№ 511.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,

издаваемый

В. А. ГЕРНЕТОМЪ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. КАГАНА.

XLIII-го Семестра № 7-й.

ОДЕССА.

Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.

1910.

XLIII Сем. № 7

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 511.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

Установленіе понятія объ ирраціональныхъ числахъ, представляемыхъ подъ видомъ радикаловъ, для учениковъ V класса реальныхъ училищъ.

Е. И. Смирнова.

Дѣйствующія въ настоящее время программы по математикѣ въ реальныхъ училищахъ относятъ къ курсу пятаго класса этихъ училищъ установленія понятія объ ирраціональныхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними. Вполнѣ законченная теорія ирраціональныхъ чиселъ въ этомъ классѣ, по нашему мнѣнію, предложена быть не можетъ; намъ кажется, однако, что въ слѣдующей формѣ она вполнѣ доступна силамъ учениковъ V-го класса.

Установленіе понятія объ ирраціональныхъ числахъ необходимо должно опираться на понятіе о предѣлѣ. Съ этимъ понятіемъ ученики 5-го класса встрѣтятся и въ геометріи, а потому оно предварительно должно быть установлено. Установивъ это понятіе, можно приступить къ установленію понятія о корнѣ квадратномъ изъ положительныхъ чиселъ; при этомъ, мы будемъ имѣть въ виду лишь положительное значенiе корня.

Теорема 1. Среди цѣлыхъ и дробныхъ положительныхъ чиселъ есть числа, которыя можно разсматривать, какъ квадраты другихъ чиселъ.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно обнаружить существованiе одного такого цѣлаго и одного дробнаго числа. Такими числами будутъ, напримѣръ, 16 и $\frac{4}{9}$, ибо $16 = 4^2$ и $\frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$.

Опредѣленiе. Если $A = B^2$, гдѣ B есть цѣлое или дробное положительное число, то B называется корнемъ квадратнымъ изъ A. Требованiе найти число B, когда дано число A, т. е. требованiе извлечь квадратный корень изъ даннаго числа A, обозначается такъ: $\sqrt{A}$. Тѣмъ же знакомъ обозначается и самый результатъ извлеченiя корня, т. е. указанное выше соотношенiе между числами A и B можетъ быть обозначено еще равенствомъ: $B = \sqrt{A}$.

Теорема 2. Среди цѣлыхъ и дробныхъ положительныхъ чиселъ есть числа, которыхъ нельзя разсматривать, какъ квадраты другихъ такихъ же чиселъ (цѣлыхъ и дробныхъ).

Для доказательства этой теоремы слѣдуетъ указать какое-нибудь цѣлое число, которое не будетъ квадратомъ другого цѣлаго числа, и привести обычныя доказательства двухъ теоремъ: a) если цѣлое число не есть квадратъ другого цѣлаго числа, то оно не можетъ быть и квадратомъ дроби; b) если числитель или знаменатель несократимой дроби не представляетъ собою квадрата цѣлаго числа, то такая дробь не можетъ быть квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа.

Затѣмъ, по нашему мнѣнiю, умѣстно научить учениковъ извлеченiю квадратныхъ корней изъ полныхъ квадратовъ.

Прежде, чѣмъ перейти къ дальнѣйшему изложенiю теорiи, обратимъ вниманiе на то, что передъ изложенiемъ всѣхъ слѣдующихъ теоремъ слѣдуетъ предварительно изложить всю содержащуюся въ нихъ теорiю на какихъ-либо двухъ, трехъ частныхъ примѣрахъ, напримѣръ, установить понятiе о $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, обращая все время вниманiе учениковъ на то, что способъ разсужденiй не зависитъ отъ того, исходимъ ли мы въ нихъ изъ числа 2, или изъ числа 3, или изъ числа 5, такъ чтобы весь дальнѣйшiй рядъ теоремъ предсталъ передъ глазами учениковъ, какъ обобщенiе частныхъ случаевъ.

Теорема 3. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то и произведенiе этого числа на всякое число, представляющее собою квадратъ другого числа, не будетъ квадратомъ ни цѣлаго, ни дробнаго числа.

Доказательство. Если $An^2 = q^2$, гдѣ n и q—какiя-нибудь положительныя числа, то $A = \left(\frac{q}{n}\right)^2$, что невозможно.

Эту теорему первоначально, при изложеніи теоріи на частныхъ примѣрахъ, умѣстнѣе было бы изложить въ связи съ теоремой 5.

Теорема 4. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то существуютъ два цѣлыхъ числа, разность между которыми будетъ равна 1 и между квадратами которыхъ содержится число A.

Въ случаѣ, если $A < 1$, меньшее изъ этихъ чиселъ будетъ 0, а большее 1.

Доказательство. Напишемъ безконечный рядъ чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \ldots, N, \ldots \qquad (1)$$

гдѣ N — цѣлое число, и составимъ рядъ ихъ квадратовъ:

$$0, 1, 4, 9, \ldots, N^2 \ldots, \qquad (2)$$

Въ ряду (2), по условію, числа A не будетъ. Пусть k^2 — наибольшее изъ чиселъ ряда (2), меньшихъ A; тогда числа ряда (1) k и $k+1$ будутъ искомыя.

Такимъ образомъ, теорема доказана; но убѣдительность ея для учениковъ V-го класса значительно, какъ намъ кажется, возрастетъ, если дать имъ болѣе удобный для нихъ способъ находить числа k и $k+1$. Этой цѣли мы достигнемъ, если обратимъ ихъ вниманіе на то, что k^2 есть наибольшій цѣлый квадратъ, содержащійся въ числѣ A, и распространимъ извѣстный имъ уже пріемъ извлеченія квадратнаго корня изъ полныхъ квадратовъ на случай извлеченія таковаго изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, содержащагося въ данномъ числѣ. Замѣтимъ тутъ, однако, что до введенія самаго понятія о $\sqrt{A}$ нельзя, по нашему мнѣнію, устанавливать терминъ „приближенное значеніе квадратнаго корня", такъ какъ квадратнаго корня изъ A для учениковъ еще не существуетъ, а потому и о приближенныхъ значеніяхъ его не можетъ быть и рѣчи.

Теорема 5. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то можно найти двѣ дроби со знаменателемъ n (n — число цѣлое и положительное), разность между которыми будетъ $\frac{1}{n}$ и между квадратами которыхъ содержится число A.

Доказательство. Знаменатель искомыхъ дробей данъ,— значитъ, достаточно найти числителей этихъ дробей. Пусть числитель меньшей будетъ x (x — число цѣлое и положительное); тогда эта дробь будетъ $\frac{x}{n}$. Такъ какъ большая дробь отличается отъ меньшей на $\frac{1}{n}$, то она будетъ: $\frac{x}{n} + \frac{1}{n} = \frac{x+1}{n}$. Такимъ образомъ, для нахожденія искомыхъ дробей достаточно найти x.

Согласно условію, указанныя дроби должны быть подчинены условіямъ: $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$. Умножая всѣ части послѣднихъ неравенствъ на n^2, получимъ слѣдующія неравенства: $x^2 < An^2 < (x+1)^2$. Отсюда видно, что требованіе найти x равносильно требованію найти два цѣлыхъ числа x и $x+1$, разность между которыми равна 1, и между квадратами которыхъ содержится число An^2, не представляющее собою, согласно теоремѣ 3, квадрата ни цѣлаго ни дробнаго числа. Найти такія два числа, согласно предшествующей теоремѣ, возможно.

Теорема 6. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то разность между числами вида: $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x}{n}\right)^2$, опредѣленныхъ условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, при неограниченно возрастающемъ n становится и остается менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа.

Доказательство:

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(2 \cdot \frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}(2A+1) = \frac{2A+1}{n},$$

если $A > 1$, и

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(2 \cdot \frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}(2 \cdot 1 + 1) = \frac{3}{n},$$

если $A < 1$.

Дроби $\frac{2A+1}{n}$ и $\frac{3}{n}$ при возрастаніи n становятся и продолжаютъ быть менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа; очевидно, что достаточно это показать для числа $\frac{2A+1}{n}$, такъ какъ дробь $\frac{3}{n}$ есть частный случай первой дроби. Для того, чтобы число $\frac{2A+1}{n}$ было менѣе нѣкоторой опредѣленной положительной дроби $\frac{p}{q}$, достаточно, чтобы число n было, болѣе чѣмъ $\frac{q(2A+1)}{p}$.

Такимъ образомъ, разность $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2$ съ возрастаніемъ цѣлаго положительнаго числа n становится и остается менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа α. Итакъ,

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 < \alpha. \tag{3}$$

Теорема 7. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то два безконечныхъ ряда чиселъ вида $\left(\frac{x}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, опредѣленныхъ условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, при неограниченно возрастающемъ n стремятся къ общему предѣлу A.

Доказательство. На основанiи предшествующей теоремы, каково бы ни было напередъ заданное число a, при достаточно большомъ n имѣемъ:

$$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 < a. \qquad (3)$$

Кромѣ того, по условiю, имѣемъ такiя неравенства:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Замѣнивъ въ неравенствѣ (3) уменьшаемое меньшимъ числомъ A, получимъ:

$$0 < A - \left(\frac{x}{n}\right)^2 < a; \qquad (4)$$

съ другой стороны, замѣнивъ вычитаемое въ томъ же неравенствѣ (3) большимъ числомъ A, получимъ:

$$0 < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - A < a. \qquad (5)$$

Изъ неравенствъ (4) и (5) вытекаетъ на основанiи опредѣленiя предѣла перемѣнной величины, что

$$A = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{x+1}{n}\right)^2. \qquad (6)$$

Теорема 8. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то разность между числами вида $\frac{x+1}{n}$ и $\frac{x}{n}$, опредѣленныхъ условiями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, при неограниченно возрастающемъ n, становится и остается менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа.

Доказательство. Имѣемъ: $\frac{x+1}{n} - \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$. Но $\frac{1}{n}$ при неограниченно возрастающемъ цѣломъ и положительномъ n становится и остается менѣе всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа.

Теорема 9. Если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то среди цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ нѣтъ числа, которое могло бы служить общимъ предѣломъ двухъ безконечныхъ рядовъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, опредѣленныхъ условiями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, при неограниченно возрастающемъ n.

Доказательство. Если бы это число существовало, то квадратъ его, какъ квадратъ одного изъ чиселъ вида $\frac{x+1}{n}$, не могъ бы быть меньше A; но онъ не могъ бы быть и больше A, какъ квадратъ одного изъ чиселъ вида: $\frac{x}{n}\cdot$ Такимъ образомъ, квадратъ разсматриваемаго числа, если бы таковое существовало среди цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, не могъ бы быть ни меньше ни больше A; остается предположить, что квадратъ его долженъ былъ бы равняться A, но это противорѣчило бы условію, а потому допущеніе существованія цѣлаго или дробнаго числа, могущаго служить общимъ предѣломъ указанныхъ въ теоремѣ двухъ безконечныхъ рядовъ чиселъ, невозможно.

Только-что приведенное доказательство теоремы 9, очевидно, основывается на допущеніи, что предѣлъ ряда чиселъ, если онъ существуетъ и сохраняетъ природу этихъ чиселъ, обладаетъ свойствами, общими для всѣхъ этихъ чиселъ. Такое допущеніе, вполнѣ согласное съ теоріей предѣловъ, совершенно естественно для учениковъ V-го класса, и едва-ли кто изъ нихъ будетъ сомнѣваться въ законности его*).

Послѣ приведенныхъ выше теоремъ въ высшей степени важно показать ученикамъ необходимость введенія чиселъ новой природы, отличныхъ отъ цѣлыхъ и дробныхъ. Эта необходимость, по нашему мнѣнію, ученикамъ V-го класса не можетъ быть выяснена никакими другими средствами лучше, чѣмъ геометрической интерпретаціей рядовъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, о которыхъ была рѣчь въ предшествующей теоремѣ, на прямой линіи; при этомъ, намъ кажется, эту интерпретацію полезно вести слѣдующимъ образомъ. Показавъ предварительно, какую роль играютъ цѣлыя и дробныя числа въ рѣшеніи различныхъ вопросовъ о величинахъ, и установивъ, такимъ образомъ, взглядъ на цѣлыя и дробныя числа, какъ на представителей величинъ, надлежитъ на числахъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ остановиться, какъ на представителяхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, построенныхъ слѣдующимъ образомъ. Примемъ произвольный отрѣзокъ (ab) за единицу измѣренія и будемъ на прямой AB, начиная отъ произвольной точки на ней, отмѣченной числомъ 0, откладывать два ряда отрѣзковъ, изъ которыхъ

---

*) Это доказательство недостаточно. Необходимо предварительно доказать слѣдующую теорему: если числа (раціональныя) даннаго ряда имѣютъ предѣломъ число (раціональное) a, то квадраты этихъ чиселъ имѣютъ предѣлъ, равный a^2. Если бы поэтому существовало раціональное число a, служащее общимъ предѣломъ чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, то a^2 должно было бы, въ виду теоремы 7 равняться A, что противно условію. Автора, очевидно, затрудняетъ то, что полная теорія предѣловъ излагается лишь въ VII классѣ.

