№ 528.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIV-го Семестра № 12-й.

ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1910.

34-й ГОДЪ ИЗДАНІЯ

ЖУРНАЛЪ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES.

Выходитъ въ Парижѣ 1-го и 15-го каждаго мѣсяца, кромѣ августа и сентября. Подписка открыта цѣлый годъ, но подписной годъ считается съ 1 октября: лица, подписывающіяся послѣ этого срока, получаютъ всѣ вышедшіе номера. **Подписная плата** для России: **2 р. 25 к.** Деньги высылаются переводомъ, сопровождаемымъ отдѣльнымъ открытымъ письмомъ. Писать можно по-русски.

Журналъ предназначенъ для учениковъ высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и для готовящихся въ высшія учебныя заведенія. Онъ печатаетъ научныя статьи по математикѣ и физикѣ, а также задачи, предлагаемыя во Франціи на экзаменахъ на степень баккалавра и на конкурсныхъ экзаменахъ для поступленія въ разныя высшія спеціальныя школы, какъ-то: школа изящныхъ искусствъ, агрономическій институтъ, морское училище, учительскіе институты, школы промышл., физики и химіи и т. п. Лучшія рѣшенія предлагаемыхъ въ журналѣ задачъ печатаются съ указаніемъ фамилій рѣшившихъ. Всѣ статьи и задачи сопровождаются чертежами.

Помимо этого журнала, фирма издаетъ два другихъ математическихъ журнала: **L'EDUCATION MATHÉMATIQUE,** для учениковъ 3-го, 4-го и 5-го классовъ среднихъ и **LA REVUE DE MATHÉMATIQUES SPEÉCIALES** для учащихся высшихъ учебныхъ заведеній. У ней же *можно достать журналъ, всѣ статьи котораго сопровождены почти дословнымъ переводомъ на русскій языкъ.* Пробные номера всѣхъ журналовъ, а также полный каталогъ нашихъ изданій высылаются безплатно.

АДРЕСЪ: **VUIBERT et NONY, 63, Boulevard Saint-Germain PARIS, 5e.**

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1911 ГОДЪ

на научно-популярный иллюстрированный журналъ, выходящій два раза въ мѣсяцъ,

ВѢСТНИКЪ ВОЗДУХОПЛАВАНІЯ.

ВЪ ЖУРНАЛѢ ПРИНИМАЮТЪ УЧАСТІЕ:

Боклевскій, К. П., проф., деканъ Кор. Отд. СПБ. Полит. инстит.; **Воробьевъ Б. Н.,** инж.-мех.; **Викторовъ, К. Е.; Германъ, Б. Д.;** кн. **Голицынъ, Б. Б.,** академикъ; **Гофманъ, Эд.,** инж. Англія (Лондонъ); **Глуманъ, О.,** прив.-доц. пол. инст. въ Лагэ (Герм.); **Гудинъ, В. Г.,** (Бельгія); **Делонэ, Н. Б.,** проф. Кіевск. Полит.; **Де-Метцъ,** проф. Кіевск. Унив.; **Елецкій, В.,** Японія (Токіо); **Каменьщиковъ, Н. П.,** б. асс. Кор. Возд. Обс. въ Линденбергѣ (Пруссія); **Кашкаровъ, Н. А.,** инж. пут. сообщ.; **Лавровъ, Н. А.,** инж.; **Лебедевъ, А. А.,** горн. инж.; **Лебедевъ, В. А.; Магометъ-Бекъ,** (Турція); **Меерсонъ, Л.** (Швейцарія); **Никитинъ, П. Ф.,** инж.-техн.; **Нѣмченко, С. А.,** кап., воен. инж.; **Полыновъ, К.,** инж.-техн.; **Дель-Пропосто, Ч. А.,** инж. (Италія); **Ракчеевъ, А. М.,** инж.-техн.; **Ребиковъ, Н. В.; Рузеръ, Л.** (Парижъ); **Рынинъ, Н. А.,** инж. п. с.; **Рейнбергъ, С. А.,** инж.-техн; **Сверчковъ, Е. П.; Сташевскій, В. В.,** инж.-шт.-кап; **Утѣшевъ, Н. И.,** инж.-подполк.; **Даль-Фаббро Чезаре,** инж. (Италія); **Фоминъ, Н. В.,** шт.-кап., инж.-элек. (Владивостокъ); **Форланини, Энрико,** инж. (Италія); **Фосмайеръ, Э.,** инж.-мех. (Голландія); **Хволесъ, М. Э.** (Австрія); **фонъ-Шаренбергъ,** шт.-кап. Китай (Пекинъ); **Ширманъ, А. В.,** инж., зав. возд. отд. „Deutsches-Museum" — Мюнхенъ (Германія); **Щетининъ, С. С.; Эмме, К.** (Льежъ, Бельгія).

Условія подписки: на 1 годъ 24 номера **10 р.,** на 9 мѣс. 18 номеровъ **8 р. 50 к.,** на 6 мѣс. 12 номеровъ **6 р.,** на 3 мѣс. 6 номеровъ **3 р. 50 к.,** на 1 мѣс. 2 номера **1 р. 25 к.** Съ доставкой и пересылкой. Допускается разсрочка для годовыхъ подписчиковъ: при подпискѣ—**5 руб.** въ апрѣлѣ—**3 руб.** и въ августѣ—**2 руб.**

Цѣна отдѣльнаго номера 60 коп.

Главная контора и редакція: С.-Петербургъ, Стремянная, 7. Телефонъ 99—98.

Редакторъ: **Б. Н. Воробьевъ.** Издатель: **А. М. Ракчеевъ.**

XLIV Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 528.

Причина землетрясеній, горообразованія и родственныхъ явленій.

Т. Арльта.

Изложено по статьямъ Т. Си. (T. I. I. See, „Proceedings of the American Philosophical Society“ 1907: № 45—стр. 279-414, № 46—191-299, 369-416; 1908: № 47—157-275).

Научныя гипотезы требуютъ постоянной провѣрки; никогда не слѣдуетъ черезчуръ полагаться на нихъ, хотя бы онѣ пользовались въ теченіе долгаго времени почти всеобщимъ признаніемъ. Вспомнимъ популярную гипотезу Лапласа, которая столь долго пользовалась почти неограниченнымъ господствомъ и противъ которой, однако, съ теченіемъ времени начинаютъ высказываться вѣскія возраженія, заставляющія, по меньшей мѣрѣ, существенно измѣнить ее. Другой гипотезой, которая еще и теперь признается почти всѣми, является гипотеза сжатія *), которая старается объяснить явленія въ земной корѣ сжатіемъ земного ядра вслѣдствіе постепенно возрастающаго охлажденія.

*) Эта гипотеза въ литературѣ извѣстна еще подъ названіемъ „контракціонной“.

Ред.

Въ послѣднее время также противъ этой теоріи все чаще подымаются возраженія, и дѣлаются попытки замѣнить ее лучшей теоріей. Довольно много такихъ попытокъ сводится къ простому подновленію старыхъ идей и оставляетъ безъ вниманія послѣднія завоеванія науки; есть, однако, и попытки, заслуживающія серьезнаго вниманія. Къ числу такихъ относится и теорія Си, который желаетъ замѣнить теорію сжатія новой цѣльной системой гипотезъ; онъ старается обосновать ее на почвѣ завоеваній современной науки и подкрѣпить физическими соображеніями, которыя онъ строитъ на строго математическихъ вычисленіяхъ. Мы можемъ не соглашаться съ нимъ по отдѣльнымъ вопросамъ, въ особенности съ его мыслями о нѣкоторыхъ геологическихъ фактахъ, но все же его взгляды заслуживаютъ нашего вниманія, по меньшей мѣрѣ, какъ рабочая гипотеза.

Противъ теоріи сжатія Си и другіе авторы возражаютъ, что ядро земли должно медленнѣе охлаждаться и потому менѣе сокращаться, чѣмъ земная кора, что и должно, дѣйствительно, имѣть мѣсто при предположеніи, которое раздѣляютъ съ Си очень многіе геофизики, что земное ядро находится въ твердомъ состояніи, тогда какъ для приверженцевъ расплавленнаго состоянія земного ядра контракція (сокращеніе) массъ при охлажденіи еще составляетъ вопросъ.

Также и при образованіи складчатости теорія сжатія встрѣчаетъ различныя затрудненія, въ особенности, если одновременно принять во вниманіе то обстоятельство, что, согласно измѣреніямъ тяжести, горы не представляютъ собой скопленія массъ, какъ слѣдовало бы полагать сообразно съ теоріей сжатія, но надземный избытокъ массы, уравновѣшивающійся подземными недостачами.

Свою новую теорію Си основываетъ на водопроницаемости морского дна, которую мы можемъ считать въ виду господствующихъ тамъ огромнѣйшихъ давленій полнѣ установленной всѣми произведенными до сихъ поръ опытами. Какъ извѣстно, съ помощью этихъ давленій вода могла бы быть продавлена внутрь полаго стекляннаго шара сквозь его стѣнки, при чемъ послѣднія остались бы неповрежденными! Проникнувшая въ морское дно вода подъ дѣйствіемъ этого же давленія протискивается все глубже и глубже, пока она не придетъ въ соприкосновеніе съ горячими глубокими слоями и не станетъ испаряться. Что этотъ водяной паръ не препятствуетъ, какъ можно было бы думать, дальнѣйшему проникновенію воды вглубь, доказано опытами очень извѣстнаго экспериментатора-геолога Добре (Daubrée). Водяной паръ поглощается раскаленными слоями, находящимися на еще большихъ глубинахъ, совершенно такимъ же образомъ, какъ раскаленная сталь поглощаетъ газы; вслѣдствіе этого постояннаго притока перегрѣтаго пара возникаетъ постепенно растущее напряженіе, которое по Зее является причиной всѣхъ явленій внутри земной коры. Къ этой общей причинѣ онъ сводитъ землетрясенія, образованіе вулкановъ, возникновеніе горъ, плоскогорій, острововъ и материковъ, происхожденіе большихъ сейсмическихъ волнъ на морѣ, аномаліи силы тяжести въ горахъ и на морѣ, а также магнитныя возмущенія при землетрясеніяхъ и вулканическихъ взрывахъ.

