ проводѣ возникаютъ перемѣнные токи большой частоты. Нетрудно убѣдиться, что въ такомъ колеблющемся въ основномъ тонѣ проводникѣ въ каждый моментъ времени токъ имѣетъ во всѣхъ точкахъ одно и то же направленіе, подобно тому, какъ скорости в с ѣ х ъ т о ч е к ъ колеблющейся въ основномъ тонѣ струны направлены въ одну и ту же сторону. Дѣйствія отдѣльныхъ элементовъ проводника на отдаленную точку пространства взаимно усиливаются; линейный проводникъ обладаетъ, такимъ образомъ, хорошей излучательной способностью. Вслѣдствіе сравнительно малой емкости развернутой системы энергія, могущая быть превращена въ токи высокой частоты, а, слѣдовательно, излучаться, вообще говоря, невелика. М а р к о н и положилъ такой Герцевскій осцилляторъ въ основу своего передатчика. Одну изъ половинъ проводника онъ расположилъ вертикально — воздушный проводъ или антенна, на мѣсто же другой половины онъ ввелъ „заземленіе“ (см. рис. 1, стр. 118) и такимъ образомъ создалъ первый практическій передатчикъ.

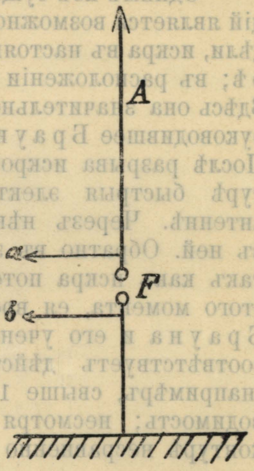


Рис. 3.

Мы можемъ теперь охарактеризовать значеніе работъ Б р а у н а, открывшихъ новые пути для безпроволочной телеграфіи, слѣдующимъ образомъ.

Б р а у н ъ пришелъ къ убѣжденію, что задача создать мощный передатчикъ распадается на двѣ отдѣльныя задачи: на задачу полученія мощныхъ токовъ высокой частоты и на задачу достиженія раціональнаго излученія электро-магнитныхъ волнъ. Заземленная антенна М а р к о н и представляетъ изъ себя хорошій излучатель, въ качествѣ же г е н е р а т о р а (производителя) токовъ высокой частоты она мало пригодна. Нужно сначала получить мощныя токи в н ѣ антенны и затѣмъ поставлять эти токи антеннѣ, предоставивъ ей исполнять свои функціи: излучать электро-магнитныя волны. Передатчикъ Маркони нераціоналенъ постольку, поскольку антенна несетъ функцію какъ генератора, такъ и излучателя. Въ качествѣ генератора Браунъ ввелъ замкнутый колебательный контуръ. Получающіеся въ ней перемѣнные токи передаются антеннѣ, напримѣръ, слѣдующимъ образомъ. Самоиндукція колебательнаго контура состоитъ изъ первичной обмотки трансформатора (безъ желѣзнаго сердечника). Одинъ конецъ вторичной обмотки соединяется съ воздушнымъ проводомъ, другой заземленъ или соединенъ съ противовѣсомъ, — трансформаторное соединеніе. Схема такого сложнаго передатчика изображена на рис. 3.

Однимъ изъ существенныхъ преимуществъ такого раздѣленія функцій является возможность уменьшить вредное вліяніе искры. Какъ мы видѣли, искра въ настоящее время практически неизбѣжна въ генераторѣ; въ расположеніи Брауна она находится въ замкнутомъ контурѣ. Здѣсь она значительно менѣе вредна, чѣмъ въ антеннѣ. Представленіе, руководившее Брауномъ при созданіи своихъ схемъ, было слѣдующее. Послѣ разрыва искрового промежутка возникаютъ въ замкнутомъ контурѣ быстрыя электрическія колебанія. Эти колебанія передаются антеннѣ. Черезъ нѣкоторое время большая часть энергіи находится въ ней. Обратно въ замкнутый контуръ энергія переходить не будетъ, такъ какъ искра потеряетъ свою способность проводить. Начиная съ этого момента, ея вредное вліяніе прекратится. Опытныя изслѣдованія Брауна и его учениковъ показали, что это представленіе не вполнѣ соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Искры обыкновенныхъ размѣровъ (напримѣръ, свыше 1 *мм.*) сохраняютъ сравнительно долго свою проводимость; несмотря на это, вредное вліяніе искры въ замкнутомъ контурѣ несравненно меньше, чѣмъ въ антеннѣ.

Въ 1906 году М. Винъ нашелъ, что предположенной Брауномъ способностью отрыванія обладаютъ маленькія искры (0,3 *мм.* и меньше).

Скажемъ еще нѣсколько словъ о пріемникѣ. Здѣсь, какъ и въ передатчикѣ, задача распадается на двѣ: нужно сначала уловить электромагнитныя волны, а затѣмъ превратить ихъ въ доступный наблюденію другой видъ энергіи.

Соображенія, совершенно аналогичныя приведеннымъ на стр. 120 при разсмотрѣніи излучающей способности проводниковъ, показываютъ, что проводникъ, обладающій хорошей способностью улавливать электромагнитныя волны, долженъ удовлетворять тѣмъ же условіямъ, что и проводникъ съ хорошей излучательной способностью. Такимъ образомъ, мы имѣемъ на пріемной станціи прежде всего заземленную антенну. Возбужденныя въ ней падающими на нее электромагнитными волнами колебанія поставляются при помощи колебательныхъ контуровъ, подобранныхъ соотвѣтственнымъ образомъ, такъ называемому детектору. Въ немъ происходитъ трансформація энергіи токовъ высокой частоты, недоступной непосредственному наблюденію, въ другую, удобную для наблюденія форму. Однимъ изъ первыхъ детекторовъ былъ такъ называемый когереръ. Когереръ представляетъ изъ себя трубку изъ изолирующаго матеріала, въ которой между двумя металлическими проводами, служащими электродами, находятся металлическія опилки. Въ обыкновенномъ состояніи такой когереръ практически не проводитъ тока. Если же онъ подвергается дѣйствію возбужденныхъ въ антеннѣ токовъ, то онъ дѣлается хорошимъ проводникомъ.

