№ 515.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики,

издаваемый

В. А. Гернетомъ

подъ редакціей

Приватъ-Доцента В. Ф. Кагана.

XLIII-го Семестра № 11-й.

ОДЕССА.
Типографія Акц. Южно-Русскаго О-ва Печ. Дѣла. Пушкинская, 18.
1910.

XLIII Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 515.

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ 190⁷/₈ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(Продолженіе).*

IV. Комплексныя числа.

1. Обыкновенныя комплексныя числа.

Позвольте мнѣ предпослать нѣсколько историческихъ указаній о развитіи этихъ чиселъ. Впервые мнимыя числа появляются въ 1545 г. у Кардано (Cardano), но и то случайно, при рѣшеніи кубическаго уравненія. Относительно ихъ дальнѣйшаго развитія можно повторить замѣчаніе, сдѣланное нами по поводу отрицательныхъ чиселъ: помимо и даже противъ воли того или другого математика, мнимыя числа снова и снова появляются при выкладкахъ, и лишь постепенно, по мѣрѣ того, какъ обнаруживается польза отъ ихъ употребленія, они получаютъ все болѣе и болѣе широкое распространеніе.

*) См. № 513 „Вѣстника".

Конечно, математики дѣлали это не съ легкимъ сердцемъ; мнимыя числа долго сохраняли нѣсколько мистическую окраску, какую они и теперь еще имѣютъ въ глазахъ ученика, который впервые слышитъ объ этомъ удивительномъ $i = \sqrt{-1}$. Для подтвержденія я хочу привести вамъ одну крайне характерную фразу Лейбница, относящуюся къ 1702 году; вотъ она: „Мнимыя числа это — прекрасное и чудесное убѣжище божественнаго духа, почти-что сочетаніе (amphibium) бытія съ небытіемъ“. Въ XVIII вѣкѣ логическая сторона вопроса еще нисколько не выясняется; но благодаря Эйлеру устанавливается основное значеніе мнимыхъ чиселъ въ теоріи функцій: въ 1748 году Эйлеръ нашелъ удивительное соотношеніе:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

которое вскрываетъ внутреннюю связь тѣхъ видовъ функціональной зависимости, которые встрѣчаются въ элементарномъ анализѣ. Лишь XIX вѣкъ принесъ съ собой логически ясное пониманіе сущности комплексныхъ чиселъ. Здѣсь прежде всего надо указать на геометрическую интерпретацію, къ которой почти одновременно пришли многіе изслѣдователи на рубежѣ двухъ столѣтій. Достаточно будетъ указать на того, кто несомнѣнно наиболѣе глубоко проникъ въ сущность вопроса и дольше всѣхъ оказывалъ вліяніе на ученый міръ, на нашего Гаусса; уже въ 1797 году, какъ видно изъ упомянутаго выше его дневника, онъ вполнѣ владѣлъ этой интерпретаціей, но онъ опубликовалъ ее лишь гораздо позже. Вторымъ завоеваніемъ XIX столѣтія является созданіе чисто формальнаго обоснованія комплексныхъ чиселъ, которое сводитъ ихъ къ цѣлымъ числамъ; имъ мы обязаны англійскимъ математикамъ тридцатыхъ годовъ, о чемъ вы найдете болѣе подробныя свѣдѣнія въ уже цитированной книгѣ Ганкеля (Hankel, стр. 66).

Остановимся подробнѣе на этихъ двухъ способахъ обоснованія теоріи мнимыхъ чиселъ, господствующихъ по настоящее время. Станемъ сперва на чисто-формальную точку зрѣнія, согласно которой правильность образованія новыхъ понятій обусловливается не значеніемъ самихъ объектовъ, а отсутствіемъ внутренняго противорѣчія въ правилахъ дѣйствій. Съ этой точки зрѣнія введеніе комплексныхъ чиселъ представляется въ слѣдующемъ видѣ, свободномъ отъ всякихъ слѣдовъ чего-либо таинственнаго:

1) Комплексное число $x + iy$ есть соединеніе двухъ вещественныхъ чиселъ x, y въ одну числовую пару*), относительно которой принимаются слѣдующія положенія:

2) Два комплексныхъ числа $x + iy$, $x' + iy'$ считаются равными въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $x = x'$, $y = y'$.

*) Т. е. два числа x, y соединяются въ пару, которая изображается въ видѣ $x + iy$, гдѣ i есть символъ, отмѣчающій второй элементъ пары.

Прим. ред.

3) *Сложеніе и вычитаніе* опредѣляются такъ:

$$(x+iy)\pm(x'+iy')=(x\pm x')+i(y\pm y').$$

Легко видѣть, что при этихъ условіяхъ остаются въ силѣ *всѣ правила сложенія, кромѣ закона монотонности*, который не можетъ быть сохраненъ въ старой формулировкѣ, такъ какъ комплексныя числа, по самой своей природѣ, не допускаютъ того простого расположенія въ рядъ по ихъ величинѣ, которое свойственно натуральнымъ и вообще вещественнымъ числамъ. Ради краткости я не вхожу въ разсмотрѣніе той измѣненной формы, которую приходится поэтому дать закону монотонности.

4) Что касается *умноженія*, то мы устанавливаемъ, что выкладки производятся такъ же, какъ съ обыкновенными буквами, но только при этомъ мы всегда *принимаемъ* $i^2=-1$, такъ что, напримѣръ,

$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

Въ результатѣ имѣютъ мѣсто, какъ нетрудно видѣть, *всѣ законы умноженія кромѣ закона монотонности*.

5) *Дѣленіе опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію*; въ частности

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

въ чемъ легко убѣдиться перемноженіемъ.

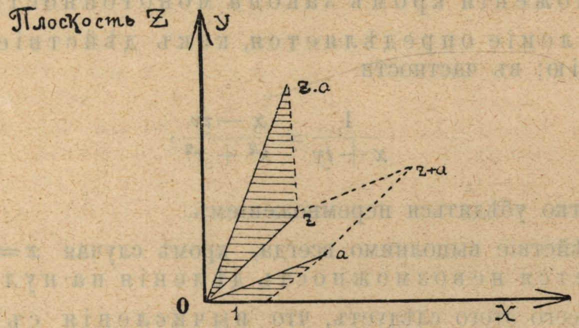
Это дѣйствіе выполнимо всегда, кромѣ случая $x=y=0$, т. е. *сохраняется невозможность дѣленія на нуль*.

Изъ всего этого слѣдуетъ, что *вычисленія съ комплексными числами не могутъ привести къ противорѣчіямъ, такъ какъ мы свели эти вычисленія цѣликомъ къ вещественнымъ числамъ и къ извѣстнымъ дѣйствіямъ надъ ними*, а эти послѣднія мы здѣсь будемъ считать свободными отъ противорѣчій.

Послѣ этихъ чисто формальныхъ разсужденій естественно возникаетъ вопросъ, не возможно ли такое *геометрическое* или *какое-нибудь другое наглядное толкованіе комплексныхъ чиселъ и операцій надъ ними*, которое давало бы въ то же время *наглядное обоснованіе отсутствія въ нихъ внутреннихъ противорѣчій*.

Всѣмъ вамъ извѣстно, — къ тому же мнѣ уже приходилось упоминать объ этомъ, — какимъ образомъ *совокупность точекъ* $x|y$ *плоскости въ системѣ координатъ* x,y *разсматриваютъ, какъ изображеніе совокупности комплексныхъ чиселъ* $x+iy$. Сумма двухъ чиселъ $z+a$ получается тогда посредствомъ извѣстнаго построенія параллелограмма по соотвѣтствующимъ этимъ числамъ точкамъ и по началу координатъ O (фиг. 19), между тѣмъ какъ произведенiе $z.a$ получается при помощи точки-единицы 1 ($x=1, y=0$) посредствомъ построенiя треугольника, подобнаго треугольнику $aO1$. Другими словами, сложенiе $z'=z+a$ изображается параллельнымъ перенесенiемъ плоскости въ себѣ самой, умноженiе $z'=z.a$ — подобнымъ преобразованiемъ, т. е. вращенiемъ и растяженiемъ при неподвижномъ началѣ O. Расположенiе на плоскости точекъ, соотвѣтствующихъ числамъ, сразу показываетъ, чѣмъ слѣдуетъ замѣнить здѣсь правила монотонности вещественныхъ чиселъ. Этихъ указанiй вполнѣ достаточно, чтобы напомнить вамъ постановку вопроса.

