Обложка
ищется

Обложка
ищется

XLII Сем. № 11—12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
И
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

№ 503—504.

Содержаніе: Сжиженіе газовъ. *Проф. А. Беккера.* — Что такое алгебра? *Прив.-доц. В. Кагана.* (Продолженіе). — Лекціи по ариѳметикѣ для учителей. *Проф. Ф. Клейна.* (Продолженіе). — О признакахъ дѣлимости. *А. Филиппова.* — Отчеты о засѣданіяхъ Московскаго Математическаго Кружка — Научная хроника: XII Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей. — О великой теоремѣ Ферма. — Задачи №№ 234—239 (5 сер.). — Рѣшенія задачъ №№ 160, 163, 164, 169, 170 и 176 (5 сер.). — Отъ редактора отдѣла задачъ. — Книги и брошюры, поступившія въ редакцію. — Поправки. — Объявленія.

Сжиженіе газовъ.

Проф. А. Беккера.

Историческій обзоръ.

Въ 1908 году проф. Камерлингу Оннесу удалось превратить въ жидкость гелій, послѣдняго представителя такъ называемыхъ постоянныхъ газовъ; въ виду этого событія, завершившаго собой цѣлый рядъ безуспѣшныхъ попытокъ, не безынтересно будетъ сдѣлать краткій обзоръ многочисленныхъ опытовъ и методовъ сжиженія газовъ.

Хотя связь между газами и парами была ясно понята лишь въ позднѣйшее время, но и въ основаніи самыхъ старыхъ опытовъ конденсаціи газовъ уже лежало правильное представленіе, что сжиженіе газа возможно лишь путемъ одновременнаго охлажденія и сжатія. Фанъ-Марумъ (Van Marum) первый превратилъ газъ въ жидкость: въ 1799 году онъ превратилъ въ жидкость амміакъ, сжавши его до 6 атмосферъ. Немного спустя тотъ же газъ былъ превращенъ въ жидкость при атмосферномъ давленіи сперва Фуркруа (Fourcroy) и Вокеленомъ (Vauquelin), а немного позже также Гэтономъ де Морво (Gayton de Morveau); для этой цѣли они пользовались охлажденіемъ съ помощью смѣси снѣга съ хлористымъ кальціемъ. Около того же времени Монжъ (Monje) и Клуэ (Clouet) сгустили подобнымъ образомъ сѣрнистый ангидридъ, а въ 1805 году Нортмору (Northmore) удалось превратить въ жидкость; кромѣ сѣрнистаго ангидрида, еще хлористоводородный газъ и хлоръ. Но относительно всѣхъ этихъ опытовъ не установлено съ достовѣрностью, не участвовалъ ли въ сжиженіи водяной паръ.

На этомъ основаніи первыми безупречными и точными опытами сжиженія газовъ слѣдуетъ считать работы Дэви (Devy) и Фарадэя (Faraday), опубликованныя въ 1823 г. имъ удалось превратить въ жидкость хлоръ, сѣрнистый ангидридъ, сѣроводородъ, закись азота, ціанъ, углекислый газъ, амміакъ и хлористоводородный газъ. Примѣнявшійся ими методъ сжиженія состоялъ въ слѣдующемъ: они нагрѣвали соотвѣтствующее вещество, заключенное въ закрытой толстостѣнной трубкѣ; развивавшійся вслѣдствіе нагрѣванія газъ находился, такимъ образомъ, подъ дѣйствіемъ своего собственнаго давленія и въ то же время подвергался наружному охлажденію съ помощью охладительной смѣси. Однако, число сжиженныхъ такимъ способомъ газовъ было ограниченное; Фарадэй первый понялъ, что причину этого слѣдуетъ видѣть въ томъ, что съ помощью извѣстныхъ въ то время охладительныхъ смѣсей нельзя получить достаточно большихъ охлажденій. Кажется, что Бусси (Bussy) первому послѣ появленія Фарадэевскихъ работъ удалось получить существенно болѣе низкія температуры: съ этой цѣлью онъ обливалъ хлопчатую бумагу жидкимъ сѣрнистымъ ангидридомъ (который онъ получалъ изъ тщательно высушеннаго газа путемъ простого охлажденія приблизительно до -20^0C подъ атмосфернымъ давленіемъ) и такимъ образомъ вызывалъ быстрое испареніе его. При достигнутой такимъ образомъ низкой температурѣ, доходившей приблизительно до -68^0C, легко можно было при обыкновенномъ давленіи превратить въ жидкость хлоръ, амміакъ и синеродъ; послѣдній можно было даже получить въ твердомъ видѣ. Позже Фарадэй получалъ подобнымъ же образомъ низкія температуры въ новомъ рядѣ опытовъ, которые онъ опубликовалъ въ 1845 году. Онъ пользовался смѣсью твердой углекислоты съ эѳиромъ, температуру которой онъ понижалъ до -110^0C посредствомъ ускореннаго испаренія подъ колоколомъ воздушнаго насоса. Съ помощью охлажденія до этой температуры и одновременнаго сжатія посредствомъ нагнетательнаго насоса до 40 - 50 атмосферъ Фарадэю удалось превратить въ жидкость этиленъ, сѣрнистый, фосфористый, іодистый и бромистый водородъ, фтористый кремній и фтористый боръ, и отчасти даже привести ихъ въ твердое состояніе.

Послѣ этихъ успѣховъ изслѣдованіе вопроса о сжижаемости химически простѣйшихъ газовъ, какъ водородъ, кислородъ, азотъ или воздухъ, должно было представлять чрезвычайно большой интересъ. Опыты въ этомъ направленіи были произведены уже очень рано: сюда относятся опыты Перкинса (Perkins) въ 1823 г., Колладона (Kolladon) въ 1828 г., Моггама (Maugham) въ 1838 г., Эме (Aimé) въ 1843 г. Всѣ эти работы не увѣнчались успѣхомъ, хотя газы въ нѣкоторыхъ случаяхъ подвергались съ помощью гидравлическихъ прессовъ весьма сильнымъ давленіямъ въ нѣсколько сотъ атмосферъ. Равнымъ образомъ, произведенные Фарадэемъ опыты охлажденія этихъ газовъ до —110° и одновременнаго сжатія ихъ не имѣли успѣха, и въ 1844 году Наттереръ (Natterer) убѣдился, что даже давленія въ нѣсколько тысячъ атмосферъ не приводили къ сжиженію. Кромѣ названныхъ простыхъ газовъ еще и метанъ, окись углерода и окись азота упорно сопротивлялись всѣмъ попыткамъ превратить ихъ въ жидкость. Это привело къ представленію, что возможность перехода въ жидкое аггрегатное состояніе присуща лишь нѣкоторымъ опредѣленнымъ газамъ, которые получили названіе „сжижаемыхъ"; указанные же шесть газовъ, сопротивляющихся сжиженію, слѣдуетъ считать постоянными газами.

Уже открытіе критическаго состоянія, сдѣланное въ 1822 году Каньяръ-де-Латуромъ и точно формулированное Эндрьюсомъ въ 1869 г., указывало на вѣроятную сжижаемость всѣхъ газовъ при благопріятныхъ условіяхъ давленія и температуры: тѣмъ не менѣе представленіе о существованіи постоянныхъ газовъ начало колебаться лишь въ концѣ 1877 г., когда парижскій физикъ Кальете и женевскій физикъ Рауль Пикте въ одинъ и тотъ же день — 24 декабря 1877 г.—независимо другъ отъ друга сообщили о своихъ успѣшныхъ опытахъ сжиженія окиси углерода и кислорода. Приборъ, которымъ пользовался Кальете, часто примѣняется еще и въ настоящее время, въ особенности при демонстрированіи опытовъ: онъ состоитъ изъ гидравлическаго насоса, съ помощью котораго сжижаемый газъ, запертый столбомъ ртути въ узкой толстостѣнной стеклянной трубкѣ и охлаждаемый снаружи, сжимался до нѣсколькихъ сотъ атмосферъ. Однако же, сжиженія такъ называемыхъ постоянныхъ газовъ при этомъ, какъ и въ старыхъ опытахъ, еще нельзя было получить. Когда же газъ внезапно освобождали отъ высокаго давленія, подъ которымъ онъ находился, то внутри стеклянной трубки появлялся туманъ, и на стѣнкѣ можно было видѣть маленькія капли жидкости, которыя, впрочемъ, быстро исчезали. Это наблюденіе, сдѣланное впервые на окиси углерода и кислорода, вскорѣ послѣ этого подтвердилось и для воздуха и азота. Такимъ образомъ, переходъ этихъ газовъ въ жидкое состояніе былъ установленъ съ несомнѣнностью, хотя слѣды этого перехода можно было наблюдать лишь въ теченіе очень короткаго времени.

Приборъ Пикте имѣлъ гораздо болѣе сложное устройство, но зато онъ давалъ возможность получать сгущаемые газы въ видѣ сплошной жидкости, хотя въ теченіе короткаго лишь времени. Кислородъ, который первый былъ подвергнутъ изслѣдованію, получался въ толстостѣнной трубкѣ изъ бертолетовой соли и сжимался подъ своимъ собственнымъ давленіемъ по старому методу Фарадэя. Это сжатіе сопровождалось сильнымъ охлажденіемъ, которое вызывалось и поддерживалось посредствомъ двухъ непрерывавшихся круговыхъ процессовъ: трубка, въ которой производилось сжатіе газа, была окружена болѣе широкой трубкой; въ послѣдней жидкая углекислота испарялась подъ уменьшеннымъ давленіемъ и непрерывно тутъ же вновь доставлялась изъ особой охладительной трубки, въ которой она получалась съ помощью быстраго испаренія жидкаго сѣрнистаго ангидрида. Такимъ образомъ, трубка, въ которой сжимался газъ, охлаждалась до — 130°. Открывая въ ней кранъ, посредствомъ котораго сосудъ сообщался съ наружнымъ воздухомъ, Пикте получалъ струю жидкаго кислорода.

Ни Каллье те ни Пикте сперва не удавалось удержать въ теченіе нѣкотораго времени изслѣдованные имъ газы въ жидкомъ состояніи и получить замѣтныя количества жидкости; тѣмъ не менѣе работы ихъ имѣли величайшее значеніе для достиженія очень низкихъ температуръ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и для сжиженія всѣхъ трудно сгущаемыхъ газовъ: значеніе этихъ работъ обусловливается не только тѣмъ, что онѣ доказали сжижаемость такъ называемыхъ постоянныхъ газовъ, но еще и тѣмъ, что благодаря этимъ работамъ выяснилось значеніе вспомогательнаго метода, впервые изученнаго Джаулемъ и В. Томсономъ, а именно — расширенія газа безъ внѣшней работы. Вопросъ о возможности сжиженія такъ называемыхъ постоянныхъ газовъ въ принципѣ былъ рѣшенъ, и оставалось лишь придумать приспособленіе для легкаго полученія большихъ количествъ сжиженныхъ газовъ, которыя дали бы возможность, съ одной стороны, точно опредѣлить физическія свойства ихъ, а съ другой стороны — примѣнять ихъ для полученія ваннъ очень низкой температуры. Для достиженія этой цѣли особенно потрудились Пикте, Каммерлингъ Оннесъ, Вроблевскій и Ольшевскій, которые развили и усовершенствовали такъ называемый каскадный методъ, или методъ ступеней; послѣдній заключается въ примѣненіи надлежащихъ круговыхъ процессовъ для постепеннаго охлажденія газовъ (при чемъ послѣдовательное пониженіе температуры идетъ какъ бы по ступенямъ). Напримѣръ, Камерлингъ Оннесъ достигалъ сжиженія кислорода съ помощью трехъ круговыхъ процессовъ: въ первомъ хлористый метилъ сгущался и подъ уменьшеннымъ давленіемъ все время испарялся, благодаря чему онъ охлаждался до — 70°; при этой температурѣ сжижался этиленъ, который во второмъ круговомъ процессѣ охлаждался при помощи быстраго, но продолжительнаго испаренія до — 140°. Этого охлажденія было достаточно, чтобы кислородъ, будучи подвергнутъ соотвѣтствующему сжатію, могъ въ третьемъ круговомъ процессѣ перейти въ жидкое состояніе. Вроблевскій и Ольшевскій также пользовались для охлажденія жидкимъ этиленомъ, который при испареніи подъ 10 миллиметрами давленія охлаждался до — 152° и при этомъ давалъ возможность сгустить кислородъ при давленіи всего лишь около 10 атмосферъ.

Хотя каскадный методъ и приводитъ къ желанной цѣли, т. е. даетъ возможность получить и удержать температуры, необходимыя для сгущенія обильныхъ количествъ трудно сжижаемыхъ газовъ, въ особенности кислорода, тѣмъ не менѣе необходимость прибѣгать къ многократнымъ круговымъ процессамъ дѣлаетъ этотъ методъ весьма сложнымъ и мало экономнымъ. Наибольшее же практическое значеніе для добыванія жидкихъ газовъ, въ особенности жидкаго воздуха, получилъ лишь изобрѣтенный въ 1895 г. и нынѣ очень широко примѣняемый методъ Линде; этотъ методъ, примѣненный одновременно и независимо отъ Линде еще и Гэмпсономъ въ Англіи, основанъ на принципѣ Джауля-Кельвина, относящемся къ расширенію газа безъ внѣшней работы. Необходимое пониженіе температуры здѣсь достигается не посредствомъ прежнихъ вспомогательныхъ процессовъ, но исключительно лишь слѣдующимъ путемъ: газу, сжатому подъ высокимъ давленіемъ, предоставляютъ систематически расширяться. Пониженіе температуры въ этомъ методѣ обусловливается внутренней работой газа противъ молекулярныхъ силъ притяженія, тогда какъ въ каскадномъ методѣ дѣйствіе основано на внѣшней работѣ. Компрессоръ (двойной насосъ), приводимый въ движеніе съ помощью мотора, сжимаетъ насасываемый извнѣ воздухъ въ крѣпкостѣнный цилиндръ, изъ котораго воздухъ, осушаемый смѣсью льда съ поваренной солью, течетъ подъ давленіемъ около 200 атмосферъ по змѣевику; изъ отверстія помѣщающагося въ концѣ послѣдняго, воздухъ переходитъ въ болѣе широкій сосудъ, гдѣ онъ можетъ расширяться, при чемъ давленіе падаетъ приблизительно до 16 атмосферъ. Достигнутое этимъ охлажденіе даже и въ отдаленной степени не было бы достаточно для сжиженія воздуха; но путемъ примѣненія такъ называемаго динамическаго принципа, т. е. взаимнымъ усиленіемъ причины и слѣдствія, Линде удалось получить постепенно возрастающее охлажденіе газа: упомянутый нами змѣевикъ окружается другимъ змѣевикомъ, черезъ который охлажденный воздухъ переводится обратно къ компрессору. Свѣжій воздухъ, вступающій въ приборъ извнѣ, получаетъ вслѣдствіе соприкосновенія съ этимъ охлажденнымъ воздухомъ, предварительное охлажденіе, и вслѣдствіе этого при своемъ послѣдующемъ расширеніи онъ охлаждается до болѣе низкой температуры, чѣмъ предшествующая масса газа. Многократное повтореніе этого процесса приводитъ, наконецъ, къ температурамъ, которыя дѣлаютъ возможнымъ сжиженіе при 16 атмосферахъ.