Въ земной корѣ теплота земли, по его теоріи, непрерывно растетъ по направленію вглубь, сперва быстро, и, наконецъ почти незамѣтно, до центра земли; вычисленія, основанныя на механической теоріи теплоты, показываютъ, что въ центрѣ земли температура достигаетъ примѣрно 46000^0. Въ слоѣ коры толщиною отъ 15 до 30 км. сцѣпленіе ослабѣваетъ; на этой глубинѣ мы встрѣчаемъ пластическіе слои и, можетъ быть, обладающіе свойствами вязкой жидкости. Дальше, однако, въ виду того, что давленіе повышается быстрѣе, чѣмъ температура, твердость снова возрастаетъ, и, наконецъ, достигаетъ величины, въ три раза превышающей твердость никкелевой стали. Существованіе этого пластическаго слоя, отдѣляющаго твердую кору отъ твердаго ядра, доказывается не только соображеніями, основанными на теоріи тепла, но и наблюденіями сейсмологовъ; онъ является очагомъ тѣхъ процессовъ, которые вызываютъ измѣненія въ строеніи поверхности. До сихъ поръ существеннымъ образомъ замѣтны лишь явленія охлажденія. По мнѣнію Си, охлажденіе происходило еще быстрѣе, чѣмъ предполагалъ, напримѣръ, лордъ Кельвинъ. Послѣдній предполагалъ, что минимальный возрастъ земли со времени отвердѣванія составляетъ около 100 милліоновъ лѣтъ, тогда какъ Зее, основываясь на уравненіяхъ теоріи теплоты приписываетъ ей лишь возрастъ въ 10 милліоновъ лѣтъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ допускаетъ, что благодаря дѣйствію радія это число легко можетъ быть увеличено въ десять разъ и еще болѣе.

Когда вода, протиснутая сквозь морское дно, достигаетъ въ пластическомъ слоѣ достаточно большого напряженія, то послѣднее приводитъ къ землетрясеніямъ; этимъ объясняется, почему землетрясенія въ своемъ географическомъ распространеніи столь неизмѣнно примыкаютъ къ морямъ, и часто имѣютъ въ нихъ даже самый центръ. Сбросы и тектоническіе сдвиги, которые теперь, большей частью, разсматриваютъ, какъ причину землетрясеній, въ дѣйствительности являются не причиной, но слѣдствіемъ землетрясеній, которыхъ поэтому нельзя собственно называть тектоническими сотрясеніями. Они стоятъ гораздо ближе къ вулканическимъ сотрясеніямъ, чѣмъ полагаютъ, только центръ ихъ лежитъ значительно глубже, но никогда не опускается ниже толщи земной коры *).

Подъ дѣйствіемъ упругости паровъ массы пластическаго слоя, которыя въ болѣе широкомъ смыслѣ могутъ быть названы лавой, хотя онѣ и не должны быть безусловно жидкими, приходятъ въ движеніе и придавливаются по линіямъ наименьшаго сопротивленія. Такъ какъ упругость возрастаетъ съ наибольшей скоростью подъ океанами, а подъ сушей почти не увеличивается, то эта лава должна устремиться по направленію къ сушѣ и вызвать на краю ея явленія поднятія. Такимъ образомъ, подъ давленіемъ, дѣйствующимъ снизу въ косомъ направле-

*) Это глубокое положеніе говоритъ, однако, и противъ того, что эти землетрясенія имѣютъ тектоническую причину, такъ какъ сбросы не могутъ доходить внизъ до пластическаго слоя.

нiи, образуются складчатыя горы, которыя въ своемъ протяженiи, дѣйствительно, тѣсно примыкаютъ къ настоящимъ или древнимъ морямъ.

Къ современной теорiи складчатости Си не присоединяется, но съ помощью своей гипотезы онъ объясняетъ множество другихъ явленiй, наблюдавшихся въ горныхъ хребтахъ, какъ то: несимметрическая отлогость, образованiе параллельныхъ цѣпей. Послѣднее происходитъ вслѣдствiе того, что дно моря послѣ оттока лавы опускается параллельно вновь образовавшемуся горному хребту, такъ что въ немъ образуются глубокiе грабены, какiе мы наблюдаемъ въ большомъ числѣ въ Великомъ океанѣ. Благодаря этому затрудняется дальнѣйшiй оттокъ лавы по направленiю къ сушѣ, и на обращенной къ морю сторонѣ грабены подымается новый параллельный хребетъ.

Совершенно такъ же, какъ горы, возникаютъ и острова, плоскогорья и, наконецъ, цѣлые материки, корытообразная форма которыхъ съ краевыми горными хребтами объясняется по этой гипотезѣ очень просто. Въ этомъ пунктѣ, однако, Си заходитъ несомнѣнно слишкомъ далеко, когда онъ утверждаетъ, что, въ виду совпаденiя въ островахъ направленiя ихъ горной оси съ ихъ протяженiемъ въ длину, всѣ они (острова) должны были возникнуть въ результатѣ подобныхъ поднятiй. Онъ при этомъ, очевидно, недостаточно оцѣниваетъ значенiя вѣковыхъ опусканiй, хотя нельзя сказать, чтобы онъ совсѣмъ не принималъ ихъ во вниманiе.

Изученiе фауны и флоры остъ-индскихъ острововъ,—напримѣръ, Суматры,—доказываетъ съ несомнѣнностью прежнюю связь ихъ съ материкомъ, тогда какъ, по теорiи Си, мы не могли бы заключить о такой связи.

Если материковыя области и въ особенности горные хребты выдавливаются такимъ образомъ кверху вулканическими массами, проникающими со стороны моря, то послѣднiя въ слабыхъ мѣстахъ материковъ и горъ могутъ также прорваться и вызвать образованiе дѣятельныхъ вулкановъ. Такимъ образомъ Си объясняетъ вулканическiя и сеймическiя явленiя одной и той же основной причиной, но при этомъ онъ не приходитъ въ противорѣчiе съ новѣйшими данными. Въ самомъ дѣлѣ онъ доказываетъ, что наблюдавшееся въ дѣйствительности отсутствiе совпаденiя между наиболѣе сильными сейсмическими областями и наиболѣе дѣятельными вулканическими съ необходимостью слѣдуетъ изъ его теорiи такъ же, какъ и то обстоятельство, что вулканическiя сотрясенiя всегда имѣютъ свой очагъ на небольшой глубинѣ, тогда какъ изверженныя массы, по его теорiи, происходятъ изъ гораздо большихъ глубинъ.

Эти лежащiя въ глубинѣ лавовыя массы, обусловливающiя, по его мнѣнiю, поднятiе горъ и частью выбрасываемыя при изверженiяхъ, онъ представляетъ себѣ, вслѣдствiе высокаго содержанiя въ нихъ паровъ, какъ пемзообразныя, т. е. весьма рыхлыя и сравнительно легкiя вещества. Этимъ объясняется чрезвычайно малыя величины силы тяжести въ горахъ. Однако, предположенiе, что основанiе горъ дѣйствительно состоитъ изъ пемзовой породы должно быть отвергнуто уже вслѣдствiе стеклообразнаго строенія породъ, указывающаго на быстрое отвердѣніе. Вообще, эта часть теоріи представляется наименѣе свободной отъ возраженій; дѣйствительно, вулканическія породы нельзя считать относительно легкими, такъ какъ въ сравненіи съ обломочными породами земной поверхности онѣ скорѣе должны быть названы тяжелыми.

Болѣе понятно объясненіе большихъ сейсмическихъ волнъ, вызываемыхъ отчасти подводными изверженіями въ моряхъ, но въ большинствѣ случаевъ внезапнымъ опусканіемъ морского дна въ близкихъ къ берегу грабенахъ, когда при землетрясеніи сосѣдняя горная цѣпь и окружающая мѣстность подымается какъ бы толчками. Вода должна устремиться по вновь образовавшемуся пониженію (наклону), и вслѣдствіе этого она сперва отступаетъ отъ береговъ, пока скопленіе воды, притекающей со всѣхъ сторонъ къ ложбинѣ, не вызоветъ высокой волны, которая переливается также черезъ берегъ.

Такимъ образомъ, съ фактической стороны гипотеза хорошо обоснована; она имѣетъ болѣе цѣльный характеръ, чѣмъ всѣ другія теоріи, которыя Си подробно разбираетъ и опровергаетъ, и лучше ихъ объясняетъ множество трудныхъ вопросовъ. Тѣмъ не менѣе она также несвободна отъ нѣкоторыхъ упрековъ. Согласно этой теоріи, близкія къ берегу горныя цѣпи всегда должны быть моложе, чѣмъ параллельныя имъ цѣпи, далекія отъ берега. Это, дѣйствительно, имѣетъ мѣсто въ нѣкоторыхъ случаяхъ,—напримѣръ, въ Сѣв. Америкѣ, Южн. Америкѣ, отчасти, можетъ быть, и въ Альпахъ; но какъ общее правило, это еще не доказано. Мы уже упоминали, что Зее слишкомъ мало считается съ явленіями опусканія. Послѣднія установлены съ несомнѣнностью въ Эгейской области, тогда какъ Зее здѣсь тоже видитъ лишь поднятія. Черное и Каспійское моря не въ новѣйшее лишь время были отдѣлены отъ Средиземнаго моря благодаря поднятію средней Малой Азіи, такъ какъ въ такомъ случаѣ они не могли бы имѣть въ пліоценѣ прѣсноводную*) фауну. Его прежнія опредѣленія возраста земли, теперь слегка видоизмѣненныя (имъ), тоже даютъ, очевидно, слишкомъ малую величину. Дѣйствительно, если онъ принимаетъ для Андовъ возрастъ въ три милліона, для Сѣверо-Американской цѣпи (со времени мѣловой эпохи) возрастъ въ пять милліоновъ лѣтъ, то земная кора не могла образоваться всего лишь 10 милліоновъ лѣтъ тому назадъ.— Всѣ эти возраженія не могутъ, однако, потребовать существеннаго измѣненія теоріи Си, которая, между прочимъ, отнюдь не является чѣмъ-то совершенно новымъ; Си доказываетъ это цитатами изъ трудовъ столь извѣстныхъ гофизиковъ и геологовъ, какъ Лайэлль, Ч. Дарвинъ, Гэлль (Hall), Леконтъ (Lecomte), Г. Дарвинъ, Мильнъ, О. Фишеръ, Гейки, Зюссъ, Арреніусъ.

Помимо этихъ цитатъ, которыя, несомнѣнно, сообщаютъ изложеннымъ доводамъ большій вѣсъ, Си приводитъ также рядъ другихъ цитатъ, имѣющихъ лишь историческій интересъ. Онъ очень подробно излагаетъ взгляды древнихъ, чтобы показать, что развитыя имъ идеи отчасти очень стары. Это сопоставленіе старыхъ взлядовъ на состояніе

*) Солоноватоводную. *Ред.*

внутренности земли, на землетрясенія, вулканическія изверженія и т. п. имѣетъ большой интересъ, особенно вслѣдствіе того, что попутно разсматриваются нѣкоторыя исторически достовѣрныя событія,—напримѣръ, землетрясеніе въ Ахайѣ, которое въ 373 до Р. Х. уничтожило города Гелике и Буру, погрузивъ ихъ въ море. Особенно подробно изложены взгляды Платона, Аристотеля, Страбона и Плинія, но упомянуты также и другіе писатели, такъ что въ статьѣ Си мы находимъ полный обзоръ геотектоническихъ взглядовъ греческихъ естествоиспытателей.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

Е. Смирнова.

(По поводу двухъ нашихъ статей объ ирраціональныхъ числахъ, помѣщенныхъ въ №№ 511 и 521 „Вѣстника").