Ред.

отрѣзки одного ряда представлены числами вида $\frac{x}{n}$, отрѣзки второго представлены числами вида $\frac{x+1}{n}$. Тогда получимъ два безконечныхъ ряда отрѣзковъ, при чемъ концы всѣхъ отрѣзковъ перваго ряда лягутъ налѣво отъ концовъ отрѣзковъ второго ряда, а концы всѣхъ отрѣзковъ второго ряда лягутъ направо отъ концовъ отрѣзковъ перваго ряда. Но разстояніе между концами двухъ отрѣзковъ, получаемыхъ при одномъ и томъ же n, измѣряемое числомъ $\frac{1}{n}$, при неограниченно возрастающемъ n стремится къ нулю, т. е. концы соотвѣтствующихъ другъ другу отрѣзковъ въ обоихъ рядахъ стремятся къ совпаденію.

Слѣдуетъ замѣтить, что, начиная съ теоремы 5, подъ n можно было бы разумѣть только различныя цѣлыя положительныя степени десяти; выгода была бы отъ этого та, что въ этомъ случаѣ рядъ отрѣзковъ, представленный числами вида $\frac{x}{n}$, будетъ возрастающій, а рядъ отрѣзковъ, представленный числами вида $\frac{x+1}{n}$, будетъ убывающій, и стремленіе къ совпаденію концовъ соотвѣтствующихъ другъ другу въ этихъ рядахъ отрѣзковъ для учениковъ будетъ яснѣе.

Обнаруживъ это стремленіе къ совпаденію концовъ указанныхъ выше рядовъ отрѣзковъ, намъ кажется, что на этой ступени обученія возможно прямо безъ дальнѣйшихъ разъясненій признать, какъ аксіому, что концы этихъ отрѣзковъ стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу,— къ точкѣ M. Такимъ образомъ, будетъ установлено, что два безконечныхъ ряда отрѣзковъ, указанныхъ выше, стремятся къ общему предѣлу OM. Итакъ, имѣемъ слѣдующую аксіому: если мы будемъ на прямой откладывать два безконечныхъ ряда прямолинейныхъ отрѣзковъ, которые выражаются числами вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, опредѣленными условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, а A — нѣкоторое положительное число, не представляющее собою квадрата ни цѣлаго, ни дробнаго числа, то существуетъ отрѣзокъ служащій общимъ предѣломъ этихъ двухъ рядовъ.

Далѣе является вопросъ, какое же число будетъ его представителемъ? Для учениковъ вполнѣ естественнымъ было бы признать за этого численнаго представителя этого отрѣзка общій предѣлъ двухъ безконечныхъ рядовъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, о которыхъ говорилось выше, если бы таковой для нихъ существовалъ; но такого рода числа въ ряду цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, какъ было показано выше, нѣтъ.

Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто такая теорема.

Теорема 10. Нѣтъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, могущаго служить численнымъ представителемъ предѣла двухъ безконечныхъ рядовъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, о которыхъ была рѣчь выше.

Такимъ образомъ, если мы хотимъ, чтобы каждая величина, а, стало быть, и указанный выше отрѣзокъ OM, имѣла своего численнаго представителя, мы должны, кромѣ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, ввести еще новыя числа, въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ отличныя отъ цѣлыхъ и дробныхъ. Такія числа, дѣйствительно, и вводятъ, называя ихъ ирраціональными въ отличіе отъ цѣлыхъ и дробныхъ, которыя называются раціональными.

Соглашеніе. Вводятъ ирраціональное число z, опредѣляемое съ помощью слѣдующихъ равенствъ:

$$z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right) \qquad (7)$$

Въ этихъ равенствахъ содержится слѣдующее опредѣленіе числа z: число z есть общій предѣлъ двухъ безконечныхъ рядовъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, опредѣленныхъ условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя и A — нѣкоторое положительное число, не представляющее собою квадрата ни цѣлаго ни дробнаго числа, къ которому эти ряды стремятся при неограниченно возрастающемъ n.

Такимъ образомъ, число z есть представитель отрѣзка OM. Съ какой же стороны, однако, оно характеризуетъ этотъ отрѣзокъ? Очевидно, если бы мы за единицу измѣренія взяли не отрѣзокъ (ab), а какой-нибудь другой, то тѣ же два ряда чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, будучи разсматриваемы, какъ представители прямолинейныхъ отрѣзковъ, дали бы намъ два новыхъ ряда отрѣзковъ, отличныхъ по размѣрамъ отъ тѣхъ, которые мы получили раньше; при чемъ эти ряды отрѣзковъ опредѣлили бы въ качествѣ своего общаго предѣла отрѣзокъ, также отличный отъ отрѣзка OM; тогда бы это число z было численнымъ представителемъ уже этого новаго отрѣзка, а не отрѣзка OM. Значитъ, число z въ зависимости отъ размѣровъ отрѣзка, принимаемаго нами за единицу измѣренія, можетъ оказаться представителемъ различныхъ по размѣрамъ прямолинейныхъ отрѣзковъ. Но всѣ эти отрѣзки, представителями которыхъ можетъ служить число z при соотвѣтственной единицѣ измѣренія, строились бы изъ этой послѣдней совершенно одинаково. Вотъ со стороны этого способа построенія изъ единицы и характеризуетъ, главнымъ образомъ, число z нашъ отрѣзокъ OM, характеризуя его, однако, и со стороны размѣровъ, разъ только единица измѣренія опредѣлена. Здѣсь мы, очевидно, имѣемъ дѣло съ такимъ же обстоятельствомъ, какъ и въ случаѣ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Эти послѣднія характеризуютъ величины со стороны ихъ размѣровъ только тогда, когда указана единица измѣренія, а безъ послѣдней они характеризуютъ лишь способъ построенія ихъ изъ единицы.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ классификаціи ирраціональныхъ чиселъ на отвлеченныя и именованныя, принятой относительно цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Отвлеченное число характеризуетъ величину лишь со стороны способа построенія ея изъ единицы измѣренія,— указателемъ, символомъ, представителемъ этого способа оно является; при этомъ, такъ какъ единица измѣренія характеризуется числомъ „единица“, то получается такое символическое выраженіе: „число N построено изъ единицы“, которое надо понимать, по нашему мнѣнію, такъ: число N указываетъ, какъ величина, къ которой оно отнесено, строится изъ соотвѣтственной единицы измѣренія. Въ разсмотрѣнномъ выше случаѣ, число z есть указатель такого построенія его изъ единицы; надо построить два ряда чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, опредѣленныхъ условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, и перейти къ предѣлу ихъ, предполагая, что n неограниченно возрастаетъ. Именованное же число характеризуетъ величину и со стороны ея размѣровъ, при чемъ характеристика величины со стороны ея размѣровъ собственно и есть главная задача именованнаго числа.

Численный представитель указаннаго выше отрѣзка OM, какъ видно изъ построенія этого послѣдняго, при данной единицѣ измѣренія будетъ представителемъ отрѣзка, бо́льшаго всѣхъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x}{n}$, и ме́ньшаго всѣхъ отрѣзковъ, представленныхъ числами вида $\frac{x+1}{n}\cdot$ Въ виду этого такого рода число будетъ разсматриваться, какъ число, большее всѣхъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и меньшее всѣхъ чиселъ вида $\frac{x+1}{n}\cdot$ Если затѣмъ въ рядъ чиселъ вида $\frac{x}{n}$ внесемъ всѣ остальныя цѣлыя и дробныя числа, квадраты которыхъ меньше A, а въ рядъ чиселъ вида $\frac{x+1}{n}$ внесемъ всѣ остальныя цѣлыя и дробныя числа, квадраты которыхъ больше A, то число z получитъ опредѣленіе такого рода: число z есть число, бо́льшее всѣхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, квадраты которыхъ меньше A, и меньшее всѣхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, квадраты которыхъ больше A. Самыя числа вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, какъ представители приближенныхъ значеній предѣла OM, называются приближенными значеніями вновь вводимаго числа z, вычисленными съ точностью до $\frac{1}{n}$, — первыя съ недостаткомъ, вторыя съ избыткомъ, такъ какъ они, съ возрастаніемъ n все менѣе и менѣе отличаясь другъ отъ друга, ближе становятся и къ своему предѣлу, при чемъ первыя все время остаются меньше его, а вторыя — больше его на величину, меньшую $\frac{1}{n}\cdot$

Остается теперь для этого рода чиселъ установить наиболѣе подходящее обозначеніе. Рѣшеніе этого вопроса находится въ связи съ тѣмъ свойствомъ этого числа, что квадратъ его равняется A. Но это свойство его устанавливается на основаніи болѣе разработанной теоріи предѣловъ, съ которою ученики знакомятся лишь въ VII-мъ классѣ. Здѣсь надо установить равенство:

$$\lim_{n=\infty}\left[\sqrt[\frac{1}{n}]{A}\right]^2=\left[\lim_{n=\infty}\sqrt[\frac{1}{n}]{A}\right]^2.$$

Обосновать это равенство просто принятіемъ вышеупомянутаго допущенія, что предѣлъ ряда чиселъ обладаетъ свойствами, общими всѣмъ этимъ числамъ, по нашему мнѣнію, нельзя, такъ какъ въ качествѣ такого предѣла введено нѣкоторое число, по природѣ отличное отъ чиселъ, составляющихъ рядъ, которому оно служитъ предѣломъ.

Правда, далѣе будетъ установлено опредѣленіе умноженія на ирраціональное число, на основаніи котораго можно было бы вывести это равенство, — собственно говоря, только послѣ этого опредѣленія и можетъ быть поднятъ вопросъ о выраженіи $\left[\lim\sqrt[\left(\frac{1}{n}\right)]{A}\right]^2$, — но это слишкомъ удлинило бы и безъ того уже длинную теорію. Такое удлиненіе въ данномъ случаѣ едва ли будетъ цѣлесообразно. Намъ кажется что пока для учениковъ V-го класса можно ограничиться слѣдующими разсужденіями.

Поставимъ вопросъ: когда числа вида $\left(\frac{x}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$, опредѣленныя условіями $\left(\frac{x}{n}\right)^2<A<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$ гдѣ x и n — числа цѣлыя и положительныя, могутъ достигнуть своего предѣла? Они измѣняются при перемѣнномъ n вслѣдствіе того, что съ измѣненіемъ n мѣняются числа вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$; а потому этого предѣла они могутъ достигнуть лишь въ томъ случаѣ, если одновременно достигаютъ своего предѣла числа вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$; другими словами, если числа вида $\left(\frac{x}{n}\right)^2$ и $\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$ стремятся къ своему предѣлу при неограниченно возрастающемъ n, что, дѣйствительно, и имѣетъ мѣсто, какъ было показано выше, то должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^2=\left(\lim_{n=\infty}\frac{x}{n}\right)^2 \text{ и } \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right)^2=\left(\lim_{n=\infty}\frac{x+1}{n}\right)^2$$

или, на основаніи равенствъ (6) и (7),

$$A=z^2. \qquad (8)$$

Такимъ образомъ, число z можетъ быть опредѣлено, какъ такое число, квадратъ котораго равенъ A. По аналогіи со случаями, когда A есть квадратъ цѣлаго или дробнаго числа, для числа z устанавливается знакъ $\sqrt{A}$, и число z называютъ квадратнымъ корнемъ изъ A. Внося это обозначеніе числа z въ равенство (8), получимъ: $(\sqrt{A})^2=A$.