Изобрѣтеніе этого сравнительно легкаго метода полученія болѣе значительныхъ количествъ жидкаго кислорода и жидкаго воздуха подготовило путь къ достиженію чрезвычайно низкихъ температуръ. Кислородъ подъ атмосфернымъ давленіемъ кипитъ при $-182^0 C$, а при испареніи подъ давленіемъ въ 20 миллиметровъ температура его падаетъ даже до $-200{,}4^0$; поэтому Вроблевскій и Ольшевскій, пользуясь жидкимъ кислородомъ, какъ средствомъ охлажденія, безъ особыхъ затрудненій могли превратить въ жидкость какъ окись углерода, критическая температура котораго равна $-141{,}0^0$, такъ и азотъ, имѣющій критическую температуру $-146{,}0^0$. Точка кипѣнія воздуха равна $-191{,}0^0$, а точка кипѣнія азота равна $-210{,}5^0$; когда азотъ испаряется подъ очень низкимъ давленіемъ, то онъ охлаждается еще сильнѣе и затвердѣваетъ при $-210{,}5^0$. При этихъ температурахъ сравнительно легко сжижается метанъ, который имѣетъ критическую температуру $-81{,}8^0$ и точку кипѣнія -164^0, и затвердѣваетъ при $-185{,}8^0$. Окись азота по Ольшевскому тоже имѣетъ не очень низкую критическую температуру, равную $-93{,}5^0$; этотъ газъ кипитъ при $-153{,}6^0$ и затвердѣваетъ при -167^0.

Вновь открытые къ тому времени въ атмосферѣ благородные газы тоже большей частью легко поддавались сжиженію. Аргонъ впервые былъ сжиженъ Ольшевскимъ въ 1895 году. Критическая температура его въ приборѣ Кальете оказалась равной —121°, и критическое давленіе — 50,6 атмосферъ, такъ что по своимъ критическимъ элементамъ аргонъ значительно разнится отъ азота, и близокъ къ кислороду. Нормальная точка кипѣнія аргона равна —186,9° а при уменьшенномъ давленіи аргонъ затвердѣваетъ въ ледяную массу съ точкой таянія —189,6°. Этимъ онъ отличается отъ кислорода, впервые полученнаго въ твердомъ видѣ въ 1903 г. при очень низкой температурѣ въ —237°. Согласно болѣе новымъ опытамъ (1901) Рамзая и Траверса, критическая температура аргона, измѣренная водороднымъ термометромъ, равна —117,4°, а точка кипѣнія составляетъ —185,8°. Критическая температура криптона, по Рамзаю и Траверсу, равна —62,5°, а ксенона + 14,7°. Критическая точка неона значительно ниже и приблизительно равна —220°, а точка кипѣнія его лежитъ около —243°, такъ что сжиженіе этого газа съ помощью тѣхъ средствъ, которыя были извѣстны до 1902 года, могло быть достигнуто лишь съ чрезвычайно большими усиліями.

Водородъ упорно не поддавался сжиженію, несмотря на примѣненіе самыхъ низкихъ температуръ, которыя можно было получить путемъ быстраго испаренія жидкаго воздуха или азота и которыя доходили до —220°*C*. Особенно много работалъ въ этомъ направленіи Вроблевскій; послѣ многочисленныхъ безуспѣшныхъ опытовъ онъ, основываясь на подробномъ изученіи хода изотермъ при низкихъ температурахъ, т. е. на отклоненіяхъ водорода при низкихъ температурахъ отъ закона Маріотта, пришелъ къ выводу, что критическая температура водорода должна быть равна около —240°, а критическое давленіе около 13,3 атмосферъ. Согласно этому заключенію всякую попытку сгущенія водорода по каскадному методу слѣдовало считать заранѣе обреченной на неудачу, такъ какъ не было извѣстно ни одного такого сжижаемаго газа, температура кипѣнія котораго при сильно уменьшенномъ давленіи была бы ниже указанной критической температуры водорода. Поэтому Ольшевскій, продолжая послѣ смерти Вроблевскаго отчасти сообща съ нимъ начатыя изслѣдованія, стремился получить дальнѣйшее пониженіе температуры водорода, предварительно охлаждая его посредствомъ жидкаго кислорода и давая ему затѣмъ расширяться отъ 150 до 20 атмосферъ. При этомъ ему дѣйствительно удалось замѣтить признаки начинающагося сжиженія при температурѣ, которую онъ съ помощью термометра съ платиновымъ сопротивленіемъ ошибочно опредѣлилъ въ —234,5°: впослѣдствіи оказалось, что эта температура равна —240,8°, что вполнѣ согласуется съ теоретическимъ предсказаніемъ Вроблевскаго.

Сжиженіе водорода въ болѣе значительныхъ количествахъ удалось лишь Дьюару (Dewar), который 10 мая 1898 г. впервые получилъ 20 *кб. см.* жидкаго водорода: онъ сжималъ газъ до 180 атмосферъ, охлаждалъ его посредствомъ кипящаго воздуха до —205° и затѣмъ впускалъ его въ безвоздушный сосудъ, температура котораго съ помощью жидкаго воздуха была понижена приблизительно до — 200°. Посредствомъ подобнаго же метода Траверсъ въ 1901 г. и Ольшевскій въ 1902 г. получили болѣе значительныя количества жидкаго водорода, и лишь недавно Камерлингъ Оннесъ указалъ способъ, съ помощью котораго можно получать въ часъ отъ 3 до 4 литровъ жидкаго водорода. Хотя всѣ эти методы пользуются принципомъ Линде для достиженія необходимыхъ низшихъ температуръ, но газъ при этомъ сперва подвергается предварительному охлажденію съ помощью посторонняго охладителя, какимъ является здѣсь жидкій воздухъ. Слѣдуетъ еще замѣтить, что этимъ пріемомъ пользуются не столько съ цѣлью сократить продолжительность процесса, сколько въ виду своеобразной особенности водорода, которую онъ обнаруживаетъ при измѣненіяхъ давленія, и которая отличаетъ его отъ другихъ газовъ. Извѣстно, что при обыкновенной температурѣ отклоненія отъ закона Маріотта, наблюдаемыя въ водородѣ, имѣютъ противоположный смыслъ, чѣмъ въ другихъ газахъ. Если произвести съ водородомъ при обыкновенной температурѣ опытъ Джауля-Кельвина, который лежитъ въ основаніи метода Линде, то мы получимъ не охлажденіе, но нагрѣваніе. Лишь при температурахъ ниже такъ называемой точки инверсіи (эта температура равна — 80°) водородъ слѣдуетъ тому же закону, какъ и другіе газы; отсюда слѣдуетъ, что для успѣшнаго примѣненія метода Линде къ водороду необходимо предварительно охладить его ниже температуры инверсіи.

Точныя измѣренія показали, что критическая температура водорода равна — 242°C или 31° абсолютной шкалы, а точка кипѣнія при нормальномъ давленіи равна — 252.5°C или всего 20,5° абсолютной шкалы. Путемъ пониженія внѣшняго давленія приблизительно до 30 *мм.* Дьюару удалось перевести часть водорода при --258,9°, т. е. всего 14,1° отъ абсолютнаго нуля, въ состояніе твердаго тѣла. Онъ получалъ прозрачную стекловидную массу, которая, по мнѣнію Траверса, имѣетъ, повидимому, кристаллическое строеніе.

Послѣ того, какъ удалось получить въ жидкомъ видѣ водородъ, изъ всѣхъ газовъ остался лишь одинъ единственный представитель класса такъ называемыхъ постоянныхъ газовъ: мы говоримъ о благородномъ газѣ геліи, который былъ открытъ Рамзаемъ въ нѣкоторыхъ минералахъ; онъ поразительно отличается отъ другихъ газовъ еще и во многихъ другихъ отношеніяхъ. Уже въ 1895 г., немного спустя послѣ открытія гелія, Ольшевскій старался получить его въ жидкомъ видѣ, но усилія его были совершенно безуспѣшны. Его методъ состоялъ въ слѣдующемъ: газъ, заключенный въ узкой стеклянной трубкѣ, сильно охлаждался извнѣ посредствомъ жидкаго воздуха и одновременно съ этимъ подвергался съ помощью насоса Кальете чрезвычайно высокому давленію. Хотя онъ доходилъ при этомъ до температуры — 182° и давленія въ 125 атмосферъ, все же онъ не могъ обнаружить ни образованія тумана ни вообще какихъ-либо слѣдовъ сжиженія; не помогло и повышеніе давленія до 140 атмосферъ и пониженіе температуры до — 210°

(т. е. до точки кипѣнія кислорода при давленіи въ 10 *мм.* ртутнаго столба). Дальнѣйшаго повышенія давленія не выдержала бы трубка, въ которой находился гелій, да и незначительное количество послѣдняго тоже препятствовало дальнѣйшему увеличенію давленія. Пробовали затѣмъ вызвать очень сильное охлажденіе, давая газу расширяться отъ начальнаго давленія въ 125 атмосферъ до одной атмосферы, и все же невозможно было открыть какихъ-либо признаковъ сжиженія. Въ 1898 году Дьюаръ произвелъ новый рядъ опытовъ, благодаря которымъ въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ распространялось ошибочное мнѣніе, будто удалось получить гелій въ жидкомъ видѣ, пока, наконецъ, въ 1901 году самъ Дьюаръ былъ вынужденъ отказаться отъ результата этихъ изслѣдованій и признать, что онъ былъ введенъ въ заблужденіе посторонними примѣсями во взятомъ газѣ. Онъ пришелъ къ заключенію, что точка кипѣнія гелія должна лежать ниже 6^0 абсолютной шкалы. Столь же безуспѣшны были и попытки сжиженія гелія, сдѣланныя Траверсомъ и Жакеро (Jaquerod) въ 1902 г., хотя они съ помощью твердаго водорода охлаждали его подъ давленіемъ въ 60 атмосферъ до 13^0 абсолютной шкалы. Наконецъ, въ 1905 году Ольшевскій произвелъ новые опыты въ большемъ масштабѣ, при чемъ онъ пользовался весьма значительными количествами жидкаго водорода. Гелій былъ нѣсколько разъ очищенъ путемъ замораживанія съ помощью жидкаго водорода; очищенный гелій онъ охлаждалъ въ водородѣ, затвердѣвавшемъ подъ давленіемъ въ 50 *мм.*, до температуры -259^0 и, подвергнувъ его начальному давленію въ 180 атмосферъ, внезапно освобождалъ его отъ этого давленія. При послѣдовавшемъ затѣмъ расширеніи газа до 1 атмосферы, онъ охлаждался, какъ полагаетъ самъ Ольшевскій, до температуры, отличающейся всего лишь на $1{,}7^0$ отъ абсолютнаго нуля, а все же нельзя было обнажить сжиженія; такимъ образомъ, указанную температуру слѣдуетъ считать границей, выше которой критическая температура гелія, очевидно, не можетъ находиться.

Послѣ этого послѣдняго результата возможность получить когда-либо гелій въ жидкомъ видѣ должна была казаться чрезвычайно сомнительной. Тѣмъ не менѣе этотъ результатъ не смутилъ Камерлинга Оннеса, который продолжалъ свои теоретическія и экспериментальныя изысканія по вопросу о возможности сжиженія гелія и старался разрѣшить его съ помощью богатыхъ средствъ своей кріогенной*) лабораторіи въ Лейденѣ. Исходной точкой этихъ работъ являются начатые имъ въ послѣдніе годы опыты, цѣлью которыхъ было опредѣлить съ помощью малыхъ піезометровъ ходъ изотермъ гелія при температурахъ $+100^0$, -217^0, -253^0 и $-259^0 C$; изъ этихъ опытовъ онъ счелъ возможнымъ сдѣлать выводъ, что критическая температура гелія находится вблизи температуры 6^0 абсолютной шкалы и можетъ быть достигнута расширеніемъ газа, если его предварительно въ достаточной степени охладить. Основываясь на

---

*) Буквальный переводъ греческаго термина: „холодъ рождающій“.

Прим. перев.

этомъ, онъ въ началѣ марта 1908 г. предпринялъ опытъ сжиженія. Большое количество газа гелія было сжато въ замкнутой трубкѣ до 100 атмосферъ и затѣмъ онъ охладилъ его въ обильной ваннѣ жидкаго водорода до -259^0. При быстромъ расширеніи газа Камерлингъ Оннесъ наблюдалъ облачко, изъ котораго въ трубкѣ выдѣлялось бѣлое хлопьевидное вещество, которое за 20 минутъ снова испарилось. Все же въ трубкѣ еще оставалось нѣкоторое количество твердаго вещества, пока давленіе составляло приблизительно одну атмосферу; при уменьшеніи же давленія вещество сейчасъ же улетучивалось, при чемъ нельзя было замѣтить какихъ-либо признаковъ сжиженія. Въ своемъ телеграфномъ сообщеніи Дьюару отъ 5-го марта Оннесъ высказываетъ мнѣніе, что это вещество есть твердый гелій (ср. Naturwissenchaftliche Rundschau, XXIII, 167); къ сожалѣнію, это мнѣніе не подтвердилось, и уже въ апрѣлѣ Оннесъ могъ обнаружить, что замѣченное имъ явленіе есть результатъ чрезвычайно малой примѣси водорода во взятомъ геліи, и что на счетъ этого водорода произошло и образованіе облачка.