Пріемный аппаратъ состоитъ изъ слѣдующихъ частей: изъ гальваническаго элемента, изъ релэ и когерера.

Какъ только когереръ становится проводящимъ, якорь релэ притягивается, замыкая другую электрическую цѣпь, въ которой находятся гальваническіе элементы, пишущій аппаратъ Морзе и ударникъ. Этотъ послѣдній, ударяя по когереру, приводитъ его въ первоначальное непроводящее состояніе — декогерируетъ — и дѣлаетъ его готовымъ къ пріему новаго сигнала. Комбинація воздушнаго провода съ когереромъ, релэ, ударникомъ и регистрирующимъ аппаратомъ была впервые употреблена Пановымъ для регистраціи атмосферныхъ разрядовъ. Въ качествѣ же пріемника безпроволочной телеграфіи этой комбинаціей практически впервые воспользовался Маркони. Съ теченіемъ времени были введены новые виды детекторовъ, каковы, напримѣръ, магнитный детекторъ Маркони, электрическій детекторъ Шлёмильха и т. д. и, наконецъ, новый классъ такъ называемыхъ термо-детекторовъ, введенныхъ Брауномъ.

Дадимъ краткое описаніе одного изъ такихъ термо-детекторовъ, напримѣръ, детектора изъ сѣрнистаго свинца (Bleiglanzdetektor). Отполированная поверхность кристалла сѣрнистаго свинца служитъ однимъ электродомъ, штифтикъ изъ гранита, прижатый остріемъ къ полированной поверхности, другимъ электродомъ. Перемѣнные токи антенны поставляются этому детектору подобно тому, какъ въ описанномъ выше случаѣ когереру. Пріемный же аппаратъ состоитъ здѣсь изъ детектора и телефона, при чемъ нѣтъ надобности въ особомъ гальваническомъ элементѣ. Всякій разъ, какъ въ антеннѣ приходящей группой электро-магнитныхъ волнъ возбуждаются перемѣнные токи, они передаются детектору, а въ отвѣтвленномъ отъ него телефонѣ слышенъ „толчекъ". Такой детекторъ, очевидно, превращаетъ перемѣнные токи высокой частоты, на которые телефонъ не реагируетъ, въ токи одного направленія, которые, суммируясь, даютъ вышеописанный толчекъ. До сихъ поръ не удалось еще окончательно выяснить: происходитъ ли это превращеніе благодаря термоэлектрическимъ свойствамъ детектора, или же детекторъ дѣйствуетъ здѣсь, подобно клапану, пропускающему токъ только въ одномъ направленіи. Возможно также, что оба дѣйствія соединяются вмѣстѣ, или же что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ какимъ-нибудь инымъ явленіемъ. Только что описанный способъ пріема называется слуховымъ пріемомъ или пріемомъ на слухъ. Огромнымъ преимуществомъ такого пріема является большая сравнительно съ когереромъ чувствительность, а также его большая простота — нѣтъ ни релэ, ни ударника, ни пишущаго аппарата. Недостаткомъ является отсутствіе возможности вызвать станцію въ томъ случаѣ, если телеграфистъ на ней не держитъ телефона у уха. Въ послѣднее время удалось, однако, построить спеціальные аппараты для вызова. Отсутствіе возможности контроля при пріемѣ на слухъ (тогда какъ при пріемѣ на пишущемъ аппаратѣ Морзе остается лента съ знаками) считалось долгое время крупнымъ недостаткомъ.

Опытъ, повидимому, однако, показываетъ, что надежность пріема на слухъ не только не уступаетъ, но даже превышаетъ надежность пріема на ленту, при чемъ число принимаемыхъ въ минуту словъ значительно больше. На многихъ станціяхъ, поэтому, пріемъ на ленту совершенно упраздненъ. Между прочимъ, аналогичная тенденція наблюдается также и на обыкновенныхъ телеграфахъ. Успѣхи, достигнутые при пріемѣ на слухъ въ связи съ системой звучащихъ искръ, изложены въ примѣчаніи 35 („Дополненія и литература").

Вторая часть рѣчи Брауна отведена имъ главнымъ образомъ описанію своихъ опытовъ по электро-оптикѣ. Довольно обширныя примѣчанія къ этой части цѣннымъ образомъ дополняютъ и поясняютъ ее.

Настоящее вступленіе отличается схематичностью изложенія. Спеціалистъ, для котораго сама рѣчь представляетъ много интереснаго и оригинальнаго, въ немъ, конечно, не нуждается. Нашей цѣлью было только напомнить читателю нѣкоторые общіе термины и положенія. Мы надѣемся, такимъ образомъ, устранить тѣ трудности, которыя могутъ встрѣтиться неспеціалисту при чтеніи этой рѣчи, заслуживающей, по нашему мнѣнію, общаго интереса.

О биссектрисахъ треугольника.

Е. Томашевича.

Въ № 517 „Вѣстника" помѣщена статья Н. А. Извольскаго „О биссектрисахъ треугольника". Въ ней упоминается о моемъ сообщеніи 29 января 1910 г. въ Московскомъ Математическомъ Кружкѣ, но ни слова не сказано о дополнительномъ моемъ же сообщеніи 12 марта, т. е. въ тотъ же вечеръ, когда дѣлалъ свой докладъ и Н. А. Извольскій. Поэтому я позволяю себѣ предложить вниманію почтенной редакціи журнала настоящую замѣтку, объединяющую оба мои сообщенія 29 января и 12 марта.

Одинъ изъ указанныхъ мною способовъ доказательства теоремы: „если биссектрисы двухъ внутреннихъ угловъ треугольника равны, то треугольникъ равнобедренный" основывался на параллельномъ перенесеніи одной изъ биссектрисъ и по существу оказался тождественнымъ со способомъ Штейнера; кромѣ того, по замѣчанію одного изъ присутствовавшихъ на докладѣ членовъ Кружка, способъ этотъ былъ уже нѣсколько лѣтъ тому назадъ помѣщенъ на страницахъ „Вѣстника".