Я хочу воспользоваться здѣсь случаемъ, чтобы указать вамъ на то мѣсто у Гаусса, гдѣ это обоснованiе комплексныхъ чиселъ посредствомъ геометрической интерпретацiи ихъ высказано вполнѣ отчетливо и благодаря которому оно впервые получило всеобщее признанiе. Въ одной работѣ 1831 года Гауссъ занимается теорiей цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ $a+ib$, гдѣ a и b суть цѣлыя вещественныя числа, и распространяетъ на нихъ теоремы обыкновенной теорiи



Фиг. 19.

чиселъ относительно простыхъ множителей, квадратичныхъ и биквадратичныхъ вычетовъ и т. д. О подобныхъ обобщенiяхъ теорiи чиселъ мы уже упоминали по поводу великой теоремы Ферма.

Въ собственномъ сообщенiи*) объ этой работѣ Гауссъ говоритъ о томъ, что онъ называетъ „истинной метафизикой мнимыхъ чиселъ“. Здѣсь онъ основываетъ оправданiе дѣйствiй съ комплексными числами исключительно на томъ обстоятельствѣ, что этимъ числамъ и дѣйствiямъ надъ ними можно дать указанное выше наглядное геометрическое толкованiе; такимъ образомъ, Гауссъ нисколько не становится на формальную точку зрѣнiя. Вообще же эти довольно длинныя, весьма красиво написанныя разсужденiя Гаусса въ высшей степени интересны и заслуживаютъ

*) См. Werke, Bd. II. (Göttingen, 1876), стр. 175.

того, чтобы вы ихъ прочитали. Упомяну еще только о томъ, что въ этой статьѣ Гауссъ предлагаетъ вмѣсто слова „мнимый“ (imaginär) болѣе ясное слово „комплексный“, которое дѣйствительно вошло въ употребленіе.

2. Высшія комплексныя числа, въ особенности кватерніоны.

У всякаго, основательно занимавшагося комплексными числами, возникаетъ вопросъ, нельзя ли построить другія, высшія комплексныя числа съ большимъ числомъ новыхъ единицъ, а не съ однимъ только i, и цѣлесообразно опредѣлить дѣйствія надъ ними? Къ положительнымъ результатамъ въ этой области впервые пришли около 1840 года независимо другъ отъ друга Г. Грассманъ (H. Grassmann) въ Штетинѣ и Гамильтонъ (W. R. Hamilton) въ Дублинѣ. Съ изобрѣтеніемъ Гамильтона, такъ называемымъ исчисленіемъ кватерніоновъ, я хочу познакомить васъ нѣсколько ближе. Но сперва я скажу нѣсколько словъ объ общей постановкѣ проблемы.

Обыкновенныя комплексныя числа $x+iy$ можно разсматривать, какъ линейныя комбинаціи вида

$$x\,.\,1+y\,.\,i,$$

построенныя изъ двухъ различныхъ единицъ 1 и i съ помощью вещественныхъ параметровъ x, y. Аналогично этому станемъ разсматривать сколько угодно — скажемъ n, — различныхъ между собою единицъ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и назовемъ системой высшихъ комплексныхъ чиселъ, построенной изъ этихъ единицъ, совокупность комбинацій вида:

$$x=x_1 e_1+x_2 e_2+\cdots+x_n e_n,$$

составленныхъ съ помощью n произвольныхъ вещественныхъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Само собою разумѣется, что два такихъ комплексныхъ числа, — напримѣръ, x и

$$y=y_1 e_1+y_2 e_2+\cdots+y_n e_n,$$

— мы будемъ считать равными тогда и только тогда, когда коэффиціенты при отдѣльныхъ единицахъ, такъ называемыя составляющія комплекснаго числа, попарно равны между собой:

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \ldots,\ x_n=y_n,$$

Столь же естественно и опредѣленіе сложенія и вычитанія, которое попросту сводитъ эти операціи къ сложенію и вычитанію составляющихъ:

$$x\pm y=(x_1\pm y_1)e_1+(x_2\pm y_2)e_2+\cdots+(x_n\pm y_n)e_n.$$

Труднѣе и интереснѣе обстоитъ дѣло съ умноженіемъ.

Здѣсь мы, конечно, начинаемъ съ того, что поступаемъ по общимъ правиламъ буквеннаго исчисленія, помножая каждый i-ый членъ выраженія x на каждый k-ый членъ выраженія y $(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$:

$$x \cdot y = \sum_{(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} x_i y_k e_i e_k .$$

Но чтобы этотъ результатъ умноженія также представлялъ собой нѣкоторое число нашей системы, необходимо обладать правиломъ, которое изображало бы произведенія $e_i \cdot e_k$ въ видѣ комплексныхъ чиселъ системы, т. е. въ видѣ линейныхъ комбинацій единицъ; необходимо имѣть, слѣдовательно, n^2 равенствъ такого вида:

$$e_i e_k = c_{ik1} e_1 + c_{ik2} e_2 + \cdots + c_{ikn} e_n = \sum_{(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} c_{ikl} \cdot e_l \quad (i,\ k = 1, 2,\ \ldots,\ n)$$

Тогда, дѣйствительно, произведеніе

$$x \cdot y = \sum_{(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)} \left(\sum_{(i,\ k=1,\ \ldots,\ n)} x_i y_k c_{ikl} \right) e_l$$

представитъ собою нѣкоторое число нашей системы. Въ установленіи этого правила умноженія, т. е. схемы коэффиціентовъ c_{ikl}, заключается характеристика каждой частной системы комплексныхъ чиселъ.

Если опредѣлить дѣленіе, какъ дѣйствіе, обратное умноженію, то оказывается, что опредѣленное такимъ образомъ дѣленіе не всегда однозначно выполняется, даже и въ томъ случаѣ, если дѣлитель не обращается въ 0. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣленіе y изъ уравненія $x \cdot y = z$ получается посредствомъ рѣшенія n линейныхъ уравненій

$$\sum x_i y_k c_{ik1} = z_1, \quad \sum x_i y_k c_{ik2} = z_2, \ldots, \quad \sum x_i y_k c_{ikn} = z_n$$

$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ въ каждомъ суммованіи) съ неизвѣстными $y_1, y_2, \ldots y_n$; но эти уравненія въ томъ случаѣ, если ихъ опредѣлитель обращается въ 0, либо вовсе не имѣютъ рѣшеній, либо имѣютъ ихъ безчисленное множество; въ подобномъ случаѣ всѣ z_i могутъ равняться 0, хотя и не всѣ $y_k = 0$, т. е. произведеніе двухъ чиселъ можетъ обращаться въ 0, хотя ни одинъ сомножитель не равенъ нулю. Только съ помощью спеціальнаго искуснаго подбора величинъ c_{ikl} можно достичь здѣсь сохраненія указаннаго свойства обыкновенныхъ чиселъ; правда, болѣе подробное изученіе вопроса показываетъ, что при $n > 2$ сохраненіе этого свойства всегда покупается цѣною уклоненія отъ одного изъ другихъ правилъ дѣйствій; поэтому стараются распорядиться такъ, чтобы этимъ уклоняющимся свойствомъ оказалось такое, которое наименѣе важно для соотношеній, составляющихъ цѣль изслѣдованія.

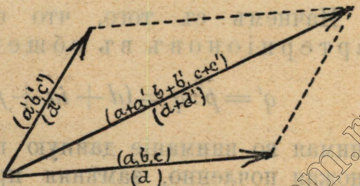
Всѣ эти общія разсужденія мы теперь прослѣдимъ на кватерніонахъ, которые — въ виду ихъ примѣненій въ физикѣ и механикѣ — представляютъ несомнѣнно самую важную систему высшихъ комплексныхъ чиселъ. Какъ видно изъ ихъ названія, это — четырехчленныя числа ($n = 4$). Въ частномъ случаѣ они вырождаются въ трехчленные векторы; послѣдніе стали теперь общеизвѣстными и о нихъ, вѣроятно, при случаѣ упоминаютъ и въ школѣ.