Въ концѣ концовъ, однако, усилія его увѣнчались успѣхомъ. Путемъ повторенія и усовершенствованія опытовъ ему дѣйствительно удалось получить гелій въ жидкомъ видѣ: 10-го іюля Оннесъ уже имѣлъ около 60 *кб. см.* драгоцѣнной жидкости. 9-го іюля онъ изготовилъ 75 литровъ жидкаго воздуха и 10-го іюля утромъ въ 5 часовъ 45 минутъ онъ приступилъ къ добыванію жидкаго водорода, необходимаго для предварительнаго охлажденія гелія: при этомъ онъ пользовался пріемомъ (см. Nat. Rdsch., XXIII, 137), основаннымъ на каскадномъ методѣ. Около половины второго пополудни онъ имѣлъ въ своемъ распоряженіи 20 литровъ жидкаго водорода. Около 4 часовъ 20 минутъ онъ пропустилъ гелій подъ давленіемъ въ 100 атмосферъ черезъ змѣевикъ, находившійся въ Дьюаровскомъ сосудѣ и охлаждавшійся посредствомъ жидкаго водорода, который, со своей стороны, съ помощью еще одного Дьюаровскаго сосуда съ жидкимъ воздухомъ все время удерживался при температурѣ $-259^0 C$. Въ 6 часовъ 35 минутъ гелію дали возможность расшириться отъ 100 атмосферъ до 40: температура его при этомъ упала до 6^0 абсолютной шкалы, но сжиженія не наблюдалось. Когда затѣмъ было вызвано болѣе быстрое расширеніе гелія, температура понизилась приблизительно до 5^0 абсолютной шкалы, и внутри Дьюаровскаго сосуда показался, наконецъ, жидкій гелій. Измѣренія съ помощью подходящаго геліеваго термометра показали, что точка кипѣнія равна около $4{,}3^0$ абсолютной шкалы, а критическая температура приблизительно равна 5^0 абсолютной шкалы при критическомъ давленіи въ 2,3 атмосферы. Когда, наконецъ, гелій испарялся при давленіи въ 1 *см.*, то было достигнуто 3^0 абсолютной шкалы, наинизшая температура, которую до сихъ поръ удалось поддерживать въ теченіе нѣкотораго времени. Такъ какъ гелій оставался при этомъ совершенно прозрачнымъ и не обнаруживалъ никакихъ признаковъ отвердѣванія, то слѣдуетъ полагать, что путемъ дальнѣйшаго пониженія давленія можно получить еще болѣе низкія температуры, чрезвычайно близкія къ абсолютному нулю.

Теперь, когда удалось сжиженіе гелія, старое раздѣленіе газовъ на сжижаемые и постоянные, становится совершенно ненужнымъ, и взгляды Эндрьюса и Фанъ-деръ-Вальса на газообразное состояніе, которые давно уже пользуются въ наукѣ полнымъ правомъ гражданства, нынѣ получили окончательное экспериментальное подтвержденіе для всѣхъ извѣстныхъ намъ газовъ.

Что такое алгебра?

Прив.-доц. В. Кагана.

(Продолженіе).*

Въ 1637 году появилось сочиненіе, которое должно быть отнесено къ числу наиболѣе замѣчательныхъ произведеній человѣческой мысли; это книга Декарта — „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences“. Къ этому сочиненію были присоединены три приложенія: „La Dioptrique“, „Les Météors“, „La Géométrie“. Этому третьему приложенію, которому авторъ отвелъ такое скромное мѣсто, суждено было, однако, сыграть болѣе важную роль, чѣмъ общимъ философскимъ идеямъ, которыя изложены въ „Discours“. „Геометрія“ Декарта состотъ изъ трехъ книгъ, изъ которыхъ третья цѣликомъ посвящена алгебрѣ. Но и относительно первыхъ двухъ книгъ трудно сказать, какія идеи здѣсь доминируютъ, — геометрическія или алгебраическія. Примѣненіе алгебраическаго метода изслѣдованія къ геометріи не было, конечно, чѣмъ-либо новымъ. Разработка такого рода методовъ составляла врядъ ли не наибольшую заслугу Віета; но Декартъ подошелъ къ дѣлу съ совершенно новой точки зрѣнія, послужившей основаніемъ современной аналитической геометріи. Здѣсь не мѣсто, конечно, излагать содержаніе этихъ идей; важно то, что съ этого времени алгебраическое и геометрическое изслѣдованіе были неразрывно сплетены въ одно цѣлое. Но, называя Декарта отцомъ аналитической геометріи, часто совершенно упускаютъ изъ виду его заслуги въ самой алгебрѣ. Декартъ первый сталъ употреблять начальныя буквы алфавита для обозначенія извѣстныхъ величинъ, а послѣднія — для обозначенія неизвѣстныхъ. Онъ ввелъ обозначеніе отрицательныхъ чиселъ, и именно примѣненіе ихъ въ аналитической геометріи и послужило началомъ всеобщаго ихъ признанія. Онъ далъ правило для приблизительнаго опредѣленія числа положительныхъ и отрицательныхъ корней уравненія, сохранившее и по настоящее время его имя; онъ ввелъ въ употребленіе методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; онъ полагалъ даже, что онъ нашелъ общій методъ рѣшенія уравненія любой степени, — но здѣсь онъ впалъ въ ошибку.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 502.

Когда аналитическіе методы пріобрѣли доминирующее значеніе въ геометріи, то математики скоро пришли къ необходимости распространить на аналитическія формы тѣ методы, которыми еще древніе пользовались для опредѣленія площадей, ограниченныхъ кривыми линіями, и объемовъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями. Здѣсь не мѣсто, конечно, излагать ходъ этой эволюціи, останавливаться на томъ, какимъ образомъ методъ исчерпыванія, обновленный Кеплеромъ, Кавальери, Грегори и другими, перекристаллизовался въ современный анализъ безконечно малыхъ. Существеннно важно то, что на смѣну процессамъ, складывавшимся изъ конечнаго числа операцій, для исчисленія извѣстныхъ величинъ стали прибѣгать къ процессамъ, разлагающимся на безчисленное множество операцій. Такъ возникли идеи о безконечныхъ рядахъ и о суммованіи безконечнаго числа слагаемыхъ; Лейбницъ и Ньютонъ дали общіе методы этого суммованія, и такимъ образомъ возникли дифференціальное и интегральное исчисленія*). „Nova methodus“ Лейбница появилось въ 1684 г.; идеи Ньютона о флюксіяхъ (производныхъ) содержатся уже отчасти во второмъ отдѣлѣ его „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ (1687), а затѣмъ были изложены въ двухъ его капитальныхъ трудахъ „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“ и „Tractatus de quadratura curvarum“; первое изъ этихъ сочиненій относится, повидимому, еще къ 1671 г., но опубликовано было лишь послѣ смерти автора въ 1736 г., второе же появилось въ 1706 г.

Потому ли, что вопросы, которые получили въ дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи разрѣшеніе, уже очень назрѣли, потому ли, что богаты были самыя идеи, потому ли, что къ этому времени уже чрезвычайно интенсивно пошла научная работа,— но методы новаго анализа чрезвычайно быстро получили широкое развитіе. Яковъ и Иванъ Бернулли, Де-Лопиталь, Котесъ, Де-Муавръ, Стирлингъ, Тайлоръ, Маклоренъ — таковы имена послѣдователей Лейбница и Ньютона, создавшихъ изъ идей своихъ великихъ учителей мощное зданіе анализа безконечно-малыхъ, которое нашло себѣ первое завершеніе въ трудахъ Эйлера; на это ушло XVIII столѣтіе.

Что эти новыя работы уже не падаютъ въ область алгебры, было общепризнаннымъ фактомъ. Отцу этихъ идей, Лейбницу, принадлежитъ новый (въ математикѣ) терминъ, ярко объ этомъ свидѣтельствующій; это терминъ — „трансцендентный“. Лейбницъ называетъ трансцендентными такія числа, которыя не могутъ быть получены при помощи алгебраическаго уравненія („quae omnem aequationem algebraicam transcendant“), т. е. не могутъ удовлетворять уравненію вида

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (1)$$

*) Въ процессѣ открытія дифференціальнаго исчисленія очень существенную роль сыгралъ еще вопросъ о проведеніи касательныхъ къ кривымъ. Но для насъ здѣсь это неважно.

съ раціональными коэффиціентами. Въ этомъ смыслѣ этотъ терминъ и употребляется нынѣ въ противоположность числамъ алгебраическимъ, которыя могутъ служить корнями такого рода уравненій. Но къ этому значенію термина возвратились уже въ XIX вѣкѣ; въ XVIII вѣкѣ подъ „трансцендентнымъ“ въ математикѣ разумѣли все то, что выходило за предѣлы алгебры; даже весь новый анализъ въ цѣломъ назывался трансцендентнымъ.

Такимъ образомъ, въ XVIII столѣтіи алгебра утратила то высшее мѣсто въ области математическаго знанія, которое ей принадлежало раньше. Надъ нею разрослось новое могучее дерево высшаго математическаго анализа, раскинувшееся своими вѣтвями въ разныя стороны и совершенно ее покрывшее. А между тѣмъ сама алгебра продолжала разростаться, и, что̀ важнѣе всего, въ нее проникли методы анализа безконечно-малыхъ. Производныя послужили для опредѣленія кратности корней; строка Тайлора послужила точкой отправленія для приближеннаго вычисленія корней и т. д. Такимъ образомъ вновь возникъ вопросъ о предѣлахъ алгебры, и теперь уже опредѣлять ее путемъ исключенія ариѳметики сдѣлалось уже невозможнымъ. Какъ мы уже говорили выше, теперь ее необходимо отдѣлить, отграничить и снизу и сверху.

Нечего и говорить, что и буквенныя обозначенія, имѣвшія раньше значеніе алгебраическаго символизма, сдѣлались неотъемлемымъ средствомъ и въ анализѣ безконечно-малыхъ. Вслѣдствіе этого признавать этотъ формализмъ характернымъ и опредѣлительнымъ для алгебры, какъ это дѣлалъ еще Ньютонъ въ своей „Arithmetica Universalis“, стало невозможнымъ. Если эту точку зрѣнія наши учебники еще внушаютъ дѣтямъ, то, быть можетъ, только потому, что для дѣтей алгебра сохранила свое значеніе высшаго математическаго знанія, и задача учителя заключается только въ томъ, чтобы отграничить это высшее знаніе отъ начальнаго, элементарнаго, т. е. отъ ариѳметики. Насколько такая постановка дидактически цѣлесообразна, къ этому вопросу мы еще возвратимся ниже, въ концѣ настоящей статьи.

Итакъ, уже въ XVIII столѣтіи символизмъ алгебры не могъ служить къ ея отдѣленію отъ анализа безконечно-малыхъ. Тогда алгебру стали противополагать трансцендентному анализу по существу: новый анализъ былъ анализъ безконечно-малыхъ — алгебру стали называть анализомъ конечныхъ величинъ. На этой точкѣ зрѣнія стоитъ, напримѣръ, одинъ изъ наиболѣе выдающихся алгебраистовъ XVIII столѣтія — Безу*). То же подраздѣленіе мы находимъ въ извѣстномъ трактатѣ по математикѣ Вольфа**).

Итакъ, въ XVII столѣтіи наука о числахъ подраздѣлилась на ариѳметику и алгебру, въ XVIII же столѣтіи — на ариѳметику,

*) M. Bezout. „Théorie générale des équations algébraiques“. Paris. 1779.

**) „Elementa Matheseos universae, autore Christiano Wolfio“. Hallae Magdeburgicae. 1730.

анализъ конечныхъ величинъ и анализъ безконечно-малыхъ. И именно въ XVIII-мъ столѣтіи такое подраздѣленіе имѣло подъ собой извѣстную почву. Новый анализъ оперировалъ надъ безконечно-малыми величинами, съ которыми обращались довольно свободно; на безконечно малыя еще смотрѣли, какъ на величины особыя, надъ которыми позволительны такія дѣйствія и преобразованія, которыя совершенно недопустимы по отношенію къ величинамъ обыкновеннымъ, конечнымъ. Отъ этихъ недостаточно обоснованныхъ, неясныхъ и рискованныхъ пріемовъ у многихъ математиковъ оставалось тяжелое чувство. Алгебра была чужда этихъ пріемовъ и не вызывала такихъ сомнѣній; производныя играютъ здѣсь чисто формальную роль и могутъ быть введены безъ пособія безконечно-малыхъ; въ книгѣ Безу, о которой мы говорили выше, они такъ именно и введены.

Однако, движеніе противъ свободнаго обращенія съ безконечно-малыми величинами началось уже въ концѣ XVIII столѣтія. Когда же идея о безконечно-малой величинѣ и о безконечныхъ процессахъ была доведена до полной математической строгости, то стало совершенно ясно, что она играетъ въ алгебрѣ врядъ ли меньшую роль, чѣмъ въ дифференціальномъ исчисленіи; стало ясно, что безконечные процессы коренятся уже въ самомъ введеніи ирраціональныхъ величинъ, что въ понятіи о непрерывности безконечно-малыя играютъ ту же роль, что и при опредѣленіи производной *). Когда было доведено до конца доказательство основной теоремы алгебры, что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корень, то стало совершенно ясно, что мы тутъ оперируемъ тѣми же средствами, что и въ дифференціальномъ исчисленіи; а въ правильно обоснованные методы приближеннаго вычисленія корней методы дифференціальнаго исчисленія уже входятъ въ чистомъ видѣ.

Итакъ, точка зрѣнія на алгебру, какъ на анализъ конечныхъ величинъ въ противоположность анализу безконечно-малыхъ, характерна для XVIII столѣтія и развѣ еще для самаго начала XIX-го; позже, въ XIX-омъ столѣтіи, она была совершенно оставлена, такъ какъ стало совершенно ясно, что идея о безконечно-малой величинѣ и о безконечныхъ процессахъ играетъ въ алгебрѣ такую же роль, какъ и въ дифференціальномъ исчисленіи.

Если алгебра принесла съ собой символизмъ, который сдѣлался мощнымъ и неизбѣжнымъ орудіемъ всякаго общаго изслѣдованія, то новый анализъ внесъ понятіе, которое, по силѣ вложеннаго въ него обобщенія, сыграло врядъ ли не болѣе еще важную роль; это понятіе о функціи. Самое это слово появляется въ первый разъ тоже у Лейбница въ 1694 г., сначала въ геометрическомъ смыслѣ — для обозначенія отрѣзка, измѣняющагося по извѣстному закону. Въ томъ же значеніи имъ пользуется (октябрь 1694 г.) Іоаннъ Бернулли. Въ современномъ же своемъ значеніи это слово появляется впервые въ письмѣ Якова Бернулли къ Лейбницу, написанномъ въ іюнѣ 1698 г.; по поводу рѣшенія одной изопериметрической задачи онъ говоритъ здѣсь о функціи ординатъ. Изъ отвѣтнаго письма Лейбница (іюль того же года) видно, что и онъ самъ тѣмъ временемъ

*) См. объ этомъ L. Couturat. „De l'infini mathematique“. Paris. 1896.