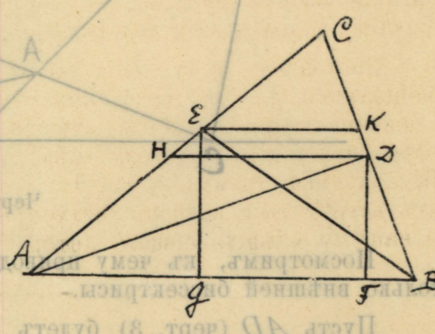
Второй способъ, сообщенный мнѣ С. И. Лапшинымъ, весьма остроуменъ. Чтобы не запутывать самаго доказательства, укажемъ теоремы, которыя для него необходимы.

1. Если два прямоугольныхъ треугольника имѣютъ равныя гипотенузы и различные углы, то большему острому углу противолежитъ большій катетъ.

2. Если два различныхъ равнобедреннныхъ треугольника имѣютъ равныя основанія, то большему боковому углу противолежитъ бо́льшая сторона.

3. Если стороны угла пересѣчены двумя параллельными прямыми, то изъ двухъ отрѣзковъ на параллеляхъ ближайшій къ вершинѣ меньше дальнѣйшаго.

Пусть (черт. 1) $\angle A < \angle B$, а биссектрисы AD и BE этихъ угловъ равны между собою. Изъ D и E проводимъ перпендикуляры DF и EG на AB и параллели DH и EK къ AB.



Черт. 1.

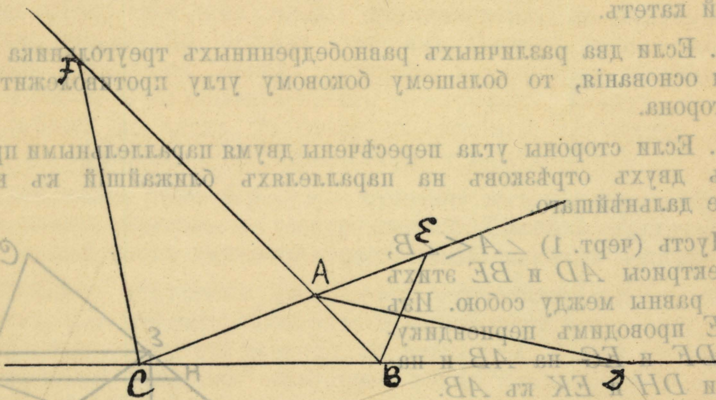
На основаніи теоремы 1-ой въ треугольникахъ ADF и BEG имѣемъ $DF < EG$; слѣдовательно, по теоремѣ 3-ей, $DH > EK$. Вслѣдствіе дѣленія угловъ A и B пополамъ треугольники ADH и BEK получаются равнобедренные, и въ нихъ $\angle HAD < \angle KBE$; слѣдовательно, по теоремѣ 2-ой, $DH < EK$; а это противорѣчитъ вышеупомянутому неравенству $DH > EK$. Итакъ, равенство двухъ внутреннихъ биссектрисъ влечетъ за собою равенство соотвѣтствующихъ угловъ, а, слѣдовательно, и сторонъ.

Если мы попытаемся теперь примѣнить этотъ пріемъ къ биссектрисамъ внѣшнихъ угловъ, — короче, къ внѣшнимъ биссектрисамъ, то во всѣхъ случаяхъ потерпимъ неудачу. Случаевъ же такихъ можетъ быть три.

Взявъ треугольникъ ABC (черт. 2) такъ, что $\angle A$ наибольшій, а $\angle C$ наименьшій, мы найдемъ что: a) биссектрисы угловъ, смежныхъ съ двумя бо́льшими углами A и B, лежатъ по одну сторону отъ A и B, обѣ внутри угла C, b) биссектрисы угловъ, смежныхъ съ двумя меньшими углами B и C, лежатъ по одну сторону отъ BC и по разныя стороны отъ вершины A, и c) биссектрисы угловъ, смежныхъ съ углами A и C, лежатъ по разныя стороны отъ AC, одна CF въ углѣ B, другая AD въ смежномъ съ нимъ углѣ.

Эти три парныя комбинаціи биссектрисъ будемъ называть: одностороннія пересѣкающіяся, одностороннія непересѣкающіяся и разностороннія.

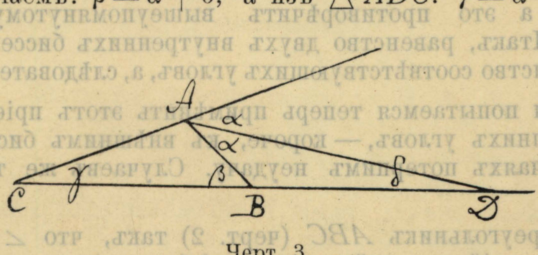
Говоря о равенствѣ или неравенствѣ биссектрисъ, мы ихъ разсматриваемъ только какъ опредѣленные отрѣзки прямой. Поэтому равносторонній треугольникъ въ этомъ смыслѣ не имѣетъ внѣшнихъ биссектрисъ; въ равнобедренномъ треугольникѣ внѣшнихъ биссектрисъ только двѣ, и при томъ равныхъ между собою. Въ разностороннемъ же треугольникѣ всегда имѣются три внѣшнія биссектрисы, какъ это показано на чертежѣ 2.



Черт. 2.

Посмотримъ, къ чему приводитъ существованіе хотя бы одной только внѣшней биссектрисы.

Пусть AD (черт. 3) будетъ внѣшняя биссектриса треугольника ABC и пусть вершина B лежитъ при этомъ между D и C. Отмѣтимъ для краткости нужные намъ углы буквами α, β, γ и δ. Тогда изъ $\triangle ABD$ получаемъ: $\beta = \alpha + \delta$, а изъ $\triangle ADC$: $\gamma = \alpha - \delta$; слѣдова-



Черт. 3.

тельно, $\beta > \gamma$ и, стало быть, $AC > AB$, т. е. стороны треугольника, выходящія изъ одной вершины съ внѣшней биссектрисой, неравны, при чемъ ближайшая къ биссектрисѣ сторона меньше дальнѣйшей.