За первую изъ четырехъ единицъ, изъ которыхъ составляются кватерніоны, какъ и въ случаѣ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, принимаютъ обыкновенную вещественную единицу 1. Три другія единицы обыкновенно обозначаютъ по Гамильтону черезъ i, j, k, такъ что общій видъ кватерніона получается такой:

$$q = d + ia + jb + kc,$$

гдѣ a, b, c, d изображаютъ вещественные параметры или коэффиціенты кватерніона. Первую составляющую d, на которую умножается 1 и которая соотвѣтствуетъ вещественной части обыкновеннаго комплекснаго числа, называютъ скалярной составной частью кватерніона, совокупность же трехъ остальныхъ членовъ $ai + bj + ck$ называютъ его векторіальной составной частью.

Относительно сложенія врядъ ли можно что-либо прибавить къ предыдущимъ общимъ соображеніямъ; поэтому я дамъ вамъ сразу же естественное геометрическое толкованіе его, основанное на извѣстной вамъ интерпретаціи векторовъ. А именно, представимъ себѣ отрѣзокъ, соотвѣтствующій векторіальной части кватерніона q и имѣющій проекціи a, b, c на оси координатъ, и припишемъ ему вѣсъ, равный скалярной части d. Послѣ этого сложеніе q и $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ сводится къ слѣдующему: мы строимъ равнодѣйствующую обоихъ отрѣзковъ по извѣстному правилу параллелограмма для сложенія векторовъ (фиг. 20) и приписываемъ ей въ качествѣ вѣса сумму вѣсовъ обоихъ слагаемыхъ; этимъ путемъ мы дѣйствительно получаемъ отрѣзокъ, представляющій собой кватерніонъ



Фиг. 20.

$$q + q' = (d + d') + i(a + a') + j(b + b') + k(c + c').$$

Со специальными свойствами кватерніоновъ мы встрѣчаемся впервые, когда переходимъ къ умноженію, а именно они заключаются, какъ мы видѣли это въ общей теоріи, въ томъ, какъ устанавливаются значенія произведеній единицъ. Я покажу вамъ прежде всего, къ какимъ кватерніонамъ Гамильтонъ приравниваетъ 16 произведеній основныхъ единицъ по 2. Первое условіе состоитъ въ томъ, чтобы съ первой единицей 1, какъ это показываетъ самое ея обозначеніе, производить вычисленія, какъ съ вещественнымъ числомъ 1; слѣдовательно:

$$1^2 = 1, \quad i \,.\, 1 = 1 \,.\, i = i, \quad j \,.\, 1 = 1 \,.\, j = j, \quad k \,.\, 1 = 1 \,.\, k = k.$$

Но существенно новыми являются условія относительно квадратовъ трехъ другихъ единицъ:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

и относительно ихъ произведеній по двѣ:

$$j \,.\, k = + i, \quad k \,.\, i = + j, \quad i \,.\, j = + k,$$

между тѣмъ какъ при обратномъ порядкѣ сомножителей полагаемъ:

$$k \,.\, j = - i, \quad i \,.\, k = - j, \quad j \,.\, i = - k.$$

При этомъ сразу бросается въ глаза, что перемѣстительный законъ при умноженіи, вообще говоря, не имѣетъ мѣста; съ этимъ неудобствомъ приходится примириться, чтобы спасти однозначность дѣленія и ту теорему, по которой произведеніе двухъ чиселъ только въ томъ случаѣ можетъ обратиться въ 0, если одинъ изъ сомножителей становится равнымъ нулю. Мы сейчасъ увидимъ, что этотъ и всѣ другіе законы сложенія и умноженія, за единственнымъ указаннымъ исключеніемъ, дѣйствительно остаются въ силѣ, и что, слѣдовательно, сдѣланныя выше простыя условія являются въ высшей степени цѣлесообразными.

Начнемъ съ того, что составимъ произведеніе двухъ квартерніоновъ въ общемъ видѣ:

$$q' = p \,.\, q = (d + ia + jb + kc) \,.\, (w + ix + jy + kz),$$

принимая во вниманіе данную послѣдовательность сомножителей. Перемножая почленно, замѣняя произведенія единицъ ихъ значеніями изъ нашей таблицы умноженій и соединяя затѣмъ члены съ одинаковыми единицами въ одинъ, находимъ:

$$\begin{aligned} q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = \; & (dw - ax - by - cz) \\ & + i\,(aw + dx + bz - cy) \\ & + j\,(bw + dy + cx - az) \\ & + k\,(cw + dz + ay - bx) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, составляющія кватерніона-произведенія представляютъ собой опредѣленныя простыя двулинейныя*) комбинаціи составляющихъ обоихъ сомножителей. При перемѣнѣ порядка сомножителей 6 подчеркнутыхъ членовъ мѣняютъ свои знаки, такъ что $q . p$, вообще говоря, существенно отлично отъ $p . q$, и при томъ не только по знаку, какъ это имѣетъ мѣсто для произведеній отдѣльныхъ единицъ.

Въ то время, какъ перемѣстительный законъ, какъ мы видимъ, не имѣетъ мѣста, законы распредѣлительный и сочетательный остаются въ силѣ. Дѣйствительно, если вычислить, съ одной стороны, произведеніе $p(q+q_1)$, а, съ другой, выраженіе $pq+pq_1$, формально перемножая члены, и не замѣнять произведеній единицъ ихъ значеніями, то должны получиться тождественныя выраженія; но въ нихъ ничто не измѣнится, если затѣмъ къ тому и другому выраженію примѣнить таблицу умноженія единицъ. Далѣе, нетрудно видѣть, что и законъ сочетательный долженъ остаться всегда въ силѣ, если только онъ дѣйствителенъ для умноженія единицъ. А этотъ послѣдній фактъ можно установить непосредственно, на основаніи таблицы умноженія, какъ я покажу на такомъ примѣрѣ:

$$(ij)k = i(jk).$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(ij)k = k . k = -1$$

и

$$i(jk) = i . i = -1.$$

(Окончаніе слѣдуетъ).

Міровой эѳиръ.

Проф. О. Лоджа.

(Продолженіе).*

Зрѣніе.

Я сдѣлаю здѣсь небольшое отступленіе, во избѣжаніе всякихъ недоразумѣній въ связи съ тѣмъ, что я намѣренно соединилъ въ одно температурные и зрительные нервы. Правда, эти нервы не одинаковы, но они сходны въ томъ отношеніи, что и тѣ и другіе обнаруживаютъ намъ существованіе излученія; если бы мы были слѣпы, мы

---

*) Т. е. выраженія, составленныя изъ двухъ системъ величинъ a, b, c, d и x, y, z, w такъ, что въ каждый членъ входитъ линейно одинъ множитель изъ первой системы и одинъ изъ второй.

Прим. ред.

все же многое могли бы знать о солнцѣ, а если бы наши температурные нервы были неизмѣримо болѣе чувствительны (не всѣ сплошь, потому что это было бы для насъ слишкомъ мучительно, а лишь немногіе, расположенные въ нѣкоторомъ защищенномъ мѣстѣ), то мы могли бы даже знать о существованіи луны, планетъ и звѣздъ. И дѣйствительно, легко вообразить себѣ глазъ, состоящій изъ зрачка (или, лучше, чечевицы) и впадины, дно которой устлано оболочкой, чувствительной къ теплотѣ, — и такой глазъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ былъ бы чрезвычайно чувствителенъ. Онъ давалъ бы намъ свѣдѣнія не только о свѣтѣ, — онъ былъ бы способенъ открывать всѣ пертурбаціи въ эѳирѣ, вызванныя окружающими предметами, и потому прекрасно могъ бы „видѣть“ въ тѣхъ помѣщеніяхъ, которыя мы называемъ темными. Неудобство этого глаза состояло бы, вѣроятно, въ томъ, что онъ видѣлъ бы слишкомъ многое, потому что на него необходимо воздѣйствовали бы всѣ виды излученія, прямо пропорціонально ихъ энергіи; развѣ только онъ былъ бы снабженъ наборомъ экрановъ съ соотвѣтственными поглощательными способностями. Но каковы бы ни были преимущества или недостатки такого органа, во всякомъ случаѣ до сихъ поръ мы имъ не обладаемъ. Дѣйствіе нашего глаза заключается не въ обнаруженіи тепла; другими словами, на него воздѣйствуетъ не вся скала колебаній эѳира, а только весьма малая и, повидимому, неважная ея часть. Глазъ нашъ совершенно игнорируетъ эѳирныя волны, частота которыхъ сравнима съ частотою звуковыхъ волнъ; и на всѣ колебанія, заключенныя въ тридцати или сорока верхнихъ октавахъ этого тона, не отзывается ничто насъ окружающее; но еще выше, когда мы дойдемъ до невообразимо высокаго тона въ 400 000 000 — 700 000 000 милліоновъ колебаній въ секунду, — а столь частыя колебанія способны испускать лишь чрезвычайно немногія доступныя намъ тѣла, и для искусственнаго ихъ воспроизведенія требуется много знанія и опытности, — къ такимъ волнамъ глазъ нашъ проявляетъ острую, неожиданную и въ высшей степени мудрую чувствительность.