пользовался этимъ словомъ въ новомъ его значенiи. Въ печати этотъ терминъ появляется впервые у Іоанна Бернулли въ 1706 г., и въ 20-хъ годахъ XVIII столѣтiя онъ получилъ уже всеобщее распространенiе. Понятiе о функцiи тоже пережило глубокую эволюцiю, но на этомъ мы не имѣемъ возможности здѣсь останавливаться*) и ограничимся здѣсь только слѣдующими существенными для насъ замѣчанiями. У Лейбница и Якова Бернулли понятiе о функцiи почти покрывается понятiемъ о степени: различныя функцiи — это различныя степени перемѣнной. У Іоанна Бернулли терминъ получаетъ болѣе широкое значенiе: это „величина, составленная изъ нѣкоторой перемѣнной и какихъ-либо постоянныхъ“ Въ этомъ смыслѣ понятiе о функцiи употреблялось въ теченiе всего XVIII столѣтiя; въ этомъ опредѣленiи этотъ терминъ приведенъ въ книгѣ Эйлера „Введенiе въ анализъ безконечно-малыхъ“ (1748), которая, по справедливости, должна быть названа первымъ сочиненiемъ по теорiи функцiй. Тутъ же Эйлеръ дѣлитъ функцiи на алгебраическiя и трансцендентныя (подраздѣленiе, которое есть уже у Іоанна Бернулли). Подъ алгебраическими функцiями одной независимой перемѣнной Эйлеръ разумѣетъ выраженiе вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (2)$$

т. е. цѣлыя алгебраическiя функцiи, а также выраженiя, которыя получаются путемъ дѣленiя**) такихъ выраженiй (рацiональныя алгебраическiя функцiи) и извлеченiя корня (иррацiональныя алгебраическiя функцiи). Эти послѣднiя Эйлеръ отождествляетъ съ тѣми, которыя могутъ быть получены путемъ рѣшенiя алгебраическихъ уравненiй вида

$$\Sigma A x^k y^l = 0 \qquad (3)$$

относительно y. Эйлеру не было извѣстно, что уравненiя вида (3) не всегда могутъ быть рѣшены при помощи радикаловъ. Если мы примемъ во вниманiе, что частное отъ дѣленiя двухъ функцiй вида (2) можетъ быть разсматриваемо, какъ рѣшенiе уравненiя

$$Pz + Q = 0,$$

гдѣ P и Q суть цѣлыя функцiи отъ x, то мы придемъ къ такому опредѣленiю алгебраическихъ функцiй:

Алгебраическими называются функцiи вида (2) (цѣлыя алгебраическiя функцiи), а также всѣ тѣ, которыя могутъ быть получены путемъ рѣшенiя уравненiй вида (1), въ которыхъ коэффицiентами служатъ цѣлыя алгебраическiя функцiи вида (2).

*) См. по этому предмету очень интересную брошюру Пикара: E. Picard. „Sur le developpement depuis un siecle de quelques théorie fondamentales dans l'analyse mathématique“. Paris, 1900.

**) Сложенiе, вычитанiе и перемноженiе такихъ выраженiй приводитъ къ выраженiямъ того же вида.

Точно такъ же подъ цѣлой алгебраической функціей нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ разумѣютъ сумму членовъ вида

$$Ax^k y^l \dots v^p,$$

а при помощи совершенно такихъ же соображеній, какъ выше, устанавливается понятіе объ алгебраической функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ вообще.

Алгебраическимъ функціямъ противополагаютъ трансцендентныя — неалгебраическія. Нужно сказать, что относительно внѣшнихъ признаковъ, по которымъ можно отличить трансцендентную функцію отъ алгебраической, нѣкоторое время царила путаница; полагали, напримѣръ, что функція, выражающаяся безконечнымъ степеннымъ рядомъ, является трансцендентной. Нѣкоторыя трансцендентныя функціи были уже давно извѣстны, какъ логариѳмическія, тригонометрическія функціи; интегральное исчисленіе приводило ко многимъ новымъ трансцендентнымъ функціямъ. Нужно, однако, сказать, что дѣйствительныя доказательства того, что эти функціи трансцендентныя, были даны лишь въ срединѣ XIX столѣтія.

Какъ извѣстно, быстро развивавшійся анализъ безконечно-малыхъ скоро пришелъ къ задачамъ, которыя оказались для него неприступными. Задача о разысканіи неопредѣленнаго интеграла даннаго дифференціала, а, въ особенности, интеграла даннаго дифференціальнаго уравненія была разрѣшена только въ простѣйшихъ случаяхъ. Причина этого заключалась въ томъ, что искомые интегралы старались выразить при помощи небольшого числа извѣстныхъ простѣйшихъ функцій; между тѣмъ въ дѣйствительности, можно сказать, почти каждое дифференціальное уравненіе характеризуетъ собой новую своеобразную функцію, которая не поддается формальному выраженію черезъ основныя простѣйшія функціи при комбинированіи ихъ въ конечномъ числѣ. Единственный выходъ изъ сложившагося такимъ образомъ положенія заключался въ томъ, чтобы заняться изслѣдованіемъ функцій, наиболѣе общихъ способовъ ихъ выраженія и тѣхъ свойствъ ихъ, которыя этими способами заданія опредѣляются. Отсюда возникаетъ цѣлый рядъ изслѣдованій чрезвычайно общаго характера, изъ которыхъ слагается теорія функцій. Ни въ коемъ случаѣ не будетъ преувеличеніемъ, если мы скажемъ, что XVIII столѣтіе было вѣкомъ анализа безконечно-малыхъ, а XIX — вѣкомъ теоріи функцій.

Мы видѣли выше, что уже съ средины XVIII столѣтія были выдѣлены алгебраическія функціи, а всѣ остальныя наименованы общимъ названіемъ трансцендентныхъ функцій. Ясно, что въ этомъ названіи уже сказалась точка зрѣнія на функціи первой категоріи, какъ на предметъ изслѣдованія алгебры; когда же теорія функцій пріобрѣла доминирующее значеніе, то на алгебру стали смотрѣть, какъ на теорію алгебраическихъ функцій.

Впервые эта точка зрѣнія была высказана, повидимому, Лагранжемъ. Въ своихъ лекціяхъ „Leçon sur le calcul des fonctions“

(1804) онъ говоритъ: „На алгебру нужно смотрѣть, какъ на науку о функціяхъ. Легко видѣть, что рѣшеніе уравненій есть не что иное, какъ разысканіе неизвѣстныхъ величинъ въ функціи отъ извѣстныхъ. Эти функціи выражаютъ тѣ дѣйствія, которыя нужно совершить надъ данными величинами, чтобы получить значенія искомыхъ; онѣ собственно говоря, и представляютъ собой результатъ этихъ дѣйствій. Однако, въ алгебрѣ разсматриваются только такія функціи, которыя проистекаютъ изъ операцій ариѳметическихъ, но обобщенныхъ и перенесенныхъ на буквы; между тѣмъ въ теоріи функцій, въ собственномъ смыслѣ этого слова, разсматриваются функціи, которыя получаются путемъ разложенія въ ряды, когда мы даемъ одной или нѣсколькимъ перемѣннымъ неопредѣленныя наращенія". Въ этой цитатѣ не все еще правильно: опредѣленіе алгебраической функціи должно быть выражено иначе; но, по существу, точка зрѣнія совершенно ясна.

Итакъ, изъ всей совокупности изучаемыхъ въ анализѣ функцій выдѣлена опредѣленная группа ихъ; эти функціи названы *алгебраическими*, и изученіе ихъ отнесено къ *алгебрѣ*. Спрашивается, что заставило выдѣлить именно эти функціи? Есть ли къ этому глубокія основанія, или это только историческій пережитокъ, дань уваженія старѣйшей отрасли теоріи функцій?

Изученіе функцій, составляющее содержаніе теоріи функцій, есть задача столь широкая, что она почти расплывается по своей неопредѣленности. Если мы желаемъ получить достаточно общіе результаты, то необходимо ограничить матеріалъ. И дѣйствительно, современная теорія функцій имѣетъ главнымъ своимъ предметомъ такъ называемыя аналитическія функціи, т. е. такія, которыя въ извѣстной области разлагаются въ степенные ряды. Когда намъ въ дѣйствительности приходится изучать такого рода функцію, то дѣло всегда сводится къ тому, что мы отдѣляемъ конечную группу членовъ и затѣмъ оцѣниваемъ остатокъ. Центръ тяжести изслѣдованія лежитъ всегда на выдѣленной конечной группѣ, и знаніе ея свойствъ составляетъ необходимую основу общаго изученія аналитической функціи. Но выдѣленная, такимъ образомъ, группа членовъ образуетъ цѣлую алгебраическую функцію. Такимъ образомъ, изученіе всякой аналитической функціи, въ конечномъ счетѣ, приводится къ изученію алгебраическихъ функцій. Такова причина, по которой алгебраическимъ функціямъ отведено особое мѣсто. Цѣлыя алгебраическія функціи суть *простѣйшія* аналитическія функціи, теорія которыхъ должна быть предпослана общей теоріи функцій; *дисциплина, посвященная этому предварительному изученію опредѣленныхъ выше простѣйшихъ функцій, и есть алгебра*.

Посмотримъ, какъ долженъ группироваться матеріалъ при такой точкѣ зрѣнія на алгебру. Какъ мы видѣли, къ алгебрѣ издавна относили ученіе объ отрицательныхъ, ирраціональныхъ и мнимыхъ числахъ. Могутъ ли эти главы быть сохранены въ алгебрѣ при научной классификаціи матеріала и при томъ опредѣленіи этой науки, на которомъ мы остановились? Очевидно, онѣ сюда не относятся И дѣйствительно, онѣ въ настоящее время уже безповоротно перешли къ ариѳметикѣ. Посмотримъ, какъ это произошло.

Мы указывали выше, почему ученіе объ этого рода числахъ нашло себѣ мѣсто въ алгебрѣ. Признаніе въ математикѣ ирраціональныхъ, отрицательныхъ и мнимыхъ чиселъ явилось, какъ извѣстно, результатомъ долгой и довольно упорной борьбы.

Легче примирились съ ирраціональными числами, такъ какъ къ нимъ естественно приводили геометрическіе вопросы. Много труднѣе далось уже признаніе отрицательныхъ чиселъ. Мы видѣли, что они появились впервые у индусовъ и арабовъ; Бхаскара смотритъ на положительныя и отрицательныя числа, какъ на имущества и долги, но указываетъ, какъ мы уже упоминали выше, что „отвлеченныхъ отрицательныхъ чиселъ люди не признаютъ". Въ Европѣ отрицательныя числа не прививались очень долго. Пачіоли и Карданъ имѣютъ еще смутное понятіе объ отрицательныхъ числахъ, а Віетъ не признаетъ ихъ вовсе. Полное признаніе отрицательныя числа получили лишь послѣ Декарта, когда выяснилось геометрическое ихъ значеніе.

Еще гораздо медленнѣе шло дѣло съ признаніемъ мнимыхъ чиселъ. Поводомъ къ ихъ введенію послужила формула Кардана, выражающая корни уравненія третьей степени. Очень скоро замѣтили, что въ томъ именно случаѣ, когда уравненіе третьей степени имѣетъ три вещественныхъ корня, формула Кардана требуетъ извлеченія квадратнаго корня изъ отрицательнаго количества. Всѣ усилія избавиться отъ этой невозможной операціи ни къ чему не привели *). Это именно обстоятельство побудило итальянскаго математика Бомбелли (1572) попытаться оперировать надъ получающимися „невозможными радикалами такъ, какъ будто это были бы числа". Этимъ путемъ онъ дѣйствительно получилъ вещественные корни кубическаго уравненія, скрывающіеся подъ мнимой формой. И надъ этими радикалами и продолжали оперировать, „какъ будто бы это были числа". Часто это приводило къ правильнымъ, а иногда къ совершенно невѣрнымъ результатамъ. Отсюда и то недовѣріе, которое питали къ мнимымъ числамъ. Генія Декарта, Ньютона, Лейбница не хватило для того, чтобы выяснить истинное значеніе этихъ чиселъ и спокойно ввести ихъ въ науку наравнѣ съ обыкновенными числами. Для этого долженъ былъ совершиться глубокій переворотъ во взглядахъ на то, что собственно такое число. Переворотъ этотъ и совершился въ серединѣ XIX столѣтія; но до этого между числами обыкновенными и всѣми этими „особыми" категоріями чиселъ въ представленіи математиковъ была цѣлая пропасть. Обыкновенныя числа представляли собой понятіе ясное, доступное и необходимое каждому, заимствованное непосредственно изъ дѣйствительности. Ирраціональныя, отрицательныя и мнимыя числа были выдуманы математиками, вызывали упорные споры еще между ними и, если были гдѣ-либо нужны, то только въ дѣлѣ

---

*) Въ настоящее время строго доказано, что корни неприводимаго уравненія третьей степени, имѣющаго три вещественныхъ корня, не могутъ быть выражены въ радикалахъ безъ пособія квадратныхъ корней изъ отрицательнаго числа. (См., напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ, „Энциклопедія элементарной алгебры". Томъ I, гл XX).

рѣшенія уравненій. Поэтому они и нашли себѣ пріютъ въ алгебрѣ, а не въ ариѳметикѣ. Трудами Муавра, Эйлера и Коши былъ, однако, пролитъ новый свѣтъ на мнимыя числа; результаты, полученные этими геометрами при помощи мнимыхъ чиселъ, были такъ важны, что игнорировать ихъ было уже невозможно. Мало-по-малу установилась точка зрѣнія, что отрицательныя, ирраціональныя и мнимыя числа представляютъ собой символы (логическіе или письменные), надъ которыми мы оперируемъ по опредѣленнымъ формальнымъ законамъ, нами самими установленнымъ; что совершенно такое же значеніе имѣютъ и обыкновенныя — раціональныя положительныя — числа. Выяснилось, что всѣ эти виды чиселъ могутъ служить для выраженія извѣстныхъ соотношеній между реальными объектами. Но тѣ соотношенія, которыя выражаются раціональными положительными числами, гораздо проще и неизмѣримо чаще встрѣчаются въ повседневной жизни, чѣмъ тѣ соотношенія, которыя выражаются ирраціональными, отрицательными и, въ особенности, мнимыми числами. Выяснилось, что въ этомъ направленіи можно идти еще дальше, что можно ввести еще новыя числа, которыя могутъ оказаться весьма полезными, какъ для спеціально математическихъ вычисленій, такъ и для выраженія свойствъ реальныхъ объектовъ и соотношеній между ними. Такъ, Гамильтономъ и Грассманомъ были изобрѣтены такъ называемые кватерніоны, оказавшіеся настолько полезными, что въ послѣдніе именно годы новыя сочиненія по теоретической физикѣ, можно сказать, иначе не пишутся, какъ въ кватерніонахъ. Въ 1831 году Гауссъ предложилъ вовсе изгнать терминъ „мнимое число“ и ввелъ вмѣсто этого новый терминъ „комплексное число“, болѣе соотвѣтствующій значенію этого понятія. Значенія аналитическихъ функцій стали систематически изучать не для однихъ только вещественныхъ, но и для комплексныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ; это послужило источникомъ такого обилія новыхъ идей и фактовъ, что съ середины XIX-го столѣтія въ глазахъ математиковъ глубокое различіе между различнаго рода числами совершенно изгладилось. У математиковъ сложилось общее понятіе о числахъ, какъ о символахъ, надъ которыми оперируютъ по извѣстнымъ формальнымъ законамъ*). Даже мнимыя числа перестали быть особенными числами и вмѣстѣ со всѣми остальными видами отошли къ ариѳметикѣ — наукѣ о числахъ.