Въ виду сдѣланнаго редакціей примѣчанія къ нашей замѣткѣ объ ирраціональныхъ числахъ, помѣщенной въ № 521 «Вѣстника», мы хотѣли бы выяснить свою точку зрѣнія на основной слабый пунктъ нашей схемы. Мы требуемъ, чтобы каждая величина, въ томъ числѣ и отрѣзокъ OM (№ 511 «Вѣстника», стр. 168), имѣла своего численнаго представителя; но имѣемъ ли мы право выставлять такое требованіе? Мы вѣдь доказываемъ, наоборотъ, что при наличности только цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, каковыя у насъ и есть въ распоряженіи до введенія ирраціональныхъ чиселъ, возможны величины, какъ, напримѣръ, отрѣзокъ OM, которыя не могутъ быть представлены числами. Послѣ этого возможно двоякое рѣшеніе поставленнаго выше вопроса: или выставленному требованію удовлетворить невозможно, или необходимо усовершенствовать аппаратъ (понятіе о числѣ), при помощи котораго мы дѣйствуемъ надъ величинами. Есть основаніе думать, что это усовершенствованіе понятія о числѣ возможно, такъ какъ раньше мы имѣли уже подобный прецедентъ: при наличности только цѣлыхъ чиселъ мы не имѣли возможности выражать числами цѣлаго ряда величинъ, для которыхъ потомъ оказалось возможнымъ дать численныхъ представителей, какъ только понятіе о цѣломъ числѣ было расширено введеніемъ дробныхъ чиселъ. Итакъ, является вопросъ: нельзя ли усовершенствовать тотъ аппаратъ, при помощи котораго мы оперируемъ надъ величинами, такимъ образомъ, чтобы и отрѣзокъ OM могъ быть представленъ числомъ? Но поставить цѣль не значитъ ея достигнуть; надо изыскать средства къ усовершенствованію разсматриваемаго аппарата, которыхъ, разумѣется, не можетъ дать сама цѣль, для которой мы хотимъ его приспособить; цѣль указываетъ лишь направленіе, въ которомъ слѣдуетъ вести усовершенствованіе, а возможность быть приспособленнымъ въ этомъ направленіи опредѣляется свойствами самаго аппарата и дѣйствующаго съ этимъ аппаратомъ лица. Такимъ образомъ, доказательство возможности новаго расширенія понятія о числѣ должно вестись чисто ариѳметическимъ путемъ — лишь на основаніи свойствъ самаго этого понятія, и потому нельзя допускать, что какое-то число z является численнымъ представителемъ отрѣзка OM, пока не будетъ обнаружена возможность такого числа чисто ариѳметическимъ путемъ; лишь послѣ того, какъ совершенно независимо отъ геометріи прямой будетъ доказана возможность построенія такого комплекса чиселъ, который допускаетъ возможность установленія однозначнаго взаимнаго соотвѣтствія между членами этого комплекса и членами комплекса прямолинейныхъ отрѣзковъ прямой, могущихъ быть отложенными вмѣстѣ съ отрѣзкомъ OM на этой прямой отъ опредѣленной точки ея O, можно будетъ говорить и о числѣ z, какъ о представителѣ отрѣзка OM. Итакъ, строго теоретически, предварительное понятіе о числѣ z, по нашему мнѣнію, нельзя давать, какъ о представителѣ отрѣзка OM; мы же это какъ разъ и дѣлаемъ, — въ этомъ и состоитъ основная слабая сторона нашей схемы. Но отрывать учениковъ V-го класса въ этомъ вопросѣ отъ геометрическихъ образовъ мы считаемъ совершенно невозможнымъ; однако, нельзя также, по нашему мнѣнію, въ данномъ случаѣ пользоваться геометрическими образами, лишь какъ иллюстраціями положеній, устанавливаемыхъ чисто ариѳметическимъ путемъ, такъ какъ ученики не настолько еще развиты, чтобы видѣть въ этихъ образахъ простую иллюстрацію, и будутъ все равно черпать въ геометрическихъ положеніяхъ доказательства ариѳметическихъ фактовъ. Съ этой неподготовленностью учениковъ приходится считаться и потому поступаться строгостью изложенія этого вопроса, которая, кстати сказать, по нашему мнѣнію, въ средней школѣ едва ли и необходима. Равнымъ образомъ, мы никакъ не можемъ согласиться и съ такой постановкой этого и подобныхъ вопросовъ, какая господствуетъ, напримѣръ, у г-на Лебединцева: «авторъ, — говоритъ г-нъ Лебединцевъ, — строитъ теорію отрицательныхъ, а затѣмъ и несоизмѣримыхъ чиселъ на фундаментѣ конкретныхъ примѣровъ, подчеркивая, однако, въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ чисто условный характеръ устанавливаемыхъ опредѣленій». (К. Ѳ. Лебединцевъ, «Курсъ алгебры» для среднихъ учебныхъ заведеній. Ч. I, изд. 1909 г. Предисловіе, стр. V). Чтобы выяснить причину нашего несогласія съ такой постановкой дѣла, обратимся къ соотвѣтственной сторонѣ способа введенія этимъ авторомъ ирраціональныхъ чиселъ, изложеннаго имъ въ № 513 «Вѣстника» (стр. 220—222), и во второй части его же «Курса алгебры», причемъ будемъ пользоваться этимъ послѣднимъ изложеніемъ. Введя, какъ нами было разсказано въ нашей замѣткѣ по поводу ирраціональныхъ чиселъ, помѣщенной въ № 521 «Вѣстника», для обозначенія діагонали AM квадрата, сторона котораго принята за единицу измѣренія, «особое число $\sqrt{2}$», авторъ пишетъ: «Кромѣ того (?), условимся введенное нами новое число $\sqrt{2}$ считать бо́льшимъ всякаго числа, выражающаго длину отрѣзка, меньшаго, чѣмъ AM, и меньшимъ всякаго числа, выражающаго длину отрѣзка, бо́льшаго, чѣмъ AM». «Курсъ алгебры» для среднихъ учебныхъ заведеній. Ч. II, изд. 1910 г. стр. 46). Слова «кромѣ того» въ только-что цитированномъ мѣстѣ указываютъ, по нашему мнѣнію, на то, что авторъ считаетъ разсматриваемое здѣсь условіе относительно числа $\sqrt{2}$ таковымъ, которое можетъ быть наложено на него, а можетъ и не быть наложено, несмотря на то, что ранѣе имъ уже наложено на это число условіе быть представителемъ діагонали AM. Но развѣ число $\sqrt{2}$ могло бы служить представителемъ отрѣзка AM (это число вѣдь обозначаетъ именно этотъ отрѣзокъ по автору!), если бы оно не обладало формулированнымъ въ только-что цитированномъ нами мѣстѣ свойствомъ? Во всякомъ случаѣ, если предложить такое сочетаніе идей вдумчивому ученику V класса, знающему, разумѣется, что гипотенуза прямоугольнаго треугольнику больше катета, то едва ли онъ согласится съ возможностью таковаго. Кстати прибавимъ, что это условіе относительно числа $\sqrt{2}$ авторъ вводитъ послѣ того, какъ на стр. 36 первой части своего курса онъ устанавливаетъ такое опредѣленіе понятій «больше» и «меньше» для всѣхъ алгебраическихъ чиселъ: «условимся этотъ самый признакъ распространить и на всѣ алгебраическія числа, т. е. будемъ считать одно число болѣе другого, если разность ихъ положительна, и менѣе другого, если разность ихъ отрицательна»; это послѣднее условіе, очевидно, относится и къ новому числу $\sqrt{2}$, такъ какъ, по нашему мнѣнію, г. Лебединцевъ считаетъ ирраціональныя числа алгебраическими; онъ пишетъ: «нельзя ли ввести въ алгебру какія-либо новыя числа, съ помощью которыхъ мы могли бы выражать ариѳметическіе корни всякой степени изъ любого числа, подобно тому, какъ введеніе отрицательныхъ чиселъ въ свое время дало намъ возможность выражать значеніе всякой разности» (стр. 43 ч. II того же курса). Если мы приложимъ теперь только-что изложенную точку зрѣнія автора на понятія «больше» и «меньше» къ налагаемому имъ на число $\sqrt{2}$ новому условію быть больше и меньше такихъ-то чиселъ, то ясно будетъ, что онъ хочетъ разность между этимъ числомъ и другими числами считать положительной или отрицательной. Не попалъ ли авторъ такимъ образомъ въ тотъ самый кругъ, который имъ былъ намъ поставленъ въ вину въ № 513 «Вѣстника.»?

Если же эта точка зрѣнія автора на понятія «больше» и «меньше» не относится къ вновь вводимому имъ «алгебраическому» числу, то получаются двѣ, повидимому, различныя, ничего общаго между собою не имѣющія мѣрки для различныхъ алгебраическихъ чиселъ, каковое явленіе едва ли допустимо.

Остается, по нашему мнѣнію, одно: допустить, что чисто ариѳметическая разработка вопроса возможна, — таковое допущеніе, какъ извѣстно, не противорѣчитъ дѣйствительности, — но, не касаясь ея совершенно въ данномъ мѣстѣ, ввести, какъ возможное, нѣкоторое число z въ качествѣ численнаго представителя опредѣленнаго отрѣзка OM, — сдѣлать такимъ образомъ логическій скачекъ, но не кругъ (?), — затѣмъ разсмотрѣть геометрически свойства этого послѣдняго и перенести ихъ прямо на число z, какъ его представителя, безъ ариѳметическаго обоснованія. Именно это мы и имѣли въ виду сдѣлать, когда въ первой нашей статьѣ по этому вопросу (№ 511 «Вѣстника») вслѣдъ за тѣмъ, какъ былъ опредѣленъ отрѣзокъ OM, какъ общій предѣлъ двухъ безконечныхъ рядовъ отрѣзковъ прямой, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, писали равенства:

$$z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right) \qquad (1)$$

безъ предварительнаго разсмотрѣнія разностей $z - \frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n} - z$ съ чисто ариѳметической точки зрѣнія, относя этотъ вопросъ къ числу тѣхъ, которые входятъ въ составъ чисто ариѳметической теоріи числа. Замѣтимъ, что понятіе о предѣлѣ ученикамъ V-го класса выясняется прежде всего и главнымъ образомъ геометрически; когда они пользуются обычнымъ опредѣленіемъ понятія о предѣлѣ, какъ о такой постоянной величинѣ, по отношенію къ которой перемѣнная измѣняется такъ, что абсолютная величина разности между ними можетъ быть сдѣлана менѣе всякой напередъ заданной величины, то они оперируютъ здѣсь именно надъ величинами, а не надъ числами, употребляя послѣднія, лишь какъ символы первыхъ. Да и само это опредѣленіе, содержа термины «перемѣнная и постоянная величина», показываетъ, что исторически это понятіе прилагалось первоначально именно къ величинамъ,—давно ли стали употреблять терминъ «перемѣнное число»? И въ отношеніи величинъ этотъ терминъ «предѣлъ» очень выразителенъ и удобенъ, при чемъ, чѣмъ раньше ученики съ этимъ понятіемъ ознакомятся, тѣмъ, по нашему мнѣнію, лучше. Въ виду указанной нашей точки зрѣнія передъ установленіемъ равенства (1) отъ насъ можно было бы, пожалуй, требовать предварительнаго разсмотрѣнія разностей $z-\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}-z$, но лишь какъ представителей опредѣленныхъ отрѣзковъ.