Этотъ небольшой обрывокъ всего излученія самъ по себѣ врядъ-ли достоинъ особаго вниманія. Если бы онъ не игралъ такой роли для человѣка, да свѣтлячковъ, да немногихъ другихъ видовъ живыхъ существъ, то врядъ ли даже входящія въ составъ его волны когда-либо возникали бы на столь ограниченномъ по своимъ размѣрамъ комкѣ вещества, какъ земля. Если исключить такое случайное явленіе, какъ изверженіе вулкана или блескъ молніи, то лишь гигантскія тѣла, какъ солнце и звѣзды, будутъ обладать достаточной энергіей для того, чтобы издавать столь высокія ноты, подобныя звукамъ своеобразной флейты; и это удается имъ благодаря главной, основной силѣ — энергіи тяготѣнія, производящей не только эти лучи, но и всѣ другіе виды излученія. Свѣтлячки, поскольку я знаю, одни только обладаютъ тайной испускать только физіологически-полезныя волны, не соединенныя ни съ какими другими.

Почему эти волны физіологически-полезны, почему именно они являются тѣмъ, что называется „свѣтомъ“, между тѣмъ какъ другіе виды излученія оказываются „темными“, — вотъ вопросъ, который слѣдуетъ поставить, но на который въ настоящее время можно лишь пытаться отвѣтить. Въ концѣ концовъ, отвѣтъ долженъ быть данъ физіологомъ; и въ самомъ дѣлѣ, различіе между свѣтомъ и не-свѣтомъ можно установить только по отношенію къ глазу и къ его особой, спеціальной чувствительности; однако, предварительныя свѣдѣнія можетъ дать физіологу физикъ. Эѳирныя волны, воздѣйствующія на глазъ и на фотографическую пластинку, по своимъ размѣрамъ могутъ считаться до нѣкоторой степени сравнимыми съ размѣрами атомовъ вещества. Когда физическое явленіе связано съ предѣльными атомами вещества, то его въ настоящее время часто относятъ къ области знанія, объединяемой подъ именемъ химіи. Зрѣніе есть, вѣроятно, химическое чувство. Возможно, что въ сѣтчаткѣ содержатся сложныя соединенія атомовъ, разлагающіяся на части подъ дѣйствіемъ падающихъ на нихъ свѣтовыхъ колебаній и быстро образующіяся вновь благодаря живымъ силамъ сцѣпленія, управляющимъ ихъ жизнью; а окончанія нервовъ тѣмъ временемъ оцѣниваютъ ихъ временно-диссоцированное состояніе. Все это смѣлая фантазія! Ее можно признать, только какъ рабочую гипотезу, наводящую на изслѣдованіе факта; тѣмъ не менѣе, она намѣчаетъ направленіе, по которому идутъ мысли нѣкоторыхъ физиковъ, — направленіе, указываемое многими недавно открытыми экспериментальными фактами*).

Тяготѣніе и сцѣпленіе.

Я имѣю возможность лишь указать на нѣкоторыя другія явленія, для которыхъ необходимо существованіе непрерывной соединительной среды. Въ главѣ VIII мы покажемъ, что механическое дѣйствіе на разстояніи невозможно. Тѣло можетъ дѣйствовать лишь непосредственно на то, что находится съ нимъ въ соприкосновеніи; сила можетъ передаваться черезъ пространство только посредствомъ соприкасающихся одна съ другой частицъ, т. е. черезъ среду, практически непрерывную.

Земля получаетъ отъ солнца не одно только излученіе: существуетъ еще колоссальное дѣйствіе тяготѣнія, сила или тяга, бо́льшая той, какую могли бы выдержать милліонъ милліоновъ стальныхъ брусьевъ, каждый по пяти метровъ въ діаметрѣ (см. гл. IX). Какой механизмъ передаетъ эту громадную силу? Съ другой стороны, возьмите эту самую стальную балку: съ какимъ громаднымъ упорствомъ ея части удерживаютъ другъ друга, когда ее растягиваютъ съ этой ужасной силой! И вѣдь при этомъ ея частицы не соприкасаются непосредственно, онѣ соединены другъ съ другомъ лишь при посредствѣ всепроникающей связующей среды -- эѳира, среды, которая должна быть способна передавать тѣ громаднѣйшія натяженія, о существованіи коихъ намъ говоритъ наше знаніе тяготѣнія и сцѣпленія.

---

*) Срав. отдѣлы 157 А, 143, 187 и главу XVI моей книги „Современные взгляды на электричество“.

Электричество и магнетизмъ.

До сихъ поръ я ограничивался, главнымъ образомъ, изслѣдованіемъ воспріятія эѳира при помощи нашего стариннаго чувства зрѣнія, дающаго намъ возможность открывать тонкія и нѣжныя колебанія эѳира. Но въ послѣднее время у насъ начинаетъ образовываться новое чувство; правда, настоящаго органа чувствъ здѣсь нѣтъ, но то, что есть, въ значительной степени походитъ на новый органъ чувства; куски вещества, долженствующіе образовать этотъ органъ, не соединены съ нашимъ тѣломъ обычными звеньями боли и раздраженія; части этого новаго органа скорѣе похожи на искусственные зубы или механическіе члены, ихъ можно изготовлять въ мастерской физическихъ инструментовъ.

Электроскопы, гальванометры, телефоны — вотъ эти тонкіе инструменты; правда, до сихъ поръ они еще не затмеваютъ нашихъ органовъ чувствъ изъ плоти и крови, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ они приближаются къ послѣднимъ по своей необычайной чувствительности. Чего же однако, намъ удается достичь при помощи этихъ новыхъ органовъ? Можемъ ли мы ощутить запахъ эѳира, ощупать его или наилучшимъ образомъ сравнить его съ чѣмъ-нибудь? Быть можетъ, полезнаго сравненія въ данномъ случаѣ и не существуетъ; тѣмъ не менѣе, мы объ эѳирѣ разсуждаемъ такимъ образомъ, какъ будто ближайшимъ образомъ съ нимъ соприкасаемся. Вполнѣ наглядно представить себѣ все, что мы дѣлаемъ при этомъ, мы не можемъ. У насъ еще нѣтъ динамической теоріи ни электрическаго тока, ни статическихъ зарядовъ, ни магнетизма. Да вѣдь и динамической теоріи свѣта у насъ еще нѣтъ. И въ самомъ дѣлѣ, эѳиръ до сихъ поръ еще не нашелъ себѣ мѣста въ области обычной механики, — онъ еще не сведенъ къ движенію и силѣ: быть можетъ, это произошло потому, что въ *силовомъ* отношеніи онъ столь чрезвычайно неуловимъ, что до сихъ поръ еще остается вопросомъ, слѣдуетъ ли вообще представлять себѣ его, какъ нѣчто матеріальное. Нѣтъ, до сихъ поръ эѳиръ еще находится за предѣлами механики; возможно, что онъ такъ и останется внѣ ея границъ, и нашей первой добавочной категоріей, которой когда-нибудь суждено будетъ расширить основы физики, можетъ быть, явится эѳиръ. Такое включеніе новой категоріи, можетъ быть, придется сдѣлать прежде, чѣмъ мы попытаемся включить въ область физики жизненные или мыслительные процессы. Возможно, что все это сольется воедино.