Итакъ, отрицательныя, ирраціональныя и мнимыя числа находили себѣ мѣсто въ алгебрѣ исключительно потому, что на нихъ смотрѣли, какъ на числа особенныя, только и нужныя въ теоріи уравненій. Когда же математики себѣ уяснили, что такой глубокой разницы между этими категоріями чиселъ нѣтъ, то по научной классификаціи всѣ эти числа нашли себѣ мѣсто въ ариѳметикѣ. На этой точкѣ зрѣнія стоятъ авторы всѣхъ современныхъ научныхъ сочиненій по ариѳ-

---

*) Это значеніе различнаго рода чиселъ очень хорошо выясняется въ „Лекціяхъ по ариѳметикѣ для учителей“ Ф. Клейна, переводъ которыхъ мы печатаемъ въ настоящемъ году въ „Вѣстникѣ“ и закончимъ въ слѣдующемъ семестрѣ.

метикѣ; литературныя указанія читатель найдетъ въ указанномъ сочиненіи Клейна.

Замѣтимъ кстати, что при первой необходимости строго научно обосновать ариѳметику, оказалось неизбѣжнымъ и тутъ пользоваться буквенными обозначеніями,— и такъ называемый алгебраическій символизмъ сдѣлался также достояніемъ ариѳметики: рѣдкое наслѣдіе, перешедшее отъ дочери къ матери.

Но, если „алгебраическій" символизмъ равно принадлежитъ ариѳметикѣ и алгебрѣ, то куда слѣдуетъ отнести ученіе о тождественныхъ преобразованіяхъ, съ котораго мы начинаемъ обыкновенно элементарную алгебру? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, посмотримъ, что собственно выражаютъ относящіяся сюда предложенія.

Возьмемъ, напримѣръ, сложеніе многочленовъ. Тождество

$$A+(m-n+p-q)=A+m-n+p-q$$

выражаетъ слѣдующее: каковы бы ни были числа A, m, n, p, q, для того, чтобы къ числу A прибавить то число, которое получится по совершеніи надъ числами m, n, p, q дѣйствій, указанныхъ въ скобкахъ, достаточно къ числу A прибавить число m, отнять n, прибавить p и отнять q. Это есть теорема, выражающая свойства сложенія и вычитанія чиселъ; она ни въ какой связи съ алгебраическими функціями не стоитъ и естественно принадлежитъ ариѳметикѣ. Въ научной постановкѣ ариѳметики необходимо будетъ доказать, что теорема справедлива для цѣлыхъ, дробныхъ, отрицательныхъ, ирраціональныхъ и мнимыхъ чиселъ. И только тогда, когда она пройдетъ черезъ всѣ главы ариѳметики, это предложеніе и будетъ доказано въ томъ видѣ, въ какомъ оно нужно для алгебры. Тоже самое справедливо относительно сложенія, вычитанія, умноженія одночленовъ и многочленовъ. Точно такъ же извѣстное правило дѣленія многочлена на одночленъ есть ариѳметическое предложеніе, гласящее слѣдующее: для того, чтобы раздѣлить на нѣкоторое число результатъ ряда сложеній и вычитаній, достаточно предварительно раздѣлить на дѣлителя всѣ данныя числа, а затѣмъ произвести сложенія и вычитанія въ томъ же порядкѣ. И это будетъ справедливо, каковы бы ни были данныя числа, лишь бы дѣлитель былъ отличенъ отъ нуля. Но, какъ это ни странно, вопросъ стоитъ совершенно иначе въ теоріи дѣленія многочлена на многочленъ. Прежде, чѣмъ обратиться къ этой операціи, ученикамъ говорятъ о расположеніи многочлена по степенямъ нѣкоторой главной буквы, т. е. его фактически знакомятъ съ цѣлой алгебраической функціей отъ одной независимой перемѣнной. Затѣмъ показываютъ, какъ по даннымъ двумъ многочленамъ — дѣлимому и дѣлителю — найти частное и остатокъ, также расположенные по степенямъ той же главной буквы. Отчего нѣтъ никакой рѣчи о главныхъ буквахъ при сложеніи, вычитаніи и умноженіи? *)

*) При изложеніи умноженія еще иногда говорятъ о расположенныхъ многочленахъ, но обыкновенно только съ цѣлью подготовить дѣленіе.

Причина кроется въ томъ, что тамъ доказываются чисто ариѳметическія тождества, подъ заголовкомъ же „дѣленіе многочлена на многочленъ“ излагается слѣдующая теорема алгебры: если даны двѣ цѣлыя алгебраическія функціи P и Q одной независимой перемѣнной x и степень второй функціи не превышаетъ степени первой, то существуетъ одна и только одна пара цѣлыхъ функцій R и S, удовлетворяющихъ слѣдующимъ двумъ условіямъ: a) степень функціи S ниже, нежели степень Q, b) $P = QR + S$. Эти двѣ функціи R и S называются частнымъ и остаткомъ отъ дѣленія функціи P на функцію Q. Въ элементарной алгебрѣ излагаются правила нахожденія этихъ двухъ функцій. Въ систематическомъ же изложеніи алгебры это предложеніе находитъ себѣ мѣсто вполнѣ натурально послѣ предложенія о томъ, что сумма, разность и произведеніе цѣлыхъ алгебраическихъ функцій суть цѣлыя алгебраическія функціи.

Вообще все то, что излагается обычно въ элементарной алгебрѣ въ главахъ о тождественныхъ преобразованіяхъ, безъ различенія буквъ, входящихъ въ преобразуемыя формулы, представляетъ собой матеріалъ чисто ариѳметическій. Всѣ же тѣ предложенія, которыя касаются многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ нѣкоторой главной буквы, представляютъ собой элементарную формулировку свойствъ цѣлыхъ алгебраическихъ функцій и по существу дѣйствительно принадлежатъ алгебрѣ.

Принадлежитъ ли алгебрѣ ученіе о соединеніяхъ? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, достаточно себя спросить, стоитъ ли эта теорія въ какой-либо связи съ цѣлыми алгебраическими функціями. Очевидно нѣтъ. Въ этой теоріи мы группируемъ произвольные объекты, и задача ариѳметики заключается лишь въ томъ, чтобы подсчитать, сколько здѣсь возможно комбинацій. Ученіе о соединеніяхъ, или, какъ его называютъ въ дальнѣйшемъ развитіи, комбинаторика, не только принадлежитъ ариѳметикѣ, но даже ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ.

Отдѣлъ нашей элементарной алгебры, дѣйствительно, принадлежащій алгебрѣ и составляющій можно сказать, важнѣйшую часть ея — это ученіе объ уравненіяхъ. Одной изъ важнѣйшихъ, чтобы не сказать прямо — важнѣйшей, изъ задачъ, представляющихся при изученіи цѣлыхъ алгебраическихъ функцій, является вопросъ о томъ, способна ли данная функція принимать данныя значенія, и, если способна, то при какихъ именно значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ. А это, какъ это указывалось выше въ приведенной выше цитатѣ Лагранжа, и есть вопросъ о рѣшеніи уравненій.

Нужно, впрочемъ, замѣтить, что алгебрѣ принадлежатъ лишь тѣ уравненія вида $F(x) = 0$, въ которыхъ $F(x)$ есть алгебраическая функція отъ x. Уравненія показательныя, напримѣръ, принадлежатъ трансцендентному анализу.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Лекціи по ариѳметикѣ для учителей,

читанныя въ $190^7/_8$ академическомъ году профессоромъ Ф. Клейномъ въ Гёттингенѣ.

(Продолженіе).*

Я перехожу теперь къ седьмому пункту, къ ученію о такъ называемыхъ пиѳагоровыхъ числахъ; здѣсь мы опять воспользуемся наглядными представленіями, но въ нѣсколько иной формѣ. Задача о пиѳагоровыхъ часлахъ заключается, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы найти цѣлыя числа, удовлетворяющія уравненію:

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

Положивъ

$$\frac{a}{c}=\xi, \quad \frac{b}{c}=\eta, \tag{2}$$

мы разсмотримъ вмѣсто уравненія (1) уравненіе

$$\xi^2+\eta^2=1, \tag{3}$$

къ которому оно проводится при помощи преобразованія (2); намъ нужно, слѣдовательно, разыскать всѣ раціональныя дроби, удовлетворяющія этому уравненію. Имѣя это въ виду мы разсмотримъ совокупность всѣхъ раціональныхъ точекъ на плоскости (т. е. всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя имѣютъ раціональныя координаты ξ, η); точки эти образуютъ въ плоскости сгущеннный комплексъ**).

Уравненіе (3) выражаетъ окружность на плоскости, описанную изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ 1; наша задача сводится къ тому, чтобы опредѣлить, какъ проходитъ наша окружность въ этомъ сгущенномъ комплексѣ раціональныхъ точекъ, какія изъ нихъ она содержитъ. Нѣкоторыя изъ раціональныхъ точекъ, принадлежащихъ окружности, мы хорошо знаемъ напередъ: сюда относятся, напримѣръ, точки ея пересѣченія съ четырьмя осями. Но мы остановимся предпочтительно на точкѣ S ($\xi=-1$, $\eta=0$; фиг. 14). Представимъ себѣ всѣ лучи, проходящіе черезъ точку S; они выражаются уравненіемъ:

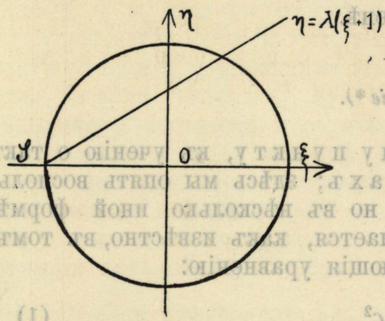
$$\eta=\lambda(\xi+1). \tag{4}$$

*) См. № 496 „Вѣстника". Мы вынуждены были сдѣлать значительный перерывъ въ печатаніи этого прекраснаго сочиненія; мы дѣлимъ, однако, матеріалъ на такія отрывки, что каждый отрывокъ въ отдѣльности представляетъ независимое цѣлое.

**) Т. е. такой комплексъ точекъ, въ которомъ, сколько угодно близко къ любой его точкѣ, имѣется безчисленное множество другихъ точекъ.

Ред.

Каждый изъ этихъ лучей мы будемъ называть раціональнымъ или ирраціональнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли параметръ λ раціональное значеніе или ирраціональное.



Фиг. 14г.

Теперь нетрудно доказать слѣдующее двойное предложеніе: каждая раціональная точка окружности проектируется изъ точки S раціональнымъ лучемъ, и обратно — каждый раціональный лучъ (4) пересѣкаетъ окружность въ раціональной точкѣ.

Первая половина непосредственно ясна*). Вторую мы докажемъ непосредственнымъ вычисленіемъ. Именно, подставляя выраженіе (4) для η въ уравненіе (3), мы получимъ для абсциссы точки пересѣченія уравненіе:

$$\xi^2 + \lambda^2 (\xi + 1)^2 = 1,$$

или

$$(1 + \lambda^2)\,\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Но одинъ корень ($\xi = -1$), соотвѣтствующій точкѣ S, намъ извѣстенъ; для другого корня мы простымъ вычисленіемъ получаемъ выраженіе:

$$\xi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}; \qquad (5a)$$

а тогда уравненіе (4) даетъ для ординаты:

$$\eta = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}; \qquad (5b)$$

при раціональномъ λ мы, такимъ образомъ, дѣйствительно получаемъ раціональную точку пересѣченія.

Доказанное, такимъ образомъ, предложеніе можно еще выразить такъ: всѣ раціональныя точки нашей окружности выражаются формулами (5), гдѣ λ обозначаетъ любое раціональное число. Этимъ наша задача собственно рѣшена; намъ остается только сдѣлать переходъ къ цѣлымъ числамъ. Для этого мы полагаемъ:

$$\lambda = \frac{n}{m},$$

*) Въ самомъ дѣлѣ, если прямая (4) проходитъ черезъ какую бы то ни было раціональную точку ξ_0, η_0, отличную отъ S, то въ ея уравненіи $\lambda = \dfrac{\eta_0}{\xi_0 + 1}$, т. е. имѣетъ раціональное значеніе.

Ред.

гдѣ n и m цѣлыя числа; тогда выраженія (5) принимаютъ видъ:

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \eta = \frac{2nm}{m^2 + n^2}.$$

Это будетъ общій видъ всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (3). Совокупность всѣхъ цѣлыхъ рѣшеній первоначальнаго уравненія (1), т. е. всѣ пиѳагоровы числа, содержатся, стало быть, въ формулахъ:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2nm, \quad c = m^2 + n^2;$$

мы получаемъ отсюда всѣ рѣшенія, не имѣющія общихъ дѣлителей, если числа m и n пробѣгаютъ черезъ всѣ пары чиселъ, первыхъ между собой.

Мы пришли такимъ образомъ къ чрезвычайно наглядному рѣшенію этого вопроса, которое обыкновенно получается при помощи весьма абстрактныхъ соображеній.

Здѣсь я хочу кстати остановиться на такъ называемой „великой теоремѣ Ферма". Я поступлю совершенно въ духѣ древнихъ геометровъ, если перенесу вопросъ о пиѳагоровыхъ числахъ, приноровленный въ обыкновенной его постановкѣ къ плоскости, въ пространство 3-хъ и болѣе высокаго числа измѣреній, и именно слѣдующимъ образомъ: возможно ли чтобы сумма кубовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ представляла собой полный кубъ? или возможно ли, чтобы сумма четвертыхъ степеней представляла собой полную четвертую степень? Вообще, можетъ ли уравненіе

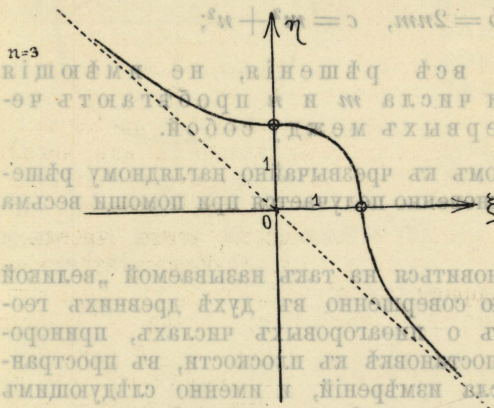
$$x^n + y^n = z^n$$

при любомъ цѣломъ n быть разрѣшено въ цѣлыхъ числахъ? Ферма далъ отрицательный отвѣтъ на этотъ вопросъ; отвѣтъ этотъ заключается въ слѣдующей теоремѣ, носящей имя ея автора: уравненіе

$$x^n + y^n = z^n$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній ни при какомъ n, большемъ 2.