Во второй своей замѣткѣ по этому вопросу въ № 521 настоящаго журнала мы хотѣли показать, что необходимое для равенствъ (1) заключеніе относительно разностей

$$z-\frac{x}{n} \text{ и } \frac{x+1}{n}-z,$$

какъ представителей отрѣзковъ, слишкомъ очевидно, но встрѣтили возраженіе со стороны редакціи, что мы говоримъ о разности чиселъ, не опредѣливъ ея. Въ настоящей статьѣ мы имѣемъ въ виду, между прочимъ, войти въ нѣкоторыя подробности и по этому вопросу. Итакъ, наша задача дать лишь геометрическую теорію ирраціональнаго числа. Прежде всего, понятія «больше» и «меньше» въ отношеніи чиселъ должны имѣть слѣдующій смыслъ: изъ двухъ чиселъ бо́льшимъ будетъ считаться то, которое служитъ представителемъ величины (отрѣзка) большей, и меньшимъ то, которое служитъ представителемъ величины (отрѣзка) меньшей. Необходимо, разумѣется, показать, что этимъ признакомъ можно пользоваться для сравненія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Мы думаемъ, что можно это сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Строя на прямой два ряда отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, мы откладывали эти отрѣзки вправо отъ точки O (№ 511, стр. 166 и 167). Но мы могли бы откладывать ихъ и влѣво,—тогда мы получили бы два такихъ же безконечныхъ ряда отрѣзковъ по другую сторону точки O. Съ тѣмъ, чтобы различать эти отрѣзки по направленіямъ, числа, измѣряющія отрѣзки одного направленія отмѣчаютъ знакомъ $+$, который, большей частью пропускаютъ, а числа, измѣряющія отрѣзки противоположнаго направленія, отмѣчаютъ знакомъ $-$. Такимъ образомъ, получимъ четыре ряда чиселъ: $\frac{x}{n}$, $\frac{x+1}{n}$, $-\frac{x}{n}$, $-\frac{x+1}{n}$. Но для того, чтобы сравнивать члены первыхъ двухъ изъ этихъ рядовъ съ членами вторыхъ двухъ рядовъ, необходимо всѣ эти числа разсматривать, какъ представителей значеній не двухъ направленныхъ въ противоположныя стороны величинъ, а совершенно одной и той же величины, расположенныхъ въ одну сторону. Для этой цѣли поступимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть на прямой AB отъ произвольной точки, отмѣченной буквой O, при помощи ранѣе избранной нами единицы измѣренія (ab) нанесены всѣ четыре ряда отрѣзковъ, представленныхъ числами видовъ: $-\frac{x+1}{n}$, $-\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, о которыхъ говорили выше.

Возьмемъ на прямой AB съ лѣвой стороны ея какую-нибудь точку C на опредѣленномъ разстояніи отъ точки O, на которомъ отъ нея отстоитъ конецъ отрѣзка, представленнаго числомъ $\left(-\frac{x}{n}\right)$ при $n=1$. Концы отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$, будемъ отмѣчать буквой a_n; концы отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x+1}{n}$, буквой b_n; концы отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\left(-\frac{x}{n}\right)$, — буквой a_n'; и концы отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\left(-\frac{x+1}{n}\right)$, — буквой b_n'. Тогда отрѣзки Cb_n', Ca_n', Ca_n, Cb_n всею своею совокупностью образуютъ одинъ безконечный рядъ отрѣзковъ, расположенныхъ въ одномъ направленіи отъ точки C и вполнѣ опредѣляемыхъ числами: $-\frac{x+1}{n}$, $-\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а потому эти числа могутъ быть разсматриваемы, какъ ихъ представители. Въ данномъ случаѣ, очевидно, число выступаетъ представителемъ величины, не какъ указатель способа построенія ея изъ единицы измѣренія, а какъ указатель того измѣненія, которое надо произвести надъ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной величиной, чтобы получить характеризуемую имъ величину. Вмѣстѣ съ тѣмъ ясно, что при указанныхъ выше условіяхъ бóльшія изъ этихъ чиселъ по абсолютной величинѣ положительныя числа будутъ представителями бóльшихъ по величинѣ отрѣзковъ, а бóльшія изъ нихъ по абсолютной величинѣ отрицательныя числа будутъ представителями меньшихъ по величинѣ отрѣзковъ. Слѣдовательно, если мы пожелаемъ расположить наши положительныя и отрицательныя числа, какъ раціональныя, такъ и ирраціональныя, въ возрастающемъ порядкѣ соотвѣтственно возрастанію размѣровъ отрѣзковъ, представителями которыхъ они въ данномъ случаѣ служатъ, то они будутъ идти въ такомъ порядкѣ:

$$-\frac{x+1}{n},\quad -z,\quad -\frac{x}{n},\quad O,\quad \frac{x}{n},\quad z,\quad \frac{x+1}{n}.$$

Далѣе, дѣйствія надъ числами должны разсматриваться, лишь какъ символическія выраженія дѣйствій надъ величинами; при чемъ опредѣленія этихъ дѣйствій могутъ быть установлены тотчасъ же, какъ только опредѣлены самыя величины, для которыхъ данныя числа являются представителями, а равно и соотвѣтствующія дѣйствія надъ ними — въ данномъ случаѣ надъ прямолинейными отрѣзками, — которыя не зависятъ, разумѣется, отъ того, какими числами эти величины выражаются. Эти послѣднія будутъ опредѣлены, если опредѣлимъ понятія: «сумма отрѣзковъ», «разность отрѣзковъ» и «произведеніе отрѣзка на отвлеченное число», а дѣленіе будемъ разсматривать, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Въ качествѣ опредѣленій первыхъ двухъ понятій можемъ взять хотя бы опредѣленіе Киселева (А. Киселевъ «Элементарная геометрія для среднихъ учебныхъ заведеній», изданіе восьмое стр. 6) а именно: «суммою нѣсколькихъ данныхъ отрѣзковъ прямой называется такой новый отрѣзокъ прямой, который составленъ изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ отрѣзкамъ» и «разность отрѣзковъ AB и CD (если $AB > CD$) есть третій отрѣзокъ, котораго сумма съ CD образуетъ отрѣзокъ AB». Что касается произведенія отрѣзка AB на отвлеченное число m, то подъ таковымъ мы разумѣемъ такой новый отрѣзокъ, который получается изъ отрѣзка AB такъ, какъ число m получено изъ единицы. Послѣ сдѣланныхъ опредѣленій этихъ понятій: сумма отрѣзковъ, разность отрѣзковъ и произведеніе отрѣзка на отвлеченное число, опредѣленія сложенія и вычитанія чиселъ могутъ остаться прежними и послѣ введенія числа z, какъ представителя отрѣзка, т. е. тѣ же, какія были установлены для раціональныхъ чиселъ: сложить или вычесть два числа значитъ найти число, выражающее соотвѣтственно сумму или разность отрѣзковъ (величинъ), представленныхъ данными числами. Поэтому выраженіе, напримѣръ, $z - \frac{x}{n}$ есть обозначеніе требованія найти число, служащее представителемъ разности отрѣзковъ, представленныхъ числами z и $\frac{x}{n}$: на ту же запись можно смотрѣть, какъ это обыкновенно дѣлается, и какъ на самый результатъ этой операціи, называемый разностью чиселъ z и $\frac{x}{n}$. Именно это опредѣленіе вычитанія мы разумѣли, когда говорили въ нашей замѣткѣ объ ирраціональныхъ числахъ въ № 521 «Вѣстника», что смыслъ разностей $z - \frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n} - z$ для учениковъ будетъ совершенно ясенъ. Отъ этихъ опредѣленій сложенія и вычитанія чиселъ можно, едва ли только необходимо для учениковъ V-го кл., при помощи понятій «больше» и «меньше», установленныхъ вышеуказаннымъ образомъ, перейти путемъ опять геометрическихъ соображеній къ тѣмъ опредѣленіямъ этихъ дѣйствій, которыя содержатъ указаніе на опредѣленный способъ ихъ производства: сложить $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ значитъ найти число, бо́льшее всѣхъ чиселъ вида

$$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{2}\ \text{съ недостаткомъ} + \left(\frac{1}{n_1}\right)\sqrt{3}\ \text{съ недостаткомъ}$$

и меньшее всѣхъ чиселъ вида

$$\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{2}\ \text{съ избыткомъ} + \left(\frac{1}{n_1}\right)\sqrt{3}\ \text{съ избыткомъ}$$

при перемѣнныхъ и неограниченно возрастающихъ n и n_1. Что же касается умноженія, то прежде всего надо показать, что и и ирраціональное число, въ данномъ случаѣ z, можетъ характеризовать опредѣленный способъ построенія величины изъ единицы измѣренія и что можетъ встрѣтиться надобность произвести подобную операцію и надъ всякой другой величиной. Первое обстоятельство выражается равенствами:

$$z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right)$$

а второе можетъ быть обнаружено слѣдующимъ образомъ. Когда мы устанавливали понятіе о z, какъ о представителѣ отрѣзка OM, то въ качествѣ единицы измѣренія мы брали произвольный отрѣзокъ (ab); слѣдовательно, вновь строя при помощи этого же отрѣзка (ab) прежніе два безконечныхъ ряда отрѣзковъ, ранѣе представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, совершенно такъ же, какъ мы это дѣлали и выше, за единицу измѣренія мы могли бы принять любой другой отрѣзокъ; при чемъ соотвѣтственно выбранному отрѣзку за единицу измѣренія отрѣзокъ (ab) представленъ былъ бы тѣмъ или другимъ числомъ N.