Какъ бы тамъ ни было, вотъ что слѣдуетъ понимать подъ выраженіемъ, что мы до сихъ поръ не знаемъ, что такое электричество или эѳиръ. У насъ нѣтъ до сихъ поръ динамическаго объясненія ни того ни другого; однако, истекшее столѣтіе открыло намъ относительно нихъ такое громадное количество фактовъ, которое кажется поразительнымъ каждому, кто ихъ изучаетъ. И если настоящему или будущему столѣтію суждено ввести насъ глубже въ тайны этихъ и нѣкоторыхъ другихъ явленій, находящихся теперь на пути къ осмысленному изслѣдованію, то передъ нами вѣроятно откроются — я чувствую это — не только матеріальные горизонты, но намъ удастся пробраться въ ту область вселенной, куда наука никогда доселѣ не проникала, и которую только живописцы и поэты, философы и святые могли осматривать издали и ощупывать, какъ слѣпцы.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Естественные и искусственные пути возстановленія историками математики древнихъ доказательствъ и выводовъ *).

В. В. Бобынина,

приватъ-доцента Московскаго Университета.

Въ прежнее, хотя еще и очень недавнее время, на различные случаи возстановленія древнихъ доказательствъ и выводовъ смотрѣли обыкновенно, какъ на задачи, доступныя не только историкамъ математики, но и всѣмъ математикамъ вообще, хотя бы они и совсѣмъ не были знакомы съ исторіею математики. Необходимыми результатами практическаго примѣненія этого взгляда были, во-первыхъ, введеніе въ науку совершенно искусственныхъ и часто вполнѣ произвольныхъ пріемовъ и методовъ возстановленія и, во-вторыхъ, появленіе въ ученой литературѣ попытокъ возстановленія, иногда многочисленныхъ, но очень рѣдко достигающихъ даже своей ближайшей цѣли, т. е. не возстановленія въ строгомъ смыслѣ, а только полученія одинаковыхъ результатовъ, — напримѣръ, результатовъ вычисленія. Особенно яркимъ примѣромъ такого положенія дѣла могутъ служить многочисленныя попытки возстановленія способа приближеннаго извлеченія квадратнаго корня, которымъ пользовался Архимедъ для опредѣленія тѣхъ квадратныхъ корней этого рода, которые находятся въ его сочиненіи „Объ измѣреніи окружности". При выборѣ средствъ для достиженія своей цѣли авторы многихъ изъ этихъ попытокъ не стѣснялись даже фактомъ несуществованія во времена Архимеда избираемыхъ ими средствъ. Такъ, нѣкоторые изъ нихъ употребляли въ своихъ работахъ даже непрерывныя дроби. Понятно, что съ такими средствами достигнуть своей цѣли они не оказались въ состояніи. Получить точно результаты приближеннаго извлеченія квадратнаго корня, данные Архимедомъ, никому изъ нихъ не удалось. Автору настоящей статьи посчастливилось быть первымъ, который пришелъ въ своихъ вычисленіяхъ къ результатамъ, строго совпадающимъ съ полученными Архи-

*) Докладъ, прочитанный въ засѣданіи 5-го января 1910 года секціи математики XII-го Съѣзда Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

медомъ*). Но онъ пользовался въ своей работѣ не произвольнымъ выборомъ средствъ и шелъ въ ней не искусственными путями, а вполнѣ естественными, указанными ему Теономъ Александрійскимъ въ его „Комментаріи къ Альмагесту Птоломея“.

Употребленіе искусственныхъ путей и произвольныхъ средствъ возстановленія перешло, къ сожалѣнію, хотя сравнительно и въ болѣе ограниченныхъ размѣрахъ, отъ математиковъ, незнакомыхъ съ исторіею своей науки, и къ самимъ историкамъ математики. Одному изъ случаевъ этого рода и замѣнѣ въ немъ искусственнаго пути естественнымъ и посвящается предлагаемая статья.

Открытіе или, по меньшей мѣрѣ, знаніе и употребленіе правила вычисленія сторонъ раціональнаго прямоугольнаго треугольника съ меньшимъ изъ катетовъ, пропорціональнымъ нечетному числу, или, по терминологіи новѣйшей науки, формулы треугольниковъ этого рода, приписываются Пиѳагору такими достовѣрными писателями, какъ Проклъ Діадохъ и Геронъ Александрійскій. Проклъ въ своемъ „Комментаріи“ къ первой книгѣ „Элементовъ“ Евклида**) по поводу этой формулы говоритъ: „Сообщаютъ также нѣсколько методовъ находить такіе треугольники, изъ которыхъ одинъ приводится къ Платону, а другой, исходящій отъ нечетныхъ чиселъ, къ Пиѳагору. Именно данное нечетное число принимается за меньшій катетъ; изъ квадрата этого числа вычитается единица и остатокъ дѣлится пополамъ; въ результатѣ получается бо́льшій катетъ, а отъ прибавленія къ нему единицы еще и гипотенуза. Берутъ, напримѣръ, три; отъ квадрата 9 отнимаютъ единицу и дѣлятъ пополамъ остатокъ 8, что даетъ 4; къ этому прибавляютъ опять единицу, что составитъ 5, и такимъ образомъ находятъ прямоугольный треугольникъ, который имѣетъ сторонами числа 3, 4 и 5“. Выраженная при помощи новѣйшаго алгебраическаго знакоположенія, формула пиѳагоровскихъ раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ представляется, такимъ образомъ, въ слѣдующемъ видѣ: n — выражающее меньшій катетъ нечетное число, $\frac{1}{2}(n^2-1)$ — бо́льшій катетъ, $\frac{1}{2}(n^2-1)+1$ — гипотенуза.

Въ виду этого изложенія Прокла, не дающаго никакихъ указаній на путь, который привелъ Пиѳагора или другихъ древнихъ изслѣдователей къ ихъ открытію формулы пиѳагоровскихъ раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, естественно возникъ вопросъ о раскрытіи или возстановленіи этого пути. Извѣстный историкъ философіи Рötъ предложилъ, какъ рѣшеніе этого вопроса, слѣдующую свою попытку***), принятую съ одобреніемъ также и знаменитымъ историкомъ математики Морицомъ Канторомъ, который

*) V. V. Bobynin Extraction des racines carrées dans la Grece Antique. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 41 Jahrgang. 1896. Historisch-literarische Abteilung. S. 193—211.

**) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ed. Friedlein. Lipsiae. 1873. S. 428.

***) Röth. Geschichte der abendländischen Philosophie. II, S. 527.

ввелъ ее съ нѣкоторыми незначительными измѣненіями даже въ свои „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ *). Пусть меньшій изъ катетовъ треугольника выразится нечетнымъ числомъ $2a+1$. Тогда по формулѣ Пиѳагора бо́льшій катетъ будетъ $2a^2+2a$, а гипотенуза $2a^2+2a+1$. „Какъ“, спрашиваетъ г. Канторъ, „пришелъ Пиѳагоръ къ этому рѣшенію? „Возможенъ“, продолжаетъ онъ далѣе, „слѣдующій путь, который мы и представляемъ для испытанія, измѣнивъ только немного видъ, въ какомъ онъ былъ выраженъ первоначально, въ качествѣ догадки, Рётомъ“. Если

$$a^2=b^2+c^2, \tag{1}$$

то

$$c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b). \tag{2}$$

Требованіе удовлетворить этому уравненію можетъ быть исполнено только тогда, когда числа $a+b$ и $a-b$ оба четныя или оба нечетныя и при томъ такія, что отъ умноженія одного изъ нихъ на другое получается квадратное число. Именно такія числа и разсматриваются у Теона Смирнскаго подъ именемъ подобныхъ чиселъ **), что дѣлаетъ, по словамъ г. Кантора, „знаніе ихъ въ доплатоновское время въ высшей степени вѣроятнымъ“. Указанныя сейчасъ свойства этихъ чиселъ г. Канторъ, по крайней мѣрѣ для настоящаго случая, какъ требующаго для сторонъ разсматриваемаго рода прямоугольныхъ треугольниковъ выраженій въ цѣлыхъ числахъ, увеличиваетъ еще однимъ свойствомъ. Въ силу этого послѣдняго какъ сумма, такъ и разность, происходящія отъ сложенія и соотвѣтственно отъ вычитанія чиселъ $a+b$ и $a-b$, должны имѣть четныя значенія, какъ необходимыя для того, чтобы числа a и b были цѣлыми. Простѣйшій случай подобныхъ чиселъ, какъ это понятно само собою, есть тотъ, въ которомъ $a-b$ равно единицѣ, а $a+b$ — квадратному числу c^2, при чемъ, такъ какъ единица есть нечетное число, то по соотвѣтствующему изъ указанныхъ свойствъ подобныхъ чиселъ должно быть также нечетнымъ и c^2, а, слѣдовательно, и само c, которое, поэтому, можетъ быть представлено въ видѣ $2a+1$. Уравненіе (2) приводитъ, такимъ образомъ, къ тожеству