Для приближенныхъ значенiй числа $\sqrt{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, т. е. для чиселъ вида $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, о которыхъ говорилось выше, употребляется обозначенiе ${}_{\left(\frac{1}{n}\right)}\sqrt{A}$ и при томъ одно для обоихъ — для приближеннаго значенiя корня съ недостаткомъ и для приближеннаго значенiя его съ избыткомъ. На основанiи принятыхъ выше обозначенiй получается такое равенство:

$$\sqrt{A} = \lim_{n=\infty} {}_{\left(\frac{1}{n}\right)}\sqrt{A}, \tag{9}$$

въ которомъ содержится слѣдующее опредѣленiе $\sqrt{A}$: если положительное число A не будетъ квадратомъ ни цѣлаго ни дробнаго числа, то квадратнымъ корнемъ изъ A называется общiй предѣлъ приближенныхъ значенiй квадратнаго корня изъ A съ точностью до $\frac{1}{n}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ при неограниченно возрастающемъ цѣломъ n. Этотъ предѣлъ есть число иррацiональное, обладающее тѣмъ свойствомъ, что квадратъ его равняется A. Цѣль, съ которою вводятся такого рода иррацiональныя числа, для учениковъ V-го класса будетъ состоять въ необходимости удовлетворить потребности имѣть численнаго представителя общаго предѣла двухъ рядовъ отрѣзковъ, выражаемыхъ приближенными значенiями квадратнаго корня изъ A съ недостаткомъ и съ избыткомъ. Но, введя такого рода иррацiональныя числа, ученики увидятъ, что при наличности таковыхъ они получаютъ возможность сказать, что всякое положительное число, какъ цѣлое, такъ и дробное, можетъ быть разсматриваемо, какъ квадратъ другого числа; это второе число будетъ либо цѣлое, либо дробное, либо иррацiональное, смотря по тому, каково будетъ первое число. Вмѣстѣ съ тѣмъ они получаютъ возможность сказать, что изъ всякаго положительнаго числа, цѣлаго или дробнаго, можно извлечь квадратный корень, — этотъ корень будетъ либо цѣлое, либо дробное, либо иррацiональное число, и потому при всякомъ положительномъ A символъ $\sqrt{A}$ представляетъ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное число, при чемъ $(\sqrt{A})^2 = A$. Отсюда получаемъ опредѣленiе квадратнаго корня изъ A, обычно вводимое въ алгебрѣ: корнемъ квадратнымъ изъ A называется число, квадратъ котораго равенъ A, и обозначается онъ такъ: $\sqrt{A}$.

Подчеркнемъ еще разъ, что съ символомъ $\sqrt{A}$, когда A представляетъ собою неполный квадратъ, нельзя соединять никакого другого способа построенiя изъ единицы обозначаемаго имъ числа, кромѣ того, который былъ указанъ выше, когда мы то же число обозначили черезъ z; а именно, построить $\sqrt{A}$ изъ единицы значитъ построить два безконечныхъ ряда чиселъ, представляющихъ собою приближенныя значенiя $\sqrt{A}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ и перейти къ предѣлу въ предположенiи, что n неограниченно возрастаетъ.

Установленiемъ понятiя о квадратномъ корнѣ изъ положительнаго числа, неполнаго квадрата, ирраціональныя числа введены, хотя и не во всемъ своемъ объемѣ. Но въ будущемъ ученикамъ придется имѣть дѣло съ корнями изъ чиселъ при всевозможныхъ цѣлыхъ показателяхъ. Чтобы ученики сознательно относились къ операціямъ надъ радикалами съ любыми цѣлыми положительными показателями, необходимо еще подобнымъ же образомъ, какъ было установлено понятіе о $\sqrt{A}$, установить понятіе, по крайней мѣрѣ, о $\sqrt[3]{A}$ для всякаго положительнаго числа A, постоянно подчеркивая полную аналогію со способомъ построенія понятія о $\sqrt{A}$ съ тѣмъ, чтобы можно было потомъ въ короткихъ словахъ обобщить этотъ способъ на случай какого-угодно цѣлаго положительнаго показателя корня, т. е. чтобы они могли установить соотвѣтствующій взглядъ на $\sqrt[m]{A}$ при любомъ положительномъ цѣломъ m.

Въ заключеніе предлагаемъ схему записей, которыя необходимо, по нашему мнѣнію, возникнутъ при выясненіи понятія о корнѣ квадратномъ изъ положительнаго числа, не представляющаго квадрата ни цѣлаго ни дробнаго числа, напримѣръ изъ 2. Здѣсь мы предполагаемъ n равнымъ лишь различнымъ степенямъ 10.

$\frac{x}{n}$	$\frac{x+1}{n}$	$\frac{x+1}{n}-\frac{x}{n}$	$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$	$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2$
1	2	1	$1 < 2 < 4$	3
1,4	1,5	0,1	$1{,}96 < 2 < 2{,}25$	0,29
1,41	1,42	0,01	$1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$	0,0283
1,414	1,415	0,001	$1{,}999396 < 2 < 2{,}00225$	0,002829
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮	⋮
z		0	2	0

1. $$\frac{\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2=\frac{1}{n}\left(2\cdot\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)<\frac{5}{n}}{\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2<a \quad \text{(произвольное положительное число)}}$$

2. $$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2<a, \qquad \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2<2<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2}{0<2-\left(\frac{x}{n}\right)^2<a}$$

3. $$\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2<a, \qquad \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2<2<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2}{0<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2-2<a}$$

4. $0 < 2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 < a,\qquad 0 < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 - 2 < a$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

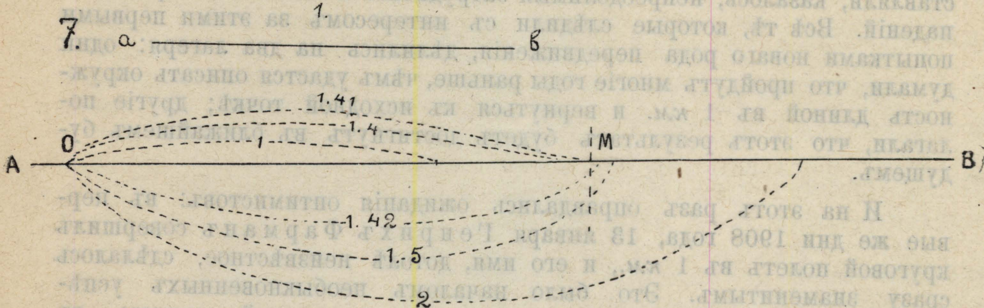
$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 = 2$$

5. $\frac{x+1}{n} - \frac{x}{n} = \frac{1}{n}$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\frac{x+1}{n} - \frac{x}{n} < a_1$ (произвольное положительное число).

6. $z \neq$ цѣлому числу, $z \neq$ дробному числу.

7. 

8. $z = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right)$

z — число ирраціональное.

9. $\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n=\infty}\frac{x}{n}\right)^2 ; \lim_{n=\infty}\left(\frac{x+1}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n=\infty}\frac{x+1}{n}\right)^2.$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2 = z^2$$

10. $z = \sqrt{2}$. 11. $\sqrt{2} = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{2}}$.

12. $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Авіація, какъ спортъ и наука.

П. Ренара.

Десять лѣтъ тому назадъ слово „авіація" было извѣстно только небольшому числу спеціалистовъ; теперь же оно повторяется всѣми. Въ 1904 и 1905 годахъ ходили слухи, что гдѣ-то въ Соединенныхъ Штатахъ летающій аппаратъ поднимался съ людьми; но эти слухи сошли за одно изъ твореній американской фантазіи, къ которой мы уже давно привыкли. Тѣмъ не менѣе, нѣкоторые приверженцы воздухоплаванія на аппаратахъ, которые тяжелѣе воздуха, научно доказывали возможность такого рода полета въ настоящее время; такимъ образомъ, нельзя было a priori отрицать результатовъ, достигнутыхъ братьями Райтъ, несмотря на ихъ многократные отказы повторить свои опыты передъ публикой.

На этотъ разъ, какъ это часто случается, право было вѣрующее меньшинство. Въ концѣ 1906 года Сантосъ-Дюмонъ совершилъ во Франціи первый робкій полетъ; въ 1907 году онъ уже имѣлъ многочисленныхъ подражателей. Дистанціи полетовъ стали увеличиваться, хотя и не превышали нѣсколькихъ сотъ метровъ; но виражи представляли, казалось, непреодолимыя затрудненія и были часто причиною паденій. Всѣ тѣ, которые слѣдили съ интересомъ за этими первыми попытками новаго рода передвиженія, дѣлились на два лагеря: одни думали, что пройдутъ многіе годы раньше, чѣмъ удастся описать окружность длиной въ 1 *км.* и вернуться къ исходной точкѣ; другіе полагали, что этотъ результатъ будетъ достигнутъ въ ближайшемъ будущемъ.

И на этотъ разъ оправдались ожиданія оптимистовъ: въ первые же дни 1908 года, 13 января Генрихъ Фарманъ совершилъ круговой полетъ въ 1 *км.*, и его имя, дотолѣ неизвѣстное, сдѣлалось сразу знаменитымъ. Это было началомъ необыкновенныхъ успѣховъ; полеты сначала продолжались меньше одной минуты, въ апрѣлѣ Делагранжъ достигъ продолжительности въ четверть часа; французскіе авіаторы, и между ними въ особенности Блеріо, совершали все болѣе и болѣе продолжительные и длинные полеты. Въ виду этихъ результатовъ стали считать весьма возможнымъ, что братья Райтъ дѣйствительно совершили три или четыре года тому назадъ тѣ полеты, о которыхъ они говорили.

Но вотъ неожиданно стало извѣстно, что одинъ изъ американскихъ авіаторовъ, Вильбуръ Райтъ, отправился во Францію со своимъ аппаратомъ; онъ поселился въ окрестностяхъ Мажа, и весь міръ помнитъ замѣчательные полеты, которые онъ продѣлывалъ въ теченіе нѣсколькихъ мѣсяцевъ надъ Овурскимъ полемъ. Въ это время его европейскіе соперники тоже не бездѣйствовали; покинувъ узкіе предѣлы аэродрома, Фарманъ совершилъ путешествіе изъ Шалона въ Реймсъ, а Блеріо изъ Турина въ Артенэ и обратно. Вильбуръ Райтъ закончилъ годъ необыкновеннымъ подвигомъ: 31 декабря онъ остался въ воздухѣ болѣе двухъ часовъ и пролетѣлъ за это время 120 *км.* Такимъ образомъ, въ 1908 году дистанціи полетовъ возросли въ отношеніи 1 къ 120; это число даетъ достаточно точное понятіе о быстротѣ развитія воздухоплаванія за этотъ годъ.

Въ 1909 году прогрессъ шелъ менѣе быстро; первые мѣсяцы даже казалось, что онъ остановился, и тѣ, которые считали себя мудрецами, начинали говорить, что чудесные результаты 1908 года зависѣли отъ случайныхъ счастливыхъ обстоятельствъ, которыя, по всей вѣроятности, болѣе не повторятся, и что мода на авіацію пройдетъ такъ же быстро, какъ всѣ другія моды; что авіація, въ лучшемъ случаѣ, останется навсегда удѣломъ нѣсколькихъ акробатовъ.

Къ концу іюня это мнѣніе сдѣлалось господствующимъ, но вскорѣ произошли сенсаціонныя событія, которыя заставили почти всѣхъ отъ него отказаться. Новымъ авіаторамъ, какъ, напримѣръ, Зоммеру и Латаму удалось повторить сдѣланное ихъ предшественниками и даже превзойти ихъ во многихъ отношеніяхъ. Однако, Латамъ безуспѣшно пробовалъ перелетѣть черезъ Ламаншъ на своемъ аэропланѣ, пока, наконецъ, Блеріо совершилъ и это.

Извѣстно, какое заслуженное удивленіе вызвалъ этотъ подвигъ спорта во всемъ мірѣ, и, когда въ концѣ августа началась въ Реймсѣ „la grande semaine d'aviation", энтузіазмъ публики былъ такъ же великъ, какъ и въ послѣдніе мѣсяцы 1908 года, и ей не пришлось разочароваться. Въ продолженіе 8 дней можно было видѣть, какъ надъ обширными равнинами Шампани носились аппараты самыхъ разнообразныхъ формъ, которые, казалось, смѣялись надъ капризами атмосферы. Въ продолженіе этого памятнаго періода всѣ предыдущіе рекорды высоты, скорости и дистанціи были побиты. Зрители Бетени вынесли всѣ такое впечатлѣніе, что авіація скоро перестанетъ быть удѣломъ немногихъ и что въ ближайшемъ будущемъ сѣсть на аэропланъ будетъ дѣломъ столь же обычнымъ, какъ теперь сѣсть въ автомобиль. Съ тѣхъ поръ авіаторы не опочили на своихъ лаврахъ; постоянно получаются извѣстія о новыхъ полетахъ-рекордахъ, совершаемыхъ на многочисленныхъ аэродромахъ Франціи и другихъ странъ. Послѣ полетовъ надъ водой авіаторы стали прогуливаться надъ большими городами; такъ, напримѣръ, Латамъ леталъ надъ Берлиномъ, и всѣ парижане могли наблюдать аэропланъ де-Ламбера, носившійся надъ ихъ столицей на нѣсколькихъ сотняхъ метровъ высоты.