Такимъ образомъ, самая операція, выполненная нами выше надъ отрѣзкомъ (ab), повторилась бы цѣликомъ, и результатомъ ея явился бы тотъ же отрѣзокъ OM; но численные представители приближенныхъ значеній отрѣзка OM были бы другіе, — а именно, на мѣсто чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ соотвѣтственно стали бы числа вида: $N \cdot \frac{x}{n}$ и $N \cdot \frac{x+1}{n}$. Такимъ образомъ, указанному выше построенію отрѣзка OM соотвѣтствовало бы построеніе двухъ безконечныхъ рядовъ чиселъ вида $N \cdot \frac{x}{n}$ и $N \cdot \frac{x+1}{n}$ и нахожденіе ихъ предѣла. Та же операція, произведенная надъ вновь избранной единицей измѣренія, приведетъ насъ къ отрѣзку, представленному числомъ z. Такимъ образомъ, изъ отрѣзка N построенъ будетъ новый отрѣзокъ такъ, какъ отрѣзокъ z построенъ изъ единицы измѣренія. Требованію построить изъ отрѣзка (ab), представленнаго числомъ N, новый отрѣзокъ такъ, какъ строится изъ единицы измѣренія отрѣзокъ, представленный числомъ z, будетъ соотвѣтствовать требованіе построить изъ числа N новое число такъ, какъ число z построено изъ единицы. Требованіе произвести такую операцію надъ числомъ N и обозначаютъ такъ: $N. z$, т. е. говорятъ, что надо число N умножить на z. Тотъ же знакъ употребляютъ и для обозначенія самаго результата этой операціи. Такимъ образомъ, тотъ же отрѣзокъ OM, представителемъ котораго ранѣе служило число Z, теперь будетъ имѣть своимъ представителемъ число $N. z$. Этотъ отрѣзокъ будетъ больше всѣхъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $N \cdot \left(\frac{x}{n}\right)$, и меньше всѣхъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $N \left(\frac{x+1}{n}\right)$. Вмѣстѣ съ тѣмъ и число $N. z$ разсматривается, какъ большее всѣхъ чиселъ вида $N \cdot \left(\frac{x}{n}\right)$ и меньшее всѣхъ чиселъ вида $N \cdot \left(\frac{x+1}{n}\right)$. Въ частномъ случаѣ, когда $N = z$, т. е. въ качествѣ единицы измѣренія взятъ самый отрѣзокъ OM, мы получимъ неравенства: $z \cdot \frac{x}{n} < z . z < z \cdot \frac{x+1}{n}$, или $z \cdot \frac{x}{n} < z^2 < z \cdot \frac{x+1}{n}$. Но отрѣзки, представленные числами вида $z \cdot \frac{x}{n}$; будутъ больше отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n}$ или $\left(\frac{x}{n}\right)^2$; а отрѣзки, представленные числами вида $z \cdot \frac{x+1}{n}$, будутъ меньше отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x+1}{n} \cdot \frac{x+1}{n}$ или $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$. Такимъ образомъ будемъ имѣть неравенства: $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < z \cdot \frac{x}{n}$ и $z \cdot \frac{x+1}{n} < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, въ виду которыхъ число z^2, должно будетъ удовлетворять неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < z^2 < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

На основанiи этихъ неравенствъ, подобно тому, какъ это было сдѣлано нами по отношенiю къ теоремѣ 7 (№ 511, стр. 164), докажемъ, что

$$z^2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$$

но такъ какъ

$$A = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 \text{ (теор. 7 стр. 164, № 511)},$$

но

$$z^2 = A.$$

Итакъ, на основанiи указанныхъ выше соображенiй мы считаемъ возможнымъ для учениковъ V-го класса излагать лишь изложенную выше геометрическую теорiю иррацiональныхъ чиселъ и символизировать ее при помощи условныхъ знаковъ-чиселъ. Поступая такъ, мы думаемъ, что дѣйствуемъ въ духѣ школьной ариѳметики, ибо развѣ можно ариѳметику, преподаваемую въ средней школѣ до 5-го класса, считать построенной на чисто ариѳметическихъ основанiяхъ? Развѣ она не представляетъ собою лишь ариѳметики величинъ, символизованной числами?

Мы сомнѣвается, чтобы вообще въ предѣлахъ средней школы возможно было излагать ариѳметику, какъ совокупность операцiй по опредѣленнымъ формальнымъ законамъ надъ индивидуумами, свободно и независимо отъ какихъ бы то ни было конкретныхъ величинъ, созданными нашимъ духомъ. По нашему мнѣнiю, въ средней школѣ числа могутъ играть лишь роль символовъ конкретныхъ величинъ, если понимать эту роль въ смыслѣ той же роли, какую буквы играютъ по отношенiю къ числамъ. При такой точкѣ зрѣнiя, намъ кажется, что мы избѣгаемъ упрека, что попадаемъ въ кругъ, когда вслѣдъ за установленiемъ теоремы, что отрѣзокъ OM есть общiй предѣлъ представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ двухъ безконечныхъ рядовъ отрѣзковъ, пишемъ равенства:

$$z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right),$$

въ которыхъ z обозначаетъ отрѣзокъ OM.

Письмо въ редакцію.

Въ статьѣ «О биссектрисахъ треугольника» Е. С. Томашевича, напечатанной въ № 521 «Вѣстника», авторъ въ заключеніе говоритъ нѣсколько словъ по моему адресу. Присоединивъ сюда еще замѣчаніе изъ начала и середины статьи, я позволю себѣ раздѣлить ихъ на двѣ категоріи: 1) на замѣчанія дѣйствительно по моему адресу и 2) на замѣчанія по адресу моей статьи съ тѣмъ же названіемъ, напечатанной въ № 517 «Вѣстника».

Разсмотрю сначала замѣчанія первой категоріи,—ихъ два: 1) Е. С. Томашевичъ какъ бы упрекаетъ меня, что я ни слова не сказалъ въ своей статьѣ о его дополнительномъ сообщеніи въ Московскомъ Математическомъ Кружкѣ, которое онъ сдѣлалъ въ тотъ же день 12 марта 1910 г., въ который и я дѣлалъ сообщеніе по тому же вопросу. Я полагалъ, и теперь остаюсь при томъ же убѣжденіи, что я не имѣлъ права останавливаться въ своей статьѣ на сообщеніи Е. С. Томашевича: я долженъ былъ лишь упомянуть о его первомъ сообщеніи, которое явилось толчкомъ для моей работы по этому вопросу; я могъ бы коснуться болѣе подробно сообщенія Е. С. Томашевича лишь послѣ появленія его въ печати.

2) Въ концѣ своей статьи Е. С. Томашевичъ говоритъ: «Никто, конечно, не будетъ оспаривать доказательной силы пріемовъ, требующихъ теоремъ о вписанныхъ углахъ и площадяхъ, но какая нужда въ нихъ, если дѣло и безъ того достаточно просто». Этими словами Е. С. Томашевичъ какъ бы указываетъ на то, что моя работа по этому вопросу не стоила того времени и труда, которыя пожертвованы мною для ея осуществленія. Но дѣйствительно ли дѣло и безъ того достаточно просто? Для Е. С. Томашевича его методъ проще моего, ибо онъ свой методъ детальнѣе разобралъ и глубже продумалъ. Для меня по той же причинѣ проще мой методъ. Остается открытымъ вопросъ, какой методъ проще для третьяго лица; вѣроятно, здѣсь не будетъ единогласія: тотъ, кто привыкъ разбирать геометрическія вопросы въ формѣ теоремъ, подлежащихъ доказательству на основаніи предыдущихъ теоремъ, предпочтетъ методъ Е. С. Томашевича, но тотъ, кто привыкъ разбирать геометрическіе вопросы такъ, чтобы ихъ рѣшеніе сдѣлалось яснымъ для представленія изъ построеній, предпочтетъ мой методъ. Поэтому, а также и потому еще, что я глубоко убѣжденъ въ полезности и необходимости разнообразныхъ методовъ для изученія какого-либо вопроса, я полагаю, что Е. С. Томашевичъ не былъ вправѣ поставить вопросъ: «какая нужда въ нихъ?».

Замѣчаній по адресу моей статьи имѣется также два: 1) Въ серединѣ статьи указано, что мое доказательство того, что треугольникъ не можетъ быть равнобедреннымъ при существованіи у него двухъ внѣшнихъ разносторонних биссектрисъ «страдаетъ излишнею растянутостью и содержитъ неиспользованное условіе (внѣшнія биссектрисы равны)». Я готовъ признать, что доказательство Е. С. Томашевича изящнѣе, но я не вижу растянутости въ своемъ доказательствѣ и протестую противъ замѣчанія, что оно содержитъ неиспользованное условіе: вѣдь именно я и указываю на то, что равенства биссектрисъ здѣсь не нужно, и въ окончательной формѣ даю теорему: «если биссектрисы внѣшнихъ угловъ треугольника расположены по разныя стороны основанія, то треугольникъ не равнобедренный».

2) Въ концѣ своей статьи Е. С. Томашевичъ не соглашается, что мой методъ болѣе естественный.

Я все-таки продолжаю оставаться при своемъ мнѣніи. Въ самомъ дѣлѣ, возьму лишь часть своей статьи, которая рѣшаетъ вопросъ, у какого изъ двухъ внутреннихъ угловъ треугольника биссектриса больше, — этому вопросу, главнымъ образомъ, и посвящена статья Е. С. Томашевича: разъ дано, что одинъ уголъ треугольника больше другого, и надо узнать, биссектриса котораго изъ этихъ угловъ больше, то естественно привести ихъ въ такое положеніе, чтобы данные углы были наложены одинъ на другой и чтобы ихъ биссектрисы пошли одна по другой, — тогда останется разсмотрѣть, какъ расположатся другіе концы этихъ биссектрисъ (одни концы совпадаютъ въ общей вершинѣ наложенныхъ угловъ). Въ другихъ частяхъ статьи я поступаю такъ же: дано, напримѣръ, равенство биссектрисъ; я располагаю фигуры такъ, чтобы равныя биссектрисы совпали. Я даже рѣшаюсь высказать пожеланіе, чтобы весь курсъ геометріи излагался по возможности не при помощи ссылокъ на предыдущія теоремы, а построеніемъ требуемыхъ фигуръ въ такомъ расположеніи, чтобы сразу становилось яснымъ равенство или неравенство сравниваемыхъ отрѣзковъ, угловъ, площадей или объемовъ. Нѣмецкіе курсы элементарной геометріи приближаются къ этому направленію, да и самъ Е. С. Томашевичъ пользуется этимъ же методомъ на стр. 127 при выводѣ своего перваго вспомогательнаго предложенія. Замѣчаніе Е. С. Томашевича «ужъ одно то обстоятельство, что чертежей много и что въ нихъ не такъ-то легко разобраться (двойное (?) переворачиваніе треугольника!), позволяетъ усомниться въ большей естественности предложенныхъ въ № 517 „Вѣстника“ пріемовъ» фактически не вѣрно: та часть моей статьи, которая посвящена вопросу, какая изъ биссектрисъ двухъ неравныхъ угловъ треугольника больше, снабжена тремя чертежами (9, 10 и 11); соотвѣтствующая часть статьи Е. С. Томашевича—также тремя чертежами (5, 6 и 7); при этомъ чертежъ 9-й является у меня лишь вспомогательнымъ, а чертежи 10-й и 11-й, въ сущности, представляютъ одно и то же, между тѣмъ какъ у Е. С. Томашевича всѣ три чертежа существенно важны. Можно возразить, что зато у Е. С. Томашевича рѣшены вопросы о соотношеніяхъ между биссектрисами внѣшнихъ угловъ, а въ моей статьѣ этого нѣтъ, но оказывается — это изложено въ слѣдующемъ за настоящимъ письмомъ дополненіи къ моей статьѣ, — что тѣ же чертежи 10-й и 11-й моей статьи могутъ служить и для выясненія опущенныхъ въ моей статьѣ вопросовъ о биссектрисахъ внѣшнихъ угловъ.