$$(2a+1)^2=(2a+1)^2 \,.\, 1,$$

въ которомъ

$$(2a+1)^2=a+b \quad \text{и} \quad 1=a-b,$$

а потому

$$b=\frac{(2a+1)^2-1}{2} \quad \text{и} \quad a=\frac{(2a+1)^2+1}{2},$$

что вмѣстѣ съ $c=2a+1$ и составляетъ искомую формулу пиѳагоровскихъ раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ.

---

*) I. (3. Aufl.). S. 185—186

**) Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. Hiller, 36.

Итакъ, своей цѣли — вывода формулы раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ Пиѳагора — изложенный способъ Рöта достигаетъ вполнѣ. Но видѣть въ немъ дѣйствительное возстановленіе древняго пути вывода этой формулы вслѣдствіе его гипотетичности едва ли возможно. Какъ основанный на свойствахъ подобныхъ чиселъ Теона Смирнскаго, жившаго спустя почти 600 лѣтъ послѣ окончательнаго распаденія пиѳагорейскаго союза, онъ требуетъ, хотя, по мнѣнію г. Кантора, и „въ высшей степени вѣроятнаго“ предположенія о знакомствѣ пиѳагорейцевъ съ этими числами, но все-таки предположенія. Въ то же время, какъ идущій чисто алгебраическимъ путемъ, онъ нуждается еще и въ другомъ и при томъ гораздо болѣе смѣломъ предположеніи, именно въ предположеніи знанія у Пиѳагора и пиѳагорейцевъ алгебры. Предвидя со стороны критики по поводу этого второго предположенія особенно сильныя и вѣскія возраженія, г. Канторъ выдвигаетъ противъ нихъ соображеніе, что, если Папирусъ Ринда не чуждался рѣшенія задачъ алгебраическаго характера, то и подавно могъ пользоваться алгеброю Пиѳагоръ. Но, какъ уже было показано со всѣми требуемыми предметомъ подробностями*), утвержденіе г. Кантора относительно употребленія алгебры въ Папирусѣ Ринда есть не болѣе, какъ результатъ недостаточнаго знакомства г. Кантора съ первичными методами рѣшенія вопросовъ изъ области науки чиселъ. Въ заключеніе нельзя не замѣтить также, что обычный спутникъ искусственныхъ пріемовъ и методовъ, произвольность, въ изложенномъ способѣ Рöта находится на лицо.

Совсѣмъ въ другомъ видѣ представится выводъ той же формулы раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ Пиѳагора, если строго держаться путей, которымъ слѣдовали въ своихъ ариѳметическихъ изслѣдованіяхъ сами пиѳагорейцы и которые представляли собой изученіе свойствъ и взаимныхъ отношеній чиселъ, какъ членовъ данныхъ ариѳметическихъ прогрессій и рядовъ, выводимыхъ изъ нихъ при посредствѣ послѣдовательныхъ суммированій ихъ членовъ. При веденіи изслѣдованія этими путями оказывается, что упомянутая формула есть не болѣе, какъ слѣдствіе общаго правила приведенія всякаго нечетнаго числа $2n+1$ къ тому члену n натуральнаго ряда, отъ котораго, какъ показываетъ самый видъ этого числа, оно произошло. Возьмемъ натуральный рядъ и подпишемъ подъ его членами соотвѣтствующіе имъ члены ряда нечетныхъ чиселъ, начиная этотъ послѣдній, какъ обыкновенно дѣлали пиѳагорейцы, съ числа 3. Единица не причислялась ими къ нечетнымъ числамъ. Какъ начало всѣхъ чиселъ, она должна была, по ихъ воззрѣніямъ, совмѣщать въ себѣ и всѣ ихъ свойства, а потому повода причислять ее отдѣльно къ нечетнымъ числамъ они не усматривали.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...	n ...
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25 ...	$2n+1$ ...

*) В. В. Бобынинъ. Древне-египетская математика въ эпоху владычества Гиксовъ. Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Новая серія XXIII (1909, № 10), отд. 2, стр. 311—317; XXIV (№ 11), стр. 12—14.

Наблюденіе, доставляемое непосредственнымъ сравненіемъ соотвѣтствующихъ членовъ этихъ двухъ рядовъ, показываетъ, что

$$\frac{3-1}{2}=1, \quad \frac{5-1}{2}=2, \quad \frac{7-1}{2}=3, \quad \frac{9-1}{2}=4, \; \cdots,$$

$$\frac{17-1}{2}=8, \cdots, \quad \frac{25-1}{2}=12, \cdots$$

и, наконецъ, въ общемъ видѣ:

$$\frac{(2n+1)-1}{2}=n.$$

Изъ этихъ формулъ относящіяся къ частному случаю, представляемому нечетными квадратными числами, представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{9-1}{2}=\frac{3^2-1}{2}=4, \quad \frac{25-1}{2}=\frac{5^2-1}{2}=12, \cdots, \frac{m^2-1}{2}, \cdots$$

Если же обратить вниманіе на результаты сравненія соотвѣтствующихъ членовъ въ рядахъ натуральномъ, квадратныхъ чиселъ и нечетныхъ чиселъ

1 2 3 4 5 6 ... 12 13 ... 24 25 ... 40 41 ... n ...

1 4 9 16 25 36 ... 144 169 ... 576 625 ... 1600 1681 ... n^2...

3 5 7 9 11 13 ... 25 ... ... 49 ... ... 81 ... ... $2n+1$ ...,

— результаты, показывающіе, что нечетное квадратное число представляетъ квадратъ другого нечетнаго числа, являющагося въ то же время катетомъ пиѳагоровскаго раціональнаго прямоугольнаго треугольника, а соотвѣтствующій ему и слѣдующій члены ряда квадратныхъ чиселъ представляютъ соотвѣтственно квадраты другого катета и гипотенузы того же треугольника, — то окажется, что въ приведенныхъ сейчасъ формулахъ приведенія для нечетныхъ квадратныхъ чиселъ: 1) квадратный корень изъ каждаго изъ нихъ представитъ катетъ пиѳагоровскаго раціональнаго прямоугольнаго треугольника, выражаемый нечетнымъ числомъ; 2) результатъ приведенія или членъ натуральнаго ряда, отъ котораго произошло квадратное нечетное число, представитъ другой катетъ того же треугольника и, наконецъ, 3) членъ, слѣдующій за названнымъ сейчасъ членомъ натуральнаго ряда, будетъ гипотенузою того же треугольника. Приписываемая Пиѳагору формула его раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ оказывается, такимъ образомъ, выведенною при неуклонномъ слѣдованіи путямъ пиѳагорейскихъ ариѳметическихъ изслѣдованій. Поэтому искусственнымъ и заключающимъ въ себѣ элементы произвольныхъ отношеній къ предмету изслѣдованія произведенное въ предлагаемой статьѣ возстановленіе древняго вывода этой формулы считаемо быть не можетъ.

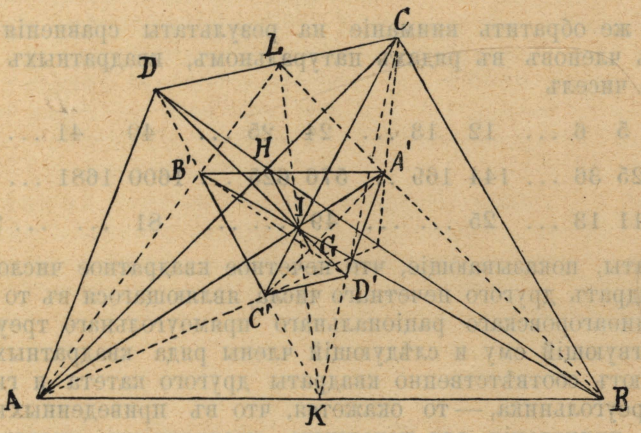
О центрѣ медіанъ четырехугольника.