Позвольте мнѣ начать съ нѣкоторыхъ историческихъ свѣдѣній. Ферма жилъ отъ 1608 до 1665 года и былъ въ Тулузѣ совѣтникомъ парламента,— стало быть, юристомъ. Но онъ много занимался математическими вопросами и при томъ настолько плодотворно, что его слѣдуетъ отнести къ числу величайшихъ математиковъ. Имя Ферма можетъ быть вполнѣ заслуженно названо среди основателей аналитической геометріи, исчисленія безконечно малыхъ и теоріи вѣроятностей; но особенно важное значеніе имѣютъ его труды въ области теоріи вѣроятностей. Однако, всѣ результаты, полученные имъ въ этой области, оставлены имъ въ видѣ помѣтокъ на поляхъ экземпляра Діофанта, знаменитаго античнаго математика, написавшаго книгу по теоріи чиселъ около 300-го года по Р. Хр., т. е. приблизительно черезъ 600 лѣтъ послѣ Евклида. Эти замѣтки Ферма были опубликованы его сыномъ лишь черезъ 5 лѣтъ послѣ его смерти; онъ самъ при жизни ихъ не печаталъ. Среди этихъ замѣтокъ имѣется также и „великая теорема“, о которой теперь идетъ рѣчь, съ припиской: я нашелъ „воистину удивительное доказательство, но за недостаткомъ мѣста не могу его здѣсь привести“ *). Однако, по настоящее время не удалось найти доказательства этого предложенія.



Фиг. 15.

Чтобы нѣсколько ближе оріентироваться въ содержаніи этой теоремы Ферма, мы, какъ и въ случаѣ $n=2$, попытаемся сначала найти раціональныя рѣшенія уравненія

$$\xi^n + \eta^n = 1;$$

т. е. постараемся выяснить себѣ положеніе выражаемой этимъ уравненіемъ кривой относительно раціональныхъ точекъ плоскости. Фигуры 15 и 16 приблизительно изображаютъ кривыя, соотвѣтствующія значеніямъ $n=3$ и $n=4$. Онѣ, во всякомъ случаѣ, содержатъ точки

$$\xi = 0,\ \eta = 1 \text{ и } \xi = 1,\ \eta = 0$$

и соотвѣтственно

$$\xi = 0,\ \eta = \pm 1 \text{ и } \xi = \pm 1,\ \eta = 0.$$

Фиг. 16.

Утвержденіе Ферма сводится, такимъ образомъ, къ тому, что эти кривыя въ противоположность разсмотрѣнной выше окружности извиваются въ сгущенномъ комплексѣ раціональныхъ точекъ, не проходя ни черезъ одну точку комплекса, кромѣ упомянутыхъ выше.

Интересъ этого предложенія заключается прежде всего въ томъ, что полнаго его доказательства до сихъ поръ никому не удалось найти, несмотря на всѣ употребленныя къ этому усилія. Что касается попытокъ доказательства этого предложенія, то здѣсь на первомъ мѣстѣ

---

*) См. изданіе сочиненій Ферма Парижской Академіи — „Oeuvres de Fermat“, т. III, (Paris, 1896), p. 241.

приходится назвать Куммера (Kummer), существенно подвинувшаго вопросъ впередъ. Куммеръ привелъ этотъ вопросъ въ связь съ теоріей алгебраическихъ чиселъ, въ частности, съ числами, къ которымъ приводитъ задача о дѣленіи окружности на равныя части. Пользуясь корнемъ n-той степени изъ единицы

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

можно разложить разность $x^n - y^n$ на линейныхъ множителей; уравненіе Ферма принимаетъ тогда видъ:

$$x^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)\ldots\ (z-\varepsilon^{n-1}y);$$

иными словами, n-тая степень числа должна разлагаться на множителей, которые указаннымъ выше способомъ составляются изъ чиселъ y и z и изъ числа ε. Для такого рода чиселъ Куммеръ построилъ теоріи, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя издавна извѣстны для цѣлыхъ чиселъ: онъ построилъ понятіе о дѣлимости этихъ чиселъ, о разложеніи числа на простые множители и т. д. Сообразно этому мы говоримъ теперь о цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ и, въ частности, о цѣлыхъ числахъ, къ которымъ приводитъ задача о дѣленіи окружности на равныя части. Съ точки зрѣнія Куммера предложеніе Ферма является теоремой о разложеніи на множителей въ области чиселъ ε *). Исходя изъ этихъ соображеній, онъ и пытается доказать теорему. Это ему дѣйствительно удалось для значительнаго большинства значеній показателя n; въ частности, напримѣръ, предложеніе имъ доказано для всѣхъ показателей, которые меньше 100. Но между большими числами оказываются исключенія, освободиться отъ которыхъ не удалось ни ему ни крупнѣйшимъ математикамъ, слѣдовавшихъ его пути. Я вынужденъ здѣсь естественно ограничиться этими указаніями; подробности о состояніи этой задачи вы найдете въ „Математической Энциклопедіи", въ концѣ реферата Гильберта „О теоріи алгебраическихъ чиселъ". Гильбертъ самъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, которые продолжали и развили изслѣдованія Куммера.

Врядъ ли можно сомнѣваться, что „удивительное" доказательство Ферма не падало въ эту область идей. Трудно думать, чтобы онъ владѣлъ операціями надъ алгебраическими числами въ ту пору, когда относительно мнимыхъ чиселъ математики еще не были достаточно оріентированы,—когда была еще въ зачаточномъ состояніи самая теорія чиселъ, которая именно благодаря глубокимъ изслѣдованіямъ Ферма получила импульсъ къ дальнѣйшему развитію. Съ другой стороны, очень мало вѣроятно, чтобы такой математикъ, какъ Ферма, въ своемъ доказательствѣ допустилъ ошибку, хотя такого рода случаи и бывали у ве-

*) Область цѣлыхъ чиселъ ε есть совокупность всѣхъ чиселъ вида

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots\ + a_{n-1}\,\varepsilon^{n-1},$$

гдѣ ε есть указанный выше корень n-ой степени изъ 1.

личайшихъ математиковъ. Нужно думать поэтому, что онъ нашелъ доказательство благодаря какой-либо особенно удачной, простой идеѣ. Но такъ какъ мы не имѣемъ никакихъ указаній, которыя позволили бы до этой идеи доискаться, то полнаго доказательства теоремы Ферма можно, повидимому, ожидать только путемъ систематическаго развитія работъ Куммера.

Эти вопросы въ настоящее время особенно привлекаютъ вниманіе потому, что Гёттингенское Ученое Общество располагаетъ въ настоящее время преміей въ 100 000 марокъ за разрѣшеніе задачи Ферма. Это есть завѣщаніе скончавшагося около года тому назадъ математика Вольфскеля изъ Дармштадта, который, вѣроятно, всю жизнь занимался этимъ вопросомъ и оставилъ часть своего громаднаго состоянія счастливцу, которому удастся либо доказать это предложеніе во всей его общности, либо опровергнуть его однимъ противорѣчащимъ ему примѣромъ. Однако, разыскать такой примѣръ, конечно, не легко, такъ какъ для показателей, не превышающихъ ста, теорема уже доказана, и здѣсь приходится, такимъ образомъ, оперировать надъ чрезвычайно большими числами. Что долженъ думать о трудности получить эту премію математикъ, знакомый съ усиліями Куммера и его послѣдователей, это ясно изъ изложеннаго мною выше; но большая публика другого мнѣнія объ этомъ предметѣ. Въ концѣ лѣта этого года извѣстіе о преміи было распространено газетами (которыя, впрочемъ, не были къ тому уполномочены); съ этого времени у насъ накопился уже цѣлый складъ доказательствъ. Люди всѣхъ профессій — инженеры, народные учителя, священники, банкиры, дамы и т. д. — являются авторами этихъ работъ. Общее во всѣхъ этихъ работахъ лишь то, что ихъ авторы не имѣютъ ни малѣйшаго представленія о серьезномъ математическомъ значеніи проблемы, они не дѣлаютъ даже ни малѣйшей попытки освѣдомиться въ литературѣ вопроса и всегда стараются справиться съ задачей какой-либо необычайной идеей и, конечно, неизмѣнно попадаютъ въ просакъ. Не могу отказать себѣ въ томъ, чтобы привести особенно разительный примѣръ изъ этого вороха нелѣпостей. Человѣкъ, не знающій значенія знака $>$, вмѣсто

$$x^n + y^n = z^n \ (n > 2)$$

читаетъ:

$$x^n + y^n = z^n \ (n + 2)$$

и, конечно, уже при $n = 1$ находитъ рѣшеніе уравненія

$$x + y = z \, . \, 3.$$

Это открытіе онъ шлетъ Гётингенскому Ученому Обществу и считаетъ математиковъ такими глупцами, которые способны за это дать такую премію.

(Продолженіе слѣдуетъ).

О признакахъ дѣлимости.

А. Филиппова.

1. Весьма простыми разсужденіями можно установить два общихъ пріема, частными случаями которыхъ являются признаки дѣлимости.

Пусть a и b — числа натуральнаго ряда, b — число простое относительно 10. Пусть d есть наименьшій вычетъ числа 10^k по модулю b. Число k всегда можно выбрать такъ, чтобы абсолютная величина d была меньше 10^k. Разобьемъ a на группы, по k цифръ въ каждой, начиная справа налѣво:

$$a = A_0 + A_1 . 10^k + A_2 . (10^k)^2 + A_3 . (10^k)^3 + \ldots + A_m . (10^k)^m. \quad (1)$$

Такъ какъ

$$10^k \equiv d \pmod b, \quad (2)$$

то

$$a \equiv A_0 + A_1 . d + A_2 . d^2 + A_3 . d^3 + \ldots + A_m . d^m \pmod b. \quad (3)$$

Въ силу принятыхъ условій число

$$D = A_0 + A_1 . d + A_2 . d^2 + A_3 . d^3 + \ldots + A_m . d^m \quad (4)$$

по абсолютной величинѣ меньше числа a.

Вычисленіе числа D удобнѣе всего производить съ конца: умножить группу A_m на d и произведеніе сложить съ A_{m-1}; полученную сумму умножить на d и сложить съ A_{m-2} и т. д.

Повторяя этотъ пріемъ достаточное число разъ, мы, наконецъ, получимъ такой вычетъ числа a, который будетъ содержать не болѣе k цифръ. Очевидно, если a дѣлится безъ остатка на b, то и D дѣлится безъ остатка на b, и обратно.

Плодотворность этого пріема зависитъ отъ удачнаго выбора числа k. Выводъ признаковъ дѣлимости изъ этихъ соображеній общеизвѣстенъ (см., напримѣръ, E. Lucas, „Theorie des nombres", I, 1891, p.p. 49 — 51). Детали этого пріема впервые разработалъ Fontès („Sur la division arithmétique". Ass. fr. avanc. sc. 21, 1892², 182).

2. Методъ этотъ можно дополнить. Пусть

$$c . 10^k \equiv 1 \pmod b. \quad (5)$$

Умножая обѣ части равенства (1) на c^m, получимъ:

$$a . c^m \equiv A_0 . c^m + A_1 . c^{m-1} + A_2 . c^{m-2} + \ldots + A_{m-1} c + A_m \pmod b. \quad (6)$$

Число

$$C = A_0 \,.\, c^m + A_1 \,.\, c^{m-1} + A_2 \,.\, c^{m-2} + \ldots + A_{m-1} c + A^m \qquad (7)$$

можно вычислить тѣмъ же пріемомъ, что и число D.

Если число c взаимно-простое съ b, то a дѣлится безъ остатка на b, если C дѣлится безъ остатка на b, и обратно. Всегда можно выбрать число k такъ, чтобы абсолютная величина c была меньше 10^k. Такъ, полагая $k = 1$, имѣемъ: $c = \dfrac{b \,.\, \beta + 1}{10}$, гдѣ β — послѣдняя цифра періода дроби $\dfrac{1}{b}$. Такимъ образомъ, повторяя этотъ процессъ достаточное число разъ, мы получимъ число, содержащее не болѣе k цифръ.

3. Изъ указанныхъ разсужденій нетрудно вывести признаки дѣлимости на числа вида $10^n + 1$ и $10^n - 1$. Разсматривая числа c и d, какъ функціи k, будемъ обозначать ихъ черезъ c_k и d_k.

Если $b = 10^n - 1$, то $c_n = d_n = 1$. Отсюда слѣдуетъ признакъ дѣлимости на число вида $10^n - 1$:

„Разбиваемъ испытуемое число на группы, по n цифръ въ каждой, начиная справа налѣво. Если сумма этихъ группъ дѣлится на $10^n - 1$, то и все число раздѣлится на $10^n - 1$, и обратно. Пріемомъ этимъ испытуемое число можно привести къ числу, содержащему не болѣе n цифръ“.

Такимъ образомъ, число 15 714 270 дѣлится безъ остатка на 999, такъ какъ

$$270 + 714 + 15 = 999.$$

Если $b = 10^n + 1$, то $d_n = c_n = -1$. Отсюда слѣдуетъ признакъ дѣлимости на число вида $10^n + 1$:

„Разбиваемъ испытуемое число на группы, по n цифръ въ каждой, начиная справа налѣво. Складываемъ всѣ группы нечетнаго порядка между собой; складываемъ всѣ группы четнаго порядка между собой. Изъ большей суммы вычитаемъ меньшую. Если полученная разность дѣлится на $10^n + 1$, то испытуемое число дѣлится на $10^n + 1$, и обратно.

Такимъ образомъ, число 838 805 дѣлится на 101, такъ какъ

$$83 + 5 - 88 = 0.$$

4. Если $b = 7$ и испытывается трехзначное число, то отдѣляемъ сотни отъ единицъ и десятковъ. Умножаемъ число сотенъ на 5; находимъ разность между этимъ произведеніемъ и оставшимся числомъ. Если полученная разность дѣлится на 7, то и все число дѣлится на 7, и обратно. Это правило вытекаетъ изъ того, что $d_2 = -5$. Такимъ образомъ, 896 дѣлится на 7, такъ какъ $96 - 40 = 56$.

Если испытуемое число содержитъ болѣе трехъ цифръ, то приводимъ его къ числу, содержащему не болѣе трехъ цифръ, ибо $d_3 = -1$:

„Разбиваемъ число на группы по три цифры въ каждой, начиная справа налѣво. Складываемъ всѣ группы нечетнаго порядка между собой; складываемъ всѣ группы четнаго порядка между собой. Изъ большей суммы вычитаемъ меньшую, и, если полученная разность дѣлится на 7, то и все число дѣлится на 7, и обратно“.