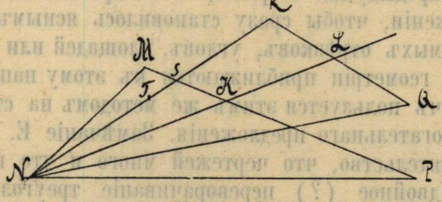
Процессъ переворачиванія треугольника (я не вижу здѣсь двойного переворачиванія) вовсе не такъ уже сложенъ,— имъ, напримѣръ, часто пользуются для выясненія равенства угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, — чтобы для пользованія имъ трѣбовалась какая-либо особо развитая способность геометрическаго представленія. Наконецъ, чертежи 6-й и особенно 5-й статьи Е. С. Томашевича несомнѣнно сложнѣе моихъ: на чертежѣ 5-мъ построено черезчуръ много вспомогательныхъ прямыхъ и черезчуръ много разсматривается угловъ. Если бы я къ понятію о простотѣ рѣшенія вопроса относился съ такою же легкостью, какъ это дѣлаетъ Е. С. Томашевичъ (мое отношеніе выяснено выше), то я могъ бы съ такимъ же правомъ, какъ и Е. С. Томашевичъ, сказать аналогично заключительнымъ словамъ Е. С. Томашевича: какая нужда въ разсмотрѣніи этой массы отрѣзковъ и угловъ, если дѣло и безъ того достаточно просто.

Н. Извольскій.

Еще о биссектрисахъ треугольника*).

Н. Извольскаго.

Разсмотримъ еще соотношенія между биссектрисами внѣшнихъ угловъ треугольника. Пусть, по прежнему, $\angle B = 2\alpha$ больше угла $C = 2\beta$ (черт. 9 или 11) и, согласно построенію, $\angle MNP = \angle Q = 2\alpha$ и $\angle RNQ = \angle P = 2\beta$ (черт. 10) или $\angle RBQ = \angle C = 2\beta$ и $\angle Q = \angle ABC = 2\alpha$ (черт. 11).



Черт. 10.

Биссектрисы разсматриваемыхъ внѣшнихъ угловъ располагаются по прямой, проходящей черезъ точку N (черт. 10) или черезъ точку B (черт. 11) и перпендикулярной къ NL (черт. 10) или къ BL (черт. 11).

Легко получаемъ:

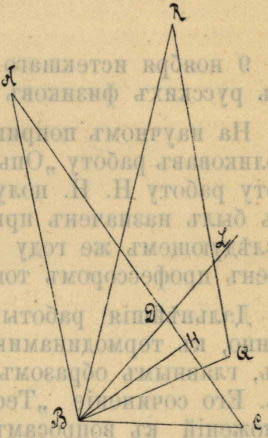
1) $\angle PKL$ (черт. 10) или $\angle CDL$ (черт. 11) $= 2\beta + \alpha$.

2) $\angle KLQ$ (черт. 10) или $\angle DLQ$ (черт. 11) $= 180^0 - (2\alpha + \beta)$, откуда видимъ, что сумма этихъ двухъ угловъ $= 180^0 + \beta - \alpha$ и она $< 180^0$, ибо $\beta < \alpha$ ($\angle C < \angle B$), т. е. прямыя MP и RQ (черт. 10) или AC и RQ (черт. 11) сходятся по направленіямъ

*) Дополненіе къ статьѣ, напечатанной въ № 517 „Вѣстника“.

KP и LQ (черт. 10) или DC и LQ (черт. 11) и расходятся по направленіямъ KM и LR (черт. 10) или DA и LR (черт. 11). Если стороны PM и QR (черт. 10) пересѣкаютъ перпендикуляръ изъ точки N къ прямой NL (можетъ быть, для ясности полезно дополнить чертежъ этимъ перпендикуляромъ), по которому располагаются биссектрисы внѣшнихъ угловъ, по послѣднимъ направленіямъ (т. е. по направленіямъ KM и LR), то изъ факта расхожденія этихъ направленій ясно, что точка пересѣченія прямой LR съ нашимъ перпендикуляромъ дальше удалена отъ точки N, чѣмъ точка пересѣченія прямой KM съ тѣмъ же перпендикуляромъ. Замѣтивъ, что внѣшній уголъ при N треугольника RNQ больше внѣшняго угла $\triangle MNP$, имѣемъ:

Если биссектрисы двухъ внѣшнихъ угловъ треугольника расположены по ту же сторону отъ основанія, какъ и его вершина, то биссектриса большаго изъ этихъ внѣшнихъ угловъ больше биссектрисы меньшаго.



Черт. 11.

Если стороны AC и RQ (черт. 11) пересѣкаются съ перпендикуляромъ, по которому располагаются биссектрисы внѣшнихъ угловъ, по направленіямъ DC и LQ, то можно убѣдиться, что DC и QL пересѣкаются въ какой-то точкѣ X, не доходя до этого перпендикуляра. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ C и Q, получимъ $\triangle XCQ$, у котораго $\angle X = \angle RLD - \angle LDC$ (разбираемъ случай, когда X лежитъ за точкою C; случай же, когда X лежитъ между D и C, ясенъ), или $\angle X = (2\alpha + \beta) - (\alpha + 2\beta) = \alpha - \beta = \angle QBC$. Мы знаемъ изъ вспомогательнаго чертежа 8-го, что на основаніи CQ нельзя построить такого треугольника CQX, чтобы его уголъ при вершинѣ былъ равенъ углу при вершинѣ B равнобедреннаго треугольника QBC ($BQ = BC$), имѣющаго то же основаніе CQ, и чтобы каждая изъ боковыхъ сторонъ $\triangle CQX$ была больше каждой изъ равныхъ сторонъ равнобедреннаго $\triangle QBC$. Изъ чертежа 3-го мы имѣли: $CD > BC$ и $BE > BC$. Поэтому точка X не можетъ лежать на перпендикулярѣ къ BL, по которому расположены наши биссектрисы: тогда отрѣзокъ XC былъ бы $> BC$ и отрѣзокъ XQ былъ бы $> BQ$, и тѣмъ болѣе не можетъ лежать за этимъ перпендикуляромъ. Слѣдовательно, прямыя LQ и DC пересѣкаются гдѣ-то, не доходя до нашего перпендикуляра, откуда слѣдуетъ, что отрѣзокъ этого перпендикуляра отъ B до встрѣчи съ прямою RQ меньше его отрѣзка отъ B до встрѣчи съ прямою AC. Замѣтивъ, что внѣшній уголъ при вершинѣ B треугольника RBQ больше внѣшняго угла треугольника ABC, получаемъ:

Если биссектрисы двухъ внѣшнихъ угловъ треугольника располагаются отъ его основанія по иную сторону, чѣмъ его площадь (его вершина), то биссектриса большаго внѣшняго угла меньше биссектрисы меньшаго изъ этихъ угловъ.

НЕКРОЛОГЪ.

† Николай Николаевичъ Шиллеръ.

9 ноября истекшаго года скончался одинъ изъ наиболѣе извѣстныхъ русскихъ физиковъ Николай Николаевичъ Шиллеръ.

На научномъ поприщѣ Н. Н. Шиллеръ выступилъ въ 1875 г., опубликовавъ работу „Опытное изслѣдованіе электрическихъ колебаній“. За эту работу Н. Н. получилъ степень магистра физики и вмѣстѣ съ тѣмъ былъ назначенъ приватъ-доцентомъ университета Св. Владиміра; въ слѣдующемъ же году Н. Н. получилъ степень доктора и былъ назначенъ профессоромъ того же университета.

Дальнѣйшія работы проф. Шиллера относились, преимущественно, къ термодинамикѣ. По своему направленію Н. Н. Шиллеръ былъ, главнымъ образомъ, теоретикъ — и какъ ученый и какъ профессоръ. Его сочиненіе „Теорія потенціальной функціи и обозрѣніе ея приложеній къ вопросамъ физики“ представляетъ собой врядъ ли не единственное на русскомъ языкѣ строго математическое изложеніе классической теоріи электричества.

Назначеніе проф. Шиллера директоромъ Харьковскаго Технологическаго Института (1903 г.), а затѣмъ членомъ Совѣта Министра Народнаго Просвѣщенія отвлекло Н. Н. отъ научной работы.

РЕЦЕНЗІИ.

К. Н. Рашевскій. *Краткій курсъ геометріи.* Руководство для городскихъ по Положенію 1872 г. училищъ, женскихъ гимназій, институтовъ и др. учебныхъ заведеній. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1910. Ц. 50 к.

Первое непріятное впечатлѣніе отъ разсматриваемаго учебника получается отъ замѣчанія, напечатаннаго крупнымъ шрифтомъ на послѣдней (127) страницѣ: „настоящій учебникъ составленъ по программѣ городскихъ по Положенію 1872 г. училищъ“. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь по этой программѣ составлено уже много учебниковъ (Э. Вулихъ, Г. Юревичъ, И. Шафровъ и др.), — не пора ли въ 1910 году обратить вниманіе на все чаще и чаще появляющіяся въ нашей учебной литературѣ указанія на неудовлетворительную постановку дѣла обученія геометріи: на неудовлетворительность программъ этого курса и на неудовлетворительность учебниковъ геометріи? Пора, по моему убѣжденію, подумать о томъ, какъ измѣнить постановку дѣла обученія геометріи и, если у кого-либо выработается новый планъ, изложить его въ видѣ курса. Слѣдуетъ не поддѣлываться подъ старинныя программы, а слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы старыя программы передѣлывались подъ вліяніемъ новыхъ мыслей авторовъ учебниковъ, созданныхъ по новому плану.

Планъ и изложеніе учебника г. Рашевскаго не представляетъ чего-либо новаго и содержитъ тѣ же нелѣпости, которыя, варьируясь, встрѣчаются во всѣхъ, за очень малыми исключеніями, руководствахъ (и краткихъ и систематическихъ) геометріи. Вотъ нѣкоторыя изъ этихъ нелѣпостей, заимствованныя изъ курса г. Рашевскаго.

1) На стр. 11 читаемъ: „часть пространства, занимаемая физическимъ тѣломъ, называется его объемомъ или геометрическимъ тѣломъ“. Слѣдовательно, заключаемъ мы, понятія „геометрическое тѣло“ и „объемъ физическаго тѣла“ тождественны. Что же въ такомъ случаѣ понимать подъ именемъ: объемъ геометрическаго тѣла? Авторъ объ этомъ умалчиваетъ, а между тѣмъ глава V посвящена вопросу объ измѣреніи объемовъ и въ началѣ ея читаемъ „измѣрить объемъ тѣла . . .“. Объ измѣреніи объемовъ какихъ же тѣлъ здѣсь идетъ рѣчь? Неужели физическихъ? (Кстати замѣтимъ, что то же недоразумѣніе возникаетъ и при просмотрѣ другого, болѣе подробнаго учебника того же автора: „Элементарная геометрія“, курсъ среднихъ учебныхъ заведеній).