Д. Ефремова.

1. Какъ извѣстно, центромъ медіанъ четырехугольника называется точка пересѣченія медіанъ противоположныхъ сторонъ его, считая въ числѣ сторонъ и діагонали четырехугольника.

Докажемъ, что, кромѣ этихъ трехъ прямыхъ, черезъ центръ медіанъ четырехугольника проходятъ еще пять прямыхъ, связанныхъ съ четырехугольникомъ.

2. Обозначимъ черезъ I центръ медіанъ четырехугольника $ABCD$ и черезъ A', B', C', D' — центры тяжести (или центры медіанъ) треугольниковъ BCD, CDA, DAB и ABC, изъ которыхъ каждый составленъ двумя послѣдовательными сторонами четырехугольника и одною изъ діагоналей его (фиг. 1).



Фиг. 1.

Теорема. Четыре прямыя AA', BB', CC' и DD' пересѣкаются въ центрѣ медіанъ I четырехугольника $ABCD$.

Если L есть середина CD, то точки A' и B' находятся соотвѣтственно на прямыхъ BL и AL и дѣлятъ ихъ такъ, что

$$\frac{LA'}{LB}=\frac{LB'}{LA}=\frac{1}{3};$$

поэтому прямая $A'B'$ параллельна сторонѣ AB и

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Это справедливо и по отношенію къ прямымъ $B'C'$ и BC, $C'D'$ и CD, $D'A'$ и DA. Слѣдовательно, четырехугольники $A'B'C'D'$ и $ABCD$ гомотетичны въ отношеніи $1:3$.

Изъ трехугольниковъ ALB и CKD, для которыхъ KL служитъ медіаной, видно, что KL дѣлитъ пополамъ прямыя $A'B'$ и $C'D'$, т. е. служитъ медіаной этихъ сторонъ четырехугольника $A'B'C'D'$. Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что двѣ другія медіаны противоположныхъ сторонъ четырехугольника $A'B'C'D'$ совпадаютъ (по направленію) съ медіанами четырехугольника $ABCD$; изъ этого слѣдуетъ, что центръ медіанъ четырехугольника $A'B'C'D'$ совпадаетъ съ центромъ медіанъ I четырехугольника $ABCD$; значитъ, I есть центръ гомотетіи четырехугольниковъ $ABCD$ и $A'B'C'D'$, а потому прямыя AA', BB', CC', DD', соединяющія соотвѣтственныя вершины этихъ четырехугольниковъ, пересѣкаются въ точкѣ I, что и слѣдовало доказать.

3. Слѣдствіе. П р я м а я, с о е д и н я ю щ а я т о ч к у п е р е с ѣ ч е н і я д і а г о н а л е й ч е т ы р е х у г о л ь н и к а с ъ е г о ц е н т р о м ъ т я ж е с т и, п р о х о д и т ъ ч е р е з ъ ц е н т р ъ м е д і а н ъ э т о г о ч е т ы р е х у г о л ь н и к а.

Обозначимъ черезъ H и G точку пересѣченія діагоналей и центръ тяжести четырехугольника $ABCD$ (фиг. 1). Такъ какъ G совпадаетъ съ пересѣченіемъ діагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$, то H и G суть соотвѣтственныя точки четырехугольниковъ $ABCD$ и $A'B'C'D'$, а потому прямая HG проходитъ черезъ центръ гомотетіи I этихъ четырехугольниковъ, при чемъ

$$\frac{GI}{HI}=\frac{A'I}{AI}=\frac{A'B}{AB}=\frac{1}{3}.$$

4. Итакъ, въ центрѣ медіанъ четырехугольника пересѣкаются в о с е м ь прямыхъ, связанныхъ съ этимъ четырехугольникомъ:

a) три медіаны противоположныхъ сторонъ четырехугольника;

b) четыре прямыя, соединяющія каждую вершину его съ центромъ тяжести противоположнаго трехугольника, составленнаго тремя другими его вершинами, и

c) прямая, соединяющая точку пересѣченія діагоналей четырехугольника съ его центромъ тяжести.

5. Недавно М. Л е м э р ъ (M. Lemaire) обратилъ вниманіе на точку J, симметричную съ точкою пересѣченія H діагоналей четырехугольника относительно центра его медіанъ I*).

Понятно, что, соединивъ точку J (фиг. 2) съ серединами E и F діагоналей четырехугольника AC и BD, получимъ параллелограммъ**).

Для вписаннаго ортодіагональнаго четырехугольника точка J совпадаетъ съ центромъ описаннаго круга.

---

*) L' Intermédiaire, 1908, p. 148.

**) Это становится очевиднымъ, если припомнимъ, что медіаны четырехугольника, въ томъ числѣ и EF, дѣлятся въ точкѣ I пополамъ.

Если G обозначаетъ, какъ и раньше, центръ тяжести четырехугольника, то изъ равенствъ

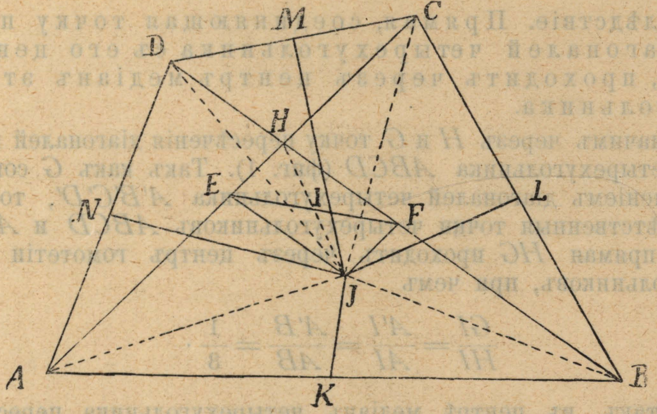
$$HI = 3GI \quad \text{и} \quad HI = JI,$$

слѣдуетъ, что

$$JI = 3GI \quad \text{и} \quad GJ = 2GI.$$

Разстоянія точекъ J и H отърединъ двухъ противоположныхъ сторонъ четырехугольника равны; ибо, если K и M суть середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника AB и CD (фиг. 2), то четырехугольникъ $HKJM$ — параллелограммъ, т. е.

$$JK = HM \quad \text{и} \quad JM = HK.$$



Фиг. 2.

6. Соединивъ точку J съ вершинами четырехугольника $ABCD$, изъ треугольниковъ AJC и BJD по теоремѣ Стюарта (Stewart) получимъ:

$$\overline{JA}^2 . CE + \overline{JC}^2 . AE = AC(\overline{JE}^2 + AE . CE),$$

$$\overline{JB}^2 . DF + \overline{JD}^2 . BF = BD(\overline{JF}^2 + BF . DF);$$

такъ какъ

$$AE = CE = \frac{AC}{2} \text{ и } BF = DF = \frac{BD}{2},$$

то эти равенства представляются въ видѣ

$$\frac{\overline{JA}^2 + \overline{JC}^2}{2} = \overline{JE}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{4},$$

$$\frac{\overline{JB}^2 + \overline{JD}^2}{2} = \overline{JF}^2 + \frac{\overline{BD}^2}{4};$$

отсюда черезъ сложеніе находимъ, что

$$\overline{JE}^2+\overline{JF}^2=\frac{\overline{JA}^2+\overline{JB}^2+\overline{JC}^2+\overline{JD}^2}{2}-\frac{\overline{AC}^2+\overline{BD}^2}{4}.$$

Съ другой стороны, по теоремѣ Эйлера о четырехугольникѣ,

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2.$$

Исключивъ изъ этихъ равенствъ сумму $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$, получимъ слѣдующее соотношеніе между разстояніями точки J отъ вершинъ четырехугольника:

$$\overline{JA}^2+\overline{JB}^2+\overline{JC}^2+\overline{JD}^2=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2}{2}+$$

$$+2(\overline{JE}^2+\overline{JF}^2-\overline{EF}^2).$$

7. Въ случаѣ ортодіагональнаго четырехугольника

$$\overline{JE}^2+\overline{JF}^2=\overline{EF}^2$$

и предыдущее равенство принимаетъ видъ

$$\overline{JA}^2+\overline{JB}^2+\overline{JC}^2+\overline{JD}^2=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2}{2};$$

положивъ здѣсь

$$AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DA=d$$

и замѣтивъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ *)

$$a^2+c^2=b^2+d^2,$$

получимъ

$$\overline{JA}^2+\overline{JB}^2+\overline{JC}^2+\overline{JD}^2=a^2+c^2=b^2+d^2,$$

т. е. сумма квадратовъ разстояній точки J отъ вершинъ ортодіагональнаго четырехугольника равна суммѣ квадратовъ его противоположныхъ сторонъ.