Допустимъ теперь, что мы имѣемъ двѣ внѣшнія разностороннія биссектрисы AD и CF (черт. 2); тогда, по только-что доказанному, $AB < AC$ и $AC < BC$, т. е. существованіе двухъ внѣшнихъ разностороннихъ биссектрисъ возможно только въ такомъ треугольникѣ, стороны котораго всѣ различны. Доказательство того же самаго у

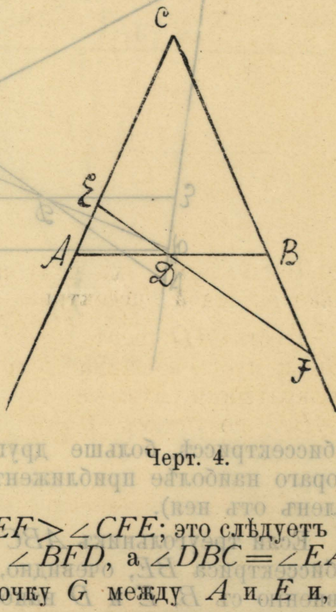
Н. А. Извольскаго страдаетъ растянутостью и содержитъ неиспользованное условіе (внѣшнія биссектрисы равны).

Въ своемъ сообщеніи 29 января я указалъ на непримѣнимость данныхъ мною пріемовъ къ двумъ случаямъ (и даже къ тремъ въ способѣ г. Лапшина) внѣшнихъ биссектрисъ; и въ этомъ отношеніи вопросъ остался открытымъ. Въ то же время нѣкоторыми моими оппонентами были выражены слѣдующія мнѣнія: 1) желательно имѣть прямое доказательство того, что неравнымъ угламъ соотвѣтствуютъ неравныя внутреннія и внѣшнія биссектрисы, и 2) есть вѣроятность, что такое именно доказательство можетъ быть найдено, если воспользоваться третьей биссектрисой, пересѣкающейся съ двумя разсматриваемыми въ одной точкѣ.

Послѣднее мнѣніе было высказано весьма кстати, и 19 марта я сообщилъ въ Кружкѣ все то, что осталось недоказаннымъ.

Теорема. Если въ треугольникѣ два внутреннихъ угла неравны между собою, то большему углу соотвѣтствуетъ меньшая биссектриса.

Для доказательства этой теоремы придется ввести нѣсколько вспомогательныхъ предложеній.



Черт. 4.

Возьмемъ равнобедренный треугольникъ ABC (черт. 4), въ которомъ $AC = BC$. Пусть $AD = DB$, т. е. пусть D будетъ середина основанія треугольника, иначе — точка, лежащая на биссектрисѣ угла C. Проведемъ черезъ D прямую EF. Легко видѣть, что 1) $DF > DE$; стоитъ лишь повернуть $\triangle BDF$ въ плоскости чертежа на полъ-оборота вокругъ D и замѣтить, что $\angle DBF > \angle DAE$; 2) $\angle CEF > \angle CFE$; это слѣдуетъ изъ того, что $\angle CED > \angle EAD$ и $\angle DBC > \angle BFD$, а $\angle DBC = \angle EAD$.

Возьмемъ теперь на чертежѣ 4 точку G между A и E и, построивъ равнобедренный треугольникъ заново, проведемъ въ новомъ чертежѣ 5 прямую GD и продолжимъ ее до пересѣченія съ BF въ точкѣ H.

Докажемъ, что $EF > GH$.

Проводимъ $GK \parallel EF$ (K лежитъ на продолженіи CB), $FL \parallel CA$ и $HM \parallel CA$ (L и M на GK); пусть N будетъ точка пересѣченія прямыхъ HM и EF. Очевидно, $GL = EF$, а также $FL = NM = EG$; $HN > EG$ (ибо, согласно замѣчанію 1), $DH > DG$); слѣдовательно, $HN > FL$. Нетрудно также видѣть, что $HF > HN$ ($\angle HNF = \angle CEF$). Поэтому $HF > FL$

Проведя прямую LH, найдемъ:

$$\angle HLF > \angle LHF. \qquad \text{(a)}$$

Кромѣ того

$$\angle GLF < \angle GHF, \qquad (b)$$

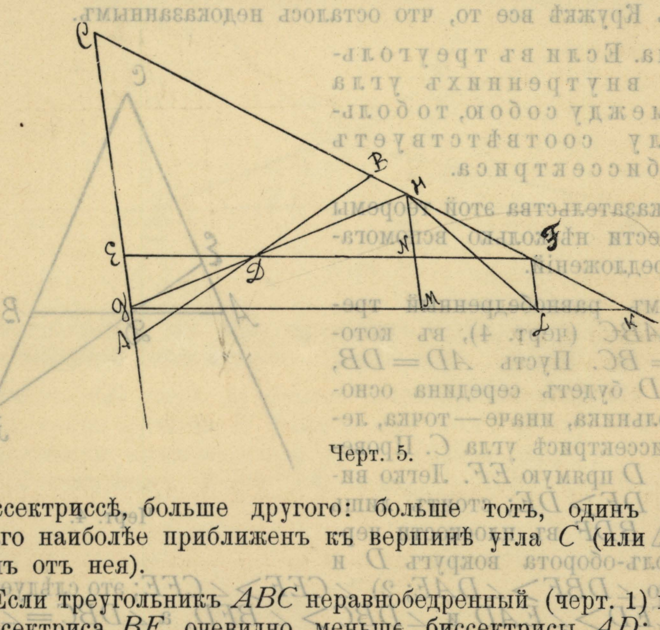
ибо $\angle GLF = \angle AEF$, а $\angle GHF > \angle AGD$ (согласно замѣчанію 2) и $\angle AGD > \angle AED = \angle AEF$.

Вычитая почленно неравенство (a) изъ (b), получимъ:

$$\angle GLH < \angle GHL;$$

слѣдовательно, $GH < GL$ или $GH < EF$.

Такъ какъ точка D лежитъ на биссектрисѣ угла C, то полученный выводъ даетъ намъ возможность рѣшить вопросъ о томъ, какой изъ двухъ отрѣзковъ, EF или GH, проходящихъ черезъ общую точку



Черт. 5.