2) На стр. 14 читаемъ: „Аксіома V . . . 2°. Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками“.

Въ предисловіи къ своему другому, указанному выше, учебнику геометріи, болѣе подробному, чѣмъ разбираемый здѣсь, г. Рашевскій говоритъ: „Руководствуясь педагогическими соображеніями, мы не доказываемъ, а принимаемъ за аксіому, что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками“. Мы очень привыкли къ этой фразѣ „прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками“, — она встрѣчается во многихъ учебникахъ какъ русскихъ, такъ и иностранныхъ [напримѣръ, въ надѣлавшемъ много шуму учебникѣ Э. Бореля (E. Borel)], а между тѣмъ въ этой формѣ эта фраза не имѣетъ смысла: мы говоримъ „кратчайшее разстояніе“, — слѣдовательно, имѣются и не кратчайшія разстоянія, а между тѣмъ, если я говорю объ разстояніи, напримѣръ, земли отъ солнца, то не можетъ быть сомнѣнія, о чемъ идетъ рѣчь: существуетъ лишь одно разстояніе между землею и солнцемъ, и путь отъ земли, напримѣръ, черезъ Сиріусъ къ солнцу мы откажемся назвать именемъ разстоянія земли отъ солнца. Слѣдовательно, въ указанной фразѣ обнаруживается смѣшеніе понятій „разстояніе“ и „путь“. Замѣтимъ, что послѣднее понятіе „путь“ не геометрическое и вводить его въ курсъ геометріи можно лишь мимоходомъ.

3) На стр. 37 и 38 имѣемъ: Прямая теорема: перпендикуляръ короче всякой наклонной. Обратная теорема: кратчайшее разстояніе точки отъ прямой есть перпендикуляръ. Эта курьезная обратная теорема встрѣчается почти во всѣхъ русскихъ учебникахъ (Кисилевъ, Давыдовъ, Рашевскій — курсъ среднихъ учебныхъ заведеній и др.). Попробовалъ ли авторъ написать условіе и заключеніе прямой теоремы и составить затѣмъ обратную. Напримѣръ, дана прямая MN и точка A внѣ ея. Въ прямой теоремѣ имѣемъ условіе: 1) $AB \perp MN$ и 2) AC есть наклонная къ MN; заключеніе: $AB < AC$. Составляемъ обратную, для чего беремъ заключеніе вмѣсто одного изъ условій. Дано: 1) $AB < AC$, 2) AC есть наклонная къ MN. Заключеніе? Если же составить обратную теорему въ такой формѣ: Дано 1) $AB < AC$ и 2) $AB \perp MN$; заключеніе: AC наклонная къ MN, то вѣдь уже извѣстно (и этимъ пользуются для доказательства прямой теоремы), что изъ точки на прямую нельзя опустить двухъ перпендикуляровъ.

Справедливость требуетъ, чтобы было указано одно замѣченное мною улучшеніе въ краткомъ курсѣ геометріи г. Рашевскаго, сравнительно съ его же болѣе подробнымъ курсомъ: выпущена не имѣющая смысла знаменитая обратная теорема „если сумма двухъ прилежащихъ угловъ DBC и CBA равна двумъ прямымъ, то ихъ внѣшнія стороны DB и BA образуютъ прямую линію; слѣдовательно, эти прилежащіе углы будутъ смежные" (К. Н. Рашевскій, „Элементарная геометрія", стр. 14). Интересно замѣтить, что одинъ изъ рецензентовъ (въ журналѣ „Русская Школа") былъ въ восхищеніи отъ формы, въ которой изложена эта теорема: онъ не подмѣтилъ, что подъ этою красивою внѣшнею формою скрывается отсутствіе всякого содержанія.

Отмѣтимъ еще мелкія погрѣшности:

1) На стр. 74 имѣемъ: число 3,14 называется отношеніемъ окружности къ діаметру и обозначается греческою буквою π (пи).

Если учитель не обратитъ на это вниманіе, то ученикъ городского училища или ученица женской гимназіи такъ и останутся при убѣжденіи, что $\pi = 3{,}14$.

2) На стр. 77. „Можетъ случиться, что основаніе и высота прямоугольника несоизмѣримы, т. е. никакая часть основанія не содержится въ высотѣ цѣлое число разъ. Площадь такого прямоугольника можно опредѣлить только приближенно".

Это, конечно, сплошное недоразумѣніе, зависящее отъ того, что авторъ не уяснилъ, какою единицею онъ хочетъ измѣрять площадь прямоугольника. Вотъ примѣръ, противорѣчащій словамъ учебника: основаніе равняется $\sqrt[4]{8}$, высота равняется $\sqrt[4]{2}$ какихъ-либо линейныхъ единицъ (такой прямоугольникъ возможно даже построить); площадь его равна 2 соотвѣтствующимъ квадратнымъ единицамъ.

Этихъ замѣчаній достаточно. Разсматриваемый учебникъ, впрочемъ, не хуже другихъ ходовыхъ какъ краткихъ, такъ и полныхъ учебниковъ: вѣдь и во всѣхъ ихъ повторяются тѣ же нелѣпости иногда лишь въ нѣсколько иныхъ варіантахъ, болѣе трудныхъ для распутыванія.

Еще разъ возникаетъ вопросъ, слѣдуетъ ли писать учебникъ, если не имѣешь сказать ничего новаго?

Н. Извольскій.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей привать-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 366 (5 сер.). Доказать справедливость тожества

$$9c^2 - 4(m_a^2 + m_b^2) = 4\sqrt{4m_a^2 m_b^2 - 9s^2},$$

гдѣ a, b, c, m_a, m_b, s суть соотвѣтственно стороны, медіаны, проведенныя соотвѣтственно къ серединамъ сторонъ a и b, и площадь нѣкотораго треугольника.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 367 (5 сер.) Построить треугольникъ ABC, зная положеніе его центра тяжести G и положеніе срединъ прямыхъ, соединяющихъ средины паръ сторонъ AB и AC, AC и BC.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 368 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$a^n b^n (x^{2n} + y^{2n}) - x^n y^n (a^{2n} + b^{2n}) = 0,$$

гдѣ a и b суть данныя цѣлыя числа, а n — данное вещественное число.

Е. Рѣзницкій (ст. Михайлово).

№ 369 (5 сер.). Рѣшить ураненіе

$$x^3 + ax^2 + bx + \frac{9ab - 2a^3}{27} = 0.$$

Б. Двойринъ (Одесса).

№ 370 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$2x^2 - 3y = 23,$$

$$3y^2 - 8x = 59.$$

Р. Витвинскій (Николаевъ).

№ 371 (5 сер.). Доказать, что при всякомъ цѣломъ значеніи n число

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26)$$

кратно 120.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 248 (5 сер.). *Доказать справедливость тожества*

$$\frac{a^2b^2c^2}{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)} = \frac{4Rs^2}{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a},$$

гдѣ a, b, c — *стороны,* s — *площадь,* R, r, r_a, r_b, r_c — *радіусы описаннаго, вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.*

Съ помощью формулъ

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c};\quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad R = \frac{abc}{4s}$$

находимъ:

$$r_a+r_b=\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}=\frac{s(2p-a-b)}{(p-a)(p-b)}=\frac{cs}{(p-a)(p-b)}.$$

Такъ же получимъ:

$$r_b+r_c=\frac{as}{(p-b)(p-c)},\quad r_c+r_a=\frac{bs}{(p-a)(p-c)}.$$

Поэтому

$$(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)=\frac{abcs^3}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}=\frac{abcs^3}{\left(\frac{s^4}{p^2}\right)}=\frac{abcp^2}{s},$$

откуда

$$\frac{a^2b^2c^2}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}=a^2b^2c^2:\frac{abcp^2}{s}=\frac{abcs}{p^2}. \qquad (1)$$

Изъ равенствъ

$$\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{s},\quad \frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{s},\quad \frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{s}$$

находимъ

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}{r_ar_br_c}=\frac{p-a+p-b+p-c}{s}=\frac{p}{s},$$

откуда

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=\frac{p}{s}\cdot r_ar_br_c=\frac{p}{s}\cdot\frac{s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=p\cdot\frac{s^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p\cdot p=p^2.$$

Значитъ,

$$\frac{4Rs^2}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}=4\cdot\frac{abc}{4s}\cdot\frac{s^2}{p^2}=\frac{abcs}{p^2}. \qquad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$\frac{a^2b^2c^2}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}=\frac{4Rs^2}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль); *В. Моргулевъ* (Одесса); *И. Чижевскій* (Александрія); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *М. Марголинъ* (Одесса); *А. Доминкевичъ* (Лодзь); *С. Розенблатъ* (Балта); *И. Лурье* (Смоленскъ); *А. Фельдманъ* (Одесса); *С. Слугиновъ* (Казань); *Г. Варкентинъ* (Бердянскъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Доброгаевъ* (Тульчинъ); *N. N.*; *Р. Витвинскій* (Одесса).

№ 249 (5 сер.). *Кусокъ папки имѣетъ видъ выпуклаго многоугольника, описаннаго около круга даннаго радіуса* r. *Внутри этого многоугольника строятъ другой многоугольникъ, стороны котораго параллельны соотвѣтственно сторонамъ перваго многоугольника и удалены отъ нихъ на одно и то же разстояніе. Изъ каждой вершины второго многоугольника опускаютъ перпендикуляры на тѣ двѣ стороны перваго, которыя соотвѣтственно параллельны сторонамъ, сходящимся во взятой вершинѣ, и вырѣзываютъ четырехугольники, составленные этими перпендикулярами и сторонами, на которыя они опущены. Изъ оставшейся папки (сгибая по сторонамъ внутренняго многоугольника) склеиваютъ коробку. При какомъ разстояніи между соотвѣтственно параллельными сторонами обоихъ многоугольниковъ объемъ коробки будетъ наибольшій?*