Если ортодіагональный четырехугольникъ вписывается въ кругъ, то обозначивъ черезъ R и O — радіусъ и центръ этого круга и замѣтивъ, что въ этомъ случаѣ точка J совпадаетъ съ O, такъ что

$$JA=JB=JC=JD=R,$$

получимъ слѣдующую извѣстную формулу для вписаннаго ортодіагональнаго четырехугольника

$$a^2+c^2=b^2+d^2=4R^2.$$

---

*) См. „Вѣстникъ", № 446—447, стр. 47.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ", и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ", либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 294 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$xy+yz+zx=11,$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=48,$$

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=118.$$

Л. Богдановичъ (Ярославль).

№ 295 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$25\sin x+10\cos x=14.$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 296 (5 сер.). Рѣшить уравненіе

$$x^4-2px^3+3p^2x^2-2p^3x+m=0.$$

А. Фрумкинъ (Одесса).

№ 297 (5 сер.). Доказать, что

$$\sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}}=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_n}\right),$$

гдѣ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ суть натуральныя числа, связанныя соотношеніями $k_{m+1}=2k_m^2-1$ $(m=1,2,\ldots)$, при чемъ $k_1>1$.

А. Д. (Лодзь).

№ 298 (5 сер.). Въ плоскости даны углы ABC и $A'B'C'$, стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны. Построить сѣкущую прямую такъ, чтобы она разсѣкалась сторонами этихъ угловъ на три равныя части.

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 299 (5 сер.). Доказать тожество

$$l_a^2(b+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+\;l_b^2(a+c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\;l_c^2(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=4s^2\,\frac{(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)^2}{r_a^2r_b^2r_c^2},$$

гдѣ a, b, c; s; l_a, l_b, l_c; r_a, r_b, r_c суть соотвѣтственно стороны, площадь, биссектрисы и радіусы круговъ внѣвписанныхъ какого-либо треугольника.

А. Фельдманъ (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 206 (5 сер.) *Доказать слѣдующій признакъ дѣлимости на 13: на 13 дѣлятся только такія числа, у которыхъ сумма числа всѣхъ десятковъ и учетверенной цифры единицъ дѣлится на 13. Показать, что, примѣняя этотъ признакъ достаточное число разъ, всегда можно привести вопросъ о дѣлимости многозначнаго числа къ испытанію двузначнаго числа.*

Называя испытываемое цѣлое число черезъ N, число всѣхъ его десятковъ черезъ a, цифру единицъ черезъ b, а сумму числа всѣхъ десятковъ и учетверенной цифры единицъ черезъ s, имѣемъ:

$$s=a+4b,\quad N-10s=10a+b-10(a+4b)=-39b,$$

откуда

$$N=10s-39b.$$

Изъ этого равенства вытекаютъ слѣдующія заключенія. Если N кратно 13, то и $10s$ кратно 13, а потому и s кратно 13, такъ какъ 10 и 13 суть числа взаимно простыя; наоборотъ, если s кратно 13, то и N кратно 13. Итакъ, тѣ и только тѣ числа кратны 13, для которыхъ сумма s числа десятковъ и учетверенной цифры единицъ кратна 13. Итакъ, указанный признакъ дѣлимости доказанъ. Составивъ разность $N-s$, имѣемъ: $N-s=10a+b-a-4b=9a-3b$, а потому s больше или равно N лишь при условіи $9a\leqq 3b$, или $a\leqq\frac{b}{3}$, что возможно лишь при однозначномъ a (такъ какъ b — цифра),, и слѣдовательно при двузначномъ N (напримѣръ, $N=28$). Итакъ, многозначное число всегда уменьшается при замѣнѣ его черезъ s, а потому послѣ конечнаго числа испытаній многозначное число можетъ быть приведено къ двузначному.

Н. Доброгаевъ (Одесса); *Н. Лексинъ* (с. Порѣцкое); *S—ow* (Рязань); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *И. Грушинъ* (Троицкъ); *В. Моргулевъ* (Одесса); *Б. Двойринъ* (Одесса); *А. Фельдманъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Howsepheanz* (Владикавказъ).

№ 207 (5 сер.). *Привести къ виду, удобному для логариѳмированія, выраженіе*

$$\operatorname{cosec}^2\alpha\,\operatorname{cosec}^2\beta\,\operatorname{cosec}^2\gamma-\operatorname{cosec}^2\alpha\,\operatorname{cosec}^2\beta-\operatorname{cosec}^2\beta\,\operatorname{cosec}^2\gamma-$$

$$-\operatorname{cosec}^2\gamma\,\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta+\operatorname{cosec}^2\gamma-1.$$

Разсматриваемое выраженіе можно представить въ видѣ:

$$(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2\beta - 1)(\operatorname{cosec}^2\gamma - 1) = \cot^2\alpha \cot^2\beta \cot^2\gamma.$$

В. Моргулевъ (Одесса); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *А. Масловъ* (Москва); *И. Грушинъ* (Троицкъ); *М. Добровольскій* (Сердобскъ): *Нюта Г.* (Нижній-Новгородъ): *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *С. Розенблатъ* (Балта); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *В Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Hoвsepheanz* (Владикавказъ); *И. Колодій* (Нѣжинъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 211 (5 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ каждое изъ уравненій*

1) $x^2 + xy^2 - ky^2 = 0,$

2) $x^2 - xy^2 + ky^2 = 0,$

гдѣ k *есть данное цѣлое число.*

Разсмотримъ первое уравненіе. При $y = 0$ оно даетъ $x = 0$. Если же $y \neq 0$, то, раздѣливъ данное уравненіе на y^2, находимъ:

$$\frac{x^2}{y^2} + x - k = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 + x - k = 0,$$

откуда видно, что при x и y цѣлыхъ x кратно y. Полагая $\frac{x}{y} = z$, гдѣ z — нѣкоторое цѣлое число, получимъ: $z^2 + x - k = 0$, откуда

$$x = k - z^2. \tag{1}$$

Но равенство $\frac{x}{y} = z$ даетъ $y = \frac{x}{z}$, или [см. (1)]

$$y = \frac{k}{z} - z, \tag{2}$$

откуда видно, что z есть дѣлитель числа k. Наоборотъ, если z — дѣлитель числ k, то числа x и y, опредѣляемыя формулами (1) и (2) суть числа цѣлыя, которыя удовлетворяютъ данному уравненію (въ чемъ убѣждаемся съ помощью подстановки). Итакъ, формулы (1) и (2), гдѣ z — одинъ изъ дѣлителей числа k, и равенства $x = y = 0$ даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія. Если $k = 0$, то z можетъ принимать произвольныя цѣлыя значенія, и формулы $x = -z^2$, $y = -z$ даютъ безчисленное множество рѣшеній для даннаго уравненія. Если $k \neq 0$, то данное уравненіе имѣетъ лишь конечное число рѣшеній, которыя мы найдемъ, подставляя вмѣсто z послѣдовательно всѣхъ дѣлителей k и присоединяя къ системѣ рѣшеній рѣшеніе $x = y = 0$ Подобнымъ же образомъ второе уравненіе рѣшается при помощи формулъ $x = k + z^2$, $y = \frac{k}{z} + z$, гдѣ z — одинъ изъ дѣлителей числа k.

Н. Доброгаевъ (Одесса): *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Н. Мамуловъ* (Тифлисъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ).

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.