Такимъ образомъ, число 92 323 дѣлится на 7, такъ какъ

$$323 - 92 = 231 \quad \text{и} \quad 31 - 2 . 5 = 21.$$

5. Если $b = 13$, то $c_1 = 4$, $d_1 = -3$, $d_3 = -1$. Поэтому испытуемое число приводимъ къ трехзначному, пользуясь пріемомъ, даннымъ для 7.

Трехзначное число

$$100a_3 + 10a_2 + a_1$$

приводимъ либо къ числу

$$a_1 - 3a_2 + 9a_3,$$

либо къ числу

$$a_3 + 4 . a_2 + 16a_1 \text{ *)}$$

Такимъ образомъ, число 31 746 013 дѣлится на 13, такъ какъ

$$746 - (31 + 13) = 702; \quad 2 + 9 . 7 = 65.$$

6. Если $b = 17$, то $d_2 = -2$. Поэтому разбиваемъ испытуемое число на группы, по двѣ цифры въ каждой. Умножаемъ группы нечетнаго порядка на четныя степени двухъ (1, 4, 16, . . .); группы четнаго порядка умножаемъ на нечетныя степени двухъ (2, 8, 32, . . .). Изъ общей суммы вычитаемъ меньшую, и, если полученная разность дѣлится на 17, то и все число раздѣлится на 17, и обратно.

Такимъ образомъ, число 29 461 051 дѣлится на 17, такъ какъ:

$$51 + 4 . 46 = 235; \quad 2 . 10 + 29 . 8 = 252; \quad 252 - 235 = 17.$$

7. Если $b = 19$, то $c_1 = 2$. Отсюда слѣдуетъ, что послѣдовательныя единицы разрядовъ, начиная съ высшихъ, умножаемъ на послѣдовательныя степени 2.

Такимъ образомъ, 2 090 418 дѣлится на 19, ибо

$$2 + 0 . 2 + 9 . 4 + 0 . 8 + 4 . 16 + 1 . 32 + 8 . 64 = 646;$$

$$6 + 4 . 2 + 6 . 4 = 38.$$

---

*) См. задачу № 206 въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, № 496, стр 94.

Удобнѣе вычисленія расположить такъ:

$$\begin{array}{r}
2\,090\,41\,8 \\
+16 \\
\hline
209\,057 \\
+14 \\
\hline
20\,919 \\
+18 \\
\hline
2109 \\
+18 \\
\hline
228 \\
+16 \\
\hline
38
\end{array}$$

8. Признакъ дѣлимости на 23 можно вывести изъ того, что $c_3 = -2$.

Для 29 имѣемъ: $c_1 = 3$.

Для 31 имѣемъ: $c_1 = -3$.

Для 37 имѣемъ: $d_3 = -1$. Такимъ образомъ, испытуемое число приводимъ къ трехзначному пріемомъ, даннымъ для 7.

Для 39 имѣемъ: $c_1 = 4$.

Для 49 имѣемъ: $c_1 = 5$ и т. д.

Предполагаемъ, что указанные примѣры вполнѣ разъясняютъ методъ опредѣленія признаковъ дѣлимости; поэтому предоставляемъ читателю самому опредѣлить наиболѣе плодотворные признаки дѣлимости для всѣхъ остальныхъ простыхъ чисдлъ, меньшихъ 100.

Отчеты о засѣданіяхъ Московскаго Математическаго Кружка.

I.

Въ засѣданіи Кружка, бывшемъ 20 *ноября* 1909 г., былъ прочитанъ докладъ *І. И. Чистякова* и *М. Ѳ. Берга* „*О постановкѣ преподаванія математики въ реальныхъ училищахъ*“. Докладъ составленъ примѣнительно къ программѣ Международной Коммиссіи по реформѣ преподаванія математики и является попыткой освѣтить современное состояніе математическаго образованія въ реальныхъ училищахъ Мин. Нар. Просвѣщенія. Первая часть доклада была прочитана *І. И. Чистяковымъ*. Въ ней референтъ вкратцѣ изложилъ исторію реальнаго образованія въ Россіи и въ частности эволюцію реальныхъ училищъ. Изъ прочитанной части доклада явствуетъ, что взгляды на назначеніе этихъ учебныхъ заведеній, учрежденныхъ въ 1872 году, не разъ измѣнялись, вслѣдствіе чего и программы ихъ подвергались частымъ измѣненіямъ. Первоначально главною цѣлью реальныхъ училищъ было „образованіе, приспособленное къ практическимъ потребностямъ и къ пріобрѣтенію техническихъ познаній"; училища должны были собственно подготовлять техниковъ по механической и химической спеціальностямъ. Къ этой задачѣ и приспособлены были въ реальныхъ училищахъ программы математики и родственныхъ предметовъ. Но опытъ показалъ недостижимость подобной цѣли, и съ 1888 г. реальныя училища получили новый уставъ и новыя программы, приближающія эти заведенія къ типу общеобразовательныхъ. Съ тѣхъ поръ программы реальныхъ училищъ, въ частности и математическія, многократно измѣнялись и эволюція ихъ не можетъ считаться закончившейся и въ настоящее время, хотя учебные планы ихъ сейчасъ могутъ быть признаны довольно современными; такъ, въ нихъ впервые сдѣлана попытка ввести въ программу основы анализа безконечно-малыхъ и аналитической геометріи.

Вторая часть доклада была прочитана М. Θ. Бергомъ. Референтъ остановился на разсмотрѣніи принятой въ настоящее время программы математики въ реальныхъ училищахъ, а также близкихъ къ ней предметовъ. При этомъ М. Θ. Бергъ сдѣлалъ попытку охарактеризировать степень успѣшности усвоенія отдѣльныхъ статей изучаемаго учащимися матеріала.

За позднимъ временемъ была подвергнута обсужденію только первая часть доклада, обсужденіе же второй части доклада отложено до слѣдующаго засѣданія.

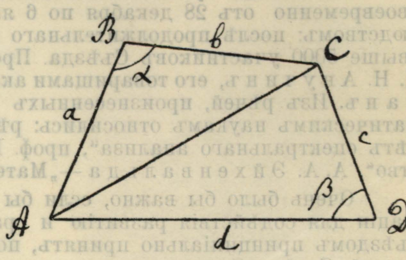
II.

11-го декабря 1909 г. прив.-доц. Московскаго университета А. А. Дмитровскій сдѣлалъ слѣдующій докладъ.

Теорема. Изъ всѣхъ четырехугольниковъ съ однѣми и тѣми же сторонами четырехугольникъ, около котораго можно описать окружность, имѣетъ наибольшую площадь.

Доказательство. Данъ четырехугольникъ $ABCD$, стороны котораго

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c \text{ и } DA = d.$$



Проведя діагональ AC и обозначая $\angle ABC$ черезъ α, $\angle ADC$ черезъ β и площадь четырехугольника черезъ S, будемъ имѣть изъ $\triangle\triangle\, ABC$ и ADC:

$$2S = ab \sin \alpha + cd \sin \beta, \qquad (1)$$

откуда

$$4S^2 = a^2b^2 \sin^2 \alpha + 2abcd \sin \alpha \sin \beta + c^2d^2 \sin^2 \beta =$$

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \sin \alpha \sin \beta - (a^2b^2 \cos^2 \alpha + c^2d^2 \cos^2 \beta). \qquad (2)$$

Выражая квадратъ діагонали AC изъ $\triangle ABC$ и изъ $\triangle ADC$, находимъ:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta,$$

откуда

$$ab \cos \alpha - cd \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}, \qquad (3)$$

или, по возвышеніи въ квадратъ,

$$a^2b^2 \cos^2 \alpha - 2abcd \cos \alpha \cos \beta + c^2 d^2 \cos^2 \beta = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

Если изъ уравненія (4) опредѣлимъ $a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta$ и полученное выраженіе вставимъ въ уравненіе (2), то оно приведется къ слѣдующему виду:

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 +$$

$$+ 2abcd\sin\alpha\sin\beta - 2abcd\cos\alpha\cos\beta,$$

или

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}\right)^2 - 2abcd\cos(\alpha + \beta). \qquad (5)$$

Первые три члена второй части содержатъ лишь стороны четырехугольника и потому для всѣхъ четырехугольниковъ съ однѣми и тѣми же сторонами они одинаковы, послѣдній же членъ для различныхъ четырехугольниковъ неодинаковъ. Очевидно, что $4S^2$ (а, стало-быть, и S) получитъ наибольшую величину, когда $\cos(\alpha + \beta)$ будетъ имѣть наименьшее (въ алгебраическомъ смыслѣ) значеніе, т. е. когда

$$\cos(\alpha + \beta) = -1.$$

Но въ этомъ случаѣ $\alpha + \beta = 180^0$, и около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

XII Съѣздъ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей. Съѣздъ состоялся своевременно отъ 28 декабря по 6 января и отличался необычайнымъ многолюдствомъ: послѣ продолжительнаго перерыва въ настоящее время собралось свыше 5000 участниковъ Съѣзда. Предсѣдателемъ Съѣзда былъ избранъ проф. Д. Н. Анучинъ, его товарищами акад. А. П. Павловъ и проф. И. И. Боргманъ. Изъ рѣчей, произнесенныхъ на общихъ собраніяхъ, къ физико-математическимъ наукамъ относились: рѣчь проф. Н. Г. Егорова—„Пятьдесятъ лѣтъ спектральнаго анализа", проф. И. И. Боргмана—„Свѣтъ и электричество", А. А. Эйхенвальда—„Матерія и энергія".

Очень было бы важно, если бы вопросъ объ учрежденіи „Русской Ассоціаціи для содѣйствія развитію и распространенію наукъ", уставъ которой Съѣздомъ принципіально принятъ, получилъ уже свое завершеніе. Во всякомъ случаѣ Совѣту Съѣзда на этотъ разъ было поручено окончательно разработать проектъ устава и представить его на утвержденіе. Если уставъ будетъ утвержденъ, то Совѣтъ XII Съѣзда уполномочивается принять на себя обязанности Совѣта Ассоціаціи впредь до выборовъ новаго Совѣта, которые будетъ имѣть мѣсто на ближайшемъ Съѣздѣ Русскихъ Естествоиспытателей и Врачей.

Подробные рефераты о занятіяхъ секцій математики и физики будутъ помѣщены въ ближайшихъ номерахъ „Вѣстника".

О великой теоремѣ Ферма. Гёттингенское Ученое Общество выдало премію въ 1000 марокъ изъ процентовъ капитала Вольфскеля доктору А. Виферіху (A. Wieferich) въ Мюнстерѣ за опубликованную имъ недавно въ журналѣ „Journal für die reine und angewandte Mathematik" статью объ уравненіи Ферма $x^n + y^n = z^n$. Виферіху удалось на основаніи классическихъ работъ Куммера доказать, что уравненіе Ферма при простомъ p (только этотъ случай и представляетъ интересъ, такъ какъ остальные къ нему приводятся) не можетъ „удовлетворяться цѣлыми числами, не дѣлящимися на p, если $2^p - 2$ не дѣлится на p^2. Этотъ поразительно простой результатъ представляетъ собой первый шагъ впередъ въ этомъ вопросѣ послѣ работъ Куммера.

Мы считаемъ нужнымъ еще здѣсь отмѣтить, что недавно появилась брошюра проф. Ф. Линдемана (F. Lindemann) „О такъ называемой послѣдней теоремѣ Ферма“ *), въ которой онъ предлагаетъ два доказательства теоремы Ферма. Онъ исходитъ собственно изъ уравненій, къ которымъ пришелъ еще Абель**), и доказываетъ, что числами того вида, которыя указаны у Абеля, удовлетворить уравненію Ферма нельзя. Доказательство разбито на цѣлый рядъ мелкихъ случаевъ; мы не беремся высказать о немъ сужденія. Но мы считаемъ нужнымъ замѣтить, что это тотъ самый Ф. Линдеманъ, который первый доказалъ трансцендентность числа π. Мы во всякомъ случаѣ имѣемъ здѣсь дѣло съ чрезвычайно серьезнымъ ученымъ Коммиссія Вольфскеля по поводу этой брошюры не высказалась. Значитъ ли это, что въ доказательствѣ обнаружена ошибка или еще не принято рѣшенія, сказать трудно.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей приватъ-доцента Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе

№ 234 (5 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$(x^2+y^2)(25+z^2)=793,$$

$$yz-4x=10,$$

$$x+5y+xz=29.$$

Е. Рѣзницкій (Одесса).

№ 235 (5 сер.). Построить треугольникъ ABC по сторонѣ $BC=a$, радіусу r_a круга, внѣвписаннаго относительно этой стороны, и по радіусу r круга вписаннаго.

П. Богомоловъ (Шацкъ).

---

*) F. Lindemann, „Ueber den sogenannten letzten Fermat'schen Satz“

**) См. статью Турчанинова: „Къ великой теоремѣ Ферма“. „Вѣстникъ“ № 415.

№ 236 (5 сер.). Доказать справедлпвость тожества

$$\frac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{r_a r_b r_c} = \frac{4Rr}{p^2},$$

дѣ r, R, r_a, r_b, r_c, p суть соотвѣтственно радіусы вписаннаго, описаннаго и внѣвписанныхъ круговъ и полупериметра нѣкотораго треугольника.

П. Безчеревныхъ (Козловъ).

№ 237 (5 сер). Дано, что $\sqrt{N}$ разлагается въ безконечную непрерывную періодическую дробь вида:

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cdots}}}},$$

при чемъ N, a, x и y суть положительныя раціональныя числа.

Требуется выразить N въ функціи x и y.

Н. Агрономовъ (Москва).

№ 238 (5 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$5x^4 - 2x^2y + 10y^2 = 82.$$

Н. С. (Одесса).

№ 239 (5 сер.). Опредѣлить A и B такъ, чтобы многочленъ

$$Ax^4 + Bx^3 + 1$$

дѣлился на $(x-1)^2$.

(Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 160 (5 сер.). *Доказать тожество*

$$\sqrt[4]{19 - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{34 - 23\sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1.$$

Для доказательства справедливости этой формулы достаточно, возвысивъ правую часть въ четвертую степень, показать, что результатъ возвышенія равенъ выраженію, стоящему подъ знакомъ радикала четвертой степени въ лѣвой части. Возвышая правую часть въ квадратъ, имѣемъ:

$$\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1\right)^2 = 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 = \left(3 - \sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Новое возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$(\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)^4=(3-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})+4(3-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}=$$

$$=9+2-6\sqrt{2}+8-4\sqrt{2}+4\sqrt{(3-\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2})}=$$

$$=19-10\sqrt{2}+4\sqrt{(11-6\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=$$

$$=19-10\sqrt{2}+4\sqrt{22+12-11\sqrt{2}-12\sqrt{2}}=$$

$$=19-10\sqrt{2}+4\sqrt{34-23\sqrt{2}},$$

при чемъ результатъ тожественно равенъ подкоренному выраженію лѣвой части, что доказываетъ справедливость разсматриваемаго тожества.