Все это доказываетъ, что необыкновенные успѣхи 1908 года будутъ имѣть продолженіе; этотъ памятный годъ не останется изолированной датой, но послужитъ исходной точкой новой эры.

* * *

Въ исторіи наукъ нѣтъ, насколько мнѣ извѣстно, другихъ примѣровъ столь быстраго прогресса; но, отдавая должную дань уваженія подвигамъ современныхъ авіаторовъ, не слѣдуетъ думать, что они въ такой короткій промежутокъ времени изобрѣли всѣ детали аэроплана и сумѣли его такъ чудесно использовать. Для огромнаго большинства публики факты, которые мы только-что вкратцѣ привели, составляютъ всю исторію авіаціи; на самомъ же дѣлѣ это только одна изъ ея фазъ, которую можно было бы назвать спортивной; ей предшествовала гораздо болѣе продолжительная научная фаза. Этотъ періодъ исторіи завоеванія воздуха очень мало извѣстенъ, и справедливость требуетъ, чтобы на него обратили вниманіе просвѣщенные люди, такъ какъ основные принципы авіаціи могли быть выяснены только благодаря терпѣливымъ изслѣдованіямъ и тщательнымъ работамъ, занявшимъ долгіе годы. Вопросъ былъ настолько хорошо изученъ, что потомъ, когда бензиновому мотору дали необходимую двигательную силу, когда рѣшились построить аэропланъ и сѣсть на него, то полученные результаты превзошли всѣ ожиданія. Это и объясняетъ необыкновенную быстроту роста авіаціи за послѣдніе два года.

Въ чемъ же заключалась подготовительная работа? Я постараюсь это изложить вкратцѣ.

Человѣкъ всегда старался подняться въ воздухъ и летать по своему желанію. Но въ продолженіе тысячъ лѣтъ эти стремленія были безуспѣшны. Люди старались выяснить способъ летанія птицъ и насѣкомыхъ, прикрѣпить къ себѣ крылья и работать ими; все это приводило только къ смѣшнымъ неудачамъ или катастрофамъ. Этимъ первымъ воздухоплавателямъ недоставало двухъ вещей: двигательной силы и точнаго знанія того, какимъ образомъ летающія животныя могутъ держаться въ воздухѣ, пользуясь своими крыльями.

Тѣмъ не менѣе уже очень давно существовали настоящіе летательные аппараты, построенные людьми; это были воздушные змѣи; китайцы и японцы знаютъ ихъ уже много вѣковъ, и нужно думать, что голубь, изобрѣтенный Архитомъ Тарентскимъ въ 5-омъ вѣкѣ до Р. Х., былъ тоже воздушнымъ змѣемъ. Эти скромные аппараты должны были бы уже давно направить изслѣдователей на правильный путь: аэропланъ, дѣйствительно, есть не что иное, какъ воздушный змѣй, только не нуждающійся въ вѣтрѣ, такъ какъ онъ перемѣщается самъ благодаря мотору и винту; тяга мотора надъ горизонтальнымъ винтомъ замѣняетъ вѣтеръ.

Но воздушные змѣи были долгое время извѣстны, и никто не думалъ, что достаточно имъ сообщить быстрое горизонтальное движеніе относительно окружающаго воздуха, чтобы сдѣлать изъ нихъ летательный аппаратъ. Кромѣ того, нужно замѣтить, что осуществить такое движеніе способами, которыми мы располагали до недавняго времени, было невозможно; было бы уже хорошо, если бы мы знали, по крайней мѣрѣ, какъ нужно взяться за дѣло, чтобы осуществить механическій полетъ; къ сожалѣнію, это знаніе далось лишь съ большимъ трудомъ и при томъ окольными путями.

Среди предшественниковъ авіаціи обыкновенно называютъ Леонардо-да-Винчи; дѣйствительно, имѣются нѣсколько его эскизовъ крыльевъ птицъ въ различныхъ положеніяхъ; я видѣлъ ихъ репродукціи, но мнѣ кажется, что изъ нихъ трудно что-либо заключить.

Натуралисты съ давнихъ поръ наблюдали полетъ птицъ; но, не злословя по поводу ихъ работъ, которыя могутъ дать цѣнныя свѣдѣнія, нужно признаться, что не они освѣтили этотъ вопросъ; лучшіе изъ нихъ старались анализировать сложныя движенія птицъ, думая, что человѣкъ, желающій летать, долженъ по возможности точно подражать этимъ движеніямъ; эта идея была, однако, неправильна. Когда человѣкъ строитъ машины, онъ поступаетъ не такъ, какъ природа; онъ беретъ разнообразныя матеріалы, придаетъ имъ опредѣленныя формы и составляетъ изъ нихъ машину согласно заранѣе задуманному плану; все, что онъ требуетъ отъ частей этого аппарата, сводится къ тому, чтобы они двигались въ предусмотрѣнныхъ имъ условіяхъ. Въ организованномъ существѣ дѣло обстоитъ иначе; необходимо, правда, чтобы органы двигались какъ въ машинѣ; но, кромѣ того необходимо, чтобы они могли питаться, развиваться, и чтобы они составляли одно цѣлое, связанное сосудами всякаго рода, по которымъ циркулируетъ то таинственное нѣчто, которое называется жизнью.

Такимъ образомъ, между машинами, построенными человѣкомъ, и живыми существами имѣются глубокія различія. Важнѣйшія изъ нихъ заключаются въ слѣдующемъ: съ точки зрѣнія конструкціи — искусственныя машины разбираются, животныя не разбираются; съ точки зрѣнія ихъ дѣйствія — непрерывное вращательное движеніе характерно для огромнаго большинства машинъ, построенныхъ человѣкомъ, но оно невозможно для организованныхъ существъ. Эти послѣднія могутъ пользоваться только прерывистыми движеніями.

Съ точки же зрѣнія механики необходимость прибѣгать къ смѣннымъ, прерывнымъ движеніямъ представляетъ, безъ сомнѣнія, большой недостатокъ; для упрощенія машинъ гораздо выгоднѣе непрерывныя движенія. Кромѣ того, — и это, главнымъ образомъ, и заставляетъ ихъ предпочесть — силы инерціи, возбуждаемыя ими, гораздо менѣе опасны, чѣмъ при прерывистыхъ движеніяхъ. Человѣкъ поэтому не долженъ рабски подражать природѣ въ своихъ произведеніяхъ; если мы въ частности ограничимся техникой передвиженія, то убѣдимся, что всѣ аппараты, работающіе удовлетворительно, основаны на примѣненіи непрерывнаго движенія; локомотивы, автомобили, велосипеды имѣютъ колеса, быстрые пароходы — винты; всѣ же попытки построить ходящіе и плавающіе аппараты оказались совершенно безуспѣшными.

Не было поэтому никакихъ основаній предполагать a priori, что аппараты, которымъ суждено будетъ осуществить механическій полетъ, должны имѣть крылья, какъ у птицъ, а не непрерывно вертящіяся части. Орнитоптеры — такъ называютъ летательные снаряды, сдѣланные въ подражаніе естественному полету — были, такимъ образомъ, заранѣе обречены на то, чтобы остаться научными игрушками.

Этого не поняло большинство натуралистовъ; при всемъ томъ изъ наблюденій надъ полетами живыхъ существъ можно было вынести очень важныя свѣдѣнія.

Легко найти вѣсъ птицы; если произвести это взвѣшиваніе, то оказывается, что вѣсъ птицы никогда не превосходитъ 10 *кг*. Очевидно, что это не капризъ природы; напротивъ, это указываетъ, что одной мускульной силой невозможно поднять большій грузъ. Это должно было привести насъ къ убѣжденію, что человѣкъ не сможетъ летать, пока онъ не будетъ располагать двигателемъ съ большой удѣльной мощностью, т. е. такимъ двигателемъ, въ которомъ на каждую лошадиную силу приходится возможно меньшій вѣсъ.

Если дать крыльямъ птицы такое расположеніе, какое они имѣютъ во время полета, и измѣрить приблизительно горизонтальную поверхность, составленную крыльями и всѣмъ тѣломъ, включая и поверхность хвоста, то получается величина такъ называемой поддерживающей поверхности. Разсмотримъ теперь отношеніе вѣса птицы къ величинѣ этой поверхности, т. е. такъ называемую нагрузку на квадратный метръ. У птицы, напримѣръ, вѣсомъ въ 5 *кг.*, съ поддерживающей поверхностью въ $^1/_2$ *кв. м.*, это отношеніе равно 10 *кг.* Естественно думать, что, чѣмъ это отношеніе больше, тѣмъ труднѣе птицѣ удержаться въ воздухѣ и тѣмъ больше это требуетъ энергіи.

Если мы изучимъ численныя значенія этого отношенія, то мы узнаемъ двѣ вещи: во-первыхъ, что оно никогда не превосходитъ 10 *кг.*; во-вторыхъ, что, чѣмъ птица меньше, тѣмъ меньше и это отношеніе; оно достигаетъ максимума для самыхъ крупныхъ извѣстныхъ намъ породъ.

Послѣдній фактъ легко объясняется; если принять, что птицы геометрически подобны и что онѣ имѣютъ приблизительно одинаковую плотность, ихъ объемъ и, слѣдовательно, ихъ вѣсъ будетъ пропорціоналенъ кубу линейныхъ измѣреній, между тѣмъ какъ поддерживающая поверхность будетъ пропорціональна только ихъ квадрату. Нагрузка на квадратный метръ измѣняется, такимъ образомъ, пропорціонально отношенію куба къ квадрату, т. е. пропорціонально линейнымъ измѣреніямъ; это и объясняетъ, почему она всего больше у птицъ самыхъ крупныхъ размѣровъ. Правда, не обязательно, чтобы летающія существа были геометрически совершенно подобны; поддерживающая поверхность крыльевъ могла бы развиваться по какому-либо другому правилу, между прочимъ, и такъ, чтобы она всегда оставалась пропорціональна грузу; тогда нагрузка на квадратный метръ оставалась бы постоянной. Но въ дѣйствительности это условіе оказывается невозможнымъ выполнить. Препятствіемъ къ этому служитъ одно предложеніе изъ ученія о сопротивленіи матеріаловъ: чѣмъ крылья больше, тѣмъ труднѣе ихъ сдѣлать прочными; чтобы этого достигнуть, приходится ихъ сдѣлать очень тяжелыми, что сводится опять-таки къ увеличенію нагрузки на квадратный метръ. Такимъ образомъ, приблизительное геометрическое подобіе неизбѣжно.

Изъ вышесказаннаго можно сдѣлать слѣдующій выводъ: невозможно заставить летать помощью одной только мускульной энергіи животное, вѣсящее болѣе 10 *кг.*; эта невозможность обусловливается не абсолютнымъ вѣсомъ, но величиной нагрузки на квадратный метръ, предѣлъ которой равняется 10 *кг.*; между тѣмъ эта нагрузка необходимо увеличивается съ ростомъ птицы: чѣмъ она меньше, тѣмъ ей легче удержаться въ воздухѣ.

Изъ наблюденій надъ природой можно было сдѣлать еще и другіе выводы. Давно извѣстно, что различныя летающія животныя пользуются различными способами полета. Одни примѣняютъ гребной полетъ, т. е. часто ударяютъ крыльями по воздуху и, повидимому, удерживаются въ воздухѣ, ударяя его сверху внизъ, потомъ поднимаютъ ихъ, выпрямляя ихъ такъ, чтобы не уничтожить достигнутаго уже полезнаго дѣйствія; затѣмъ онѣ приводятъ крылья въ первоначальное положеніе и повторяютъ эту операцію снова. Эти маленькія существа продѣлываютъ все это съ большой ловкостью, но горизонтальная скорость ихъ, вообще говоря, невелика. Въ тихомъ воздухѣ они даже могутъ оставаться неподвижно надъ одной точкой; но противъ вѣтра они почти безсильны.

Большія птицы летаютъ совершенно иначе: ихъ крылья обыкновенно распростерты, и онѣ движутся съ очень большой горизонтальной скоростью; если онѣ кажутся иногда неподвижными, то это значитъ, что онѣ регулируютъ свою скорость такъ, чтобы она была равна скорости вѣтра и противоположно ей направлена; такимъ образомъ, онѣ не перемѣщаются относительно земли, но движутся очень быстро относительно воздуха, въ который онѣ погружены. Такого рода полетъ называется парящимъ или наклоннымъ; послѣднее названіе обусловливается тѣмъ, что при такомъ полетѣ крылья встрѣчаютъ воздухъ не перпендикулярно, а подъ весьма малымъ угломъ. Въ противоположность своимъ собратьямъ маленькаго размѣра, большія птицы не способны подняться вверхъ, не двигаясь впередъ; имъ необходимо располагать нѣкоторымъ горизонтальнымъ пространствомъ; онѣ его пробѣгаютъ, пока не достигаютъ скорости, необходимой для поднятія вверхъ; онѣ могутъ также броситься съ вершины какого-нибудь дерева или высокой скалы, но тогда имъ приходится сначала нѣсколько опуститься, и только тогда, когда ихъ скорость дѣлается достаточно большою, ихъ траекторія начинаетъ выпрямляться и превращается въ горизонтальную.