Обозначимъ послѣдовательныя вершины даннаго многоугольника черезъ $A, B, C \ldots, G$, а соотвѣтствующія вершины внутренняго многоугольника черезъ $a, b, c, \ldots, g$. Разсмотримъ двѣ соотвѣтственно параллельныхъ стороны AB и ab даннаго и искомаго многоугольника, при чемъ обозначимъ центръ даннаго круга черезъ O, перпендикуляры, опущенные изъ точки b на прямыя AB и BC,— черезъ bM и bN, точку касанія съ окружностью даннаго круга стороны AB — черезъ T, точку встрѣчи прямыхъ ab и OT — черезъ t. По условію $bM = bN = x$, гдѣ x — искомое разстояніе между соотвѣтственно параллельными сторонами обоихъ многоугольниковъ; значитъ, точка b, находясь въ равныхъ разстояніяхъ отъ сторонъ угла ABC, лежитъ на его биссектрисѣ, а потому прямая Bb, какъ биссектриса описаннаго угла, проходитъ черезъ центръ O даннаго круга. Точно такъ же находимъ, что и прямая Aa проходитъ черезъ центръ O. Слѣдовательно, треугольникъ aOb, отсѣкаемый отъ треугольника AOB прямой ab, параллельной сторонѣ AB, подобенъ треугольнику AOB, и аналогичнымъ путемъ мы убѣждаемся въ подобіи паръ треугольниковъ bOc и BOC, cOd и COD, ..., gOa и GOA. Многоугольники $ABC \ldots G$ и $abc \ldots g$, распадаясь на одинаковое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ, подобны, а потому, называя площади даннаго и искомаго многоугольника соотвѣтственно черезъ Q и q, имѣемъ:

$$\frac{q}{Q} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{Ot}^2}{\overline{OT}^2} = \frac{(OT - tT)^2}{\overline{OT}^2} = \frac{(OT - bM)^2}{\overline{OT}^2} = \frac{(r-x)^2}{r^2},$$

откуда

$$q = \frac{Q\,(r-x)^2}{r^2}.$$

Такимъ образомъ, объемъ V склеенной изъ многоугольника коробки выражается формулой:

$$V = q \,.\, bM = \frac{Q}{r^2} \cdot (r-x)^2 x = \frac{Q}{2r^2}\;\; 2x\,(r-x)\,(r-x).$$

Такъ какъ множитель $\frac{Q}{2r^2}$ есть величина постоянная и такъ какъ сумма трехъ остальныхъ множителей $2x$, $r - x$ и $r - x$ приводится къ постоянной величинѣ $2r$, то V достигаетъ, по извѣстной теоремѣ, maximum'a при условіи равенства трехъ перемѣнныхъ множителей $2x$, $r - x$ и $r - x$, т. е. при наличности уравненія $2x = r - x$, откуда $x = \frac{r}{3}$. Итакъ, искомое разстояніе между сторонами даннаго и внутренняго многоугольника равно трети радіуса даннаго круга.

Л. Богдановичъ (Ярославль); *И. Чижевскій* (Александрія); *Б. Двойринъ* (Одесса); *К. Бергманъ* (Митава); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ); *Р. Витвинскій* (Одесса).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Воздухоплаваніе въ 4-хъ томахъ. Томъ I. **М. Л. Франкъ**, инж.-мех. *Исторія воздухоплаванія и его современное состояніе.* Съ 165 рисунками въ текстѣ, съ приложеніемъ портрета и таблицы историческихъ управляемыхъ аэростатовъ. Стр. 216. Ц. 2 р. 25 к. Томъ II. Ч. 3. **М. В. Заустинскій**, преподаватель Инст. Инж. Пут. Сообщ. *Воздухоплавательные двигатели.* Съ 366 рисунками и чертежами въ текстѣ. Стр. 159. Ц. 1 р. 50 к. Издательство „Воздухоплаваніе". С.-Петербургъ, 1910. Цѣна полнаго изданія (12 выпусковъ) по подпискѣ 16 руб.

А. Родныхъ. *Удивительно простое рѣшеніе знаменитой задачи Фермата.* (Математическій софизмъ). С.-Петербургъ, 1911. Стр. 6. Ц. 5 к.

Д. Е. Любченко. *Геометрическое черченіе.* Альбомъ чертежей. Курсъ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній въ 2 частяхъ. Часть I. Изд. т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1911. Таблицъ 43. Ц. 1 руб.

Отчетъ о дѣятельности Студенческаго Математическаго Кружка при СПБ. Университетѣ за 1909 г.

М. Гефтеръ, инж. *Что нужно знать абонентамъ электрическаго освѣщенія.* Справочникъ въ общедоступномъ изложеніи. Складъ изданія у автора и т-ва М. О. Вольфъ. СПБ., 1910. Стр. 69. Ц. 45 к.

Луи Бурдо. Вопросъ о смерти и его различные рѣшенія. Перевелъ съ 3-го французскаго изданія Е. Предтеченскій. С.-Петербургъ, 1911.

ПОПРАВКИ.

1. Въ №№ 517 и 518 задачи, предлагаемыя для рѣшенія, имѣютъ одни и тѣ же номера (№№ 312—317). При печатаніи рѣшеній задачъ мы будемъ присоединять къ номерамъ задачъ № 518-го букву *а* (№№ 312*а* — 317*а*).

2. Въ № 521 въ статьѣ „Основы безпроволочной телеграфіи"

	Напечатано:	Должно быть:
Стр. 121, стр. 12 снизу:	см. рис. 1, стр. 118.	см. рис. 3, стр. 121.
„ 122, „ 11 сверху:	на рис. 3.	на рис. 1.

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Вѣстникъ Опытной Физики

— И —

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

ИЗДАВАЕМЫЙ

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Привать-Доцента В. Ф. КАГАНА.

СОРОКЪ ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 517—528.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печатнаго Дѣла.
(Пушкинская ул., соб. д., № 18).
1910.

СОДЕРЖАНІЕ

„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"

ЗА СОРОКЪ ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТРЪ.

№№ 517—528.

Статьи, отмѣченныя звѣздочкой, имѣются въ отдѣльныхъ изданіяхъ.

Статьи.

Стр.

Сообщенія.

Опыты и приборы.

Научная хроника.

Рецензіи.

Письма въ редакцію.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

Стр.

Поправки.

Тема для учащихся.

Тема для сотрудниковъ.

Задачи.

Пятой серіи.

Рѣшенія задачъ.

Пятой серіи.

№ 233	въ №	519	стр. 79	№ 240	въ №	524	стр. 213
„ 234	„ „	520	„ 102	„ 242	„ „	525	„ 247
„ 235	„ „	522	„ 160	„ 243	„ „	526—527	„ 292
„ 236	„ „	520	„ 104	„ 244	„ „	526—527	„ 293
„ 237	„ „	526—527	291	„ 247	„ „	526—527	„ 294
„ 238	„ „	519	„ 79	„ 248	„ „	528	„ 317
„ 239	„ „	519	„ 80	„ 249	„ „	528	„ 319

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА на 1911 годъ (XXXI годъ изданія)

НА ДВУХНЕДѢЛЬНЫЙ ЖУРНАЛЪ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.

Органъ VI Отдѣла Императорскаго Русскаго Техническаго О-ва.
Органъ Всероссійскихъ Электротехническихъ Съѣздовъ.
Органъ Общества Электротехниковъ въ Москвѣ.

Журналъ „Электричество“ издается VI (Электротехническимъ) Отдѣломъ Императорскаго Русскаго Техническаго Общества съ цѣлью распространенія свѣдѣній о современ. состояніи ученія объ электрическ., энергіи и о ея приложен. къ потребност. жизни, техники и промышл.

Журн. редактируется особымъ редакц. комитет., избраннымъ VI Отдѣломъ.

ВЪ ЖУРНАЛѢ УЧАСТВУЮТЪ:

Инж.-эл. Е. О. Бакстъ, инж. Н. Н. Вашковъ, проф. А. В. Вульфъ, инж.-эл. Б. П. Вьюшковъ, проф. Техн. Инст. А. А. Вороновъ, проф. П. Д. Войнаровскій, преп. Техн. Инст. Н. Н. Георгіевскій, инж.-эл. С. Д. Гефтеръ, инж. пут. сообщ. Г. О. Графтіо, инж. Л. Г. Гуревичъ, инж. П. П. Дмитренко, инж. Л. В. Дрейеръ, инж. п. с. Г. Д. Дубелиръ, проф. Н. Г. Егоровъ, инж. К. П. Канѣвецъ, инж.-техн. В. Д. Кирпичниковъ, инж. А. Г. Коганъ, инж. Н. Н. Константиновъ, инж. П. А. Ковалевъ, проф. Эл.-техн. Инст. А. А. Кузнецовъ, старш. инсп. Главн. Палаты мѣръ и вѣсовъ И. А. Лебедевъ, проф. В. К. Лебединскій, инж. Р. Р. Ліандеръ, инж. П. П. Лызловъ, инж. Д. М. Майзель, С. О. Майзель, инж.-техн. Т. Ф. Макарьевъ, проф. В. Ф. Миткевичъ, инж.-эл. А. Л. Оренбахъ, инж. І. Т. Павлицкій, инж. Б. Петерсъ, инж. С. Пинскеръ, преп. Моск. инж. учил. инж.-эл. М. К. Поливановъ, преп. Техн. Инст. Б. Л. Розингъ, инж. Н. М. Сокольскій, Д. М. Сокольцовъ, инж. П. А. Суткевичъ, инж.-мех. Н. И. Сушкинъ, инж.-техн. Э. Р. Ульманъ, инж.-техн. М. В. Фридлендеръ, инж. Ф. И. Холуяновъ, инж. А. А. Чернышевъ, инж. Г. Н. Шароевъ, проф. М. А. Шателенъ, инж. К. К. Шмидтъ (Берлинъ), инж. Е. Я. Шульгинъ и др.

Съ 1-го января 1910 г. (за исключ. лѣтн. мѣсяц.)

журналъ выходитъ 2 раза въ мѣсяцъ — всего 20 №№ въ годъ.

ОБЪЕМЪ ЖУРНАЛА ЗНАЧИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕНЪ.

Къ журналу прилагается „Сборникъ докладовъ“, прочитанныхъ на VI-мъ Всероссійскомъ Электротехническомъ Съѣздѣ.

Подписка принимается въ Редакціи, въ Техническомъ Обществѣ **(Пантелеймоновская, 2)** и во всѣхъ книжныхъ магазинахъ.

Подписная цѣна на годовой экземпляръ съ доставкой и пересылкой внутри Россіи 8 руб., за полгода—5 руб. за границу 12 р. При перемѣнѣ адреса необходимо указать № бандероли и уплат. 50 к.

ОТДѢЛЬНЫЕ НОМЕРА ПРОДАЮТСЯ ВЪ РЕДАКЦІИ ПО 60 К.

РАЗСРОЧКА допускается лишь по взаимному соглашенію съ редакціею.

СТУДЕНТАМЪ высш. технич. учебн. завед. журн. высыл. за 4 р. въ годъ.

Журналъ и его изданія по электротехникѣ на Всерос. Художеств.-Пром. выставкѣ 1896 г. въ Нижнемъ Новгородѣ удостоены высшей награды—диплома перв. разряда.

Журналъ „Электричество“ рекомендованъ Учебн. Комитет. Министерства Народнаго Просвѣщенія для фундаментальн. библіотекъ мужскихъ гимназій и реальн. училищъ.

Въ редакціи продаются изданія журн. „Электричество“.

Редакція открыта для личныхъ переговоровъ по средамъ и субботамъ отъ 5 до $7^1/_2$ ч. веч.

Адресъ редакціи: С.-Петербургъ, 7-я Рождественская, № 4, кв. 12. Телеф. 37-65.