С. Коганъ (Винница); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Д. Червенаковъ* (Тифлисъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *Н. Казариновъ* (Пинега); *Б. Двойринъ* (Одесса); *Г. Оппоковъ* (Вильна).

№ 163 (5 сер.). *Въ окружности проведены радіусы* OM *и* ON. *Провести хорду* XY *такъ, чтобы она окружностью и этими радіусами раздѣлилась на три равныя части.*

Пусть хорда XY встрѣчаетъ радіусы OM и ON соотвѣтственно въ точкахъ m и n, такъ что $Xm=mn=nY$. Опуская изъ O перпендикуляръ OP на хорду MN, имѣемъ:

$$XP=PY,\quad XP-Xm=PY-nY,\quad mP=Pn,$$

т. е. въ треугольникѣ mOn прямая OP есть одновременно и высота и медіана; слѣдовательно, треугольникъ mOn—равнобедренный, такъ что OP есть биссектриса угла MON, а потому искомая хорда XY должна быть перпендикулярна къ биссектрисѣ угла MON. Отсюда вытекаетъ построеніе по методу подобія: проводимъ биссектрису угла MON, возставляемъ изъ произвольной точки P' этой биссектрисы къ ней перпендикуляръ до встрѣчи съ прямыми OM и ON въ точкахъ m' и n' и на продолженіяхъ отрѣзка $m'n'$ по обѣимъ его сторонамъ откладываемъ отрѣзки $X'm'=m'n'=n'Y'$; точки пересѣченія X и Y полупрямыхъ OX' и OY' съ окружностью даютъ искомую хорду. Анализъ и синтезъ построенія выводится обычнымъ способомъ изъ подобія треугольниковъ

В. Богомоловъ (Шацкъ); *С. Лѣсюкъ* (Вилькомиръ). *П. Безчеревныхъ* (Козловъ).

№ 164 (5 сер.). *Пусть проекціи вершины* A *и центра тяжести* G *треугольника* ABC *на сторону* BC *суть* D *и* E. *Доказать, что*

$$\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=3(\overline{BE}^2-CE^2).$$

Пусть M — середина BC. Центръ тяжести G лежитъ, какъ извѣстно, на отрѣзкѣ AM, при чемъ $AM=3GM$, а потому изъ равенства $\frac{MD}{ME}=\frac{AM}{GM}$ находимъ, что

$$MD=3ME. \tag{1}$$

Такъ какъ

$$BD = BM + MD,\quad DC = MC - MD,$$

то [см. (1)]

$$BD - DC = BM + MD - MC + MD = 2MD,$$

$$\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = (BD + DC)(BD - DC) = BC(BD - DC) = 2BC \,.\, MD =$$
$$= 6BC \,.\, ME. \qquad (2)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\overline{BE}^2 - \overline{CE}^2 = (BE + CE)(BE - CE) = BC[(BM + ME) - (BM - ME)] = 2BC \,.\, ME,$$

откуда слѣдуетъ [см. (2)], что

$$\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 = 3(\overline{BE}^2 - \overline{CE}^2).$$

С. Слугиновъ (Казань); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса).

№ 169 (5 сер.). *Доказать теорему: во всякомъ тетраэдрѣ сумма квадратовъ его реберъ равна учетверенной суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ другъ другу реберъ.*

Пусть $SABC$ — нѣкоторый тетраэдръ, пары противоположныхъ реберъ котораго мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$$SA = a,\ BC = \alpha;\quad SB = b,\ AC = \beta;\quad SC = c,\ AB = \gamma.$$

Отрѣзки, соединяющіе средины паръ реберъ a и α, b и β, c и γ, назовемъ соотвѣтственно черезъ x, y, z. Пусть M и m суть соотвѣтственно средины реберъ SA и BC. Тогда, пользуясь извѣстнымъ выраженіемъ квадрата медіаны по тремъ сторонамъ треугольника, имѣемъ:

$$\overline{Mm}^2 = x^2 = \frac{2(\overline{BM}^2 + \overline{MC}^2) - \alpha^2}{4}, \qquad (1)$$

$$\overline{BM}^2 = \frac{2(b^2 + \gamma^2) - a^2}{4}, \qquad (2)$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{2(c^2 + \beta^2) - a^2}{4}. \qquad (3)$$

Сложивъ равенства (2) и (3) съ множителемъ 2, находимъ:

$$2(\overline{BM}^2 + \overline{MC}^2) = b^2 + c^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2,$$

или, называя черезъ s^2 сумму квадратовъ всѣхъ шести реберъ тетраэдра,

$$2(\overline{BM}^2 + \overline{MC}^2) = s^2 - 2a^2 - \alpha^2.$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто $2(\overline{BM}^2 + \overline{MC}^2)$ въ равенство (1), получимъ:

$$x^2 = \frac{s^2 - 2(a^2 + \alpha^2)}{4},$$

откуда

$$s^2 - 2(a^2 + \alpha^2) = 4x^2;$$

точно такъ же находимъ:

$$s^2-2(b^2+\beta^2)=4y^2, \tag{5}$$

$$s^2-2(c^2+\gamma^2)=4z^2. \tag{6}$$

Складывая равенства (4), (5) и (6), находимъ:

$$3s^2-2(a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2)=3s^2-2s^2=s^2=$$

$$=a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2+c^2+\gamma^2=4(x^2+y^2+z^2).$$

В. Моргулевъ (Одесса); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Ц. Утка* (Варшава); *Л. Богдановичъ* (Ярославль).

№ 170 (5 сер.) *Рѣшить уравненіе*

$$\frac{\sqrt[4]{65+x}}{65}+\frac{\sqrt[4]{65+x}}{x}=\frac{243\sqrt[4]{x}}{2080}.$$

Умноживъ обѣ части на $65x$, представляемъ данное уравненіе послѣдовательно въ видѣ:

$$(65+x)\sqrt[4]{65+x}=\frac{x\sqrt[4]{x}\,.\,243\,.\,65}{2080}=x\sqrt[4]{x}\cdot\frac{243}{32}=\left(\frac{3}{2}\sqrt[4]{x}\right)^5,$$

$$\left(\sqrt[4]{65+x}\right)^5=\left(\frac{3}{2}\sqrt[4]{x}\right)^5,$$

откуда

$$\sqrt[4]{65+x}=\frac{3}{2}\,a\,\sqrt[4]{x}, \tag{1}$$

гдѣ a — одно изъ пяти значеній корня пятой степени изъ единицы. Возвысивъ обѣ части уравненія (1) въ четвертую степень, имѣемъ:

$$65+x=\frac{81}{16}a^4x,$$

откуда

$$x=\frac{65\,.\,16}{81a^4-16}=\frac{1040}{81a^4-16}.$$

Полагая $a=1$, находимъ дѣйствительное значеніе x, а именно:

$$x=\frac{65\,.\,16}{81-16}=16.$$

Б. Щиголевъ (Варшава); *Д. Червенаковъ* (Тифлисъ); *П. Безчеревныхъ* (Козловъ); *Н. Морозовъ* (Царское Село); *Б. Двойринъ* (Одесса); *В. Богомоловъ* (Шацкъ); *Н. Кольскій* (Одесса); *С. Лѣсюкъ* (Вилькомиръ); *Ц. Утка* (Варшава); *И. Коровицкій* (Аккерманъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *С. Слугиновъ* (Казань).

№ 176 (5 сер.) *Доказать что*

$$\frac{a^2}{r_a - r} + \frac{b^2}{r_b - r} + \frac{c^2}{r_c - r} = 2\,(r_a + r_b + r_c),$$

гдѣ a, b, c — *стороны,* r, r_a, r_b, r_c — *радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ нѣкотораго треугольника.*

Съ помощью извѣстныхъ формулъ:

$$r_a = \frac{S}{p - a}, \quad r = \frac{S}{p},$$

гдѣ S — площадь и p — полупериметръ треугольника, находимъ:

$$r_a - r = \frac{S\,[p - (p - a)]}{p\,(p - a)} = \frac{Sa}{p(p - a)}, \qquad \frac{a^2}{r_a - r} = \frac{a^2 p\,(p - a)}{Sa} = \frac{pa\,(p - a)}{S},$$

и точно такъ же:

$$\frac{b^2}{r_a - r} = \frac{pb\,(p - b)}{S}, \qquad \frac{c^2}{r_c - r} = \frac{pc\,(p - c)}{S},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a^2}{r_a - r} + \frac{b^2}{r_b - r} + \frac{c^2}{r_c - r} = \frac{p}{S}\,(pa + pb + pc - a^2 - b^2 - c^2) = \\
&= \frac{p}{S}\,(p \cdot 2p - a^2 - b^2 - c^2) = \frac{p}{2S}\,(4p^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2) = \\
&= \frac{p}{2S}\,[(a + b + c)^2 - (2a^2 - 2b^2 - 2c^2) = \frac{p}{2S}\,(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Далѣе имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,(r_a + r_b + r_c) = 2S\left(\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c}\right) = \\
&= \frac{2Sp\,[(p - b)(p - c) + (p - c)(p - a) + (p - a)(p - b)]}{p\,(p - a)(p - b)(p - c)} = \\
&= \frac{2Sp\,[3p^2 - p\,(2a + 2b + 2c) + ab + bc + ca]}{S^2} = \frac{p(6p^2 - 8p^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{S} = \\
&= \frac{p\,(-2p^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{S} = \frac{p\,(-4p^2 + 4ab + 4bc + 4ca)}{2S} = \\
&= \frac{p\,[-(a + b + c)^2 + 4ab + 4bc + 4ca]}{2S} = \frac{p(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2)}{2S}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Изъ формулъ (1) и (2) находимъ:

$$\frac{a^2}{r_a - r} + \frac{b^2}{r_b - r} + \frac{c^2}{r_c - r} = 2\,(r_a + r_b + r_c).$$

П. Безчеревныхъ (Козловъ); *Б. Двойринъ* (Одесса); *В. Моргулевъ* (Одесса); *В Богомоловъ* (Шацкъ); *Л. Богдановичъ* (Ярославль); *С. Слугиновъ* (Казань).

Отъ редактора отдѣла задачъ.

Редакція не имѣла возможности помѣстить въ настоящемъ семестрѣ рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ XLI семестрѣ. Вслѣдствіе этого въ первыхъ трехъ номерахъ XLIII семестра будутъ еще помѣщены рѣшенія задачъ XLI семестра. Кромѣ того, въ 3-мъ номерѣ XLIII семестра будетъ помѣщенъ подробный отчетъ о рѣшеніи всѣхъ задачъ XLI семестра.

Е. Буницкій.

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

Дм. Ройтманъ, преподаватель математики и астрономіи въ СПБ. Учительскомъ Институтѣ и Женскомъ Педагогическомъ Институтѣ, ассистентъ при каѳедрѣ астрономіи СПБ. Университета. *Общедоступные очерки изъ области астрономіи.* Выпускъ I. Двѣ лекціи о формѣ и движеніи земли. Выпускъ II. Луна, солнце, планеты, кометы и падающія звѣзды. Звѣздные міры. Происхожденіе небесныхъ свѣтилъ.

Н. П. Кильдюшевскій. *Сборникъ упражненій по аналитичвской геометріи на плоскости съ приложеніемъ формулъ и статьи „Коническія сѣченія".* Примѣнительно къ программѣ реальныхъ училищъ. Стр. 91. Ц. 65 коп.

Арманго (младшій), инженеръ. *Задача авіаціи и ея рѣшеніе при помощи аэроплана.* Перевелъ съ 3-го французскаго изданія инженеръ Н. Авдулинъ. Стр. 148. Ц. 50 к.

А. П. Охитовичъ. *Геометрія круга* (циклометрія). Рѣшеніе проблемы о геометрическомъ раздѣленіи дуги и угла на части пропорціональныя и равныя. Казань, 1908. Стр. 114. Ц. 1 р.

Ежегодникъ Русскаго Астрономическаго Общества на 1910 годъ. Стр. 91. Ц. 50 коп.

А. І. Филипповъ. *О дѣленіи.* Стр. 31. Ц. 30 коп.

Л. Раузеръ. *Воздухоплаваніе, его исторія успѣхи и будущее.* 40 художественныхъ снимковъ и 12 чертежей. Изданіе книжнаго магазина г. Яснаго. СПБ. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

Г. Григорьевъ, П. Знаменскій, И. Кавунъ, преподаватели Тенишевскаго училища *Практическія занятія по физикѣ для учащихся въ средней школѣ.* 100 рис. и 5 таблицъ. Изданіе товарищества „Знаніе". СПБ. 1910. Ц. 1 р.

I. Reinke, Dr, Professor an der Universität Kiel. *Grundzüge der Biologie ür Unterrichtsanstalten und zur Selbstbelehrung.* 1909. Стр. 178.

Walther Lietzmann, Dr., Oberlherer in der Oberrealschule in Barmen. Mit einem Einführungswort von F. Klein. *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der Norddeutschen höheren Schulen.* Стр. 102.

Ferdinand Lindemann, Professor an der Universität München. *Über den sogenannten letzten Fermat'schen Satz, Leipzig,* 1909. Стр 82.

Fr. Meigen, Dr. *Repetitorium der Physik.* Freiburg und Leipzig, 1910. Стр. 202

ПОПРАВКИ.

1. Въ статьѣ „О построеніи нитяныхъ моделей многогранниковъ Пуансо" *Ал. Долгова*, напечатанной въ № 497 „Вѣстника", слѣдуетъ исправить слѣдующія опечатки:

	Напечатано:	**Должно быть:**
Стр. 98, строка 2 сверху	идущихъ	слѣдующихъ по длинѣ
„ 101, „ 6 снизу	съ шестью другими	съ пятью другими
Въ подзаголовкѣ	*В. Долгова*	*Ал. Долгова*

2. Въ „Задачахъ", помѣщенныхъ въ № 498 „Вѣстника" на стр. 147, слѣдуетъ исправить слѣдующія опечатки:

	Напечатано:	**Должно быть:**
Задача № 216, строка 3	$A_1\ B_2$	$A_1\ B_1$
„ „ „ „ 4	$AC\ \ A_1C_1$	AC и A_1C_1
„ „ „ „ „	лежать	лежатъ
„ „ 219, „ 2	ранняго	даннаго
„ „ „ „ „	утреннимъ	утроеннымъ

Редакторъ приватъ-доцентъ **В. Ф. Каганъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Типографія Акц. Южно-Русскаго Об-ва Печатнаго Дѣла. Пушкинская, № 18.

Обложка
ищется

Обложка
пщется