Маленькія птицы летаютъ исключительно гребнымъ способомъ, большія же всегда парятъ; у породъ же средней величины естественно встрѣчаются промежуточные пріемы; онѣ либо летаютъ смѣшаннымъ способомъ, либо же чередуютъ гребной и парящій полетъ. Въ послѣднемъ случаѣ онѣ пользуются гребнымъ способомъ для подъема и спуска, но, когда онѣ въ воздухѣ, онѣ, повидимому, предпочитаютъ парить. Какъ бы то ни было, чѣмъ птица тяжелѣе, т. е. чѣмъ нагрузка на квадратный метръ больше, тѣмъ предпочтеніе къ парящему полету яснѣе выражено. Что же отсюда можно заключить? Очень простую вещь: если, несмотря на многія неудобства, большія птицы пользуются исключительно пареніемъ, то только потому, что гребной полетъ для нихъ невозможенъ. Такъ же точно, если птицы средняго роста пользуются обѣими системами, но преимущественно парящимъ полетомъ, то это значитъ, что онъ для нихъ менѣе утомителенъ и что онѣ прибѣгаютъ къ нему по мѣрѣ возможности. Чтобы объяснить эти факты, повидимому, естественнѣе всего предположить, что съ точки зрѣнія расхода энергіи парящій полетъ выгоднѣе; при этомъ полетѣ можно держаться въ воздухѣ съ меньшей затратой труда; такимъ образомъ, съ точки зрѣнія механики, пареніе совершеннѣе, чѣмъ полетъ гребной или ортоптерный, какъ его иногда называютъ. Птицы, которыя имѣютъ значительную нагрузку на квадратный метръ, прибѣгаютъ исключительно къ наиболѣе выгодному методу, такъ какъ иначе онѣ не могли бы держаться; маленькія птицы, которымъ вообще нетрудно держаться въ воздухѣ, могутъ себѣ позволить роскошь менѣе экономнаго, но болѣе удобнаго способа; что же касается промежуточныхъ видовъ, то они, какъ мы упоминали выше, пользуются смѣшанными методами.

Продолжая наблюденія надъ природой, можно было замѣтить, что крылья большихъ птицъ очень развиты въ направленіи, перпендикулярномъ къ направленію полета и очень узки въ направленіи полета; иначе говоря, они имѣютъ очень большой размахъ. Кромѣ того, когда крылья распростерты, они слегка вогнуты, при чемъ вогнутость направлена внизъ; весьма вѣроятно, что такія особенности благопріятны для полета. Наконецъ, быстро летающія птицы имѣютъ тѣло, округленное спереди и болѣе заостренное сзади; это — форма современныхъ дирижаблей, и она очень выгодна въ смыслѣ уменьшенія сопротивленія при горизонтальномъ передвиженіи.

Такимъ образомъ, природа могла бы насъ многому научить, и было бы возможно, не прибѣгая къ другимъ учителямъ, узнать, что человѣкъ для летанія долженъ подражать большимъ птицамъ, т. е. пользоваться парящимъ полетомъ и для этого быстро передвигаться въ воздухѣ съ распростертыми и слегка поднятыми вверхъ поддерживающими поверхностями большого размаха, съ легкой вогнутостью. Чтобы двигать подобный аппаратъ, не нужно было и думать о подражаніи деталямъ движенія крыльевъ птицъ; нужно было просто укрѣпить мощный моторъ и съ его помощью вращать винтъ съ горизонтальной осью,— способъ, который уже испытанъ на морскихъ судахъ и на управляемыхъ аэростатахъ. Однимъ словомъ, говоря кратко, наблюденія надъ природой могли насъ научить, какъ строить аэропланъ.

Нѣкоторые натуралисты, какъ, напримѣръ, Муйяръ (Mouillard) и Марэ (Marey), имѣли уже болѣе или менѣе точное понятіе объ этихъ истинахъ; но въ дѣйствительности не они ихъ открыли; эта заслуга досталась на долю механиковъ. Эти послѣдніе мало-по-малу освѣтили проблему механическаго полета, и наблюденія надъ полетомъ птицъ только позже подтвердили вѣрность ихъ теоретическихъ и экспериментальныхъ изысканій.

Первое имя, которое нужно назвать, это имя Ньютона. Онъ нашелъ, что, если плоская поверхность встрѣчаетъ перпендикулярный потокъ воздуха, то она испытываетъ напоръ, пропорціональный ея величинѣ, удѣльному вѣсу воздуха и квадрату его скорости относительно этой поверхности. Эти законы, съ нѣкоторыми несущественными поправками, признаются и въ наше время. Ньютонъ пошелъ дальше. Онъ разсмотрѣлъ случай плоскости, встрѣчающей не перпендикулярный, а наклонный токъ воздуха, и нашелъ, что напоръ тогда пропорціоналенъ квадрату синуса угла наклоненія, т. е. угла, который струи воздуха образуютъ съ твердой плоскостью.

Позже другой знаменитый ученый, Эйлеръ, формулировалъ законъ, отличный отъ закона Ньютона; а именно, что напоръ, производимый наклоннымъ токомъ воздуха на твердую поверхность, пропорціоналенъ не квадрату синуса угла наклоненія, какъ то утверждалъ Ньютонъ, а только первой его степени. A priori, эта разница кажется несущественной; тѣмъ не менѣе въ продолженіе XVIII-го и трехъ первыхъ четвертей XIX-го вѣка приверженцы авіаціи дѣлились на два враждебныхъ лагеря: на сторонниковъ формулы

Эйлера и на на сторонниковъ формулы Ньютона. Этому спору пытались положить конецъ; именно, Французская Академія Наукъ поручила въ концѣ XVIII-го вѣка одному изъ своихъ членовъ, знаменитому физику Борда (Borda), экспериментально рѣшить этотъ вопросъ, спорный со временъ Ньютона и Эйлера. Опыты Борда подтвердили мнѣніе сторонниковъ первой степени синуса и идей Эйлера. Несмотря на это, споры продолжались, но мало-по-малу квадратисты теряли почву изъ-подъ ногъ; противъ нихъ были не только опыты Борда, но и другіе, гораздо болѣе древніе опыты большихъ птицъ. Дѣйствительно, можно показать математически, что, если законъ квадрата синуса, т. е. законъ Ньютона, вѣренъ, то нѣтъ выгоды пользоваться парящимъ полетомъ; затрата работы, необходимой для висѣнія, была бы всегда постоянна, встрѣчаетъ ли крыло воздухъ перпендикулярно или подъ малымъ угломъ.

Дѣло совершенно мѣняется, если принять идеи Эйлера, т. е. законъ синуса въ первой степени; въ этомъ случаѣ можно не менѣе строго доказать, что парящій полетъ гораздо болѣе выгоденъ; болѣе того, если довести эти разсужденія до ихъ предѣла, разсматривать только проблему висѣнія, не принимая во вниманіе поступательнаго передвиженія, то окажется, что работа неограниченно уменьшается вмѣстѣ съ угломъ наклоненія струй воздуха; когда же этотъ уголъ сводится къ нулю, работа, затрачиваемая на висѣніе, тоже равна нулю; иначе говоря, мы получили бы висѣніе безъ затратъ. Различныя практическія соображенія не позволяютъ намъ заходить такъ далеко, но тѣмъ не менѣе остается правильнымъ то, что парящій полетъ значительно выгоднѣе полета ортоптернаго и сверхъ того тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ уголъ наклоненія меньше.

Какъ мы это ужъ раньше видѣли, большія птицы, которыя имѣютъ значительную нагрузку на квадратный метръ, пользуются парящимъ полетомъ; очевидно, потому, что они получаютъ такимъ образомъ возможность летать, менѣе уставая. Ихъ способъ летанія является, такимъ образомъ, косвеннымъ, но блестящимъ доказательствомъ закона первой степени синуса. Онѣ навѣрно этого никогда и не подозрѣвали, но сторонники простого синуса могли бы съ основаніемъ сказать своимъ противникамъ, что они употребляютъ всякія ухищренія, чтобы доказать, что большія птицы не могутъ летать.

Всѣ эти споры въ настоящее время совершенно забыты, но они безусловно задержали развитіе авіаціи; или, правильнѣе, среди многочисленныхъ работъ только работы сторонниковъ закона простого синуса, закона, подтверждаемаго каждый день опытомъ, имѣли вліяніе на завоеваніе воздуха.

Среди нихъ первымъ нужно назвать англичанина сэра Георга Кэли (George Cayley), который въ 1805 или 1806 году, основываясь на законѣ первой степени синуса, установленнаго, по его мнѣнію, опытами Парижской Академіи Наукъ, составилъ проектъ аппарата, который долженъ былъ быстро горизонтально двигаться и тащить за собою слегка наклоненныя и спереди поднятыя поверхности, т. е. того, что мы называемъ аэропланомъ.

Число опытовъ увеличилось, и спорящіе стороны получили возможность уяснить себѣ, какимъ образомъ квадратисты могли оставаться при своихъ идеяхъ; оказалось, что законъ Эйлера вѣренъ только при условіи, что поверхности, встрѣчающія наклонный потокъ воздуха, значительно менѣе развиты въ направленіи движенія, чѣмъ въ перпендикулярномъ направленіи. Если дѣло обстоитъ иначе, сопротивленіе измѣняется, и мало-по-малу приближается къ закону Ньютона, который правиленъ для поверхностей очень растянутыхъ въ направленіи движенія и очень узкихъ въ перпендикулярномъ направленіи. Такимъ образомъ, чтобы сохранить выгоды парящаго полета, необходимо сильно развить поверхности въ направленіи, перпендикулярномъ къ траекторіи полета, иначе говоря, нужно имѣть большой размахъ; это мы уже узнали на примѣрѣ большихъ птицъ.

Идея аэроплана, высказанная уже свыше ста лѣтъ тому назадъ, осуществлялась мало-по-малу. Въ 1848 году другой англичанинъ, Генсонъ (Henson), составилъ проектъ летающей машины, которую должна была двигать сила пара. Эта машина тоже была настоящимъ аэропланомъ. Первый аппаратъ такого рода былъ дѣйствительно построенъ въ 1872 году французомъ Альфонсомъ Пено (Alphonse Pénaud), однимъ изъ тѣхъ, которые наиболѣе способствовали развитію авіаціи; къ несчастью, онъ умеръ въ возрастѣ тридцати пяти лѣтъ, не успѣвъ оправдать всѣхъ возложенныхъ на него надеждъ. Его аппаратъ былъ очень скроменъ: моторъ состоялъ изъ нѣсколькихъ закрученныхъ нитей каучука, которыя, раскручиваясь, приводили въ движеніе винтъ; въ такомъ видѣ эта научная игрушка представляла главныя черты современнаго аэроплана и дѣйствовала очень хорошо. *)

Всѣ ожидали желаннаго мотора. Въ своемъ нетерпѣніи найти рѣшеніе нѣкоторые изслѣдователи не довольствовались моделями маленькаго размѣра, но стали строить аппараты, годные для полета съ человѣкомъ; такъ какъ имъ недоставало необходимаго мотора, то они пополняли этотъ недостатокъ, прибѣгая къ силѣ тяжести. Поднявшись на холмъ, они сбѣгали съ наибольшей возможной быстротой, пока не достигали достаточной для висѣнія въ воздухѣ скорости; достигнувъ этого, они спускались по болѣе или менѣе крутой линіи, пока снова не встрѣчали поверхность земли. Эти полеты назывались скользящими.

Больше всѣхъ работалъ въ этомъ направленіи Лиліенталь; и благодаря своимъ аппаратамъ, онъ смогъ освѣтить очень интересные вопросы, касающіеся равновѣсія аэроплановъ; благодаря имъ же онъ выяснилъ благопріятное вліяніе вогнутости поддерживающихъ поверхностей. Извѣстно, что онъ нашелъ славную смерть во время одного изъ своихъ опытовъ.

Онъ имѣлъ послѣдователей въ Англіи и Америкѣ, и среди нихъ нужно въ особенности отмѣтить выдающагося чикагскаго инженера Шанюта (Chanute) и его учениковъ, знаменитыхъ братьевъ Райтъ.