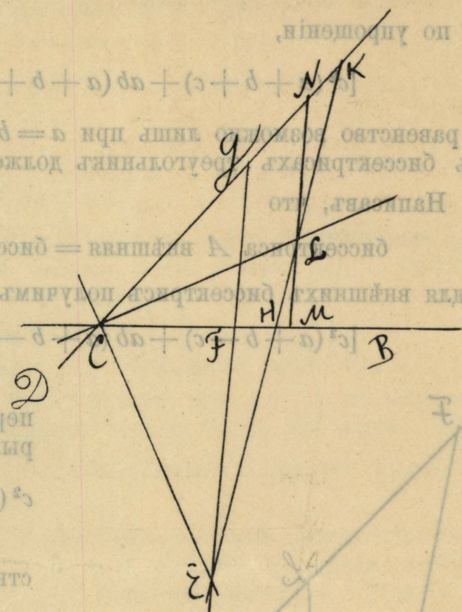
на биссектриссѣ, больше другого: больше тотъ, одинъ изъ конповъ котораго наиболѣе приближенъ къ вершинѣ угла C (или же наиболѣе удаленъ отъ нея).

Если треугольникъ ABC неравнобедренный (черт. 1) и $AC > BC$, то биссектриса BE, очевидно, меньше биссектрисы AD: точка A по сравненію съ B, E и D наиболѣе удалена отъ C.

Такимъ образомъ т е о р е м а доказана. Если въ текстѣ теоремы слово в н у т р е н н и х ъ замѣнить словомъ в н ѣ ш н и х ъ, то она окажется справедливой лишь для случая биссектрисъ одностороннихъ пересѣкающихся; напримѣръ, это совсѣмъ очевидно для биссектрисъ AD и BE на чертежѣ 2. Для одностороннихъ же непересѣкающихся внѣшнихъ биссектрисъ теорема измѣняется; въ этомъ случаѣ большему внѣшнему углу соотвѣтствуетъ и большая биссектриса; такъ, на чертежѣ 2-омъ $CF > BE$, такъ какъ внѣшній уголъ при C больше внѣшняго угла при B. Это мы сейчасъ докажемъ.

Если CE есть биссектриса угла BCD (черт. 6), и CK есть продолженіе DC, то проведя прямыя EFG и EHK, найдемъ, что $HK > FG$. Дѣйствительно, если CL есть биссектриса угла BCK, то, проведя черезъ L прямую $MN \| FG$, получимъ: $HK > MN$ и $MN > FG$. Слѣдовательно, $HK > FG$.

Продолжимъ теперь на чертежѣ 2-мъ биссектрисы CF и BE до встрѣчи въ точкѣ G съ биссектрисою внутренняго угла A. Въ полученномъ чертежѣ 7-омъ отложимъ на AC отрѣзокъ AK, равный AB, и проведемъ прямую GKL. Неравенство $CF > BE$ станетъ послѣ этого очевиднымъ*).



Черт. 6.

Попытки рѣшить геометрическими пріемами вопросъ о сравнительной величинѣ внѣшнихъ разностороннихъ биссектрисъ, напримѣръ, AD и CF на черт. 2, не даютъ удовлетворительныхъ результатовъ. И дѣйствительно, биссектрисы эти могутъ быть и различны и равны между собою. Интересенъ вопросъ объ условіи равенства такихъ биссектрисъ. Чтобы рѣшить его, предположимъ, что намъ даны численно стороны треугольника a, b и c. Тогда для биссектрисъ угловъ A, B и внѣшнихъ, смежныхъ съ ними, имѣемъ выраженія:

$$\text{биссектриса } A \text{ внутренняя} = \frac{2}{b+c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)\,bc}.$$

$$\text{биссектриса } A \text{ внѣшняя} = \frac{2}{b-c}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)\,bc},$$

$$\text{биссектриса } B \text{ внутренняя} = \frac{2}{a+c}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)\,ac},$$

$$\text{биссектриса } B \text{ внѣшняя} = \frac{2}{a-c}\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)\,ac}.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что выраженіе для биссектрисы A внѣшней получается изъ биссектрисы A внутренней перемѣною знака у стороны c (или b).

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $HK > FG$ на черт. 6 есть распространеніе доказаннаго на стр. 128 неравенства $EF > GH$ на тотъ случай, когда прямыя, проходящія черезъ общую точку биссектрисы, пересѣкаютъ одну сторону угла и продолженіе другой. Примѣняя это неравенство къ прямымъ GF и GL, исходящимъ изъ общей точки G биссектрисы GA угла BAC, найдемъ, что $CF > KL$; но такъ какъ $KL = BE$ (въ виду равенства треугольниковъ AKL и ABE, у которыхъ $AK = AB$, $\angle AKL = \angle ABE$ и $\angle KAL = \angle BAE$), то $CF > BE$.

Написавъ, что

$$\text{биссектриса } A \text{ внутренняя} = \text{биссектрисѣ } B \text{ внутренней},$$

мы для внутреннихъ биссектрисъ получимъ:

$$b\,(b + c - a)\,.\,(a + c)^2 = a\,.\,(a + c - b)\,.\,(b + c)^2,$$

или, по упрощенiи,

$$[c^2\,(a + b + c) + ab\,(a + b + 3c)]\,.\,(a - b) = 0.$$

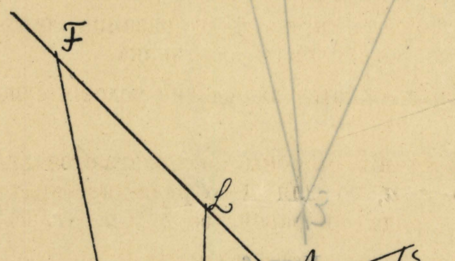
Это равенство возможно лишь при $a = b$, т. е. при равныхъ внутреннихъ биссектрисахъ треугольникъ долженъ быть равнобедренный.

Написавъ, что

$$\text{биссектриса } A \text{ внѣшняя} = \text{биссектрисѣ } B \text{ внѣшней},$$

мы для внѣшнихъ биссектрисъ получимъ:

$$[c^2\,(a + b - c) + ab\,(a + b - 3c)]\,.\,(a - b) = 0.$$



Черт. 7.