*) Разсказываютъ, что къ тому времени отецъ Вильбура и Орвиля Райтъ, вернувшись изъ Франціи, привезъ своимъ сыновьямъ аэропланъ Пено; эта игрушка будто бы была исходной точкой призванія знаменитыхъ авіаторовъ.

Къ тому же времени, и даже раньше, и другіе изслѣдователи пробовали строить аэропланы. Въ 1873 году полковникъ Шарль Ренаръ (Charles Renard), тогда еще лейтенантъ, экспериментировалъ съ маленькой моделью безъ мотора. Адеръ (Ader) во Франціи, Максимъ (Maxim) въ Англіи и Филиппсъ (Philipps) въ Америкѣ также строили аэропланы. Къ концу XIX-го вѣка Ланглею (Langley) удалось заставить маленькій аэропланъ безъ пассажира, снабженный моторомъ, пролетѣть дистанцію болѣе 1 *км.* въ окрестностяхъ Вашингтона. Моторъ приводился въ движеніе сжатымъ паромъ, заключеннымъ въ сосудѣ.

На другомъ концѣ свѣта, въ Австраліи, Хергравъ (Hargrave), совершенствуя воздушные змѣи, способствовалъ косвеннымъ образомъ успѣхамъ авіаторовъ, конструировавшимъ аэропланы.

Всѣ эти усилія интересовали спеціалистовъ; но широкая публика обращала на нихъ очень мало вниманія. Но важно замѣтить одно: когда производили опыты надъ воздушными змѣями, надъ скользящими аппаратами подъ дѣйствіемъ силы тяжести или надъ аппаратами съ двигающей силой, все время дѣло шло объ аппаратахъ типа аэроплана, и въ эту сторону были направлены всѣ достойныя интереса изслѣдованія.

Такимъ образомъ, въ тотъ день, когда братья Райтъ послѣ долгихъ попытокъ, неизбѣжныхъ въ столь новомъ дѣлѣ, установили на аэропланѣ бензиновый моторъ, ихъ усилія увѣнчались полнымъ успѣхомъ. То же самое случилось и въ Европѣ, когда здѣсь рѣшились, быть можетъ, нѣсколько поздно, послѣдовать ихъ примѣру. И послѣ того, какъ первые шаги были сдѣланы, или, правильнѣе, послѣ того, какъ первые полеты были совершены, успѣхи послѣдовали одинъ за другимъ со скоростью, извѣстной всему міру. Факты слишкомъ памятны всѣмъ, чтобы было необходимо о нихъ напоминать.

* * *

Мнѣ кажется, что я достаточно показалъ въ вышеизложенномъ, что столь блестящая современная спортивная фаза авіаціи можетъ быть объяснена только длиннымъ періодомъ научной работы, которая ее подготовила. Каково же будетъ будущее этихъ новыхъ аппаратовъ? Останутся ли они исключительно въ рукахъ практиковъ, или людямъ науки придется продолжать ими заниматься, какъ и раньше? Я не хочу умалять въ чемъ бы то ни было заслуги авіаторовъ-пилотовъ, но мнѣ кажется, что они получили отъ аэроплана приблизительно все, что можно отъ него получить въ его современномъ видѣ. Чтобы существенно усовершенствовать эти аппараты, необходимо, чтобы люди науки продолжали ими заниматься. Есть много деталей, требующихъ изученій, деталей, касающихся поддерживающихъ поверхностей, пропеллеровъ, поперечнаго и продольнаго равновѣсія; эти вопросы могутъ быть освѣщены только научными опытами, проведенными методически и настойчиво. Всѣ чувствуютъ надобность въ новыхъ изысканіяхъ, и этимъ потребностямъ безусловно отвѣчаютъ устройство лабораторіи воздухоплаванія, которой мы обязаны Дейтчу (Deutsch), учрежденіи каѳедры воздухоплаванія г. Захаровымъ и Высшей Школы аэронавтики, основанной благодаря иниціативѣ полковника Роша (Roche), который открылъ свои курсы 15-го ноября истекшаго года передъ аудиторіей въ 120 человѣкъ, желающихъ сдѣлаться инженерами-аэронавтами.

Изслѣдователи, которые будутъ работать въ будущемъ надъ совершенствованіемъ авіаціи, не будутъ, понятно, претендовать на интелектуальное превосходство надъ своими предшественниками или считать себя всѣхъ Эйлерами, Ньютонами и Борда, если говорить только о самыхъ раннихъ; но они будутъ имѣть важное преимущество сравнительно съ ними: а именно, благодаря существованію пилотовъ, умѣющихъ управлять аэропланомъ они смогутъ контролировать свои лабораторныя изслѣдованія и изысканія практическими опытами. Это сотрудничество людей науки и людей практическихъ не можетъ не быть очень плодотворнымъ; и, если за продолжительно научной фазой послѣдовала въ авіаціи блестящая спортивная эра, эта послѣдняя должна быть очень кратковременной, и періодъ, въ который мы теперь вступаемъ, долженъ совмѣстить двоякій характеръ предшествующей исторіи воздухоплаванія.

Задача на премію № 3.

Пусть A_0, A_1, $A_2, \ldots$ будутъ коэффиціенты при послѣдовательныхъ членахъ разложенія по степенямъ перемѣннаго x функціи

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^m,$$

гдѣ m и n суть цѣлыя и положительныя числа.

Требуется найти сумму

$$A_a + A_b + A_c + \cdots + A_h,$$

предполагая, что числа a, b, $c, \ldots$, h образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой есть данное число r и которая содержитъ всѣ члены, встрѣчающіеся въ ряду чиселъ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ mn.$$

Точнѣе говоря:

$$0 \leqslant a < r, \quad mn - r < h \leqslant mn$$

Въ частномъ случаѣ, напримѣръ, когда r есть дѣлитель числа $n + 1$, то

$$A_a + A_{a+r} + A_{a+2r} + \cdots = \frac{(n+1)^m}{r},$$

соотношеніе, которое обобщаетъ извѣстныя свойства биноміальныхъ коэффиціентовъ.

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

Авторъ лучшаго рѣшенія получитъ книги по его выбору на сумму въ 10 рублей. Работы должны поступить въ редакцію не позже 1 октября сего года.

КОМЕТА ГАЛЛЕЯ.

Снимокъ, сдѣланный А. Тиховымъ въ Пулковѣ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Зависимость массы электроновъ отъ скорости. Движущаяся заряженная частица окружена электромагнитнымъ полемъ; она представляетъ собою не что иное, какъ электрическій токъ, сила котораго зависитъ отъ величины движущагося заряда и отъ скорости движенія. Поэтому легко понять, что для того, чтобы сообщить тѣлу, заряженному электричествомъ, опредѣленную скорость, требуется больше энергіи, чѣмъ если бы тѣло не было заряжено. Именно, въ первомъ случаѣ, кромѣ энергіи механическаго движенія, надо затратить еще извѣстное количество энергіи на созданіе электромагнитнаго поля, возникающаго при движеніи. Если же на тѣло заряженное заставить дѣйствовать лишь ту же самую силу, что на тѣло незаряженное, то оно пріобрѣтетъ меньшую скорость. Инерція заряженнаго поля окажется большей, и, слѣдовательно, получится впечатлѣніе, что его масса увеличилась. Появившійся избытокъ массы надъ обыкновенной инертной массой незаряженнаго тѣла, есть такъ называемая электромагнитная масса, и, конечно, эта электромагнитная масса должна расти вмѣстѣ съ увеличеніемъ скорости такъ, какъ растетъ электромагнитное поле, которое окружаетъ движущееся тѣло и которому электромагнитная масса обязана своимъ возникновеніемъ. Пока мы имѣемъ дѣло съ малыми скоростями, электромагнитная масса практически не играетъ никакой роли. Но она становится весьма замѣтной, когда скорость дѣлается сравнимой со скоростью свѣта. Когда приступили къ изученію катодныхъ лучей и еще болѣе быстрыхъ β-лучей радія, то впервые физикамъ пришлось считаться съ этимъ явленіемъ электромагнитной массы. Въ этихъ лучахъ мы имѣемъ дѣло съ частицами, носящими элементарные отрицательные заряды и обладающими огромной скоростью. Путемъ одновременнаго измѣренія отклоненій, которыя испытываютъ эти лучи, проходя черезъ электрическое и магнитное поля, можно опредѣлить скорость каждаго даннаго луча и величину отношенія заряда къ массѣ для его частицъ. Если принять, что зарядъ всегда одинъ и тотъ же, а именно равенъ элементарному количеству, „атому“ отрицательнаго электричества, то отношеніе заряда къ массѣ мѣняется только по мѣрѣ измѣненій массы. При бо́льшей скорости, когда электромагнитная масса больше, отношеніе заряда къ массѣ становится меньше, что и подтвердилось въ опытахъ. Опыты же дали возможность опредѣлить, какую часть массы слѣдуетъ приписать постоянной обыкновенной массѣ и какую зависимой отъ скорости электромагнитной массѣ. Для этого надо было наблюдать, какъ мѣняется масса (или отношеніе заряда къ массѣ) съ постепеннымъ увеличеніемъ скорости. Оказалось, что та доля, которая выпадаетъ на постоянную механическую массу, въ этихъ лучахъ равна нулю; другими словами, что частицы катодныхъ и β-лучей не обладаютъ никакой массой въ смыслѣ механики. Это — свободные заряды, электроны, и вся ихъ инерція обусловлена лишь окружающимъ ихъ при движеніи электромагнитнымъ полемъ. Этимъ, однако, не исчерпывается значеніе указанныхъ наблюденій надъ тѣмъ, какъ измѣняется отношеніе заряда къ массѣ въ зависимости отъ скорости электроновъ. Если провести эти наблюденія съ большой точностью, то они же даютъ средство для рѣшенія спора между двумя имѣющимися въ настоящее время электронными теоріями, между теоріей Абрагама (Abraham) и теоріей Лоренца (Lorentz). По Абрагаму электроны представляются въ видѣ твердыхъ шаровъ, неизмѣнно сохраняющихъ свою форму. По теоріи же Лоренца электроны, шарообразные въ состояніи покоя, сокращаются при движеніи въ томъ направленіи, въ которомъ они движутся, при чемъ сокращеніе зависитъ отъ скорости. По Лоренцу поэтому движущійся электронъ имѣетъ форму эллипсоида вращенія, Собственно говоря, рѣшеніе, неблагопріятное для теоріи Абрагама, уже получено въ рядѣ оптическихъ экспериментовъ [опыты Майкельсона (Michelson) и др.]. Эти опыты показали, что абсолютное движеніе земли въ пространствѣ не обнаруживается тамъ, гдѣ оно должно было бы сказаться по теоріи шарообразнаге электрона. Отрицательный результатъ опытовъ Майкельсона и побудилъ Лоренца выставить свою теорію электрона, сокращающагося по мѣрѣ движенія. Теорія Лоренца находится въ согласіи съ выдвинутымъ Эйнштейномъ (Einstein) принципомъ относительности, по которому не только въ механикѣ, но вообще во всей физикѣ никакой опытъ не можетъ позволить намъ различать между абсолютнымъ и относительнымъ движеніемъ. Теорія Абрагама противорѣчитъ и опытамъ Майкельсона и принципу относительности. Тѣмъ не менѣе, представленіе неизмѣннаго шарообразнаго электрона привлекаетъ своей бо́льшей простотой, и разъ имѣется еще другое средство для сравненія теоріи съ опытомъ, то, конечно, и его слѣдовало испытать.

Такой новой провѣркой является именно точное опредѣленіе отношенія заряда къ массѣ электроновъ въ зависимости отъ скорости. Конечно, какъ по теоріи Абрагама, такъ и по теоріи Лоренца отношеніе заряда къ массѣ есть функція скорости, но не одна и та же функція по обѣимъ теоріямъ. По теоріи Абрагама масса электрона растетъ медленнѣе со скоростью, чѣмъ по теоріи Лоренца. Можно начертить кривую, откладывая на оси ординатъ отношенія заряда къ массѣ, а по оси абсциссъ — скорости. Для теорій Абрагама и Лоренца получаются двѣ разныя кривыя. Третью кривую, наконецъ, можно получить изъ опытовъ. Такіе опыты, при которыхъ скорость лучей и отношеніе заряда къ массѣ опредѣлялись изъ одновременнаго отклоненія лучей электрическимъ и магнитнымъ полями, были впервые продѣланы Кауфманомъ (Kaufmann) надъ β-лучами радія, обладающими скоростями отъ $^1/_2$ до болѣе $^9/_{10}$ скорости свѣта. Кривая, полученная изъ опытовъ, отличалась отъ кривыхъ обѣихъ теорій, но отклоненія отъ теоріи Лоренца были втрое больше, чѣмъ отклоненія отъ теоріи Абрагама. Однако, и эти отклоненія, хотя и малыя, все же были больше возможныхъ ошибокъ наблюденій. Затѣмъ опыты надъ тѣми же β-лучами радія при иной обстановкѣ повторилъ Бухереръ (Bucherer) — и получилъ результатъ, согласный съ теоріей Лоренца.

При такомъ положеніи дѣлъ дальнѣйшая опытная провѣрка была крайне желательна. Въ виду важности проблемы неудивительно, что за нее взялись сразу нѣсколько физиковъ. Всѣ они задались цѣлью произвести тѣ же опыты уже не надъ β-лучами, а надъ катодными лучами. Наиболѣе чистой и точной работой слѣдуетъ признать изслѣдованіе Гупка (Hupka), напечатанное въ „Annalen der Physik“. Авторъ задался цѣлью получить катодные лучи любой скорости въ трубкѣ, эвакуированной до крайнихъ предѣловъ разрѣженія. Катодные лучи возбуждались падающимъ на катодъ ультрафіолетовымъ свѣтомъ кварцевой лампы. Испускаемые при этомъ лучи обладаютъ чрезвычайно малой начальной скоростью, которой практически можно пренебрегать. Желаемая скорость сообщалась имъ сильнымъ электрическимъ полемъ, которое создавалось между катодомъ и анодомъ. Разность потенціала между катодомъ и анодомъ варіировала въ предѣлахъ отъ 17 000 до 90 000 вольтъ, и соотвѣтственно варіировала и скорость, сообщаемая лучамъ. Замѣчательно, что благодаря полному удаленію воздуха изъ трубки даже при самыхъ высокихъ потенціалахъ не получался разрядъ. Катодные лучи исходили отъ катода дѣйствительно только тогда, когда его освѣщали ультрафіолетовымъ свѣтомъ, и электрическое поле въ зависимости отъ своей величины сообщало имъ опредѣленную скорость. Она измѣнялась въ предѣлахъ отъ $^1/_4$ до $^1/_2$ скорости свѣта. Съ этой скоростью лучи попадали къ аноду, проходили черезъ имѣвшееся въ анодѣ отверстіе и затѣмъ подвергались дѣйствію магнитнаго поля. Отклоненія въ электрическомъ полѣ въ этихъ опытахъ были замѣнены точнымъ измѣреніемъ потенціала, сообщающаго лучамъ ихъ скорость. Опыты Гупка, по мнѣнію самого экспериментатора, подтверждаютъ теорію Лоренца и не согласуются съ теоріей Абрагама. Однако, послѣ опубликованія работы Гупка противъ такого вывода были приведены весьма основательные аргументы. Оказывается, напримѣръ, что достаточно предположить ошибку въ измѣреніи потенціала въ какихъ-нибудь 80 вольтахъ (при абсолютной величинѣ въ нѣсколько десятковъ тысячъ вольтъ), т. е. ошибку противъ которой не обезпечено самое точное измѣреніе, чтобы въ противоположность даннымъ Гупка получить совпаденіе результатовъ опыта съ теоріей Абрагама и несогласіе съ теоріей Лоренца.

Другіе экспериментаторы, французскіе физики Гюй (Guye) и Ратновскій (Ratnovsky) и американскій физикъ Прокторъ (Proctor), наблюдали катодные лучи, получаемые обычнымъ способомъ въ не вполнѣ эвакуированной трубкѣ, къ электродамъ которой приложена достаточная разность потенціаловъ, т. е они наблюдали катодные лучи разряда. При этомъ потенціалъ разряда и скорость лучей зависятъ отъ степени разрѣженія газа въ трубкѣ и могутъ поэтому быть варіированы по волѣ экспериментатора. Непріятно только то обстоятельство, что лучи разной скорости тутъ проходятъ черезъ трубку не при однихъ и тѣхъ же условіяхъ: при большомъ потенціалѣ и большой скорости въ трубкѣ меньше воздуха, чѣмъ при малыхъ потенціалахъ и скоростяхъ. Между тѣмъ именно присутствіемъ молекулъ газа, съ которыми могутъ сталкиваться электроны, пытались объяснить результатъ первыхъ опытовъ Кауфмана. На опыты Кауфмана эти новые опыты надъ катодными лучами похожи, впрочемъ, еще и въ томъ, что лучи, прошедшіе черезъ отверстіе анода, подвергаются дѣйствію какъ магнитнаго, такъ и электрическаго поля. Скорость лучей у Гюя и Ратновскаго варіируетъ отъ $^1/_4$ до $^1/_2$, а у Проктора отъ $^{12}/_{100}$ до $^{43}/_{100}$ скорости свѣта. Кривая, изображающая отношеніе заряда къ массѣ, какъ функцію скорости, французскими физиками найдена соотвѣтствующей теоріи Лоренца. Опыты же Проктора дали результатъ, подобный результату Кауфмана: его кривая не совпадаетъ ни съ одной изъ кривыхъ теорій, но она вдвое ближе къ кривой по теоріи Абрагама, чѣмъ къ кривой по Лоренцу.

Конечный выводъ изъ этихъ новѣйшихъ изслѣдованій, очевидно, такой, что вопросъ, какой теоріи соотвѣтствуетъ измѣненіе массы въ зависимости отъ скорости электроновъ въ катодныхъ и β-лучахъ, такъ и остается открытымъ. Въ виду того, что даже чрезвычайно аккуратная работа Гупка оказывается далеко не достаточно точной для рѣшенія этой проблемы, приходится думать, что врядъ ли она такъ скоро будетъ рѣшена.

РЕЦЕНЗІИ.

Н. Извольскій. *Геометрія въ пространствѣ (стереометрія).* Изданіе В. В. Думнова. Москва, 1910 г. Цѣна 65 к. 126 стр..

Этотъ учебникъ стереометріи раздѣленъ на двѣ части, о содержаніи которыхъ можно составить себѣ понятіе по слѣдующему его оглавленію:

Часть I. Чистая геометрія. Основныя свойства плоскости (стр. 1). Параллельность въ пространствѣ (стр. 4). Перпендикулярность въ пространствѣ (стр. 12). Фигуры, въ которыхъ комбинируются параллельные и перпендикулярные элементы (стр. 20). Двугранные углы и перпендикулярныя плоскости (стр. 24). Проекціи; дальнѣйшее обобщеніе понятія объ углѣ (стр. 31). Многогранные углы (стр. 36). Многогранныя поверхности и многогранники (стр. 50). Поверхности вращенія (стр. 67).

Часть II. Измѣрительная геометрія. Измѣреніе двугранныхъ угловъ (стр. 76). Измѣреніе поверхностей (стр. 78). Измѣреніе объемовъ (стр. 93). Подобіе многогранниковъ (стр 118).

Почти каждая глава сопровождается задачами для упражненій (всего 118 задачъ).

Въ предисловіи авторъ указываетъ на раздѣленіе его курса стереометріи на двѣ части — чистую и измѣрительную, какъ на одно изъ отличій его учебника отъ другихъ учебниковъ по тому же предмету. Основаніемъ для такого раздѣленія, повидимому, послужило то обстоятельство, что особое вниманіе автора, по его заявленію, „было обращено на первую часть, изучающую особенности расположенія частей геометрическихъ пространственныхъ образовъ. Планъ изложенія этой части, направляемый мыслью о постепенномъ обобщеніи понятій, усвоенныхъ въ курсѣ планиметріи, можно выразить формулою: строится извѣстный геометрическій образъ и изучаются вопросы, возникающіе при этомъ построеніи“. Отсюда, однако, не видно, почему г. Извольскій вторую часть своего учебника (часть измѣрительную) не относитъ къ чистой геометріи *).

Другая, болѣе существенная особенность того же учебника состоитъ въ томъ, что геометрическія предложенія (теоремы) въ немъ не предшествуютъ доказательствамъ, какъ это принято, а, наоборотъ, являются выводомъ изъ предшествующихъ имъ разсужденій; даже самый терминъ теорема въ учебникѣ совсѣмъ не встрѣчается. По этому поводу авторъ говоритъ въ предисловіи: „быть можетъ, изучить нѣкоторые отдѣлы курса въ предлагаемомъ изложеніи окажется для учащихся труднѣе, чѣмъ запомнить памятью теоремы и ихъ доказательства въ обычномъ изложеніи“. Въ этомъ предположеніи, по нашему мнѣнію, авторъ не ошибается.

Вѣдь изученіе геометріи, и при обычномъ изложеніи ея, состоитъ не только въ запоминаніи теоремъ и ихъ доказательствъ, а прежде всего въ сознательномъ усвоеніи ихъ, что въ большинствѣ случаевъ и достигается; поэтому указанная особенность изложенія разбираемаго учебника могла бы имѣть значеніе, если бы разсужденія всегда носили наводящій характеръ и облегчали, а не затрудняли изложеніе. Эта цѣль г. Извольскимъ, на нашъ взглядъ, не достигнута.

Третья особенность учебника г. Извольскаго, на которую онъ также самъ указываетъ въ предисловіи, заключается въ томъ, что онъ „старается избѣгать опредѣленій, замѣняя ихъ опредѣленными построеніями“, и потому „съ его точки зрѣнія, понятія кругъ и окружность — синонимы: кругъ имѣетъ длину и площадь“. Почему же въ такомъ случаѣ не устраняется понятіе о пе-

---

*) Нужно сказать, что точка зрѣнія, по которой метрическая геометрія, оперирующая числами, уже не составляетъ „чистой“ геометріи, довольно распространена въ литературѣ и не лишена основаній.

Ред.

риметрѣ многоугольника? И неужели въ планиметріи (которую авторъ обѣщаетъ выпустить въ скоромъ времени) онъ будетъ говорить о длинѣ многоугольника? Кромѣ этихъ особенностей учебника принципіальнаго характера, укажемъ еще на одну, о которой самъ авторъ умалчиваетъ; эта особенность заключается въ изложеніи статьи о правильныхъ многогранникахъ (гл. VIII). Въ противоположность другимъ учебникамъ, статья эта въ учебникѣ г. Извольскаго изложена настолько обстоятельно, насколько этого можно требовать отъ учебника. Исходя изъ теоремы Эйлера о зависимости между числомъ граней, реберъ и вершинъ многогранника, авторъ устанавливаетъ, сколько можетъ быть правильныхъ многогранниковъ различныхъ видовъ, и далѣе указываетъ на нѣкоторыя зависимости между ними.

Изъ недосмотровъ автора, легко устранимыхъ, обращаютъ на себя вниманіе слѣдующіе:

На стр. 49 (§ 59), при выводѣ теоремы о суммѣ плоскихъ угловъ многограннаго угла, авторъ ограничивается четырехграннымъ угломъ, при чемъ пользуется пересѣченіемъ двухъ противоположныхъ его граней; въ заключеніе же говоритъ, что этотъ же способъ доказательства примѣнимъ и къ любому выпуклому многогранному углу, между тѣмъ какъ у пятиграннаго угла, напримѣръ, противоположныхъ граней нѣтъ. Слѣдовало бы пояснить, какія въ этомъ случаѣ нужно взять грани.

На стр. 94 (§ 110), при выводѣ формулы для объема прямоугольнаго параллелепипеда, авторъ безъ надобности останавливается на случаѣ, когда ребра параллелепипеда соизмѣримы съ $\frac{1}{n}$ долей выбранной единицы длины.

На стр. 104 (§ 119) равновеликость двухъ трехгранныхъ пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами доказывается интегральнымъ методомъ, что для учениковъ неубѣдительно.

Слѣдуетъ исправить также встрѣчающіяся неудобныя выраженія; напримѣръ, говоря о призмахъ, усѣченныхъ пирамидахъ, цилиндрѣ и усѣченномъ конусѣ, авторъ называетъ основанія этихъ тѣлъ верхнимъ и нижнимъ; такія названія примѣнимы только при опредѣленномъ положеніи названныхъ тѣлъ относительно горизонта.

Д. Еф—въ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента **Е. Л. Буницкаго.**

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе

№ 276 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{\frac{a}{1+x}}+\sqrt{\frac{b}{1-x}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

Е. Григорьевъ (Саратовъ).

№ 277 (5 сер.). Вычислить сумму

$$n^{n+3}-C_n^1(n-1)^{n+3}+C_n^2(n-2)^{n+3}-\cdots+(-1)^k C_n^k(n-k)^{n+3}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\,.\,1^{n+3},$$

гдѣ n — данное цѣлое положительное число, при чемъ C_n^k обозначаетъ число сочетаній изъ n по k.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 278 (5 сер.). Составить кубичное уравненіе, корни котораго α, β, γ удовлетворяютъ равенствамъ

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=a,\quad \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=b,\quad \frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\gamma^4}=c,$$

гдѣ a, b, c — данныя числа.