Равенство это возможно, во-первыхъ, при $a = b$ и, во-вторыхъ, при

$$c^2\,(a + b - c) + ab\,(a + b - 3c) = 0.$$

Если въ послѣднемъ равенствѣ положимъ $a = 1$, то

$$b = \frac{1}{2}\,[3c - c^2 - 1 \pm$$

$$\pm \sqrt{(3c - c^2 - 1)^2 + 4c^2\,(c - 1)}\,],$$

или

$$b = \frac{1}{2}\,[3c - c^2 - 1 \pm \sqrt{(c^2 - c + 3)^2 - 8}].$$

Треугольникъ съ двумя равными внѣшними биссектрисами можетъ существовать лишь при условiи $(c^2 - c + 3)^2 \geqq 8$, которое, въ свою очередь, требуетъ, чтобы удовлетворялись либо соотношенiя $c \geqq \dfrac{1 + \sqrt{8\sqrt{2} - 11}}{2}$, либо $c \leqq \dfrac{1 - \sqrt{8\sqrt{2} - 11}}{2}$, т. е. либо $c \geqq 0{,}78$, либо $c \leqq 0{,}22$.

Но, чтобы b оставалось положительнымъ при $c < 1$, необходимо, чтобы было $3c - c^2 - 1 > 0$ *), а это осуществляется при $c > \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, т. е. при $c > 0{,}382$. Итакъ, необходимо, чтобы выполнялось соотношеніе $c \geqq 0{,}78$.

Разсмотримъ теперь, что необходимо для того, чтобы b было больше c; другими словами, рѣшимъ неравенство:

$$3c - c^2 - 1 \pm \sqrt{(c^2 - c + 3)^2 - 8} > 2c;$$

упрощенія даютъ:

$$\pm \sqrt{(c^2 - c + 3)^2 - 8} > c^2 - c + 1;$$

правая часть этого неравенства не можетъ быть отрицательной; слѣдовательно, передъ корнемъ можно взять только $+$, а затѣмъ обѣ части возвести въ квадратъ и окончательно упростить; въ результатѣ получимъ: $4c^2 - 4c > 0$, или $4c(c - 1) > 0$.

Слѣдовательно, требованіе $b > c$ возможно лишь при $c > 1$.

Очевидно, затѣмъ, что $b < c$ будетъ при $c < 1$; разница явится лишь въ томъ, что передъ корнемъ можно брать оба знака.

Остается еще разсмотрѣть, выполняются ли вообще условія существованія самого треугольника.

Такъ какъ въ порядкѣ возрастанія стороны располагаются либо въ рядъ a, c, b, либо въ рядъ b, c, a, то для 1-го ряда необходимо неравенство $b < a + c$, а для 2-го ряда — неравенство $b > a - c$.

Слѣдовательно, при $c > 1$ необходимо, чтобы было

$$3c - c^2 - 1 + \sqrt{c^4 - 2c^3 + 7c^2 - 6c + 1} < 2(1 + c),$$

а при $c < 1$

$$3c - c^2 - 1 \pm \sqrt{c^4 - 2c^3 + 7c^2 - 6c + 1} > 2(1 - c).$$

Первое неравенство приводится къ такому:

$$\sqrt{(c^2 - c + 3)^2 - 8} < c^2 - c + 3.$$

Правая часть послѣдняго неравенства не можетъ быть отрицательной; слѣдовательно, неравенство удовлетворяется при всякомъ значеніи c.

Если $c < 1$, то соотвѣтствующее неравенство принимаетъ видъ:

$$\pm \sqrt{c^4 - 2c^3 + 7c^2 - 6c + 1} > c^2 - 5c + 3,$$

или

$$\pm \sqrt{c^4 - 2c^3 + 7c^2 - 6c + 1} > (c - 4{,}303) \cdot (c - 0{,}697).$$

*) Ибо при $c < 1$, т. е. при $c - 1 < 0$, имѣетъ мѣсто неравенство:

$$|3c - c^2 - 1| > |\sqrt{(3c - c^2 - 1)^2 + 4c^2(c - 1)}|.$$

Такъ какъ c заключено въ предѣлахъ 0,78 и 1, то правая часть неравенства есть число отрицательное; поэтому знакъ $+$ у корня всегда даетъ удовлетворительный отвѣтъ. Что же касается случая:

$$-\sqrt{c^4-2c^3+7c^2-6c+1} > c^2-5c+3,$$

то и его нетрудно разобрать. Помноживъ обѣ части неравенства на -1, получимъ:

$$\sqrt{c^4-2c^3+7c^2-6c+1} < -(c^2-5c+3).$$

Теперь обѣ положительныя части возведемъ въ квадратъ и сдѣлаемъ возможныя упрощенія; результатомъ будетъ неравенство

$$(c-1)^3 < 0,$$

а это вполнѣ соотвѣтствуетъ заданному условію.

Итакъ, треугольникъ съ двумя равными внѣшними биссектрисами всегда существуетъ, если при $a=1$ удовлетворяется условіе $c \geqq 0{,}78$. Случай $c=1$ исключается, такъ какъ при этомъ треугольникъ получается равносторонній, т. е. внѣшнихъ биссектрисъ (какъ отрѣзковъ) не имѣющій.

Въ заключеніе нѣсколько словъ по адресу Н. А. Извольскаго.

Отдавая должную дань тому остроумію, которымъ проникнута его статья о биссектрисахъ, я никакъ не могу согласиться съ нимъ въ томъ, что вопросъ о биссектрисахъ имъ рѣшенъ более естественнымъ путемъ.

Уже одно то обстоятельство, что чертежей много и что въ нихъ не такъ-то легко разобраться (двойное переворачиваніе треугольника!), позволяетъ усумниться въ большей естественности предложенныхъ въ № 517 „Вѣстника" пріемовъ. Рѣшеніе задачи о биссектрисахъ должно быть, по моему мнѣнію, прозрачнымъ и основываться на возможно маломъ количествѣ простѣйшихъ теоремъ о треугольникѣ. Никто, конечно, не будетъ оспаривать доказательной силы пріемовъ, требующихъ теоремъ о вписанныхъ углахъ и площадяхъ, но какая нужда въ нихъ, если дѣло и безъ того достаточно просто.

РЕЦЕНЗІИ.

К. Дубровскій. *Простые физическіе приборы и наглядныя пособія по космографіи.* 3-е, дополненное изданіе, 110 стр., съ 250 рис. Синодальная типографія. СПБ., 1910. Ц. въ папкѣ 1 р.

Съ выходомъ въ свѣтъ этого труда (2-е изданіе котораго, вышедшее въ 1883 году, представляло брошюрку всего въ 32 стр. съ 36 рисунками) мы имѣемъ, наконецъ, сборникъ, дающій тщательно проработанный (большею частью, оригинальный) матеріалъ по изготовленію простыхъ физическихъ приборовъ изъ всѣхъ отдѣловъ элементарнаго курса физики, а также космографіи; въ отношеніи простоты и цѣлесообразности описываемые здѣсь самодѣльные приборы не оставляютъ желать чего-либо лучшаго. Какъ для учащихъ,— особенно въ начальной школѣ, — такъ и для учащихся, умѣющихъ хотя бы немного „мастерить“, книга представляетъ превосходное пособіе. Изложеніе, надо сознаться, мѣстами черезчуръ сжато; за то множество отчетливыхъ схематическихъ рисунковъ хорошо поясняютъ текстъ. Кромѣ описанія собственно приборовъ, книга сообщаетъ нѣсколько чрезвычайно практичныхъ свѣдѣній о предметахъ, полезныхъ для физическаго класса (гл. X), и объ устройствѣ физическаго класса (гл. XI). Въ главѣ о наглядныхъ пособіяхъ по космографіи (гл. XII) описывается рядъ остроумнѣйшихъ приборовъ не только для наблюденія неба, но и для уясненія нѣкоторыхъ болѣе трудныхъ астрономическихъ явленій.

Выдающіяся достоинства книги заставляютъ желать, чтобы вскорѣ послѣ третьяго изданія появилось четвертое, въ которомъ были бы сдѣланы нѣкоторыя добавленія, могущія увеличить его примѣнимость къ практикѣ.

Необходимо прибавить главу, описывающую простѣйшіе пріемы обработки стеклянныхъ трубокъ, пробокъ, металловъ, дерева, папки и пр. Чтобы научиться простѣйшимъ пріемамъ, вовсе еще не надо для данной цѣли дѣлаться „мастеромъ“; однако, не рѣдкость встрѣтить и между преподавателями такихъ, которыхъ именно эта мысль отпугиваетъ отъ всякой самодѣльщины. Изъ собственной многолѣтней практики я знаю, какъ иногда кажущаяся неодолимой техническая трудность сразу разрѣшается какимъ-нибудь простымъ и остроумнымъ пріемомъ, о существованіи котораго раньше и не подозрѣвалъ. Въ эту же главу надо бы вообще включить элементарную лабораторную практику. Въ разныхъ мѣстахъ книги, правда, даются очень цѣнныя указанія на то и другое; но они вообще черезчуръ отрывочны, и ихъ трудно находить, такъ какъ въ книгѣ нѣтъ алфавитнаго указателя.

Рисунки слѣдуетъ снабдить приблизительными указаніями ихъ масштаба, что часто можетъ очень помочь при самодѣльномъ изготовленіи прибора. Нѣкоторые (немногіе) рисунки желательно улучшить -- сдѣлать ихъ болѣе понятными.

Полезно пронумеровать всѣ описываемые опыты для удобства ссылокъ.

Наконецъ, авторъ навѣрное заслужилъ бы благодарность очень многихъ, если бы при описаніи опытовъ и приборовъ не поскупился въ нѣкоторыхъ мѣстахъ на двѣ-три лишнихъ фразы. Это тѣмъ болѣе важно, что его прекрасный трудъ можетъ и долженъ попасть въ руки лицъ, не всегда достаточно хорошо знакомыхъ съ самыми явленіями, о которыхъ идетъ рѣчь.

Н. Дрентельнъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 330 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4 - x^3 + (a + b)x - (a + b)^2 = 0.$$

Р. Боколяръ (Воронежъ).

№ 331 (5 сер.). Вычислить сумму

$$\frac{1}{\cos x \cos y}+\frac{1}{\cos y \cos z}+\cdots+\frac{1}{\cos t \cos u}+\frac{1}{\cos u \cos v},$$

если дано, что $x, y, z, \ldots, t, u, v$ образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой есть r.

Р. Витвинскій (Тирасполь).

№ 332 (5 сер.). Вычислить радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, по тремъ его высотамъ.

В. Богомоловъ (Шацкъ).

№ 333 (5 сер.). Въ кругѣ проведена хорда AB, перпендикулярная къ діаметру MN. Нѣкоторая точка X хорды AB соединена прямыми съ точками M и N. Называя черезъ C и D точки встрѣчи прямыхъ XM и XN съ окружностью, доказать, что четырехугольникъ $ABCD$ есть гармоническій *).

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 334 (5 сер.). Лицо N родилось въ 19-мъ вѣкѣ. Въ 1901 году сумма цифръ двузначнаго числа лѣтъ, прожитыхъ лицомъ N, равнялась суммѣ цифръ года его рожденія. Когда родилось лицо N?

Федоровъ (Воронежъ).

№ 335 (5 сер.). Найти истинное значеніе выраженія

$$\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$$

при $x=0$

А. Д. (Лодзь).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 228 (5 сер.). *Доказать равенства*

$$C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+\cdots+C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+2C_{n-1}^{m-1}+2^{2}C_{n-2}^{m-2}+\cdots+2^{m}C_{n-m}^{0},$$

$$C_{n+1}^{0}-C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}-\cdots+(-1)^{m}C_{n+1}^{m}=(-1)^{m}C_{n}^{m},$$

гдѣ n *и* m *суть натуральныя числа, а* C_p^q *обозначаетъ вообще число сочетаній изъ* p *элементовъ по* q, *при чемъ, по условію,* $C_p^0=1$ *и* $C_p^q=0$ *при* $q>p$. *Разсмотрѣть частный случай, когда* $m=n+1$.

*) Гармоническимъ четырехугольникомъ называется такой вписанный въ кругъ четырехугольникъ, въ которомъ произведенія противоположныхъ сторонъ равны. О другихъ свойствахъ гармоническаго четырехугольника см. книгу: Д. Ефремовъ, „Новая геометрія треугольника", гл. IV и X.