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 279 (5 сер.). Доказать тожество

$$4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2},$$

гдѣ h_a, h_b, h_c, и r, r_a, r_b, r_c — высоты и радіусы круговъ вписаннаго и внѣвписанныхъ какого-нибудь треугольника.

А. Радевъ (Ботево, Болгарія).

№ 280 (5 сер.). Построить треугольникъ ABC по биссектрисѣ Aa, суммѣ $AB+Ba$ боковой стороны и прилежащаго отрѣзка основанія и по углу C, противолежащему этой сторонѣ.

И. Поляковъ (Тифлисъ).

№ 281 (5 сер.). Найти многочленъ $F(x)$, удовлетворяющій тожеству

$$F(x+2)-2F(x+1)+F(x)=x.$$

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 188 (5 сер.). *Найти внутри треугольника* ABC *точку* O, *для которой произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нея на стороны треугольника, достигаетъ maximum'а.*

Называя перпендикуляры, опущенные изъ O на стороны $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ соотвѣтственно черезъ x, y, z, а площадь треугольника черезъ s, имѣемъ: площ. AOB + площ. BOC + площ. COA = площ. ABC, откуда

$$ax+by+cz=2s.$$

Итакъ, сумма величинъ ax, by, cz остается постоянной, а потому произведеніе $ax\,.\,by\,.\,cz=abc\,.\,xyz$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и произведеніе xyz достигаетъ, по извѣстной теоремѣ, maximum'а при наличности равенствъ $ax = by = cz$, равносильныхъ условіямъ:

$$\text{площ. } AOB = \text{площ. } BOC = \text{площ. } COA. \tag{1}$$

Пусть продолженіе AO пересѣкаетъ BC въ точкѣ M. Опуская изъ B и C перпендикуляры $B\beta$ и $C\gamma$ на AM и замѣчая, что равновеликіе [см. (1)] треугольники AOB и AOC имѣютъ общее основаніе AO, выводимъ отсюда, что $B\beta = C\gamma$. Итакъ, прямоугольные треугольники $B\beta M$ и $C\gamma M$, по равенству катетовъ $B\beta$ и $C\gamma$ и острыхъ угловъ при вершинѣ M равны, откуда $BM = MC$, т. е. искомая точка O лежитъ на медіанѣ AM. Точно такъ же докажемъ, что O лежитъ и на другой медіанѣ, а потому искомая точка O есть точка встрѣчи медіанъ, или центръ тяжести треугольника ABC.

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 190 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^7 + 2x^5 + 4x^4 - 36x^3 + 32x^2 - 72x + 48 = 0.$$

Разлагая членъ $32x^2$ на слагаемыя $24x^2$ и $8x^2$, запишемъ данное уравненіе въ видѣ:

$$(x^7 + 4x^4 - 36x^3 + 24x^2) + (2x^5 + 8x^2 - 72x + 48) = x^2(x^5 + 4x^2 - 36x + 24) +$$
$$+ 2(x^5 + 4x^2 - 36x + 24) = (x^2+2)\,[(x^5 - 36x) + (4x^2 + 24)] = (x^2+2)\,[x(x^4 - 36) +$$
$$+ 4(x^2+6)] = (x^2+2)(x^2+6)\,[x(x^2-6)+4] = (x^2+2)(x^2+6)\,[x(x^2-4) - 2x + 4] =$$
$$= (x^2+2)(x^2+6)\,[x(x^2-4) - 2(x-2)] = (x^2+2)(x^2+6)(x-2)\,[x(x+2)-2] =$$
$$= (x^2+2)(x^2+6)(x-2)(x^2+2x-2) = 0.$$

Итакъ, данное уравненіе распадается на слѣдующія уравненія второй и первой степени

$$x^2 + 2 = 0, \quad x^2 + 6 = 0, \quad x - 2 = 0, \quad x^2 + 2x - 2 = 0,$$

рѣшая которыя находимъ всѣ семь корней даннаго уравненія:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \pm i\sqrt{6}, \quad x_5 = 2, \quad x_{6,7} = -1 \pm \sqrt{3}, \quad \text{гдѣ } i = \sqrt{-1}.$$

А. Масловъ (Москва); *А. Григоренко* (Харьковъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Бунятянцъ* (Шуша).

№ 192 (5 сер.). *Доказать, что многочленъ*

$$a^{2n} + (a^2 - 1)(2a + 1)n - 1$$

дѣлится на $a^3 + a^2 - a - 1$ *при всякомъ цѣломъ и положительномъ* n.

Представимъ выраженіе $a^3 + a^2 - a - 1$, разлагая его на множителей, въ видѣ: $a^3 + a^2 - a - 1 = a^2(a+1) - (a+1) = (a+1)(a^2-1)$. Записавъ данный многочленъ въ видѣ:

$$a^{2n} + (a^2-1)(2a+1)n - 1 = [(a^2)^n - 1] + (a^2-1)(2a+1)n, \tag{1}$$

заключаемъ, согласно съ теоремой Б е з у, что выраженіе $(a^2)^n - 1$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и весь многочленъ дѣлится на $a^2 - 1$. Производя дѣленіе, имѣемъ [см. (1)]:

$$[a^{2n} + (a^2 - 1\ (2a+1)n - 1] : (a^2 - 1) = (a^2)^{n-1} + (a^2)^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + (a^2)^2 + a^2 + 1 + (2a+1)n. \tag{2}$$

Называя черезъ $f(a)$ многочленъ, полученный во второй части равенства (2), имѣемъ:

$$f(-1)=[(-1)^2]^{n-1}+[(-1)^2]^{n-2}+\cdots+[(-1)^2]^1+1+(-2+1)\,n=n-n=0,$$

откуда видно, по теоремѣ Безу, что $f(a)$ дѣлится на $a+1$. Пусть $\frac{f(a)}{a+1}=\varphi(a)$, гдѣ $\varphi(a)$, какъ только-что доказано, есть цѣлый многочленъ. Тогда [см. (2)]:

$$a^{2n}+(a^2-1)(2a+1)\,n-1=(a^2-1)f(a)=(a^2-1)(a+1)\,\varphi(a)=$$
$$=(a^3+a^2-a-1)\,\varphi(a),$$

т. е. многочленъ $a^{2n}+(a^2-1)(2a+1)\,n-1$ дѣлится на a^3+a^2-a-1.

Замѣчаніе. Называя данный многочленъ черезъ $F(a)$, а производную его по a черезъ $F'(a)$, имѣемъ:

$$F(a)=a^{2n}+2a^3n+a^2n-2an-n-1,$$

$$F'(a)=2na^{2n-1}+6a^2n+2an-2n.$$

откуда

$$F(1)=1+2n+n-2n-n-1=0,$$

$$F(-1)=1-2n+n+2n-n-1=0,$$

$$F'(-1)=-2n+6n-2n-2n=0,$$

а потому многочленъ $F(a)$ имѣетъ корень $a=1$ и корень $a=-1$ второй кратности и дѣлится, такимъ образомъ, на $(a-1)(a+1)^2=(a^2-1)(a+1)=$ $=a^3+a^2-a-1$.

Н. Доброгаевъ (Одесса); *А. Д.* (Лодзь); *А. Фельдманъ* (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *В. Бунятянцъ* (Шуша); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 195 (5 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$(a+b+x)^3-4\,(a^3+b^3+x^3)-12abx=0.$$

Раскрывъ скобки, сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ обѣ части на -3, находимъ:

$$x^3+3\,(a+b)x^2+3\,(a+b)^2x-12abx+(a+b)^3-4\,(a^3+b^3)-4x^3=$$
$$=-3x^3+3(a+b)x^2+3[(a+b)^2-4ab]x+a^3+b^3+3ab(a+b)-4(a^3+b^3)=$$
$$=-3x^3+3\,(a+b)\,x^2+3\,(a-b)^2\,x-3\,[a^3+b^3-(a+b)\,ab]=$$
$$=-3x^3+3\,(a+b)\,x^2+3\,(a-b)^2\,x-3\,(a+b)\,(a^2-ab+b^2-ab)=$$
$$=-3x^3+3\,(a+b)\,x^2+3\,(a-b)^2\,x-3\,(a+b)\,(a-b)^2=0,$$
$$x^3-(a+b)\,x^2-(a-b)^2\,x+(a+b)\,(a-b)^2=0,$$

или $\quad x^2\,[x-(a+b)]-(a-b)^2\,[x-(a+b)]=[x^2-(a-b)^2]\,[x-(a+b)]=0,$

откуда $x^2-(a-b)^2=0$, или $x-(a+b)=0$. Рѣшая эти уравненія, получимъ:

$$x_1=a-b,\quad x_2=b-a,\quad x_3=a+b.$$

В. Моргулевъ (Одесса); *А. Масловъ* (Москва); *Н. Доброгаевъ* (Одесса); *А. Д.* (Лодзь); *N. N.*; *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *Н. Коровицкій* (Аккерманъ); *В. Бунятянцъ* (Шуша).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

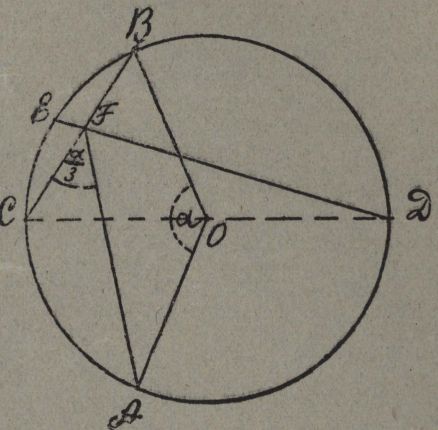
Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Геометрія круга (Циклометрія).

Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908 г. Стр. XI+114+6=131. Цѣна 1 руб.

А. П. ОХИТОВИЧЪ. Новый (неопредѣленный) методъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Ч. I-я. Общее рѣшеніе уравненій первой степени: неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ. Казань, 1900 г. 333 стр. Цѣна 2 р. 50 к.

Обращаться въ книжные магазины: „Новаго Времени“ (СПБ., Москва, Харьковъ, Саратовъ, Одесса), Н. Н. Карбасникова (СПБ., Москва, Варшава, Вильна), А. А. Дубровина (Казань), „Общественная Польза“ (СПБ.), Оглоблина (Кіевъ), Т-ва Сытина (Москва), „Трудъ“ (Москва), „Сотрудникъ Школъ“ (Москва), Бельке (Кіевъ), „Товарищества“ (Самара), „Волжанинъ“ (Самара) и др.



$\smile AC = \smile CB;\ \smile AD = \smile DB;\ \smile CE = \smile EB.$

Открыта подписка на 1910 г. (XXI г.) на журналъ

„ВОПРОСЫ ФИЛОСОФІИ и ПСИХОЛОГІИ“.

Изданіе Московскаго Психологическ. О-ва, при содѣйствіи
С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО ФИЛОСОВСКАГО О-ВА.

Вышла 1-я (январь—февраль) книга 1910 г. Ея содержаніе: Философія исторіи Гегеля. **В. И. Герье**. Этика Д. Юма. 1. Психологическія предпосылки этики, **Н. Д. Виноградова**. Ученія софистовъ о естественномъ правѣ, **П. И. Новгородцева**. Понятія права и силы, **И. А. Ильина**. Душевныя способности какъ основныя біологическія функціи, **А. Ф. Лазурскаго**. Критика и библіографія. Библіографическій листокъ. Извѣстія и замѣтки. Московское Психологическое Общество.

Журналъ выходитъ **пять** разъ въ годъ (приблизительно въ концѣ февраля, апрѣля, іюня, октября и декабря). Книгами около 15 печатн. листовъ.

Условія подписки: на годъ (съ 1-го января 1910 г. по 1-е января 1911 г.) безъ доставки—**6 р.**, съ доставкой въ Москвѣ—**6 р. 50 к.**, съ пересылкой въ другіе города—**7 р.**, за границу—**8 р.**

Учащіеся въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, сельскіе учителя и сельскіе священники пользуются **скидкой** въ **2 руб**. Подписка на **льготныхъ условіяхъ** принимается **только** въ конторѣ журнала: Москва, Б. Никитская, б. Чернышевскій пер., д. 9, кв. 5, и книжн. магаз. Нов. Времени, Карбасникова, Вольфа, Отоблина, Башмакова и др.

Редакторъ Л. М. ЛОПАТИНЪ.