Введемъ обозначеніе

$$C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + \cdots + C_p^q = S_p^q. \qquad (1)$$

Если $k < p + 1$, то, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто формула

$$C_{p+1}^k = C_p^k + C_p^{k-1}; \qquad (2)$$

она сохраняетъ свою силу и при $k = p + 1$, такъ какъ, по условію, $C_p^q = 0$ при $q > p$ (конечно, если $q \neq 0$, такъ какъ, по условію, $C_p^0 = 1$ при всякомъ p). Полагая въ формулѣ (2) k послѣдовательно равнымъ 0, 1, 2, ..., l, при чемъ мы предположимъ, что $l \leqq p + 1$, получимъ (условившись считать, при $k = 0$, $C_p^{-1} = 0$):

$$C_{p+1}^0 = C_p^0,$$

$$C_{p+1}^1 = C_p^1 + C_p^0,$$

$$C_{p+1}^2 = C_p^2 + C_p^1,$$

. . . .

$$C_{p+1}^l = C_p^l + C_p^{l-1}.$$

Сложивъ эти равенства, находимъ [см. (1)]:

$$S_{p+1}^l = C_p^l + 2S_p^{l-1}. \qquad (3)$$

Полагая въ формулѣ (3) соотвѣтственно $l = m$, $m-1$, ..., 2, 1, 0 и $p = n$, $n-1$, ..., $n-m$, помножая послѣдовательно получаемыя равенства соотвѣтственно на 1, 2, 2^2, ..., 2^m и предполагая, что $m \leqq n + 1$, получимъ:

$$S_{n+1}^m = C_n^m + 2S_n^{m-1},$$

$$2S_n^{m-1} = 2C_{n-1}^{m-1} + 2^2 S_{n-1}^{m-2},$$

$$2^2 S_{n-1}^{m-2} = 2^2 C_{n-2}^{m-2} + 2^3 S_{n-2}^{m-3},$$

. . . .

$$2^{m-1} S_{n-m+2}^1 = 2^{m-1} C_{n-m+1}^1 + 2^m S_{n-m+1}^0,$$

$$2^m S_{n-m+1}^0 = 2^m C_{n-m}^0$$

(при чемъ, въ послѣднемъ равенствѣ при $l = 0$ мы опять принимаемъ условно $S_p^{l-1} = 0$, а C_{n-m}^0 принимаемъ равнымъ 1 даже при $m = n + 1$). Складывая всѣ эти равенства и отнимая отъ обѣихъ частей по $2S_n^{m-1} + 2^2 S_{n-1}^{m-2} + \cdots + 2^m S_{n-m+1}^0$, находимъ:

$$S_{n+1}^m = C_n^m + 2C_{n-1}^{m-1} + 2^2 C_{n-2}^{m-2} + \cdots + 2^m C_{n-m}^0,$$

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^m = C_n^m + 2C_{n-1}^{m-1} + 2^2 C_{n-2}^{m-2} + \cdots + 2^m C_{n-m}^0.$$

Такимъ образомъ, первая формула доказана въ случаѣ $m \leqq n+1$. Для доказательства второй формулы, предполагая также $m \leqq n+1$, положимъ въ формулѣ (2) послѣдовательно $k=0, 1, 2, \ldots, m$ и $p=n$ и помножимъ получаемыя послѣдовательно равенства на $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, $\ldots$, $(-1)^{m-1}$, $(-1)^m$. Тогда имѣемъ:

$$C_{n+1}^0 = C_n^0,$$

$$-C_{n+1}^1 = -C_n^1 - C_n^0,$$

$$C_{n+1}^2 = C_n^2 + C_n^1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{m-1} C_{n+1}^{m-1} = (-1)^{m-1} C_n^{m-1} + (-1)^{m-1} C_n^{m-2},$$

$$(-1)^m C_{n+1}^m = (-1)^m C_n^m + (-1)^m C_n^{m-1}.$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + \cdots + (-1)^m C_{n+1}^m = (-1)^m C_n^m,$$

т. е. второе изъ предложенныхъ для доказательства равенствъ.

При $m=n+1$ первое и второе изъ доказанныхъ нами равенствъ обращается (въ силу условія $C_p^q=0$ при $q>p$ и $q \neq 0$) въ формулы:

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} \text{ и } C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + \cdots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} = 0,$$

выражающія извѣстныя свойства коэффиціентовъ бинома $n+1$-го порядка. Если $m>n+1$, то первое изъ предложенныхъ для доказательства равенствъ перестаетъ быть справедливымъ, а второе, сохраняя тотъ же видъ, какъ и для $m=n+1$ (въ силу условія $C_p^q=0$ при $q>0$ и $q \neq 0$), остается вѣрнымъ.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *Б. Двойринъ* (Одесса); *И. Чемисовъ* (Никольскъ-Уссурійскій).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Н. С. Дрентельнъ.

УКАЗАТЕЛЬ

лучшихъ общедоступныхъ книгъ

ПО ФИЗИКѢ и ФИЗИЧЕСКИМЪ ЗНАНІЯМЪ,

съ руководящими характеристиками.

Пособіе для самостоятельныхъ занятій и справокъ лицамъ, имѣющимъ подготовку среднеучебнаго заведенія или городского четырехкласснаго училища (частью и меньшую), а также для учащихся и учащихъ.

Цѣна 75 коп.

Предлагаемый трудъ содержитъ достаточную для многихъ цѣлей **выборку** изъ нашей „общедоступной" литературы по физикѣ и физическимъ знаніямъ (въ общемъ 155 названій книгъ и 38 статей въ повременныхъ изданіяхъ).

Н. С. Дрентельнъ. **ПОСОБІЕ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХЪ РАБОТЪ ПО ФИЗИКѢ ВЪ СРЕДНЕЙ ШКОЛѢ.** Съ вопросами для упражненія и 63 рис. XI + 208 стр. Изд. Т-ва И. Д. Сытина, 1908. Ц. 90 к.

Его-же. ПРОСТЫЕ ФИЗИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ. IV + 52 стр. съ 48 рис. Изд. Т-ва И. Д. Сытина, 1908. Ц. 40 к.

Его-же. ФИЗИКА ВЪ ОБЩЕДОСТУПНОМЪ ИЗЛОЖЕНІИ. Пособіе для обученія и самообразованія. Книга содержитъ основныя свѣдѣнія изъ физики, изложенныя въ связи съ повседневными явленіями и безъ помощи математическихъ формулъ; надлежащее мѣсто отведено обобщающимъ началамъ и современнымъ открытіямъ. XVIII + 808 стр. со многими вопросами для упражненія и 517 рис. Ц. 2 р. 85 к. Изданіе Т-ва И. Д. Сытина, 1909.